КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2026 Т. 18 № 5 С. 1417–1434
DOI: 10.20537/2076-7633-2026-18-5-1417-1434

Ки&М

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК: 519.86, 336.76

Использование модели реализованной волатильности и риск-нейтральной коррекции для оценки деривативов на неликвидном рынке

С. А. Дандамаев[a], Г. А. Дандамаев[b]

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Россия, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

E-mail: [a] sadandamaev@edu.hse.ru, [b] gamid_dandamaev04@mail.ru

Получено 16.04.2026, после доработки — 27.09.2026.
Принято к публикации 27.09.2026.

На финансовых рынках деривативы предлагают широкие возможности для инвестиций и хеджирования. Однако доминирующий пласт стохастических моделей требует наличия ликвидного рынка опционов для процесса калибровки. На неликвидных рынках, включая современный финансовый рынок РФ, это является критической проблемой.

В настоящей работе исследуется использование моделей реализованной волатильности и эмпирической риск-нейтральной коррекции для оценки стоимости производных финансовых инструментов на один базовый актив. Применяются модель HARGL, обученная на исторических высокочастотных данных, и метод эмпирической мартингальной симуляции (Empirical Martingale Simulation, EMS) для корректировки сгенерированных траекторий. Выбор реализованной волатильности оправдан тем, что модель симулирует динамику интегрированной дисперсии и доходности актива, не требуя наличия поверхности волатильности. Выбор риск-нейтральной меры необходим для выполнения первой фундаментальной теоремы об отсутствии арбитража. В условиях неполного рынка таких мер существует бесконечное множество, поэтому алгоритм EMS выступает оптимальным правилом: он минимально искажает историческую динамику, но гарантирует строгую мартингальность процесса цены.

Процесс валидации включает проверку прогнозов волатильности, отсутствия арбитража, сходимости и сравнение с биржевыми котировками. Модель HARGL дает содержательно корректное описание распределения дисперсии (среднее значение показателя преобразования вероятностного интеграла (PIT) равно 0,46 при эталоне 0,5), показывая умеренно консервативное смещение: в 90 % доверительный интервал попадает 96 % значений. На неликвидных рынках такая консервативность является существенным плюсом. Сравнение с реальными котировками ванильных опционов показало, что модель, абсолютно не опираясь на опционные данные при калибровке, дала среднюю абсолютную ошибку всего 0,5 рубля. Для 26 % инструментов цена оказалась между котировками покупки и продажи, остальные цены — выше котировки продажи. Умеренная переоценка активов подтверждает адекватность предложенного подхода. Вычислительная сходимость алгоритма достигается уже при 10 000 симуляциях. Анализ чувствительности выявил критическую важность процедуры EMS: оценка в физической мере без нее искажает цену на 37 %. Также зафиксирована ожидаемая чувствительность к начальной цене актива (4,7 %) и прогнозной дисперсии (6 %).

В результате исследования показано, что связка HARGL и EMS представляет собой надежный вычислительный инструмент для оценки стоимости деривативов и хеджирования. Поскольку на выходе алгоритм формирует готовые траектории, он легко масштабируется на экзотические деривативы. Предложенный подход численно реализует условия фундаментальных теорем финансовой математики, обеспечивая устойчивую безарбитражную оценку инструментов в условиях острой нехватки ликвидности.

Ключевые слова: реализованная волатильность, HARGL, эмпирическая мартингальная симуляция, неликвидный рынок, Монте-Карло, ценообразование опционов

© 2026 Саид Артурович Дандамаев, Гамид Артурович Дандамаев
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2026 VOL. 18 NO. 5 P. 1417–1434
DOI: 10.20537/2076-7633-2026-18-5-1417-1434

КиМ

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

UDC: 519.86, 336.76

Using a realized-volatility model and risk-neutral correction for derivative valuation in an illiquid market

S. A. Dandamaev[a], G. A. Dandamaev[b]

HSE University,
20 Myasnitskaya st., Moscow, 101000, Russia

E-mail: [a] sadandamaev@edu.hse.ru, [b] gamid_dandamaev04@mail.ru

Received 16.04.2026, after completion — 27.09.2026.
Accepted for publication 27.09.2026.

Derivatives offer broad opportunities for investment and hedging in financial markets. However, most stochastic pricing models rely on a liquid options market for calibration. In illiquid markets, including the current Russian financial market, this becomes a critical limitation.

This paper studies the use of realized-volatility models and an empirical risk-neutral correction for pricing derivatives written on a single underlying asset. The framework combines the HARGL model, estimated on historical high-frequency data, with the Empirical Martingale Simulation (EMS) technique used to adjust the simulated price paths. The choice of realized volatility is motivated by the fact that the model simulates both integrated variance and asset returns without requiring an implied-volatility surface. The choice of a risk-neutral measure is needed to satisfy the first fundamental theorem of asset pricing. In an incomplete market, infinitely many such measures exist, so EMS is used as an operational rule: it alters the historical dynamics as little as possible while enforcing strict martingality of the price process.

The validation procedure includes volatility-forecast testing, no-arbitrage checks, convergence analysis, and comparison with exchange-traded option quotes. The HARGL model describes the variance distribution accurately, with a mean PIT value of 0.46 versus the benchmark value of 0.5, while showing a moderately conservative bias: 96 % of the observations fall inside the 90 % confidence interval. In an illiquid market, such conservatism is a meaningful advantage. A comparison with observed vanilla option quotes shows that, even without using option data in calibration, the model gives a mean absolute pricing error of only 0.5 rubles. For 26 % of the instruments, the model price falls inside the bid–ask spread, while the remaining prices lie slightly above the ask quote. This moderate upward bias supports the adequacy of the framework. The algorithm reaches numerical convergence already at 10 000 simulations. The sensitivity analysis shows that EMS is critically important: pricing under the physical measure without this correction distorts the option value by 37 %. The expected sensitivity to the initial asset price (4.7 %) and to forecast variance (6 %) is also documented.

The results show that the HARGL – EMS combination provides a reliable computational tool for pricing and hedging. Since the algorithm produces full simulated paths, it can be extended naturally to exotic derivatives. In this sense, the framework gives a numerical implementation of the core ideas behind the fundamental theorems of asset pricing and provides a stable no-arbitrage valuation procedure under severe illiquidity.

Keywords: realized volatility, HARGL, empirical martingale simulation, illiquid market, Monte Carlo, option pricing

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 5, pp. 1417–1434 (Russian).

© 2026 Said A. Dandamaev, Gamid A. Dandamaev
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Введение

Задача оценки стоимости деривативов очень важна для финансовых институтов, поскольку корректная методика позволяет компаниям продавать деривативы и хеджировать свои позиции путем расчета греков (производных) и репликационных стратегий. В первую очередь это касается инвестиционных компаний, которые продают своим клиентам различные деривативы. Данная задача важна для инвестиционных фондов и хедж-фондов с целью верного расчета стоимости позиций и их рисков.

Существенным фактором при определении справедливой цены деривата является отсутствие арбитража. На развитых рынках данное условие соблюдается с помощью оценки деривативов в риск-нейтральной мере, где эта мера определяется калибровкой модели к биржевым котировкам ванильных опционов на базовые активы. Так, например, локальная волатильность Дюпира [Dupire, 1994] строится именно в такой логике, и после калибровки модель может задавать безарбитражную динамику цены базового актива. Однако ситуация существенно усложняется, если ликвидной поверхности подразумеваемой волатильности нет либо она сильно ограничена. На российском рынке после 2022 года эта проблема стала особенно острой из-за снижения ликвидности, фрагментации торгов и сокращения числа инструментов, пригодных для устойчивой калибровки.

