МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 117–128.

УДК 517.977.5

© ***М. И. Ронжина, Л. А. Манита***

# СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ СПИРАЛЕЙ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С ОСОБОЙ ЭКСТРЕМАЛЬЮ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Исследуется структурная устойчивость логарифмических спиралей в обобщении задачи Фуллера на случай управления из круга. Рассматривается малое возмущение относительно действия группы симметрий невозмущенной задачи. Для возмущенной задачи показано, что в окрестности особой экстремали второго порядка сохраняются экстремали в виде логарифмических спиралей. Построенные экстремали приходят на особую экстремаль за конечное время, при этом управления совершают бесконечное число оборотов вдоль окружности.

*Ключевые слова*: двумерное управление из круга, особая экстремаль, раздутие особенности, логарифмическая спираль, гамильтонова система, принцип максимума Понтрягина.

DOI: 10.35634/vm250107

## Введение

Интерес к задачам оптимального управления с особыми экстремалями второго порядка возник в связи с задачей Лоудена [1]. Это задача о переходе с орбиты на орбиту космического корабля в гравитационном поле Земли. Корабль управляется тягой — скалярной величиной. В задаче были обнаружены режимы с промежуточной тягой, которые являются особыми режимами второго порядка [2]. Позже особые режимы второго порядка были найдены и в других прикладных задачах со скалярным управлением: в задачах управления космическими аппаратами [3,4], в механике [5–7], в задачах математической экономики [8], биомедицины [9] и др. Для задач оптимального управления, аффинных по *скалярному* ограниченному управлению, обладающих особыми режимами порядка 2, важную роль в построении синтеза в окрестности особого режима играет задача Фуллера:

$$\int_0^\infty x^2(t)\,dt \to \inf, \quad \dot x = y,\ \dot y = u,\ |u| \leqslant 1, \quad x(0) = x^0,\ y(0) = y^0, \quad x, y, u \in \mathbb{R}.$$

В задаче Фуллера действует группа симметрий $g_\lambda(x, y) = (\lambda^2 x, \lambda y)$, которая позволяет найти явное решение. Известно (см., напр., [5]), что для любой начальной точки $(x^0, y^0)$ соответствующая оптимальная траектория является четтеринг-траекторией (см. рис. 1), а именно, приходит в начало координат (особое решение порядка 2) за конечное время, при этом оптимальное управление имеет счетное число переключений с 1 на $-1$ (и наоборот). В [10,11] доказано, что наличие четтеринг-экстремалей в окрестности особых режимов второго порядка является типичным явлением для задач, аффинных по скалярному управлению. Более того, было показано [5,11], что для достаточно широкого класса задач в окрестности особой экстремали второго порядка структура оптимального синтеза определяется решениями задачи Фуллера. А именно, было доказано, что при выполнении некоторых условий в окрестности особой экстремали второго порядка фазовое пространство расслаивается над многообразием особых траекторий на двумерные слои, заполненные оптимальными четтеринг-траекториями, аналогичными решениям задачи Фуллера.

Особые режимы второго порядка возникают и в задачах, аффинных по *двумерному* ограниченному управлению [5,12–19]. В этом случае структура оптимального синтеза в окрестности особого режима второго порядка существенно разнообразнее и не ограничивается

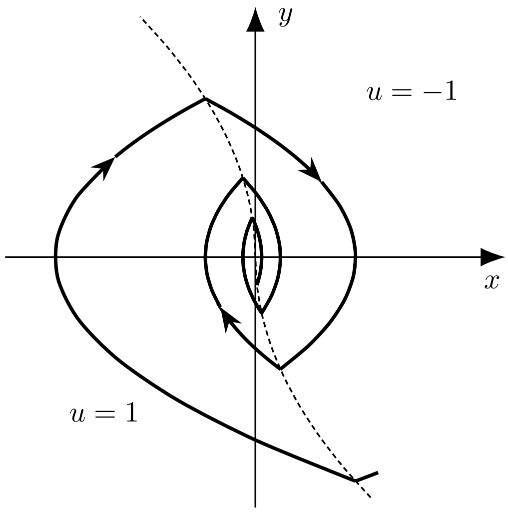


**Рис. 1.** Оптимальные четтеринг-траектории

только четтеринг-траекториями. В качестве примера приведем обобщение задачи Фуллера на случай двумерного управления

$$\int_0^{\infty} \langle x(t), x(t)\rangle\, dt, \quad \dot{x} = y,\ \dot{y} = u, \quad x(0) = x^0,\ y(0) = y^0, \quad x, y \in \mathbb{R}^2,\ u \in U \subset \mathbb{R}^2. \quad (0.1)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$, $U$ — ограниченное выпуклое множество, $0 \in \operatorname{int} U$. Так же как и в задаче Фуллера, в задаче (0.1) действует группа симметрий $g_\lambda$, которая позволяет найти явные решения. В случае когда в задаче (0.1) множество управлений $U$ является правильным треугольником, доказано, что в окрестности начала координат (особого решения второго порядка) оптимальный синтез содержит четтеринг-траектории [12] и траектории с хаотическим поведением на конечных промежутках времени [13]. Если $U$ в (0.1) является единичным кругом, в окрестности начала координат найдено [5,14] два семейства решений:

1) если $x^0$ и $y^0$ коллинеарны, то оптимальные решения (0.1) являются четтеринг-траекториями;

2) если угол между $x^0$ и $y^0$ равен $2 \operatorname{arctg} \alpha$, $\alpha^2 = 5$, и $\|y^0\|^2 = \frac{\sqrt{6}}{2} \|x^0\|$, то оптимальные решения (0.1) являются логарифмическими спиралями, которые приходят в начало координат за конечное время, при этом оптимальные управления совершают бесконечное число оборотов вдоль окружности.

