КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2026 Т. 18 № 5 С. 1205–1221
DOI: 10.20537/2076-7633-2026-18-5-1205-1221

Ки&М

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 519.257

Меры опережения локальными экстремумами статистик сейсмического шума относительно сейсмических событий перед мегаземлетрясением на Камчатке 29 июля 2025 года

А. А. Любушин[1,a], Г. Н. Копылова[2,b], В. А. Касимова[2,c]

[1]Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН,
Россия, 123242, г. Москва, Б. Грузинская ул., д. 10, стр. 1
[2]Камчатский филиал Федерального исследовательского центра «Единая геофизическая служба Российской академии наук»,
Россия, 683006, г. Петропавловск-Камчатский, бульвар Пийпа, д. 9

E-mail: [a] lyubushin@yandex.ru, [b] gala@emsd.ru, [c] vika@emsd.ru

Получено 15.06.2026, после доработки — 19.09.2026.
Принято к публикации 20.09.2026.

Интерес к проблеме прогноза землетрясений в обществе подвержен колебаниям в соответствии с законом повторяемости сильных сейсмических событий. Всякий раз после сильных землетрясений этот интерес реанимируется и возникает вопрос о том, можно ли было найти предвестники в изменениях геофизических полей, непрерывно регистрируемых сетями мониторинга в сейсмоактивных регионах. Для России таким значимым событием является мегаземлетрясение на Камчатке 29 июля 2025 года. В статье исследуются характеристики сейсмического шума, непрерывно измеряемого на сети 27 станций, расположенных на Камчатке с начала 2011 года по конец февраля 2026 года. В последовательных временных окнах длиной 1 сутки для каждой станции вычисляются три характеристики волновых форм вертикальных колебаний земной поверхности: ширина носителя мультифрактального спектра сингулярностей, энтропия распределения ортогональных вейвлет-коэффициентов и индекс Донохо – Джонстона, равный отношению больших по модулю вейвлет-коэффициентов к их общему числу. В скользящем временном окне длиной 365 суток вычисляется первая главная компонента высокочастотных составляющих медианных значений этих трех статистик по всем станциям сети после удаления локальных трендов гауссовским фильтром радиусом 2 суток и находятся наименьшие локальные минимумы первой главной компоненты. Число локальных минимумов выбиралось равным числу фоновых сейсмических событий с магнитудой не ниже 5,5. Рассматривается мера упреждения между двумя последовательностями событий — характеристика, которая принимает значения от 0 до 1 и определяется с помощью параметрической модели двух взаимодействующих точечных процессов, из которых одной последовательностью являются времена слабых землетрясений, а другой — времена наименьших локальных минимумов первой главной компоненты. Мера упреждения вычисляется в скользящем временном окне длиной 2,7 года, равном статистически значимому периоду колебаний интенсивности фоновых сейсмических событий. В результате проведенных оценок оказалось, что мера упреждения сейсмических событий вышла на максимальное значение, равное 1, за 5,5 года до момента времени мегаземлетрясения 29 июля 2025 года.

Ключевые слова: мультифракталы, вейвлеты, главные компоненты, параметрические модели интенсивности точечных процессов, сейсмические события, мегаземлетрясение, Камчатка

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, в рамках государственных заданий Института физики Земли РАН и Камчатского филиала Геофизической службы РАН.

© 2026 Алексей Александрович Любушин, Галина Николаевна Копылова, Виктория Александровна Касимова
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2026 VOL. 18 NO. 5 P. 1205–1221
DOI: 10.20537/2076-7633-2026-18-5-1205-1221

Ки&М

MODELS IN PHYSICS AND TECHNOLOGY

UDC: 519.257

Lead measures of local extremes of seismic noise statistics relative to seismic events before the mega-earthquake in Kamchatka on July 29, 2025

A. A. Lyubushin[1,a], G. N. Kopylova[2,b], V. A. Kasimova[2,c]

[1]Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences,
10/1 B. Gruzinskaya st., Moscow, 123242, Russia
[2]Kamchatka Branch, Geophysical Survey, Russian Academy of Sciences,
9 boulevard Piipa, Petropavlovsk-Kamchatskii, 683006, Russia

E-mail: [a] lyubushin@yandex.ru, [b] gala@emsd.ru, [c] vika@emsd.ru

Received 15.06.2026, after completion — 19.09.2026.
Accepted for publication 20.09.2026.

Public interest in earthquake prediction fluctuates in accordance with the recurrence of strong seismic events. Each time a strong earthquake occurs, this interest is revived, raising the question of whether precursors could have been found in changes in geophysical fields continuously recorded by monitoring networks in seismically active regions. For Russia, such a significant event is the mega-earthquake in Kamchatka on July 29, 2025. This article examines the characteristics of seismic noise continuously measured at a network of 27 stations located in Kamchatka from early 2011 to late February 2026. In successive one-day time windows, three characteristics of the waveforms of vertical oscillations of the earth's surface are calculated for each station: the width of the support of the multifractal spectrum of singularities, the entropy of the distribution of orthogonal wavelet coefficients, and the Donoho – Johnston index, equal to the ratio of the largest wavelet coefficients to their total number. In a sliding time window of 365 days, the first principal component of the high-frequency components of the median values of these three statistics is calculated for all stations in the network after removing local trends using a Gaussian filter of radius 2 days, and the smallest local minima of the first principal component are found. The number of local minima was chosen equal to the number of background seismic events with a magnitude of at least 5.5. The lead time between two event sequences is considered-a characteristic that takes values from 0 to 1 and is determined using a parametric model of two interacting point processes, one of which is the times of weak earthquakes, and the other is the times of the smallest local minima of the first principal component. The lead time is calculated over a 2.7-year sliding time window, equal to the statistically significant period of fluctuations in the intensity of background seismic events. The assessments revealed that the lead time for seismic events reached its maximum value of 1 5.5 years before the mega-earthquake of July 29, 2025.