При этом потребность в оценке деривативов не исчезает. Напротив, рынок структурных продуктов продолжает развиваться. Согласно обзору Банка России объем структурных облигаций за несколько лет существенно вырос: с 2020 по 2025 год рынок вырос со 155 до 1869 млрд руб. [Банк России, 2025]. Следовательно, возникает практический вопрос: как строить внутренне согласованную схему оценки стоимости и анализа рисков в ситуации, когда калибровка к опционной поверхности недоступна или ненадежна?

Именно эту задачу мы решаем в этой статье. В качестве исторической динамики используется модель реализованной волатильности HARGL, продолжающая линию HAR-подходов Корси [Corsi, 2009] и модели HARGL из работы [Corsi et al., 2013]. Для перехода от исторической симуляции к безарбитражной схеме ценообразования используется процедура эмпирической мартингальной симуляции (Empirical Martingale Simulation, EMS), предложенная в [Duan, Simonato, 1998]. Ключевая идея состоит в том, чтобы не пытаться восстановить единственную «истинную» риск-нейтральную меру в неполном рынке, а построить эмпирически согласованную схему, в которой дисконтированные цены удовлетворяют мартингальному условию. Такой подход естественно соотносится с классической логикой фундаментальных теорем ценообразования активов. Первая фундаментальная теорема связывает отсутствие арбитража с существованием по крайней мере одной эквивалентной мартингальной меры, а вторая — полноту рынка с ее единственностью [Hagan, Lesniewski, 2022]. В рассматриваемой постановке рынок является неполным, поэтому задача состоит не в восстановлении единственной меры ценообразования, а в выборе конструктивного правила, обеспечивающего мартингальную согласованность симулированных траекторий. То есть это скорее попытка навязать мартингальность, нежели строгая процедура перехода в риск-нейтральную меру.

Основной результат работы состоит не в создании новой параметрической модели волатильности, а в построении и эмпирической проверке конструктивной схемы ценообразования для неликвидного рынка, где стандартная риск-нейтральная калибровка по поверхности подразумеваемой волатильности недоступна. Известная спецификация HARGL используется как модель исторической динамики реализованной дисперсии и доходности, а процедура EMS — как отдельный численный механизм согласования симулированных траекторий с эмпирическим мартингальным условием. Новым результатом статьи является демонстрация того, что такая комбинация образует практически реализуемый подход к оценке на российских данных: (i) позволяет

строить устойчивую одномерную симуляционную динамику без опоры на ликвидную опционную поверхность; (ii) дает количественно существенную, а не косметическую, поправку к цене по сравнению со стандартным Монте-Карло; (iii) обеспечивает выполнение базовых статических условий отсутствия арбитража для цен на проверенной сетке страйков; (iv) дает интерпретируемую консервативную оценку по отношению к наблюдаемым рыночным котировкам.

Структура статьи следующая. Сначала рассматривается место работы в литературе и кратко обсуждаются альтернативные подходы. Затем описываются данные, способ построения реализованной двухстепенной вариации (realized bipower variation), спецификация HARGL и процедура EMS. После этого формулируется методика валидации. В заключительной части приводятся результаты ретроспективной вневыборочной проверки, проверки финансовой корректности, сопоставления с рыночными котировками, а также анализ чувствительности.

Обзор литературы и место работы в современном контексте

Классической отправной точкой для теории ценообразования является модель Блэка – Шоулза [Black, Scholes, 1973]. Несмотря на фундаментальную роль этой работы, ее базовые предпосылки плохо согласуются с реальными данными: волатильность не является постоянной, распределение доходностей отклоняется от логнормального, а сложные путезависимые продукты выходят за пределы закрытой формулы. Развитие этого направления привело к стохастическим моделям волатильности, среди которых особое место занимает модель Хестона [Heston, 1993]. Такие модели хорошо подходят для риск-нейтральной калибровки, когда на рынке доступна достаточно богатая структура цен опционов.

Параллельно сформировалось другое направление, ориентированное на использование высокочастотных данных и реализованной волатильности как наблюдаемое приближение интегральной дисперсии. Значимую роль здесь сыграли работы [Andersen et al., 2003; Barndorff-Nielsen, Shephard, 2004], в которых были разработаны как статистическая интерпретация реализованной волатильности, так и устойчивые к прыжкам меры типа двухстепенной вариации. В работе Корси [Corsi, 2009] была предложена HAR-модель, которая компактно воспроизводит эффект долгой памяти реализованной волатильности. Дальнейшее развитие этого подхода представлено в [Corsi et al., 2013], где модель HARGL задает как динамику доходности актива, так и динамику интегральной дисперсии. Помимо этого, автор получает переходную плотность из физической в риск-нейтральную меру для решения задач ценообразования деривативов.

Близкие по цели, но иные по конструкции альтернативы включают модель GARCH с реализованной волатильностью (realized-GARCH) и гибридные модели. В частности, в [Chorro et al., 2012; Zhang et al., 2016] исследуются GARCH-спецификации с тяжелохвостыми инновациями, а в [Fang, Han, 2025] реализован синтез GARCH – HAR, показывающий хорошие свойства одновременно в прогнозировании волатильности и в оценке опционов. Современные исследования также подчеркивают высокую степень эндогенности волатильности и ее выраженную зависимость от исторических данных [Guyon, Lekeufack, 2023]. Для настоящей работы эти статьи важны как контекст: они показывают, что модели, использующие историческую информацию о реализованной волатильности, обладают как эмпирическим, так и прикладным потенциалом.

Отдельный блок литературы связан с выбором риск-нейтральной меры в неполных рынках. Для GARCH-подобных моделей важной является работа Дуана [Duan, 1995], где была предложена замена параметров для перехода из физической в риск-нейтральную меру (LRNVR). Также в 1998 году была предложена эмпирическая мартингальная симуляция [Duan, Simonato, 1998], где сгенерированные траектории корректировались для выполнения условий мартингальности. Информационные и энтропийные методы выбора меры обсуждаются, например, в [Gulko, 1999; Frittelli, 2000; Grandits, Rheinländer, 2002; Avellaneda et al., 2001]. Суть этих методов заключается

в том, что риск-нейтральных мер, которых при отсутствии ликвидного рынка опционов бесконечно, выбирается таким образом, чтобы новая мера выполняла условие мартингальности, но минимально отличалась от физической меры по энтропийной метрике. Кроме того, с практической точки зрения важны работы о границах цен и устойчивости хеджирования в неполных рынках [Perrakis, Ryan, 1984; El Karoui et al., 1998]. Так, например, из [El Karoui et al., 1998] можно сделать вывод о том, что при реплицирующей стратегии завышенная оценка волатильности приводит к суперрепликации, что приводит к неотрицательному финансовому результату хеджирующей стратегии. В сумме этот пласт исследований показывает, что при отсутствии ликвидной сетки цен опционов выбор меры неизбежно требует дополнительного конструктивного правила.