Результаты, полученные для задач, аффинных по двумерному ограниченному управлению, дают основание предположить, что обобщение задачи Фуллера имеет для них значение, аналогичное роли классической задачи Фуллера в случае скалярного управления [13,15–17]. Например, для гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина, аффинной по управлению из треугольника, доказано, что в окрестности особой экстремали второго порядка имеются четтеринг-экстремали и экстремали с хаотическим поведением на конечных промежутках времени [13]. Для произвольной задачи большой размерности, аффинной по управлению из круга, в окрестности особой экстремали второго порядка были найдены экстремали в виде логарифмических спиралей [15]. Оптимальность логарифмических спиралей в случае размерности фазового пространства 4 была доказана [17] для линейных управляемых систем с квадратичным целевым функционалом и управлением из круга, то есть для задач, которые можно рассматривать как линейное возмущение задачи (0.1).

В настоящей работе рассматривается нелинейное возмущение задачи (0.1) с управлением из круга. Мы показываем, что при некоторых условиях на возмущение в окрестности особой экстремали второго порядка имеются экстремали в виде логарифмических спиралей, на которых управление за конечное время совершает бесконечное число оборотов вдоль окружности.

Изложение построено следующим образом. В параграфе 1 описывается семейство логарифмических спиралей для модельной задачи, то есть для обобщения задачи Фуллера с управлением из круга. В параграфе 2 рассматривается нелинейное возмущение модельной задачи и формулируется основной результат. В параграфе 3 приводится доказательство основного результата, именно, теоремы о существовании экстремалей в виде логарифмических спиралей в возмущенной задаче. В параграфе 4 приводится заключение.

## § 1. Модельная задача

Опишем семейство решений в виде логарифмических спиралей, которые возникают в обобщении задачи Фуллера с управлением из круга (*модельной* задаче)

$$\int_0^\infty \langle x(t), x(t)\rangle \, dt \to \inf, \quad \dot{x} = y, \ \dot{y} = u, \quad \|u\| \leqslant 1, \quad x, y, u \in \mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и евклидова норма в $\mathbb{R}^2$.

Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина задачи (1.1) имеет вид

$$\dot{\psi} = -\phi, \quad \dot{\phi} = x, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad u = \psi/\|\psi\|, \tag{1.2}$$

где $\phi, \psi$ — сопряженные переменные. Введем новые координаты $z_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3, 4$, сводящие гамильтонову систему (1.2) модельной задачи к удобному виду:

$$z_1 = \psi, \quad z_2 = -\phi, \quad z_3 = -x, \quad z_4 = -y.$$

В координатах $z$ система (1.2) записывается в форме

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = -u, \quad u = z_1/\|z_1\|. \tag{1.3}$$

Система (1.3) обладает решениями в форме логарифмических спиралей [5, 6], которые могут быть записаны следующим образом

$$z_m^*(t) = -A_{m-1}(T^* - t)^{5-m} e^{\mathbf{i}\alpha \ln |T^* - t|}, \quad u^*(t) = e^{\mathbf{i}\alpha \ln |T^* - t|}, \quad 0 \leqslant t < T^*, \quad m = \overline{1, 4}. \tag{1.4}$$

Здесь $A_0 = -1/126$, $A_{l+1} = -A_l(4 - l + \mathbf{i}\alpha)$, $l = 0, 1, 2$, угол между $z_3(0)$ и $z_4(0)$ равен $2 \operatorname{arctg} \alpha$, $\alpha^2 = 5$, и $\|z_4(0)\|^2 = \sqrt{6}\,\|z_3(0)\|/2$. Траектории $z_m^*(t)$ попадают в ноль за конечное время $T^*$, и оптимальное управление $u^*(t)$ совершает бесконечное число оборотов вдоль окружности $S^1$.

В следующем параграфе мы сформулируем основной результат данной работы, а именно, теорему о существовании экстремалей в виде логарифмических спиралей в случае достаточно малых возмущений модельной задачи.

## § 2. Нелинейное возмущение модельной задачи

Нелинейным возмущением задачи (1.1) будем называть задачу

$$\int_0^\infty \langle x(t), x(t)\rangle \, dt \to \inf_u, \quad \dot{x} = y, \ \dot{y} = u + f(x, y), \quad \|u\| \leqslant 1, \quad x, y, u \in \mathbb{R}^2. \tag{2.1}$$

Здесь функция $f(x,y)$ достаточно гладкая, $f(0,0)=0$ и существует $C>0$ такое, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|f(\lambda^2 x,\lambda y)\|}{\lambda}<C. \tag{2.2}$$

Условие (2.2) означает, что функция $f(x,y)$ является малой относительно действия группы $g_\lambda$ по сравнению с правой частью управляемой системы модельной задачи. Допустимые решения в задаче (2.1) — абсолютно непрерывные функции, допустимые управления — ограниченные измеримые функции.