Keywords: multifractals, wavelets, principal components, parametric models of point process intensity, seismic events, mega-earthquake, Kamchatka

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 5, pp. 1205–1221 (Russian).

The work was carried out with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, within the framework of state assignments of the Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences and the Kamchatka branch of the Geophysical Survey of the Russian Academy of Sciences.

© 2026 Alexey A. Lyubushin, Galina N. Kopylova, Victoria A. Kasimova
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

В статье рассматривается вопрос о наличии прогностических признаков в результатах непрерывных измерений случайных колебаний земной поверхности, регистрируемых на сети станций Камчатского филиала Единой геофизической службы РАН с начала 2011 года. В данной статье продолжаются исследования прогностических свойств сейсмического шума на Камчатке, выполненные в работах [Kopylova et al., 2022; Любушин и др., 2023]. Исследование связей свойств сейсмического шума в Японии, Южной Калифорнии и для глобальной сейсмической сети проведено в работах [Lyubushin, 2021a; Lyubushin, 2021b; Lyubushin, 2022; Lyubushin, 2026; Lyubushin, Rodionov, 2026]. Свойства низкочастотного сейсмического шума связаны с процессами подготовки землетрясений, поскольку они отражают изменения в земной коре, которая является средой распространения сейсмических волн.

Камчатский сейсмически активный регион расположен в северо-западной части Тихоокеанского сейсмического пояса на границе между Тихоокеанской океанической плитой и континентальными Евразийской и Североамериканской тектоническими плитами. На границах между Тихоокеанской плитой и континентальными плитами (зонах субдукции) в последние десятилетия произошло множество крупных землетрясений, в том числе землетрясение 04.11.1952 [MacInnes et al., 2010; Bilek, Lay, 2018] с магнитудой 8,8–9. 29 июля 2025 года в Курило-Камчатской зоне субдукции на восточном побережье Камчатского полуострова произошло землетрясение магнитудой 8,8, что всего на 73 года позже события 1952 года [Liu et al., 2026]. Основной толчок 2025 года магнитудой 8,8 (сейсмические события с магнитудой не менее 8 классифицируются как мегаземлетрясения) вызвал разрыв аналогичного участка, что и землетрясение 1952 года, и ему предшествовала серия предварительных сейсмических толчков (форшоков), начавшаяся 20 июля, причем самым сильным событием стала магнитуда 7,4. После мегаземлетрясения 29.07.2025 началась серия интенсивных вторичных толчков (афтершоков), из которых следует выделить два наиболее сильных с магнитудой 7,4 и 7,8. В таблице 1 представлена информация о наиболее сильных землетрясениях в окрестности Камчатки за промежуток времени с начала 2011 года (начало работы сети наблюдений за сейсмическим шумом) по текущее время.

Таблица 1. Землетрясения 2011–2025, имеющие магнитуду $M \geqslant 7{,}0$ согласно каталогу USGS (http://earthquake.usgs.gov/earthquakes). H — глубина гипоцентра, M — магнитуда события. Связь между энергией E (джоули), выделившейся в результате землетрясения, с магнитудой M задается формулой Гуттенберга – Рихтера $\lg(E) = 4{,}8 + 1{,}5M$

№	Дата, dd.mm.yyyy	Координаты, град., N, E	H, км	M
1	24.05.2013	54,89, 153,22	598	8,3
2	30.01.2016	53,98, 158,55	177	7,2
3	17.07.2017	54,44, 168,86	10	7,7
4	20.12.2018	55,10, 164,70	17	7,3
5	25.03.2020	48,96, 157,70	58	7,5
6	17.08.2024	52,93, 160,13	29	7,0
7	20.07.2025	52,83, 160,68	34	7,4
8	29.07.2025	52,50, 160,24	35	8,8
9	13.09.2025	53,20, 160,19	58	7,4
10	18.09.2025	53,14, 160,72	27	7,8

Отметим, что событие № 1 в таблице 1 (Охотоморское землетрясение) формально также может быть отнесено к классу мегаземлетрясений, так как его магнитуда превосходит 8. Но оно уникально по глубине залегания гипоцентра (почти 600 км), то есть находится в мантии Земли, и его анализ выпадает из данного исследования, поскольку ему предшествует слишком маленький интервал наблюдения за сейсмическим шумом с начала 2011 года. Кроме того,

процессы подготовки мантийных землетрясений существенно отличаются от подготовки землетрясений в земной коре и поэтому изменение свойств сейсмического шума, измеряемого на станциях, расположенных на поверхности Земли, с малой вероятностью отражает изменения на глубине 600 км.

2. Исходные данные о сейсмическом процессе

На рис. 1 и 2 представлена информация о сети сейсмических станций и сильнейших землетрясениях в окрестности Камчатки с начала 2011 года.