Таким образом, известные работы либо предполагают наличие ликвидного рынка опционов и возможность риск-нейтральной калибровки, либо сосредоточены на прогнозировании реализованной волатильности без явной прикладной схемы дальнейшего ценообразования в условиях неликвидного рынка. В отличие от них в настоящей статье рассматривается именно задача внутренней оценки деривативов при дефиците рыночной опционной информации. В этом контексте HARGL используется как источник исторически оцененной симуляционной динамики, а EMS — как численный механизм согласования траекторий с мартингальным ограничением. Тем самым статья закрывает прикладной разрыв между моделями реализованной волатильности и задачей практической оценки на неликвидном рынке. Что касается выбора HARGL модели, то по сравнению с GARCH данная модель более точно моделирует процесс волатильности, именно поэтому наш выбор пал на нее.

Данные и построение реализованной волатильности

Один из важнейших этапов реализации подхода — сбор данных. Для спецификации HARGL необходимы высокочастотные исторические цены базового актива и история безрисковой ставки. В эмпирической части работы использовались пятиминутные свечи российских акций за период с января 2021 года по январь 2026 года. Ретроспективная оценка модели и сопоставление с рыночными котировками проводятся на данных компании «Газпром». Для численного примера ванильного колл-опциона и проверки сходимости используется российская акция с идентификатором Сбербанка. Источником безрисковой ставки служит RUONIA.

Реализованная дисперсия за день рассчитывается по формуле двухстепенной вариации [Barndorff-Nielsen, Shephard, 2004]:

$$BV_t = \mu_1^{-2} \sum_{i=2}^{n_t} |r_{t,i}| \cdot |r_{t,i-1}|, \quad \mu_1 = \mathbb{E}|Z| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,\, 1), \tag{1}$$

где $r_{t,i} = \ln P_{t,i} - \ln P_{t,i-1}$ — внутридневная логарифмическая доходность. Выбор именно этой меры объясняется тем, что она хорошо аппроксимирует интегральную дисперсию и остается устойчивой к редким скачкам, что особенно важно при работе с высокочастотными данными.

Для устранения искусственных разрывов, связанных с дивидендными отсечками, используется ретроспективная корректировка цен на дивиденды:

$$\widetilde{P}_t = P_t \prod_{i:\, \tau_i > t} (1 - d_i), \tag{2}$$

где P_t — наблюдаемая цена, $\widetilde{P}_t$ — цена после дивидендной корректировки, τ_i — дата выплаты, d_i — дивидендная доходность в долях единицы. Дневные доходности строятся уже по скорректированному ценовому ряду.

Одномерная динамика реализованной волатильности: модель HARGL

В качестве базовой модели динамики цены и реализованной дисперсии используется спецификация HARGL, предложенная в работе [Corsi et al., 2013]. Ее ключевое преимущество состоит в том, что она одновременно задает динамику доходности и условное распределение реализованной дисперсии, сохраняя интерпретируемую HAR-структуру с несколькими временными горизонтами.

Однодневная логарифмическая доходность актива моделируется уравнением

$$y_{t+1} = r_t^{(f)} + \left(\widetilde{\gamma} - \frac{1}{2}\right) RV_{t+1} + \sqrt{RV_{t+1}}\,\varepsilon_{t+1}, \quad \varepsilon_{t+1} \sim \mathcal{N}(0,\,1), \tag{3}$$

где $y_{t+1} = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$ — однодневная логарифмическая доходность базового актива, S_t — цена актива в момент времени t, $r_t^{(f)}$ — однодневная логарифмическая безрисковая ставка, RV_{t+1} — реализованная дисперсия на интервале $(t,\, t+1]$, $\widetilde{\gamma}$ — параметр, задающий связь между условным средним доходности и реализованной дисперсией, а ε_{t+1} — стандартизованный случайный шок.

Динамика самой реализованной дисперсии задается через авторегрессионный гамма-процесс:

$$RV_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim \mathrm{ARG}(\delta,\, \phi_t,\, c), \tag{4}$$

где $\mathcal{F}_t$ обозначает информационное множество, доступное к моменту времени t, $\delta > 0$ — параметр формы, $c > 0$ — параметр масштаба, а ϕ_t — условный параметр нецентральности, зависящий от прошлой истории процесса. В рассматриваемой спецификации он имеет вид

$$\phi_t = \beta^{(d)} RV_t + \beta^{(w)} RV_t^{(w)} + \beta^{(m)} RV_t^{(m)} + \alpha L_t, \tag{5}$$

где $\beta^{(d)}$, $\beta^{(w)}$ и $\beta^{(m)}$ характеризуют вклад краткосрочной, среднесрочной и более инерционной компонент реализованной дисперсии соответственно, а α отвечает за асимметричную реакцию волатильности на отрицательные доходности.

HAR-компоненты и компонента эффекта финансового рычага определяются следующим образом:

$$RV_t^{(w)} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} RV_{t-i}, \quad RV_t^{(m)} = \frac{1}{17}\sum_{i=5}^{21} RV_{t-i}, \quad L_t = RV_t\,\mathbf{1}_{\{y_t<0\}}, \tag{6}$$

где $RV_t^{(w)}$ представляет собой недельную компоненту реализованной дисперсии, то есть среднее значение за последние четыре торговых дня, предшествующих моменту t, $RV_t^{(m)}$ — месячную компоненту, построенную по более длинному окну наблюдений, а L_t — асимметричную компоненту, активирующуюся только в случае отрицательной доходности. Здесь $\mathbf{1}_{\{y_t<0\}}$ есть индикаторная функция, равная единице, если выполняется условие $y_t < 0$, и нулю — в противном случае.

Экономический смысл модели состоит в следующем. Уравнение (3) задает доходность как сумму безрисковой ставки, поправки на реализованную дисперсию и случайного шока, масштаб которого зависит от текущего уровня волатильности. Уравнения (4)–(6) описывают эволюцию самой реализованной дисперсии: дневная, недельная и месячная компоненты позволяют учитывать эффект долгой памяти, а leverage-компонента — возможную асимметрию реакции волатильности на негативные движения рынка.

В рамках настоящей статьи данная модель рассматривается прежде всего под исторической мерой $\mathbb{P}$, поскольку именно в этой мере осуществляется оценивание параметров по наблюдаемым временным рядам и строится базовый симулятор ценовых траекторий. Переход к схеме ценообразования обсуждается далее отдельно, когда к сгенерированным траекториям применяется риск-нейтральная мартингальная корректировка.

Оценивание параметров

Необходимо оценить параметры

$$\delta, \quad c, \quad \beta^{(d)}, \quad \beta^{(w)}, \quad \beta^{(m)}, \quad \alpha, \quad \widetilde{\gamma}. \tag{7}$$

Параметры переходной динамики реализованной дисперсии —

$$\delta, \quad c, \quad \beta^{(d)}, \quad \beta^{(w)}, \quad \beta^{(m)}, \quad \alpha \tag{8}$$

— оцениваются методом максимального правдоподобия по данным о доходностях и двухстепенной вариации. После построения признаков RV_t, $RV_t^{(w)}$, $RV_t^{(m)}$ и L_t максимизируется логарифмическая функция правдоподобия HARGL-модели.

Параметр $\widetilde{\gamma}$, отвечающий за связь условной средней доходности с реализованной дисперсией, оценивается через робастную регрессионную постановку. После преобразования (3) получаем

$$\widetilde{y}_{t+1} = \widetilde{\gamma}\sqrt{RV_{t+1}} + \varepsilon_{t+1}, \quad \widetilde{y}_{t+1} := \frac{y_{t+1} - r_t^{(f)} + \frac{1}{2}RV_{t+1}}{\sqrt{RV_{t+1}}}. \tag{9}$$

Далее $\widetilde{\gamma}$ оценивается как решение задачи минимизации суммы потерь Хубера. Такая процедура делает оценку менее чувствительной к выбросам и согласуется с логикой [Corsi et al., 2013].