Запишем необходимое условие оптимальности для задачи (2.1). Если $\big(x(t),y(t),u_{\text{opt}}(t)\big)$ является оптимальным решением задачи (2.1), тогда, согласно принципу максимума Понтрягина, существуют непрерывные $\mathbb{R}^2$-значные функции $\phi\,(t)$, $\psi\,(t)$ и неотрицательная константа $\lambda_0$ такие, что

$$\begin{aligned}
\dot\phi &= -\frac{\partial H}{\partial x}=\lambda_0 x - f'_x(x,y)^T\psi, \qquad & \dot x &= \frac{\partial H}{\partial \phi}=y,\\
\dot\psi &= -\frac{\partial H}{\partial y}=-\phi - f'_y(x,y)^T\psi, \qquad & \dot y &= \frac{\partial H}{\partial \psi}=u_{\text{opt}}+f(x,y),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где гамильтониан $H$ имеет вид

$$H(x,y,\phi,\psi)=-\frac{\lambda_0}{2}\langle x,x\rangle+\langle\phi,y\rangle+\langle\psi,f(x,y)\rangle+\langle\psi,u\rangle.$$

Мы будем рассматривать регулярные решения, то есть такие, на которых $\lambda_0\neq 0$. Далее полагаем $\lambda_0=1$.

Управление на оптимальной траектории $u_{\text{opt}}(t)$ определяется из условия максимума:

$$u_{\text{opt}}(t)=\arg\max_{\|u\|\leqslant 1}\langle\psi,u\rangle. \tag{2.4}$$

Условие максимума (2.4) дает нам явное выражение для управления на оптимальной траектории, если $\psi(t)\neq 0$:

$$u_{\text{opt}}(t)=\psi(t)/\|\psi(t)\|.$$

Если же $\psi=0$, то любое допустимое управление удовлетворяет условию максимума (2.4).

Найдем особые экстремали в задаче (2.1). Напомним, что экстремаль задачи (2.1) является *особой* на непустом интервале $(t_1,t_2)$, если $\psi(t)=0$ при $t\in(t_1,t_2)$.

**Предложение 2.1.** *Начало координат является единственной особой экстремалью задачи* (2.1) *и имеет второй порядок.*

Доказательство. Продифференцируем тождество $\psi(t)=0$ при $t\in(t_1,t_2)$ в силу системы (2.3) до первого появления управления. Получаем

$$\begin{aligned}
0=\dot\psi\big|_{(t_1,t_2)}&=\big(-\phi-f'_y(x,y)^T\psi\big)\big|_{(t_1,t_2)}=-\phi\big|_{(t_1,t_2)},\\
0=\ddot\psi\big|_{(t_1,t_2)}=-\dot\phi\big|_{(t_1,t_2)}&=\big(-x+f'_x(x,y)^T\psi\big)\big|_{(t_1,t_2)}=-x\big|_{(t_1,t_2)},\\
0=\psi^{(3)}\big|_{(t_1,t_2)}&=-\dot x\big|_{(t_1,t_2)}=-y\big|_{(t_1,t_2)},\\
0=\psi^{(4)}\big|_{(t_1,t_2)}=-\dot y\big|_{(t_1,t_2)}&=-\big(u+f(x,y)\big)\big|_{(t_1,t_2)}=-u\big|_{(t_1,t_2)}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\big(x(t),y(t),\phi(t),\psi(t)\big)\equiv 0$ — единственная особая экстремаль, $u_{\text{sing}}\equiv 0$ — особое управление. Управление с ненулевым коэффициентом появилось на четвертом шаге дифференцирования, следовательно, особая экстремаль имеет второй порядок [5].

□

В окрестности начала координат опишем семейство экстремалей в виде логарифмических спиралей. Для этого, так же как и в модельной задаче, вводим замену переменных

$$z_1 = \psi, \quad z_2 = -\phi, \quad z_3 = -x, \quad z_4 = -y.$$

В координатах $z$ гамильтонова система принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_2 - f'_y(-z_3,-z_4)^T z_1, & \dot z_3 &= z_4, \\ \dot z_2 &= z_3 + f'_x(-z_3,-z_4)^T z_1, & \dot z_4 &= -u - f(-z_3,-z_4). \end{aligned} \tag{2.5}$$

**Теорема 2.1.** *В достаточно малой окрестности начала координат существует семейство решений системы (2.5) в форме логарифмических спиралей:*

$$\begin{aligned} z_m(t) &= k_m(t)\,(T-t)^{5-m} e^{\mathbf{i}\alpha \ln|T-t|}\, e^{\mathbf{i}\varphi_m(t)}, & m &= \overline{1,4}, \\ u(t) &= e^{\mathbf{i}\alpha \ln|T-t|}\, e^{\mathbf{i}\varphi_0(t)}, & t &\leqslant T, \\ z_m(t) &= u(t) = 0, & t &\geqslant T, \end{aligned}$$

*и все их возможные повороты. Здесь $T>0$, $\alpha = \pm\sqrt{5}$, функции $k_m(t), \varphi_m(t)$ и $\varphi_0(t)$ ограничены.*

Построенные экстремали приходят в начало координат за конечное время $T$, при этом управление совершает бесконечное число оборотов по окружности.