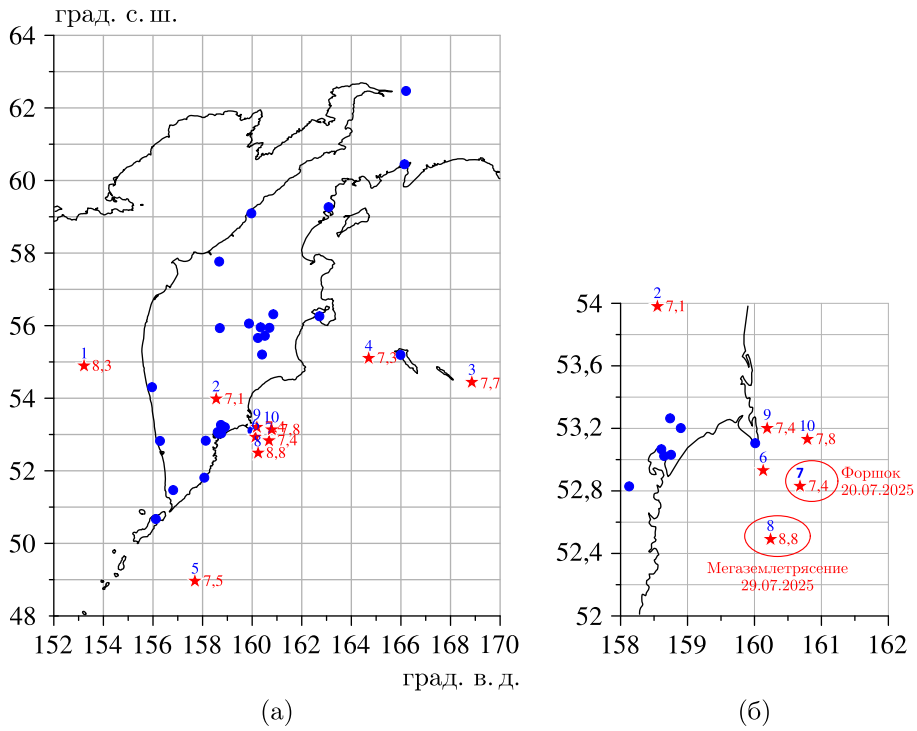


Рис. 1. Сеть 27 сейсмических станций на Камчатке, станции обозначены синими кружками, красными звездочками обозначены гипоцентры 10 землетрясений из таблицы 1. Синими цифрами над каждой звездочкой отмечены порядковые номера сильнейших землетрясений с магнитудой не ниже 7, красными цифрами справа от каждой звездочки указана магнитуда. Рисунок (б) представляет информацию в увеличенном пространственном масштабе для области, в которой сосредоточены 4 последние сильные сейсмических события с номерами 7–10. Эллипсами выделены форшок мегаземлетрясения 20.07.2025 (событие № 7) и само мегаземлетрясение 29.07.2025 (событие № 8). События с номерами 9 и 10 представляют собой сильнейшие афтершоки мегаземлетрясения

На рис. 3 представлена последовательность 113 событий фоновой сейсмичности, которые используются в качестве временных маркеров при изучении связи свойств сейсмического шума с сейсмичностью. Поскольку целью статьи является проверка гипотезы о наличии прогностических признаков мегаземлетрясения в свойствах сейсмического шума, то эта временная последовательность представлена строго до форшока (событие № 7 в таблице 1). Целью статьи является поиск предвестниковых эффектов в поведении сейсмического шума для двух близких по времени и по пространству событий с номерам 7 и 8, после которых пространственно-временная картина сейсмического процесса на Камчатке изменилась катастрофически.

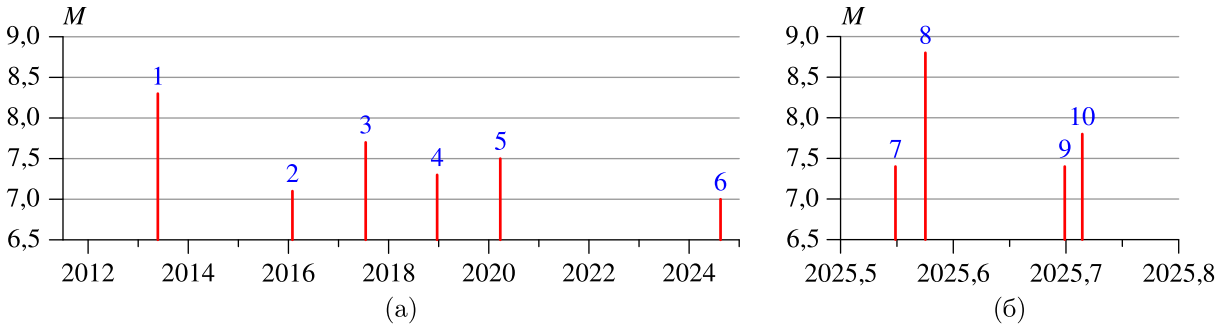


Рис. 2. Последовательность 10 сейсмических событий с магнитудой не менее 7, синими цифрами указаны порядковые номера из таблицы 1. Рисунок (б) представляет 4 последних сильных сейсмических события с номерами 7–10 в увеличенном временном масштабе

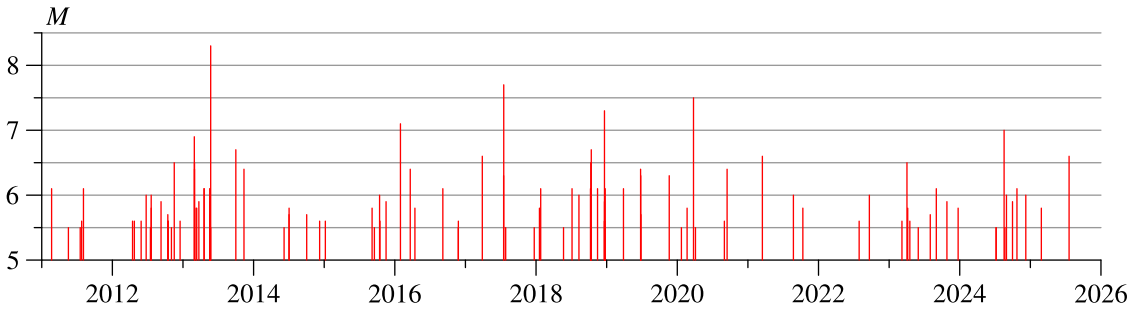


Рис. 3. Последовательность 113 сейсмических событий с магнитудой не менее 5,5 для интервала времени с начала 2011 года по 20.07.2025