Симуляция цен и риск-нейтральная коррекция EMS

После оценивания HARGL-модель задает полную одномерную симуляционную динамику для пары процессов (RV_t, S_t) под исторической мерой. На каждом шаге сначала симулируется новое значение реализованной дисперсии из условного распределения (4), затем генерируется нормальная инновация ε_{t+1} и через (3) обновляется доходность и цена базового актива.

Важно подчеркнуть, что сам по себе такой симулятор не обеспечивает выполнение мартингального свойства дисконтированной цены. Именно поэтому используется метод EMS [Duan, Simonato, 1998]. Здесь уместно напомнить классическую логику фундаментальных теорем ценообразования активов. Первая фундаментальная теорема утверждает, что при отсутствии арбитража существует по крайней мере одна эквивалентная мартингальная мера. Вторая фундаментальная теорема связывает полноту рынка с единственностью такой меры [Hagan, Lesniewski, 2022]. В случае неликвидного рынка опционов нет возможности выбрать единственную риск-нейтральную меру. Поэтому EMS используется не как способ определения «истинной» риск-нейтральной меры, а как адекватная численная процедура, обеспечивающая выполнение эмпирического мартингального условия для дисконтированных симулированных цен:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rt}S_t \mid \mathcal{F}_\tau\right] = e^{-r\tau}S_\tau, \quad \tau \leqslant t. \tag{10}$$

EMS-коррекция реализуется рекурсивно:

$$S_i^*(t_j; n) = S_0\frac{Z_i(t_j; n)}{Z_0(t_j; n)}, \tag{11}$$

$$Z_i(t_j; n) = S_i^*(t_{j-1}; n)\frac{\widehat{S}_i(t_j)}{\widehat{S}_i(t_{j-1})}, \tag{12}$$

$$Z_0(t_j; n) = \frac{1}{n}e^{-rt_j}\sum_{i=1}^{n} Z_i(t_j; n), \tag{13}$$

где $\widehat{S}_i(t_j)$ — цена до корректировки, а $S_i^*(t_j; n)$ — цена после корректировки. Практически это означает, что исходные симулированные доходности сохраняются в максимально близком виде, но выборочное среднее дисконтированной цены на каждом шаге принудительно согласуется с условием мартингальности. Этот метод идейно схож с методами энтропийной минимизации для выбора риск-нейтральных мер (например, [Grandits, Rheinländer, 2002]), но существенно отличается в реализации, так как не влезает внутрь модели, а работает более верхнеуровнево.

После построения скорректированных траекторий цена европейского колл-опциона рассчитывается стандартным способом Монте-Карло:

$$C_0 = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\max\left(S_T^{(i)} - K,\, 0\right). \tag{14}$$

Хотя в численном примере ниже используется именно ванильный колл как наиболее прозрачный диагностический контракт, сама методика не ограничивается европейской выплатой. Те же траектории могут быть использованы для оценки азиатских, барьерных и иных инструментов с выплатой, зависящей от траектории цены. Для контрактов американского типа тот же генератор траекторий может быть дополнен стандартной регрессионной процедурой выбора оптимального момента исполнения.

Методика валидации

Валидация проводится в двух направлениях. Во-первых, необходимо проверить, насколько адекватно одномерная HARGL-модель описывает и прогнозирует реализованную волатильность в исторической мере $\mathbb{P}$. Для этого используется вневыборочная проверка прогнозного распределения по схеме расширяющегося окна с перекалибровкой модели. На каждом шаге модель переоценивается на всей доступной к этому моменту истории, после чего строится однодневный прогноз условного распределения:

$$RV_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim \mathrm{ARG}(\delta_t, \phi_t, c_t). \tag{15}$$

Здесь RV_{t+1} — реализованная дисперсия на следующий торговый день, $\mathcal{F}_t$ — информационное множество, доступное к моменту времени t, а δ_t, ϕ_t и c_t — параметры условного распределения, полученные при очередной перекалибровке модели.

Для каждого вневыборочного наблюдения вычисляется преобразование вероятностного интеграла (PIT):

$$u_{t+1} = \mathbb{P}\left(RV_{t+1}^* \leqslant RV_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right), \tag{16}$$

где RV_{t+1}^* обозначает случайную величину, имеющую прогнозное условное распределение модели. Затем строится нормализованный остаток

$$z_t = \Phi^{-1}(u_t), \tag{17}$$

где Φ^{-1} — обратная функция распределения стандартного нормального закона. Если условное распределение специфицировано корректно, последовательность $\{u_t\}$ должна быть близка к независимой равномерной выборке на [0, 1], а $\{z_t\}$ — к независимой выборке из $\mathcal{N}(0, 1)$.

Помимо формы распределения, оценивается и качество прогноза условного среднего. Для HARGL

$$\mathbb{E}\left[RV_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right] = c_t(\delta_t + \phi_t). \tag{18}$$

На основе этого условного среднего строится точечный прогноз $\widehat{RV}_t$, после чего рассчитываются метрики

$$\underset{RV}{\mathrm{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(\widehat{RV}_t - RV_t)^2}, \tag{19}$$

$$\mathrm{QLIKE} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left(\ln \widehat{RV}_t + \frac{RV_t}{\widehat{RV}_t}\right), \tag{20}$$

где N — число вневыборочных наблюдений, RV_t — фактически реализованная дисперсия, а $\widehat{RV}_t$ — ее модельный прогноз. Дополнительно оценивается фактическое покрытие центрального 90%-го прогнозного интервала.

Во-вторых, проверяется финансовая корректность итоговых цен колл-опционов. Если $C(K)$ — цена европейского колл-опциона со страйком K, то при отсутствии арбитража должны выполняться

$$C(K_2) \leqslant C(K_1), \quad K_2 > K_1, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 C(K)}{\partial K^2} \geqslant 0, \tag{22}$$

$$C(K, T) \geqslant \max\left(S_0 - Ke^{-rT}, 0\right), \tag{23}$$

$$C(K, T) \leqslant S_0. \tag{24}$$

Здесь S_0 — текущая цена базового актива, r — непрерывно начисляемая безрисковая ставка, а T — срок до погашения опциона. В дискретной реализации проверяются монотонность, выпуклость, а также верхняя и нижняя границы на сетке страйков с учетом статистического шума Монте-Карло.

Кроме того, отдельно проводится ограниченное внешнее сопоставление модельных цен с наблюдаемыми котировками (ценами продаж и покупок) ванильных опционов на акции Газпрома. Данная проверка не интерпретируется как полноценная рыночная калибровка или тест точного воспроизведения опционной поверхности. Ее цель существенно более узкая: понять, какой тип смещения дает внутренняя схема HARGL – EMS на неликвидном рынке — агрессивное занижение оценки или, напротив, консервативное завышение оценки относительно наблюдаемых котировок. Несмотря на общую проблему низкой ликвидности российского рынка опционов, для наиболее популярных акций и прежде всего для опционов at-the-money рыночные котировки нередко остаются достаточно репрезентативными, чтобы использовать их в качестве дополнительного ориентира при валидации модели.

Результаты ретроспективного тестирования модели реализованной волатильности

Для проверки качества спецификации HARGL-модели использовалось историческое тестирование на данных по акциям Газпрома. Минимальное обучающее окно составляло 800 торговых дней, а общее число вневыборочных прогнозов — 1303. Сводные метрики приведены в таблице 1.