## § 3. Доказательство теоремы 2.1

Приведем сначала краткую схему доказательства теоремы 2.1:

(1) для гамильтоновой системы возмущенной задачи проводим разрешение особенности (раздутие особенности) в окрестности начала координат;

(2) показываем, что существует инвариантное подпространство решений, на котором раздутие системы для возмущенной задачи совпадает с раздутием системы для модельной задачи;

(3) доказываем, что периодическое решение для модельной задачи есть также гиперболический цикл для возмущенной задачи;

(4) проводим обратный ход процедуры раздутия особенности.

### 3.1. Раздутие особенности

Раздутием особенности в начале координат для гамильтоновых систем (1.3) и (2.5) назовем отображение $B\colon z \mapsto (\mu, \widetilde z)$:

$$\begin{gathered} \widetilde z_4 = \frac{z_4}{\mu}, \qquad \widetilde z_3 = \frac{z_3}{\mu^2}, \qquad \widetilde z_2 = \frac{z_2}{\mu^3}, \qquad \widetilde z_1 = \frac{z_1}{\mu^4}, \\ \mu^{24} = \frac14 \left( \left\| \frac{z_4}{A_3} \right\|^{24} + \left\| \frac{z_3}{A_2} \right\|^{12} + \left\| \frac{z_2}{A_1} \right\|^{8} + \left\| \frac{z_1}{A_0} \right\|^{6} \right), \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\mu \in \mathbb{R}_+$, $A_j$, $j=\overline{0,3}$, определены в (1.4), и $\widetilde z \in \mathbb{R}^8$ лежит на многообразии

$$S = \left\{ \left\| \frac{\widetilde z_4}{A_3} \right\|^{24} + \left\| \frac{\widetilde z_3}{A_2} \right\|^{12} + \left\| \frac{\widetilde z_2}{A_1} \right\|^{8} + \left\| \frac{\widetilde z_1}{A_0} \right\|^{6} = 4 \right\}.$$

При отображении раздутия начало координат переходит в сферу $S$, а решения систем (1.3) и (2.5) лежат на цилиндре $Q = S \times \{\mu \in \mathbb{R}\}$.

Гамильтонова система модельной задачи (1.3) в координатах $(\mu, \widetilde{z})$ принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\mu = \mu\mathcal{M}_0(\widetilde{z}), && u = \widetilde{z}_1/\|\widetilde{z}_1\|, \\ &\frac{d}{ds}\widetilde{z}_1 = \widetilde{z}_2 - 4\widetilde{z}_1\mathcal{M}_0(\widetilde{z}), && \frac{d}{ds}\widetilde{z}_3 = \widetilde{z}_4 - 2\widetilde{z}_3\mathcal{M}_0(\widetilde{z}), \\ &\frac{d}{ds}\widetilde{z}_2 = \widetilde{z}_3 - 3\widetilde{z}_2\mathcal{M}_0(\widetilde{z}), && \frac{d}{ds}\widetilde{z}_4 = -u - \widetilde{z}_4\mathcal{M}_0(\widetilde{z}), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$ds = \frac{1}{\mu}dt, \tag{3.3}$$

и

$$\mathcal{M}_0(\mu, \widetilde{z}) = \frac{1}{96}\Big(-\frac{24}{|A_3|^{24}}\|\widetilde{z}_4\|^{22}\langle\widetilde{z}_4, \frac{\widetilde{z}_1}{\|\widetilde{z}_1\|}\rangle + \frac{12}{|A_2|^{12}}\|\widetilde{z}_3\|^{10}\langle\widetilde{z}_3, \widetilde{z}_4\rangle + \\ + \frac{8}{|A_1|^8}\|\widetilde{z}_2\|^6\langle\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_3\rangle + \frac{6}{|A_0|^6}\|\widetilde{z}_1\|^4\langle\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2\rangle\Big).$$

Для возмущенной задачи гамильтонова система (2.5) в координатах $(\mu, \widetilde{z})$ в окрестности нулевого сечения цилиндра $Q_0 = Q \cap \{\mu = 0\}$ записывается в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\mu = \mu\mathcal{M}_0 + \mu^2 g_0(\widetilde{z}), && u = \widetilde{z}_1/\|\widetilde{z}_1\|, \\ &\frac{d}{ds}\widetilde{z}_1 = \widetilde{z}_2 - 4\widetilde{z}_1\mathcal{M}_0 + \mu g_1(\widetilde{z}), && \frac{d}{ds}\widetilde{z}_3 = \widetilde{z}_4 - 2\widetilde{z}_3\mathcal{M}_0 + \mu g_3(\widetilde{z}), \\ &\frac{d}{ds}\widetilde{z}_2 = \widetilde{z}_3 - 3\widetilde{z}_2\mathcal{M}_0 + \mu g_2(\widetilde{z}), && \frac{d}{ds}\widetilde{z}_4 = -u - \widetilde{z}_4\mathcal{M}_0 + \mu g_4(\widetilde{z}), \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $g_i(\widetilde{z})$, $i = 1, \ldots 4$, — ограниченные функции, а $s$ и $\mathcal{M}_0$ определены выше.