3. Статистики сейсмического шума

Минимальная энтропия временного ряда определяется по формуле

$$En = -\sum_k q_k \cdot \frac{\ln(q_k)}{\ln(N)},$$

где

$$q_k = \frac{w_k^2}{\sum\limits_j w_j^2},$$

w_k — коэффициенты вейвлетов разложения сигнала, а N — общее число коэффициентов w_k. Было использовано 17 ортогональных вейвлетов Добеши: 10 обычных базисов с минимальной шириной носителя с числом обнуляемых моментов от 1 до 10 и 7 так называемых симлетов Добеши [Mallat, 1999] с числом обнуляемых моментов от 4 до 10. В каждом временном окне выбирается вейвлет, для которого значение En минимально. Эти ортогональные вейвлеты имеют наименьшую длину носителя для заданной гладкости — числа обнуляемых моментов.

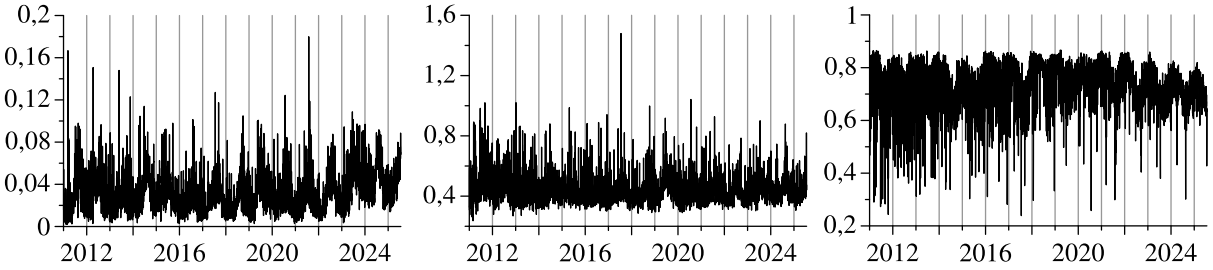
Индекс Донохо – Джонстона γ, основанный на вейвлетах, представляет собой отношение больших вейвлет-коэффициентов по абсолютному значению к их общему числу. По определению $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. Порог, разделяющий большие вейвлет-коэффициенты, равен $\sigma\sqrt{2 \cdot \ln N}$, где

$$\sigma = \frac{med\left\{\left|w_k^1\right|,\ k = 1, \ldots, \frac{N}{2}\right\}}{0{,}6745}$$

— робастная оценка стандартного отклонения нормального распределения, w_k^1 — вейвлет-коэффициенты на первом уровне детальности разложения, $\frac{N}{2}$ — число таких коэффициентов [Donoho, Johnstone, 1995; Mallat, 1999].

Ширина носителя спектра сингулярностей $\Delta\alpha$ рассматривается как мера разнообразия стохастического поведения сигнала $u(t)$. Она определяется как $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$, где $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$ являются минимальным и максимальным значениями показателя Гёльдера – Липшица [Taqqu, 1988], который определяет поведение сигнала вблизи момента времени t: $\left|u\left(t+\frac{\delta}{2}\right) - u\left(t-\frac{\delta}{2}\right)\right| \sim |\delta|^{\alpha}$, $\delta \to 0$. Для монофрактального сигнала показатель α одинаков для всех моментов времени t. Если этот показатель различается, то сигнал является мультифрактальным [Feder, 1988].

Анализировались непрерывные записи сейсмического шума по вертикальному каналу с частотой дискретизации 1 Гц, которые преобразовывались во временные ряды с шагом 1 минута путем вычисления последовательных средних во временных фрагментах длиной 60 отсчетов. После перехода на 1-минутный шаг дискретизации сейсмические записи с каждой станции были разделены на 1-дневные временные фрагменты (1440 отсчетов) и для каждого фрагмента были рассчитаны параметры (γ, $\Delta\alpha$, En) суточных сигналов сейсмического шума. Для расчета значений ширины носителя спектра сингулярностей использовался мультифрактальный метод анализа флуктуаций после удаления масштабно-зависимых трендов DFA [Kantelhardt et al., 2002]. Методы оценки параметров γ, $\Delta\alpha$ и En для записей сейсмического шума в скользящем временном окне подробно описаны в [Lyubushin, 2021a; Любушин и др., 2023]. Таким образом, для каждой из сейсмических станций были получены временные ряды значений с 1-дневным шагом. Далее вычислялись ежесуточные медианные значения этих свойств по всем станциям сети. Графики этих медианных значений представлены на рис. 4.