Дополнительно в таблице 2 приведены усредненные значения параметров по последовательным перекалибровкам.

Полученные результаты в целом указывают на содержательно корректную работу модели. Среднее PIT равно примерно 0,46 при теоретическом ориентире 0,5, а среднее нормализованных

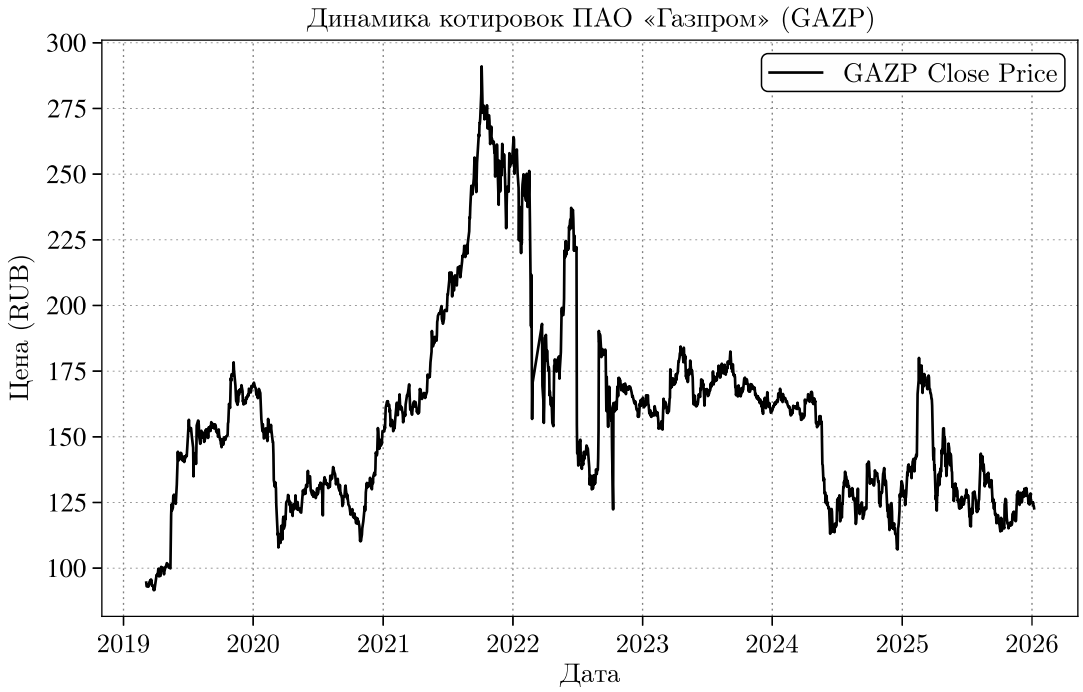


Рис. 1. Динамика цены акции ПАО «Газпром» на исследуемом историческом интервале: по горизонтальной оси указана дата наблюдения, по вертикальной — цена акции в рублях. Ценовой ряд использован для оценки модели HARGL и последующей вневыборочной проверки

Таблица 1. Результаты вневыборочной проверки прогнозного распределения HARGL-модели для акций ПАО «Газпром»

Показатель	Значение
Количество вневыборочных наблюдений	1303
Среднее PIT	0,4614
Среднее нормализованных остатков	−0,0632
Стандартное отклонение нормализованных остатков	0,7955
RMSE реализованной дисперсии (масштабированной)	17,2432
RMSE реализованной волатильности	0,0152
Потери QLIKE	2,7023
Покрытие 90%-го доверительного интервала	0,9639

Таблица 2. Сводные характеристики оцененных параметров HARGL-модели для акций ПАО «Газпром»

Параметр	Среднее значение
$\beta^{(d)}$	0,0344
$\beta^{(w)}$	0,0010
$\beta^{(m)}$	0,0038
α	0,0000
δ	0,6142
c	8,0228
Доля почти нулевых значений α	1,0000

остатков близко к нулю. Стандартное отклонение нормализованных остатков ниже единицы, что указывает на несколько более «сжатое» прогнозное распределение. При этом покрытие 90%-го интервала составляет 96,39 %, то есть интервалы оказываются консервативными. Для задач риск-

менеджмента и хеджирования такое свойство не обязательно является недостатком; скорее оно указывает на склонность модели не недооценивать риск. Более того, инвестиционным компаниям часто выгодно закладывать более высокое значение волатильности при хеджировании позиций, так как это позволяет увеличить вероятность получить положительную прибыль от реплицирующей стратегии [El Karoui et al., 1998]. На неликвидных рынках это свойство скорее является плюсом.

На рис. 1–3 показаны динамика базового актива, вневыборочная историческая валидация прогнозов реализованной волатильности и траектории оцененных параметров для акций ПАО «Газпром».

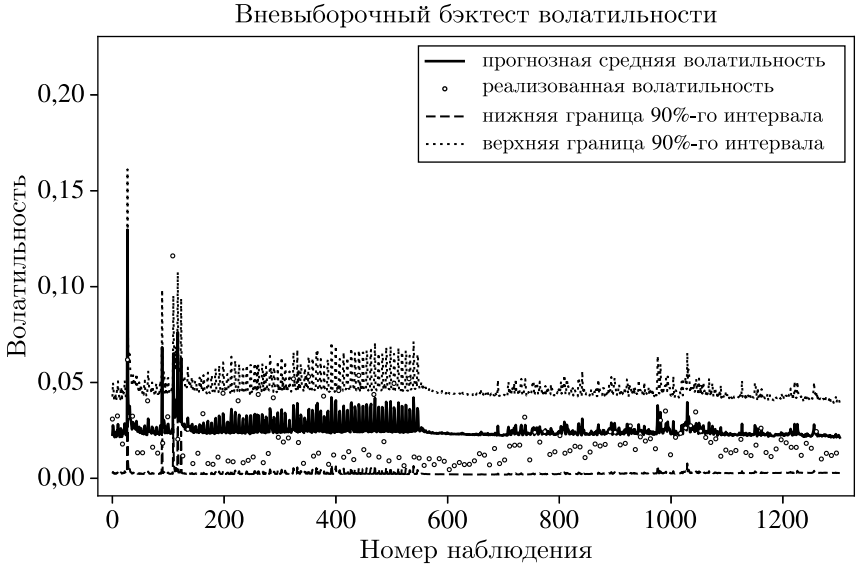


Рис. 2. Вневыборочная проверка однодневных прогнозов реализованной волатильности акций ПАО «Газпром» по модели HARGL. Показано сопоставление прогнозных и наблюдаемых значений; модель последовательно переоценивалась на расширяющемся обучающем окне. Всего получено 1303 вневыборочных прогноза