### 3.2. Инвариантное подпространство

Заметим, что в окрестности нулевого сечения цилиндра $Q_0$ система (3.4) является малым по $\mu$ возмущением системы (3.2). На сечении $Q_0$ системы (3.4) и (3.2) совпадают и имеют вид

$$\begin{aligned} &\mu = 0, && \widetilde{u} = \widetilde{z}_1/\|\widetilde{z}_1\|, \\ &\frac{d}{ds}\widetilde{z}_1 = \widetilde{z}_2 - 4\mathcal{M}_0\widetilde{z}_1, && \frac{d}{ds}\widetilde{z}_3 = \widetilde{z}_4 - 2\mathcal{M}_0\widetilde{z}_3, \\ &\frac{d}{ds}\widetilde{z}_2 = \widetilde{z}_3 - 3\mathcal{M}_0\widetilde{z}_2, && \frac{d}{ds}\widetilde{z}_4 = -\widetilde{u} - \mathcal{M}_0\widetilde{z}_4. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из (3.5) легко видеть, что нулевое сечение цилиндра $Q_0$ является инвариантным подпространством решений для обеих систем.

### 3.3. Периодическое решение

Используя известные явные решения в виде логарифмических спиралей (1.4) для задачи (1.1), замену (3.1) и (3.3), получаем решение системы (3.5)

$$\mu^*(s) = 0, \quad \widetilde{z}^*_m(s) = A_{m-1}e^{-\mathbf{i}\alpha s}, \quad m = \overline{1,4}, \quad \widetilde{u}^*(s) = e^{-\mathbf{i}\alpha s},$$

которое является частным решением как системы (3.4), так и системы (3.2). Заметим, что это решение является периодическим с периодом $2\pi/\alpha$. Обозначим это решение через $\xi^0(s) = \big(0, \widetilde{z}^*(s)\big)$.

**Лемма 3.1.** *Периодическое решение* $\xi^0(s)$ *является гиперболическим циклом.*

Доказательство. Для доказательства леммы рассмотрим систему уравнений в вариациях на решении $\xi^0(s)$ для системы (3.4):

$$h' = F_\xi\big(\xi^0(s)\big)h. \tag{3.6}$$

Здесь $F$ — правая часть (3.4), а $F_\xi$ — якобиан $F$. Так как $F$ не зависит явно от $s$, и $\xi^0(s)$ — периодическая траектория, то $F_\xi\big(\xi^0(s)\big)$ — непрерывная периодическая матрица. Следовательно, по теореме Флоке [20] существует такое невырожденное периодическое преобразование

$$\widehat{h} = P(s)h$$

(преобразование Ляпунова), что в координатах $\widehat{h}$ система (3.6) принимает вид

$$\widehat{h}' = J\widehat{h}, \tag{3.7}$$

где $J$ — постоянная матрица. При этом собственные значения матрицы $J$ являются характеристическими показателями цикла $\xi^0(s)$. Для (3.6) матрица $P(s) \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ имеет вид

$$P(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_* \end{pmatrix}, \qquad P_* = \begin{pmatrix} \cos(\alpha s) & -\sin(\alpha s) \\ \sin(\alpha s) & \cos(\alpha s) \end{pmatrix}.$$

Здесь $0$ — нулевая матрица соответствующего размера. Идея выбора матрицы $P$ основана на форме решения $\xi^0(s)$: преобразование $P$ переводит цикл $\xi^0(s)$ в неподвижную точку. Прямыми вычислениями получаем матрицу системы (3.7)

$$J = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & 9 & -\frac{7\sqrt{5}}{4} & -\frac{127}{252} & -\frac{25\sqrt{5}}{63} & \frac{67}{252} & \frac{73\sqrt{5}}{252} & \frac{53}{252} & -\frac{47\sqrt{5}}{252} \\
* & \sqrt{5} & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & -15 & \frac{9\sqrt{5}}{4} & \frac{631}{84} & \frac{4\sqrt{5}}{21} & \frac{17}{84} & -\frac{73\sqrt{5}}{84} & -\frac{53}{84} & \frac{47\sqrt{5}}{84} \\
* & -\frac{15\sqrt{5}}{4} & \frac{45}{16} & \frac{715\sqrt{5}}{336} & \frac{377}{84} & -\frac{67\sqrt{5}}{336} & -\frac{29}{336} & -\frac{53\sqrt{5}}{336} & \frac{235}{336} \\
* & \frac{35}{2} & -\frac{21\sqrt{5}}{8} & -\frac{379}{72} & -\frac{25\sqrt{5}}{18} & \frac{211}{72} & \frac{\sqrt{5}}{72} & \frac{125}{72} & -\frac{47\sqrt{5}}{72} \\
* & \frac{35\sqrt{5}}{2} & -\frac{105}{8} & -\frac{379\sqrt{5}}{72} & -\frac{125}{18} & \frac{139\sqrt{5}}{72} & \frac{509}{72} & \frac{53\sqrt{5}}{72} & -\frac{163}{72} \\
* & \frac{105}{4} & -\frac{63\sqrt{5}}{16} & -\frac{379}{48} & -\frac{25\sqrt{5}}{12} & \frac{67}{48} & \frac{73\sqrt{5}}{48} & \frac{101}{48} & -\frac{95\sqrt{5}}{48} \\
* & -\frac{105\sqrt{5}}{4} & -\frac{1701}{16} & \frac{379\sqrt{5}}{48} & \frac{125}{12} & -\frac{67\sqrt{5}}{48} & -\frac{365}{48} & -\frac{5\sqrt{5}}{48} & \frac{283}{48}
\end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $J$ имеют вид