(а) Индекс Донохо – Джонстона (б) Ширина носителя спектра сингулярности (в) Минимальная вейвлетная нормализованная энтропия

Рис. 4. Ежесуточные медианные значения трех свойств сейсмического шума за промежуток времени с начала 2011 года по 20 июля 2025 года (до момента события № 7, форшока мегаземлетрясения)

Значение энтропии En, используемое в данной работе и определяемое коэффициентами ортогонального вейвлет-разложения, имеет общие черты с многомасштабной энтропией, используемой, например, в биологии [Costa et al., 2003; Costa et al., 2005]. Использование мультифрактального анализа для изучения поведения различных сложных систем имеет долгую историю. Особое внимание уделяется эффекту уменьшения параметра $\Delta\alpha$ (потери мультифрактальности), предшествующему изменениям свойств системы. В медицине снижение значения $\Delta\alpha$ для различных параметров сопровождает возрастные изменения [Ivanov et al., 1999; Dutta et al., 2013; Humeaua et al., 2008]. В [Telesca et al., 2005; Telesca, Lovallo, 2011] мультифрактальный анализ используется для анализа геоэлектрических сигналов и скорости ветра.

В работах [Lyubushin, 2021a; Lyubushin, 2021b; Lyubushin, 2022; Lyubushin, 2026; Любушин и др., 2023] распределение значений параметров сейсмического шума $\Delta\alpha$, γ и En по времени использовалось для оценки текущей сейсмической опасности, причем временные интервалы

с повышенной опасностью характеризовались пониженными значениями $\Delta\alpha$ и γ и повышенными значениями энтропии En.

В связи с этими свойствами используемых статистик шума для нас представляют интерес временные точки положения наименьших локальных минимумов значений $\Delta\alpha$ и γ и положения наибольших локальных максимумов энтропии En. Для устранения влияния низкочастотных компонентов изменений статистических значений на определение времени локальных экстремумов временные ряды характеристик шума были подвергнуты операции удаления низких частот с использованием сглаживания гауссовым ядром. Пусть $z(t)$ — временной ряд с дискретным временем t. Усреднение гауссовым ядром временного ряда $z(t)$ с радиусом (параметром масштаба) $a > 0$ в момент времени t вычисляется по формуле [Hardle, 1990]

$$\overline{z}(t|a) = \frac{\sum\limits_{\xi} z(\xi) \cdot e^{-\left(\frac{\xi - t}{a}\right)^2}}{\sum\limits_{\xi} e^{-\left(\frac{\xi - t}{a}\right)^2}}. \tag{1}$$

Поскольку ядро гауссова сглаживания, используемое в формуле (1), симметрично относительно нуля, положение локального экстремума, идентифицированного после удаления локального тренда в окрестности радиуса двух выборок, является несмещенным. Сама операция удаления локального тренда, благодаря быстрому затуханию ядра гауссова сглаживания, является локальной операцией, на результат которой влияет поведение исходного сигнала в окрестности каждой точки, радиус которой приблизительно равен двум выборкам. Обозначим через $W_{\Delta\alpha}^{(a)}(t)$, $W_{\gamma}^{(a)}(t)$ и $W_{En}^{(a)}(t)$ результат удаления локальных трендов из ежесуточных сигналов $\Delta\alpha(t)$, $\gamma(t)$ и $En(t)$ с помощью гауссова окна радиусом a, равным 2 дням.

Первоначально план дальнейших исследований заключался в совместном анализе временных точек положения наименьших локальных минимумов временных рядов $W_{\Delta\alpha}^{(a)}(t)$ и $W_{\gamma}^{(a)}(t)$ и наибольших локальных максимумов $W_{En}^{(a)}(t)$ и временных точек фоновой сейсмичности с магнитудой не менее 5,5 (рис. 3). Однако оказалось, что наилучший прогностический эффект такого анализа заключается в вычислении первой главной компоненты временных рядов $W_{\Delta\alpha}^{(a)}(t)$, $W_{\gamma}^{(a)}(t)$ и $W_{En}^{(a)}(t)$ в скользящем временном окне длиной 365 суток и выделении наименьших локальных минимумов первой главной компоненты. При этом число наименьших локальных минимумов бралось равным числу фоновых сейсмических событий, то есть 113. При использовании наибольших локальных максимумов первой главной компоненты искомый прогностический результат оказался существенно хуже.

4. Первая главная компонента в годовом скользящем временном окне

Рассмотрим многомерный временной ряд $p(t) = (p_1(t), \ldots, p_m(t))^T$, $t = 0, 1, \ldots$, размерностью m. Определим его первую главную компоненту [Jolliffe, 2002] в скользящем временном окне длиной L выборок. Для этого рассмотрим отсчеты с временными индексами t при условии $s - L + 1 \leqslant t \leqslant s$, где s — крайний правый край скользящего временного окна. Выполним нормализацию компонент многомерного временного ряда в пределах текущего временного окна:

$$q_k^{(s)}(t) = \left(p_k(t) - \overline{p}_k^{(s)}\right), \quad \overline{p}_k^{(s)} = \sum_{t=s-L+1}^{s} \frac{p_k(t)}{L}, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Рассмотрим корреляционную матрицу $Q(s)$ размером $m \times m$, которая вычисляется по формуле

$$Q(s) = \left(Q_{kj}^{(s)}\right), \quad Q_{kj}^{(s)} = \sum_{t=s-L+1}^{s} \frac{q_k^{(s)}(t) q_j^{(s)}(t)}{L}, \quad k, j = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Пусть $\phi^{(s)} = \left(\phi_1^{(s)}, \ldots, \phi_m^{(s)}\right)^T$ — собственный вектор матрицы $Q(s)$, соответствующий ее максимальному собственному значению. Определим первую главную компоненту $P^{(s)}(t)$ многомерного временного ряда $p(t)$ в текущем временном окне по формулам

$$P^{(s)}(t) = \sum_{k=1}^{m} \phi_k^{(s)} \cdot r_k^{(s)}(t) \tag{4}$$

и определим скалярный временной ряд $P(t)$ как адаптивную первую главную компоненту в скользящем временном окне по формулам

$$P(t) = \begin{cases} P^{(L-1)}(t), & 0 \leqslant t \leqslant (L-1), \\ P^{(t)}(t), & t \geqslant L. \end{cases} \tag{5}$$