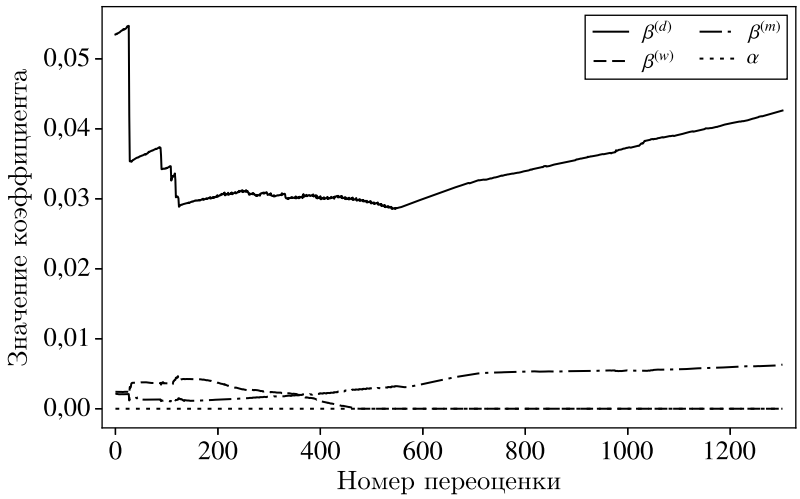


Рис. 3. Изменение оценок параметров модели HARGL для акций ПАО «Газпром» при последовательной переоценке на расширяющейся обучающей выборке. Каждая кривая соответствует параметру, обозначенному в легенде; горизонтальная ось показывает последовательность переоценок

По существу, ретроспективная вневыборочная валидация показывает, что модель хорошо различает периоды более высокой и более низкой волатильности, хотя условное среднее прогноза не всегда доходит до экстремальных пиков. Однако для симуляционного ценообразования существенно не только точечное среднее, но и форма условного распределения, а в этом смысле HARGL дает полезную и достаточно устойчивую динамику. Заметим также, что коэффициент α оказывается близким к нулю. Для рассматриваемого ряда это можно интерпретировать как слабое проявление классического эффекта финансового рычага в данной спецификации именно для акций ПАО «Газпром», для иных акций регрессия выдает положительное значение данного коэффициента.

Результаты ценообразования, проверка мартингальности и финансовой корректности

В качестве базового численного примера рассматривается ванильный европейский колл-опцион на один базовый актив. Параметры контракта и симуляции приведены в таблице 3.

Таблица 3. Основные параметры рассматриваемого европейского колл-опциона

Параметр	Значение
Идентификатор базового актива	BBG004730N88
Дата оценки	08.01.2026
Горизонт моделирования	126 торговых дней
Срок до погашения	$T = 0{,}5$ года
Начальная цена	$S_0 = 298{,}17$
Страйк	$K = 298{,}17$
Безрисковая ставка	$r = 0{,}1504$
Тип контракта	Стандартный европейский колл-опцион
Базовое число траекторий	10 000

При 10 000 траекториях HARGL – EMS дает оценку, приведенную в таблице 4.

Таблица 4. Базовый результат оценки ванильного колл-опциона методом HARGL – EMS

Параметр	Значение
Метод симуляции	HARGL – EMS
Оценка цены	42,1868
Стандартная ошибка Монте-Карло	0,6226
Относительная стандартная ошибка, %	1,4758
Максимальная относительная ошибка EMS, %	0,0000

Отдельно была проверена сама корректность EMS. В реализации контролировалось отклонение эмпирического мартингального условия (10) на каждом шаге временной сетки. Максимальная относительная ошибка оказалась практически нулевой, что подтверждает корректную работу процедуры.

Сходимость оценки по числу траекторий показана в таблице 5. Уже начиная с 10 000 симуляций цена стабилизируется вблизи уровня 42,1–42,2, а дальнейший рост числа траекторий в основном снижает стандартную ошибку, что соответствует теоретическому закону $N^{-1/2}$.

Финансовая корректность была дополнительно проверена на сетке страйков для акций ПАО «Сбербанк», где мы оценивали ванильный колл-опцион для 34 страйков нашей моделью. Результаты проверки статических условий отсутствия арбитража приведены в таблице 6. Нарушений монотонности, выпуклости и верхней и нижней границ не выявлено. Результаты оценки также можно посмотреть на рис. 4.

Таблица 5. Сходимость оценки стоимости европейского колл-опциона по числу симуляций

Число симуляций	Цена	Стандартная ошибка	Время, с
1000	42,1442	1,9283	2,12
10 000	42,1868	0,6226	1,71
100 000	42,0415	0,1952	10,16
1 000 000	42,1990	0,0621	123,48

Таблица 6. Результаты проверки условий отсутствия арбитража для цен колл-опционов

Проверка	Результат
Нарушения монотонности	0/33
Нарушения выпуклости	0/32
Нарушения нижней границы	0/34
Нарушения верхней границы	0/34
Итоговый вердикт	Нарушения не обнаружены

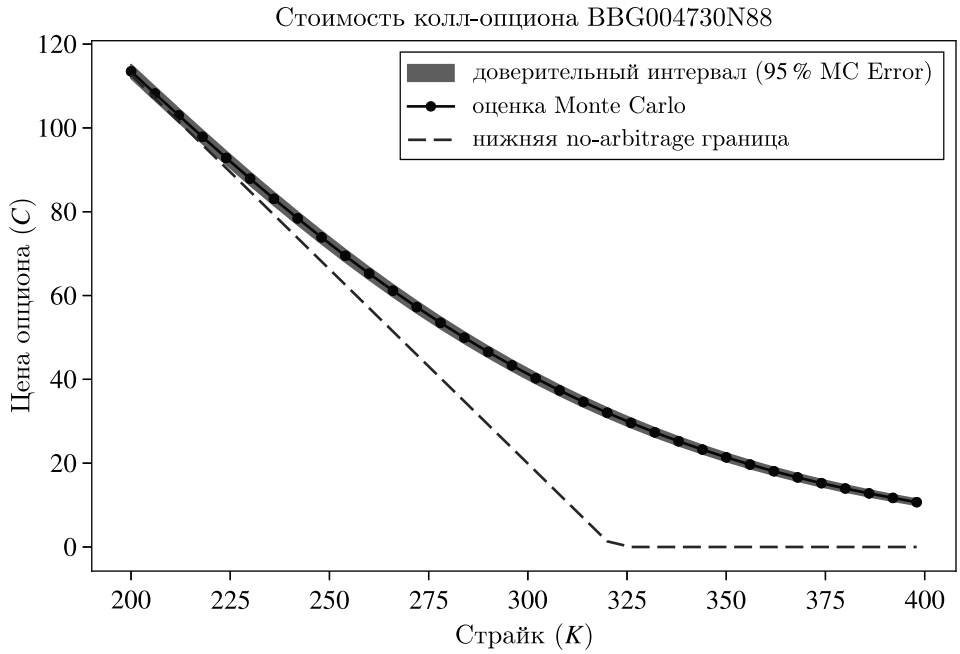


Рис. 4. Зависимость расчетной цены европейского колл-опциона на акцию ПАО «Сбербанк» от цены исполнения K. Цены рассчитаны методом HARGL – EMS для 34 значений K; график используется для проверки убывания и выпуклости цены опциона по цене исполнения

Особо важно сравнение EMS и стандартного Монте-Карло без коррекции. При одинаковых исходных параметрах стандартная схема дает цену 57,8547, то есть на 37,14 % выше базовой EMS-оценки. Это принципиальный результат: EMS здесь не является косметической поправкой, а существенно влияет на итоговый уровень цены. С практической точки зрения это означает, что игнорирование эмпирической мартингальной корректировки может приводить к заметному смещению.

Дополнительно было проведено сравнение модельных цен с биржевыми котировками ванильных колл-опционов на акции Газпрома. В качестве даты оценки использовалась дата торгов 27.03.2026, а в выборку вошли 15 опционов с тремя датами экспирации и пятью страйками. Сводные результаты приведены в таблице 7.