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 4, \quad \lambda_4 = 5, \quad \lambda_5 = 24,$$
$$\lambda_{6,7} = \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{47 \pm 12\sqrt{34}\mathbf{i}}\right) \approx 4.65903 \pm 4.0511\mathbf{i},$$
$$\lambda_{8,9} = \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{47 \pm 12\sqrt{34}\mathbf{i}}\right) \approx 0.340974 \pm 4.0511\mathbf{i}.$$

Получаем, что периодическое решение $\xi^0(s)$ имеет ровно один характеристический показатель с отрицательной действительной частью, 7 характеристических показателей с положительной действительной частью и ровно один нулевой характеристический показатель. $\square$

Таким образом, в силу гиперболичности цикла $\xi^0(s)$ имеет место сжатие по направлению $\mu$ и растяжение по остальным направлениям [20]. Применяя к $\xi^0(s)$ теорему об инвариантных многообразиях [21], получаем, что система (3.4) имеет решение $\xi(s) = \big(\mu(s), \widetilde{z}(s)\big) \in \mathbb{R}^9$, удовлетворяющее условию

$$\|\xi(s+s_0) - \xi^0(s)\|e^{cs} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to +\infty \tag{3.8}$$

для некоторых $s_0$ и $c > 0$.

Таким образом, построено двумерное устойчивое многообразие цикла $\xi^0(s)$ для системы (3.4) (рис. 2). В следующем пункте покажем, что это многообразие состоит из логарифмических спиралей.

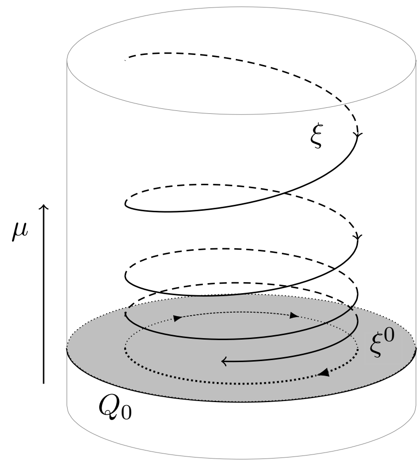


**Рис. 2.** Решения системы (3.4)

### 3.4. Обратный ход процедуры раздутия особенности

Пусть $T$ — момент попадания решения $z(t)$ системы (2.5) в начало координат и $\xi(s)$ — решение системы (3.4), удовлетворяющее условию (3.8). Из условия (3.8) могут быть получены [16] следующие оценки:

$$\begin{aligned} \mu(s) &= \kappa e^{-s}\big(1 + o(e^{-c_\mu s})\big), && \text{при } s \to \infty, \\ e^{-s(t)} &= \kappa^{-1}(T-t)\big(1 + o(e^{-c_\mu s(t)})\big), && \text{при } t \to T-0, \\ e^{-\mathbf{i}\alpha s(t)} &= e^{\mathbf{i}\alpha \ln(T-t)} e^{-\mathbf{i}\alpha(\ln\kappa + o((T-t)^{c_\mu}))}, && \text{при } t \to T-0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\kappa$ и $c_\mu$ — некоторые положительные постоянные.

Применяя (3.9) (аналогично [15]) к решению $\xi(s)$ системы (3.4), получаем окончательные асимптотические формулы для решения $z(t)$ гамильтоновой системы (2.5) в форме логарифмических спиралей:

$$\begin{aligned} z_m(t) &= |A_{m-1}|(T-t)^{5-m}\big(1 + o((T-t)^\sigma)\big) e^{\mathbf{i}\operatorname{Arg} A_{m-1}} e^{\mathbf{i}\alpha \ln(T-t)} e^{\mathbf{i}\alpha(\gamma + o((T-t)^\sigma))}, \\ u(t) &= e^{\mathbf{i}\operatorname{Arg}(A_0)} e^{\mathbf{i}\alpha\ln(T-t)} e^{\mathbf{i}\alpha(\gamma + o((T-t)^\sigma))}, \qquad \text{при } t \to T-0, \end{aligned}$$

где $\sigma > 0$ и $\gamma = s_0 - \ln\kappa \in \mathbb{R}$.