Формулы (2)–(5) применяются независимо в каждом временном окне. Согласно этим формулам, в первом временном окне временной ряд $P(t)$ состоит из L значений, соответствующих (2)–(4). Во всех последующих окнах $P(t)$ соответствует единственному отчету в самом правом временном индексе. Таким образом, вне первого временного окна $P(t)$ зависит только от прошлых значений $p(t)$. В нашем случае агрегирование по методу главных компонент производится для трех временных рядов $W_{\Delta\alpha}^{(a)}(t)$, $W_{\gamma}^{(a)}(t)$ и $W_{En}^{(a)}(t)$, то есть $m = 3$. Будет использовано скользящее временное окно длиной 365 дней. Выбор такой длины вполне естественен, учитывая наличие годовой периодичности почти во всех фоновых процессах в земной коре. Мы предполагаем, что длина скользящего временного окна в 365 дней обеспечивает относительную стационарность поведения сейсмического шума в пределах этого временного окна.

На рис. 5 представлены графики временных рядов $W_{\Delta\alpha}^{(a)}(t)$, $W_{\gamma}^{(a)}(t)$, $W_{En}^{(a)}(t)$ и их первой главной компоненты $P(t)$ в скользящем временном окне длиной 365 суток. На графике первой главной компоненты синими точками отмечены 113 наименьших локальных минимумов временного ряда $P(t)$.

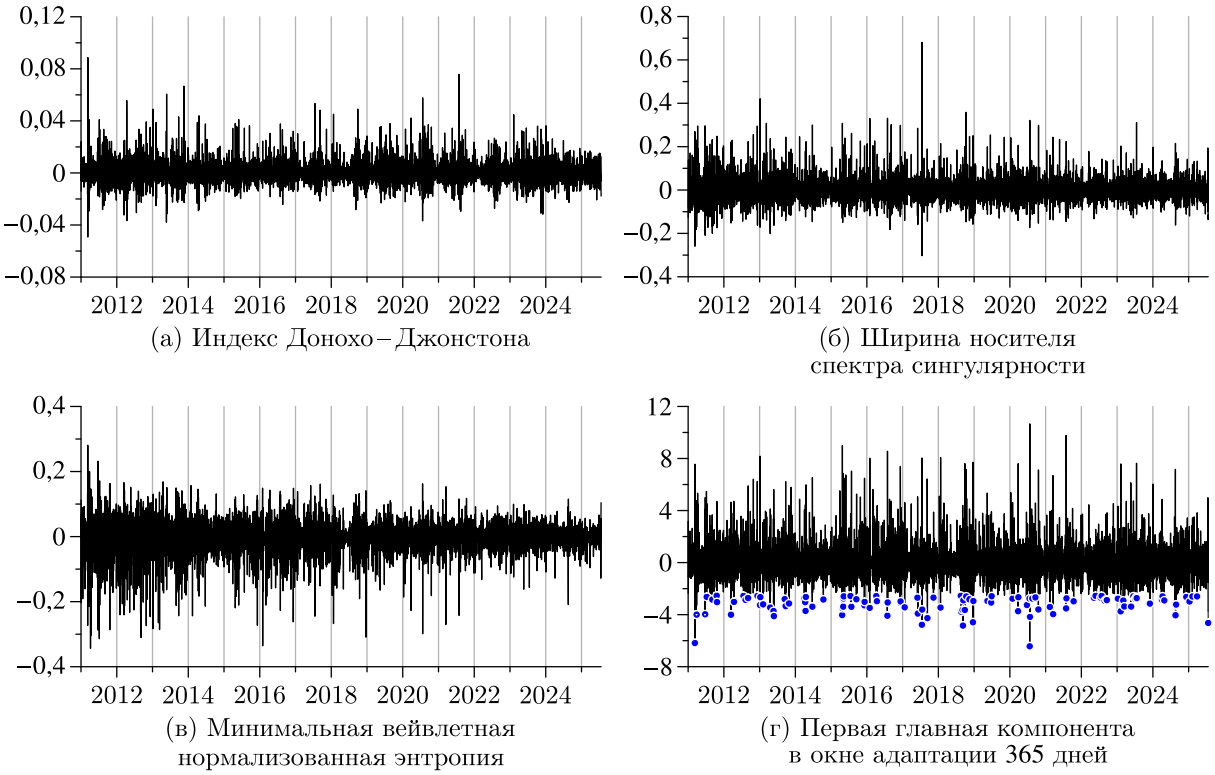
5. Определение длины скользящего временного окна для оценки мер опережения

План дальнейших исследований заключается в оценке эффекта запаздывания или опережения моментами времени локальных минимумов первой главной компоненты относительно моментов времени событий фоновой сейсмичности в скользящем временном окне некоторой длины. Возникает вопрос о том, какова должна быть длина этого окна. Далее мы руководствуемся соображениями, что эта длина должна отражать определенные свойства фоновой сейсмичности, в частности периодические компоненты изменения интенсивности слабых землетрясений.