Таблица 7. Сводные результаты сопоставления модельных цен с рыночными котировками ванильных колл-опционов на акции Газпрома

Показатель	Значение
Количество опционов	15
Доля цен внутри интервала между котировками покупки и продажи	26,7 %
Доля цен выше котировки продажи	73,3 %
Доля цен ниже котировки покупки	0,0 %
Средняя абсолютная ошибка относительно котировки продажи	0,595
Медианная абсолютная ошибка относительно котировки продажи	0,353
Средняя относительная ошибка относительно котировки продажи	14,31 %
Медианная относительная ошибка относительно котировки продажи	9,95 %

Таблица 8 показывает сами рыночные котировки и соответствующие модельные оценки. Как видно, модель оказывается выше котировки продажи для 73,3 % опционов, а для 26,7 % попадает между котировками покупки и продажи.

С практической точки зрения такой результат можно интерпретировать двояко. С одной стороны, модель попадает между котировками покупки и продажи лишь для 26,7 % опционов, что абсолютно ожидаемо ввиду того, что модель не видела эти данные в процессе обучения и предсказания. С другой стороны, выявленное смещение носит консервативный характер: модель систематически завышает стоимость опциона, а не занижает ее. Для задач оценки продуктов и хеджирования позиций данная характеристика представляет некоторый консерватизм модели, который абсолютно оправдан на неликвидных рынках. Помимо этого, это улучшает потенциальную прибыльность репликации (что мы уже упомянали выше), хоть и делает продукт более дорогим. Тем не менее абсолютная величина ошибки не является большой (медианная абсолютная ошибка относительно цены продажи меньше 40 копеек), что говорит об умеренном консерватизме.

Такой результат важен интерпретационно. В рамках настоящей работы HARGL – EMS не рассматривается как рыночно-калиброванная модель оценки, предназначенная для точного восстановления наблюдаемой опционной поверхности. Напротив, речь идет о методике для неликвидного рынка, где ликвидная поверхность подразумеваемой волатильности отсутствует или недостаточно надежна. С этой точки зрения обнаруженное смещение имеет содержательно односторонний характер: модель скорее переоценивает стоимость опциона, чем недооценивает ее. Для задач оценки деривативов, хеджирования и риск-менеджмента такая асимметрия является более предпочтительной, чем недооценка, поскольку снижает риск систематического занижения стоимости обязательств и риска недооценки волатильности. Помимо этого, это улучшает потенциальную прибыльность репликационной стратегии (что мы уже упоминали выше), хоть и делает продукт более дорогим. При этом абсолютная величина отклонения остается умеренной: медианная абсолютная ошибка относительно цены продажи не превышает нескольких десятков копеек.

Таким образом, выбранная схема HARGL – EMS демонстрирует хорошую внутреннюю финансовую корректность, но лишь умеренную внешнюю согласованность с рыночными ценами ванильных опционов. Несмотря на неполноту рынка и бесчисленное множество эквивалентных мартингальных мер, эмпирическая риск-нейтральная корректировка позволяет обеспечить отсутствие арбитража и получить стабильную и адекватную оценку. При этом стоит трактовать данную коррекцию не как способ выбора единственной риск-нейтральной меры, а как довольно устойчивый и эффективный способ достижения мартингальности у симулированных траекторий.

Таблица 8. Биржевые котировки и модельные цены европейских колл-опционов на акции ПАО «Газпром». Цены указаны в рублях

Экспирация	Страйк K	Ставка, %	Цена покупки (bid)	Цена продажи (ask)	Оценка HARGL – EMS
Дата оценки: 27.03.2026; S_0 = 136,79 руб.					
01.04.2026	125	14,82	11,20	11,71	12,06
01.04.2026	130	14,82	6,37	6,62	7,27
01.04.2026	135	14,82	2,39	3,48	3,14
01.04.2026	140	14,82	0,60	1,15	0,93
01.04.2026	145	14,82	0,10	0,20	0,29
08.04.2026	125	14,82	11,72	12,91	12,70
08.04.2026	130	14,82	7,16	8,55	8,33
08.04.2026	135	14,82	3,62	3,93	4,77
08.04.2026	140	14,82	1,27	1,72	2,39
08.04.2026	145	14,82	0,32	1,01	1,12
17.06.2026	125	14,39	17,02	19,11	19,26
17.06.2026	130	14,39	13,27	14,50	15,94
17.06.2026	135	14,39	9,94	12,03	13,01
17.06.2026	140	14,39	7,42	9,20	10,49
17.06.2026	145	14,39	5,65	7,00	8,35

Анализ чувствительности и модельного риска

Для оценки устойчивости итоговой цены к изменениям входных параметров был проведен анализ чувствительности. Рассматривались: базовая EMS-схема, стандартная схема без EMS, рост начальной цены на 1 %, увеличение коэффициентов HARGL на 10 %, увеличение исторической интегрированной дисперсии на 10 % и увеличение прогнозной дисперсии на 10 %. Результаты приведены в таблице 9.

Таблица 9. Результаты анализа чувствительности модели и модельного риска

Сценарий	Цена	Ст. ошибка	Δ к EMS	Изм., %
Базовый расчет (EMS)	42,1868	0,6226	0,0000	0,0000
Расчет без EMS-коррекции	57,8547	0,7286	15,6679	37,1393
Рост начальной цены на 1 %	44,1626	0,6371	1,9757	4,6833
Рост $\beta^{(d)}$ на 10 %	43,1402	0,6452	0,9534	2,2598
Рост $\beta^{(w)}$ на 10 %	42,1868	0,6226	0,0000	0,0000
Рост $\beta^{(m)}$ на 10 %	42,3033	0,6253	0,1165	0,2761
Рост α на 10 %	42,1868	0,6226	0,0000	0,0000
Рост исторической интегрированной дисперсии на 10 %	42,1879	0,6226	0,0010	0,0025
Рост прогнозной дисперсии на 10 %	44,7391	0,6818	2,5523	6,0499

Из таблицы видно, что наибольшее влияние на цену оказывают три фактора. Во-первых, сама EMS-коррекция: отличие от стандартного Монте-Карло составляет более трети базовой цены. Во-вторых, чувствительность к уровню базового актива вполне ожидаемо остается существенной. В-третьих, заметный эффект дает увеличение прогнозной дисперсии, что согласуется с экономической логикой колл-опциона: рост ожидаемой волатильности повышает стоимость выпуклой выплаты.

В то же время изменения недельного коэффициента, коэффициента при компоненте эффекта финансового рычага и исторической интегрированной дисперсии почти не влияют на цену

в рассматриваемой конфигурации. Это означает, что для данного контракта и данного горизонта модельный риск сосредоточен не во всех параметрах одинаково. С прикладной точки зрения такой результат полезен: он позволяет выделить действительно значимые источники неопределенности и не тратить одинаковые ресурсы на контроль всех параметров без разбора.

Заключение

В статье предложен алгоритм для оценки деривативов на неликвидном рынке акций при отсутствии ликвидной поверхности подразумеваемой волатильности. Историческая динамика базового актива моделируется через модель реализованной волатильности HARGL, а переход к риск-нейтральному контексту обеспечивается через EMS. Такой выбор мотивирован природой неполного рынка: если риск-нейтральная мера не может быть надежно восстановлена из среза опционных котировок, необходимо использовать дополнительное конструктивное правило, обеспечивающее по крайней мере мартингальность дисконтированной цены.