## § 4. Заключение

В работе исследовалась задача, являющаяся нелинейным возмущением обобщения задачи Фуллера на случай управления из круга. Показано, что экстремали в виде логарифмических спиралей сохраняются при возмущениях, малых относительно действия группы симметрий задачи Фуллера. Данный результат является обобщением результата, полученного в [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Лоуден Д. Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Мир, 1966.
2. Kelley H. J. Singular extremals in Lawden's problem of optimal rocket flight // AIAA Journal. 1963. Vol. 1. No. 7. P. 1578–1580. https://doi.org/10.2514/3.1859
3. Park Chandeok. Necessary conditions for the optimality of singular arcs of spacecraft trajectories subject to multiple gravitational bodies // Advances in Space Research. 2013. Vol. 51. No. 11. P. 2125–2135. https://doi.org/10.1016/j.asr.2013.01.005
4. Zhu Jiamin, Trélat E., Cerf M. Planar tilting maneuver of a spacecraft: Singular arcs in the minimum time problem and chattering // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B. 2016. Vol. 21. Issue 4. P. 1347–1388. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.1347
5. Zelikin M. I., Borisov V. F. Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering. Boston: Birkhäuser, 1994. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2702-1
6. Манита Л. А. Оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задачах управления манипуляторами // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 19–28.
7. Ронжина М. И. Оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задаче управления перевернутым двухзвенным маятником // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 1. С. 24–33. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26040191
8. Zelikin M. I., Borisov V. F. Singular optimal regimes in problems of mathematical economics // Journal of Mathematical Sciences. 2005. Vol. 130. No. 1. P. 4409–4570. https://doi.org/10.1007/s10958-005-0350-5
9. Ledzewicz U., Schättler H. Singular controls and chattering arcs in optimal control problems arising in biomedicine // Control and Cybernetics. 2009. Vol. 38. No. 4B. P. 1501–1523.
10. Kupka I. A. K. The ubiquity of Fuller's phenomenon // Nonlinear controllability and optimal control. New York: Marcel Dekker, 1990. P. 313–350. https://doi.org/10.1201/9780203745625-11
11. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // Труды Математического института АН СССР. 1991. Т. 197. С. 85–166. https://www.mathnet.ru/rus/tm1446
12. Зеликин М. И., Мельников Н. Б., Хильдебранд Р. Топологическая структура фазового портрета типичного слоя оптимального синтеза для задач с накоплением переключений // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2001. Т. 233. С. 125–152. https://www.mathnet.ru/rus/tm228
13. Зеликин М. И., Локуциевский Л. В., Хильдебранд Р. Типичность фрактально-хаотической структуры интегральных воронок в гамильтоновых системах с разрывной правой частью // Оптимальное управление. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 56. М.: РУДН, 2015. С. 5–128. https://www.mathnet.ru/rus/cmfd268
14. Chukanov S. V., Milyutin A. A. Qualitative study of singularities for extremals of quadratic optimal control problem // Russian Journal of Mathematical Physics. 1994. Vol. 2. No. 1. P. 31–48. https://zbmath.org/0906.49008
15. Ронжина М. И., Манита Л. А., Локуциевский Л. В. Окрестность особого режима второго порядка в задачах с управлением из круга // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2021. Т. 315. С. 222–236. https://doi.org/10.4213/tm4230

16. Manita L., Ronzhina M. Optimal spiral-like solutions near a singular extremal in a two-input control problem // Discrete and Continuous Dynamical Systems - B. 2022. Vol. 27. Issue 6. P. 3325–3343. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2021187
17. Ронжина М. И., Манита Л. А. Логарифмические спирали в задачах оптимального управления с управлением из круга // Материалы Воронежской международной весенней математической школы «Современные методы краевых задач. Понтрягинские чтения—XXXIV», Воронеж, 3–9 мая 2023 г. Часть 4. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 233. М.: ВИНИТИ РАН, 2024. С. 75–88. https://www.mathnet.ru/rus/into1280
18. Ronzhina M. I., Manita L. A. Spiral-like extremals near a singular surface in a rocket control problem // Regular and Chaotic Dynamics. 2023. Vol. 28. No. 2. P. 148–161. https://doi.org/10.1134/S1560354723020028
19. Shen Haijun, Tsiotras P. Time-optimal control of axisymmetric rigid spacecraft using two controls // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1999. Vol. 22. No. 5. P. 682–694. https://doi.org/10.2514/2.4436
20. Farkas M. Periodic motions. New York: Springer, 1994. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4211-4
21. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Поступила в редакцию 06.09.2024
Принята к публикации 13.02.2025

Ронжина Мария Игоревна, к. ф.-м. н., доцент, РГУ нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина, 119991, Россия, г. Москва, проспект Ленинский, 65.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8127-9319
E-mail: ronzhina.m@gubkin.ru

Манита Лариса Анатольевна, к. ф.-м. н., доцент, МИЭМ, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 123458, Россия, г. Москва, ул. Таллинская, 34.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4099-8082
E-mail: lmanita@hse.ru

**Цитирование:** М. И. Ронжина, Л. А. Манита. Структурная устойчивость логарифмических спиралей в задачах управления с особой экстремалью второго порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 117–128.

MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 1. Pp. 117–128.