Для выяснения этого вопроса рассмотрим следующую модель интенсивности произвольного потока событий t_i, $i = 1, \ldots, N$, на интервале времени $(0, T]$, содержащую периодическую составляющую [Любушин и др., 1998; Lyubushin, Rodionov, 2026]:

$$\lambda(t) = \mu \cdot (1 + a\cos(\omega t + \varphi)), \tag{6}$$

где ω — частота, амплитуда a, $0 \leqslant a \leqslant 1$, фазовый угол $\varphi \in [0, 2\pi]$ и множитель $\mu > 0$ (описывающий пуассоновскую составляющую интенсивности) являются параметрами модели. Таким образом, пуассоновская составляющая интенсивности модулируется гармоническими колебаниями.



(а) Индекс Донохо – Джонстона

(б) Ширина носителя спектра сингулярности

(в) Минимальная вейвлетная нормализованная энтропия

(г) Первая главная компонента в окне адаптации 365 дней

Рис. 5. (а), (б), (в) Графики ежесуточных временных рядов основных статистик сейсмического шума после удаления локальных трендов гауссовским окном радиусом 2 отсчета; (г) первая главная компонента в скользящем окне адаптации длиной 365 дней; синими точками отмечены 113 наименьших локальных минимумов первой главной компоненты. Все графики представляют безразмерные величины

Зафиксируем некоторое значение частоты ω. Логарифмическая функция правдоподобия [Cox, Lewis, 1966] в этом случае для ряда наблюдаемых событий равна

$$\ln L(\mu,\, a,\, \varphi|\omega) = \sum_i \ln(\lambda(t_i)) - \int_0^T \lambda(s)\, ds = \\ = N\ln(\mu) + \sum_i \ln(1 + a\cos(\omega t_i + \varphi)) - \mu T - \frac{\mu a}{\omega}[\sin(\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)]. \quad (7)$$

Взяв максимум выражения (7) по параметру μ, легко найти, что

$$\ln(L(\widehat{\mu},\, a,\, \varphi|\omega)) = \sum_i \ln(1 + a\cos(\omega t_i + \varphi)) + N \cdot \ln(\widehat{\mu}(a,\, \varphi|\omega)) - N, \quad (8)$$

где

$$\widehat{\mu}(a,\, \varphi|\omega) = \frac{N}{T + a \cdot \frac{\sin(\omega T+\varphi)-\sin\varphi}{\omega}}.$$

Следует отметить, что выражение $\widehat{\mu}(a = 0,\, \varphi|\omega) \equiv \mu_0 = \frac{N}{T}$ представляет собой оценку интенсивности процесса при условии его чисто случайного характера. Таким образом, приращение логарифмической функции правдоподобия, обусловленное рассмотрением более сложной модели интенсивности с гармонической составляющей с заданной частотой ω, чем для чисто случайного потока событий, равно

$$\Delta \ln L(a,\, \varphi|\omega) = \sum_i \ln(1 + a\cos(\omega t_i + \varphi)) + N \cdot \ln\left(\frac{\widehat{\mu}(a,\, \varphi|\omega)}{\mu_0}\right). \quad (9)$$

Пусть

$$R(\omega) = \max_{a,\varphi} \Delta \ln L(a, \varphi|\omega), \quad 0 \leqslant a \leqslant 1, \ \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{10}$$

Для фиксированного значения частоты ω мы рассматриваем две конкурирующие модели последовательностей землетрясений: простейшую модель стационарного пуассоновского процесса, описываемую одним параметром средней интенсивности μ_0, и более сложную модель (6), содержащую три параметра (μ, a, φ). Разница между максимальными значениями функции логарифмического правдоподобия для сложной модели данных (6) и простой модели пуассоновского процесса всегда неотрицательна и дает меру того, насколько более выгодна сложная модель по сравнению с простой. Согласно теореме Уилкса [Rao, 1965] эта разница асимптотически распределена как χ^2_m, где число степеней свободы равно разности между числом параметров конкурирующих моделей, то есть в нашем случае $m = 2$. Поскольку распределение χ^2_2 совпадает с экспоненциальным распределением, мы получаем следующее асимптотическое распределение:

$$\mathrm{P}(R(\omega) < x) = 1 - e^{-x}, \quad N \to \infty. \tag{11}$$

Выражение (11) позволяет установить пороговые значения для статистики, которые позволяют утверждать, что только при их превышении последовательность моментов времени отличается от пуассоновской последовательности с заданной вероятностью. На рис. 6 представлен график оценки статистики (10) для частот с 1000 значений периодов от 1 до 10 лет, взятых на сетке с равномерным шагом в логарифмическом масштабе. Для порога 6 вероятность принятия гипотезы о наличии периодической компоненты равна 0,997.

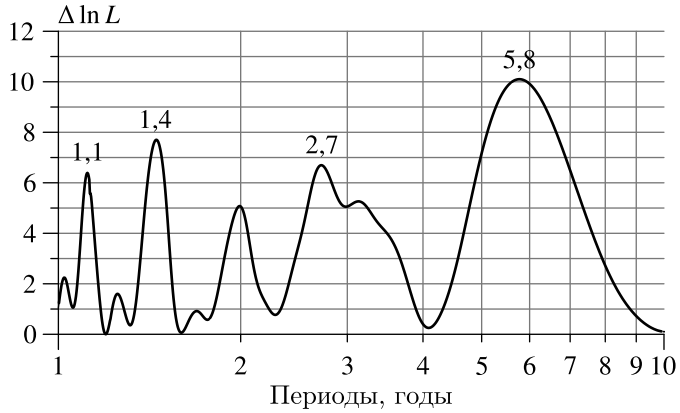


Рис. 6. График приращения логарифмической функции правдоподобия (10). Выделены периодические компоненты интенсивности последовательности землетрясений с магнитудами не менее 5,5 с периодами 1,1, 1,4, 2,7 и 5,8 лет

В результате оценки периодических компонент интенсивности сейсмических событий было выбрано временное окно длиной 2,7 года. Длины окон 1,1 и 1,4 года слишком короткие и не обеспечивают достаточно большого числа событий внутри окна. Что же касается длины окна 5,8 года, то оно слишком длинное для интервала наблюдений 2012–2025.