Полученные результаты показывают, что одномерная HARGL-модель адекватно описывает общую динамику реализованной волатильности на российских данных. Историческая валидация указывает на приемлемую спецификацию распределения волатильности и одновременно на умеренную консервативность прогнозных интервалов. Эта консервативность не выглядит значимым недостатком; напротив, в задачах внутренней оценки и риск-менеджмента она может рассматриваться как практически полезное свойство.

С вычислительной точки зрения ключевым результатом является количественная значимость EMS-коррекции. В рассматриваемом примере разница между базовой оценкой HARGL – EMS и стандартным Монте-Карло без мартингальной корректировки оказывается большой. Следовательно, EMS здесь не только выполняет формальную безарбитражную функцию, но и существенно влияет на итоговую цену. Одновременно проверки по страйкам показывают отсутствие нарушений базовых безарбитражных условий, что подтверждает внутреннюю непротиворечивость предложенного алгоритма.

Сравнение с биржевыми котировками ванильных опционов на акции Газпрома показывает, что модель чаще завышает цену относительно цены продажи (ask), чем занижает ее относительно цены покупки (bid). Модель и не предназначена для точной репликации рыночной поверхности волатильности, но зато дает устойчивую и несильно консервативную оценку в условиях отсутствия ликвидности на рынке опционов. С одной стороны, такой результат подтверждает, что предложенная мера не совпадает с «рыночной» риск-нейтральной мерой в буквальном смысле. С другой стороны, для неликвидного рынка именно умеренно консервативная внутренняя оценка может быть более полезной, чем агрессивная и численно неустойчивая калибровка.

Проведенный анализ чувствительности показывает, что наибольший вклад в модельный риск дают EMS-коррекция, начальный уровень базового актива и прогнозная дисперсия. Это полезно и с научной, и с практической точки зрения: становится ясно, какие элементы схемы действительно требуют наиболее внимательной калибровки и мониторинга.

Таким образом, статья показывает, что связка HARGL и EMS может рассматриваться как работоспособный инструмент оценки деривативов на неликвидных рынках. Перспективы дальнейших исследований состоят в нескольких направлениях: в расширении модели на более богатые распределения инноваций, в добавлении скачкообразных компонент, в более глубоком сравнении с альтернативами типа realized-GARCH, а также в интеграции в алгоритм возможности оценивать деривативы с несколькими базовыми активами на основе совместных техник моделирования.

Благодарности

Авторы благодарят к. ф.-м. н. Сергея Владимировича Курочкина за ценные замечания и полезные обсуждения, способствовавшие улучшению работы.

Список литературы (References)

Банк России. Структурные облигации. — [Электронный ресурс]. — 2025. — https://cbr.ru/Content/Document/File/185549/structured_bonds_20251210.pdf
Bank Rossii. Strukturnye obligacii [Structured bonds]. — [Electronic resource]. — 2025. — https://cbr.ru/Content/Document/File/185549/structured_bonds_20251210.pdf (accessed: 09.02.2026) (in Russian).

Московская Биржа. Доска опционов по акциям Газпрома. — [Электронный ресурс]. — 2026. — https://www.moex.com/ru/derivatives/optionsdesk.aspx?code=GAZP&sid=1&sby=1&c4=on&c6=on&c7=on&submit=submit
Moskovskaya Birzha. Doska opcionov po akciyam Gazproma [Options board for Gazprom equity options]. — [Electronic resource]. — 2026. — https://www.moex.com/ru/derivatives/optionsdesk.aspx?code=GAZP&sid=1&sby=1&c4=on&c6=on&c7=on&submit=submit (accessed: 29.03.2026) (in Russian).

Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X., Labys P. Modeling and forecasting realized volatility // Econometrica. — 2003. — Vol. 71, No. 2. — P. 579–625. — DOI: 10.1111/1468-0262.00418

Avellaneda M., Buff R., Friedman C., Grandechamp N., Kruk L., Newman J. Weighted Monte Carlo: a new technique for calibrating asset-pricing models // International Journal of Theoretical and Applied Finance. — 2001. — Vol. 4, No. 1. — P. 91–119. — DOI: 10.1142/S0219024901000882

Barndorff-Nielsen O. E., Shephard N. Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps // Journal of Financial Econometrics. — 2004. — Vol. 2, No. 1. — P. 1–37. — DOI: 10.1093/jjfinec/nbh001

Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. — 1973. — Vol. 81, No. 3. — P. 637–654.

Chorro C., Guégan D., Ielpo F. Option pricing for GARCH-type models with generalized hyperbolic innovations // Quantitative Finance. — 2012. — Vol. 12, No. 7. — P. 1079–1094. — DOI: 10.1080/14697688.2010.493180

Corsi F. A simple approximate long-memory model of realized volatility // Journal of Financial Econometrics. — 2009. — Vol. 7, No. 2. — P. 174–196. — DOI: 10.1093/jjfinec/nbp001

Corsi F., Fusari N., La Vecchia D. Realizing smiles: options pricing with realized volatility // Journal of Financial Economics. — 2013. — Vol. 107, No. 2. — P. 284–304. — DOI: 10.1016/j.jfineco.2012.08.015

Duan J.-C. The GARCH option pricing model // Mathematical Finance. — 1995. — Vol. 5, No. 1. — P. 13–32. — DOI: 10.1111/j.1467-9965.1995.tb00099.x

Duan J.-C., Simonato J.-G. Empirical martingale simulation for asset prices // Management Science. — 1998. — Vol. 44, No. 9. — P. 1218–1233.

Dupire B. Pricing with a smile // Risk. — 1994. — Vol. 7, No. 1. — P. 18–20.

Fang Z., Han J.-Y. Realized GARCH model in volatility forecasting and option pricing // Computational Economics. — 2025. — Vol. 66. — P. 3637–3657.

Frittelli M. The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets // Mathematical Finance. — 2000. — Vol. 10, No. 1. — P. 39–52. — DOI: 10.1111/1467-9965.00079

Grandits P., Rheinländer T. On the minimal entropy martingale measure // The Annals of Probability. — 2002. — Vol. 30, No. 3. — P. 1003–1038. — DOI: 10.1214/aop/1029867119

Gulko L. The entropy theory of stock option pricing // International Journal of Theoretical and Applied Finance. — 1999. — Vol. 2, No. 3. — P. 331–355. — DOI: 10.1142/S0219024999000170

Guyon J., Lekeufack J. Volatility is (mostly) path-dependent // Quantitative Finance. — 2023. — Vol. 23, No. 9. — P. 1221–1258. — DOI: 10.1080/14697688.2023.2221281

Hagan P. S., Lesniewski A. Girsanov, numeraires, and all that. — Cambridge: Cambridge University Press, 2022.

Heston S. L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // The Review of Financial Studies. — 1993. — Vol. 6, No. 2. — P. 327–343.

El Karoui N., Jeanblanc-Picqué M., Shreve S. E. Robustness of the Black and Scholes formula // Mathematical Finance. — 1998. — Vol. 8, No. 2. — P. 93–126. — DOI: 10.1111/1467-9965.00047

Perrakis S., Ryan P. J. Option pricing bounds in discrete time // The Journal of Finance. — 1984. — Vol. 39, No. 2. — P. 519–525.

Zhang H., Tian Y., Zhang G. Dynamic option pricing model based on the realized-GARCH-NIG approach // Open Journal of Social Sciences. — 2016. — Vol. 4, No. 3. — P. 66–71. — DOI: 10.4236/jss.2016.43011