***M. I. Ronzhina, L. A. Manita***

**Structural stability of logarithmic spirals in control problems with second-order singular extremal**

*Keywords*: two-dimensional control in a disk, singular extremal, blow-up of a singularity, logarithmic spiral, Hamiltonian system, Pontryagin's maximum principle

MSC2020: 34H05, 93C35

DOI: 10.35634/vm250107

A nonlinear perturbation of generalization of the Fuller problem with controls in a disk is considered. The structural stability of logarithmic spirals is studied. It was shown that if perturbations are small with respect to the action of the symmetry group of the unperturbed problem, then in the neighborhood of a singular second-order solution, extremals in the form of logarithmic spirals are preserved. The constructed extremals arrive at a singular extremal in a finite time, while the controls make an infinite number of revolutions along the circle

REFERENCES

1. Lawden D. F. *Optimal trajectories for space navigation*, London: Butterworths, 1963. https://zbmath.org/0111.19605
Translated under the title *Optimal'nye traektorii dlya kosmicheskoi navigatsii*, Moscow: Mir, 1966.
2. Kelley H. J. Singular extremals in Lawden's problem of optimal rocket flight, *AIAA Journal*, 1963, vol. 1, no. 7, pp. 1578–1580. https://doi.org/10.2514/3.1859
3. Park Chandeok. Necessary conditions for the optimality of singular arcs of spacecraft trajectories subject to multiple gravitational bodies, *Advances in Space Research*, 2013, vol. 51, no. 11, pp. 2125–2135. https://doi.org/10.1016/j.asr.2013.01.005
4. Zhu Jiamin, Trélat E., Cerf M. Planar tilting maneuver of a spacecraft: Singular arcs in the minimum time problem and chattering, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 2016, vol. 21, issue 4, pp. 1347–1388. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.1347
5. Zelikin M. I., Borisov V. F. *Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering*, Boston: Birkhäuser, 1994. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2702-1
6. Manita L. A. Optimal operating modes with chattering switching in manipulator control problems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, vol. 64, issue 1, pp. 17–24. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(00)00021-6
7. Ronzhina M. I. Optimal conditions with chattering in the inverted two-link pendulum control problem, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, vol. 80, issue 1, pp. 16–23. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.05.004
8. Zelikin M. I., Borisov V. F. Singular optimal regimes in problems of mathematical economics, *Journal of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 130, no. 1, pp. 4409–4570. https://doi.org/10.1007/s10958-005-0350-5
9. Ledzewicz U., Schättler H. Singular controls and chattering arcs in optimal control problems arising in biomedicine, *Control and Cybernetics*, 2009, vol. 38, no. 4B, pp. 1501–1523.
10. Kupka I. A. K. The ubiquity of Fuller's phenomenon, *Nonlinear controllability and optimal control*, New York: Marcel Dekker, 1990, pp. 313–350. https://doi.org/10.1201/9780203745625-11
11. Zelikin M. I., Borisov V. F. Regimes with increasingly more frequent switchings in optimal control problems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1993, vol. 197, pp. 95–186. https://zbmath.org/0782.49002
12. Zelikin M. I., Melnikov N. B., Hildebrand R. The topological structure of the phase portrait of a typical fiber of optimal synthesis for chattering problems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2001, vol. 233, pp. 116–142. https://zbmath.org/1014.49030

13. Zelikin M. I., Lokutsievskii L. V., Hildebrand R. Typicality of chaotic fractal behavior of integral vortices in Hamiltonian systems with discontinuous right hand side, *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 221, no. 1, pp. 1–136. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3221-y
14. Chukanov S. V., Milyutin A. A. Qualitative study of singularities for extremals of quadratic optimal control problem, *Russian Journal of Mathematical Physics*, 1994, vol. 2, no. 1, pp. 31–48. https://zbmath.org/0906.49008
15. Ronzhina M. I., Manita L. A., Lokutsievskiy L. V. Neighborhood of the second-order singular regime in problems with control in a disk, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2021, vol. 315, pp. 209–222. https://doi.org/10.1134/S0081543821050163
16. Manita L., Ronzhina M. Optimal spiral-like solutions near a singular extremal in a two-input control problem, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 2022, vol. 27. issue 6. pp. 3325–3343. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2021187
17. Ronzhina M. I., Manita L. A. Logarithmic spirals in optimal control problems with control in a disk, *Proceedings of the Voronezh international spring mathematical school "Modern methods of the theory of boundary-value problems. Pontryagin readings—XXXIV", Voronezh, May 3–9, 2023, Part 4*, Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory, vol. 233, Moscow: Russian Institute for Scientific and Technical Information (VINITI RAS), 2024, pp. 75–88 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/into1280
18. Ronzhina M. I., Manita L. A. Spiral-like extremals near a singular surface in a rocket control problem, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2023, vol. 28, no. 2, pp. 148–161. https://doi.org/10.1134/S1560354723020028
19. Shen Haijun, Tsiotras P. Time-optimal control of axisymmetric rigid spacecraft using two controls, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1999, vol. 22, no. 5, pp. 682–694. https://doi.org/10.2514/2.4436
20. Farkas M. *Periodic motions*, New York: Springer, 1994. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4211-4
21. Hartman P. *Ordinary differential equations*, New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, 1964. https://zbmath.org/0125.32102

Received 06.09.2024
Accepted 13.02.2025

Mariya Igorevna Ronzhina, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National University of Oil and Gas "Gubkin University", Leninsky Prospekt, 65, Moscow, 119991, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8127-9319
E-mail: ronzhina.m@gubkin.ru

Larisa Anatolievna Manita, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow State Institute of Electronics and Mathematics, Institute of Mathematics and Mechanics, National Research University Higher School of Economics, ul. Tallinskaya, 34, Moscow, 123458, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4099-8082
E-mail: lmanita@hse.ru

**Citation:** M. I. Ronzhina, L. A. Manita. Structural stability of logarithmic spirals in control problems with second-order singular extremal, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 1, pp. 117–128.