6. Меры опережения двух последовательностей событий

Для количественной оценки взаимного положения временных точек локальных минимумов первой главной компоненты и моментов времени землетрясений используется мера взаимного опережения точечных процессов, предложенная в [Любушин, Писаренко, 1993] для многомерного случая. Для частного случая совместной обработки двух точечных процессов этот метод использовался в работах [Lyubushin, 2022; Lyubushin, Rodionov, 2024a; Lyubushin, Rodionov,

2024b; Lyubushin, Rodionov, 2025a; Lyubushin, Rodionov, 2025b; Lyubushin et al., 2025; Lyubushin, 2026] для анализа связей свойств сейсмических шумов, флуктуаций глобального магнитного поля, GPS-тремора земной поверхности, свойств потока протонов от Солнца и аномалий метеорологических параметров с сейсмическим процессом.

Мера опережения вычисляется с помощью параметрической модели интенсивности двух взаимодействующих точечных процессов. Пусть $t_j^{(\alpha)}$, $j = 1, \ldots, N_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, представляют собой моменты времен двух потоков событий. Представим их интенсивности в виде

$$\lambda^{(\alpha)}(t) = b_0^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)} g^{(1)}(t) + b_2^{(\alpha)} g^{(2)}(t), \tag{12}$$

где $b_0^{(\alpha)} \geqslant 0$, $b_\beta^{(\alpha)} \geqslant 0$ — параметры, $g^{(\beta)}(t)$ — функция влияния событий $t_j^{(\beta)}$ потока с номером β:

$$g^{(\beta)}(t) = \sum_{t_j^{(\beta)} < t} \exp\left(-\frac{t - t_j^{(\beta)}}{\tau}\right). \tag{13}$$

Согласно формуле (8) вес события с номером j становится ненулевым для времен $t > t_j^{(\beta)}$ и затухает с характерным временем τ. Параметр $b_\beta^{(\alpha)}$ определяет степень влияния потока событий β на поток α. Параметр $b_\alpha^{(\alpha)}$ определяет степень влияния потока α на самого себя (самовозбуждение), а параметр $b_0^{(\alpha)}$ отражает чисто случайную (пуассоновскую) компоненту интенсивности. Зафиксируем параметр τ и рассмотрим задачу определения параметров $b_0^{(\alpha)}$, $b_\beta^{(\alpha)}$.

Логарифмическая функция правдоподобия для нестационарного пуассоновского процесса равна на интервале времени $(0, T]$ [Cox, Lewis, 1966]

$$\ln(L_\alpha) = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \ln\left(\lambda^{(\alpha)}\left(t_j^{(\alpha)}\right)\right) - \int_0^T \lambda^{(\alpha)}(s)\, ds, \quad \alpha = 1, 2. \tag{14}$$

Необходимо найти максимум функций (14) по отношению к параметрам $b_0^{(\alpha)}$, $b_\beta^{(\alpha)}$. Принимая во внимание формулу (12), можно записать производную от логарифмической функции правдоподобия по параметрам

$$\frac{\partial \ln(L_\alpha)}{\partial b_0^{(\alpha)}} = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \frac{1}{\lambda^{(\alpha)}\left(t_j^{(\alpha)}\right)} - \int_0^T ds, \quad \frac{\partial \ln(L_\alpha)}{\partial b_\beta^{(\alpha)}} = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \frac{g^{(\beta)}(t)}{\lambda^{(\alpha)}\left(t_j^{(\alpha)}\right)} - \int_0^T g^{(\beta)}(s)\, ds, \tag{15}$$

откуда и из формулы (12) следует

$$b_0^{(\alpha)} \frac{\partial \ln(L_\alpha)}{\partial b_0^{(\alpha)}} + \sum_{\beta=1}^{2} b_\beta^{(\alpha)} \frac{\partial \ln(L_\alpha)}{\partial b_\beta^{(\alpha)}} = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \left\{ \frac{b_0^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)} g^{(1)}\left(t_j^{(\alpha)}\right) + b_2^{(\alpha)} g^{(2)}\left(t_j^{(\alpha)}\right)}{\lambda^{(\alpha)}\left(t_j^{(\alpha)}\right)} \right\} -$$
$$- \int_0^T \left(b_0^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)} g^{(1)}(s) + b_2^{(\alpha)} g^{(2)}(s)\right) ds = N_\alpha - \int_0^T \lambda^{(\alpha)}(s)\, ds. \tag{16}$$

Поскольку параметры $b_0^{(\alpha)}$, $b_\beta^{(\alpha)}$ должны быть неотрицательными, то каждый член в самой левой части этой формулы равен нулю в точке максимума функции (14) — либо в силу необходимых

условий экстремума (если параметры положительны), либо, если максимум достигается на границе, сами параметры равны нулю. Следовательно, в точке максимума функции правдоподобия выполняется равенство

$$\int_0^T \lambda^{(\alpha)}(s)\,ds = N_\alpha. \tag{17}$$

Подставим выражение $g^{(\beta)}(t)$ из (13) в (17) и разделим на T. Тогда получим другой вид формулы (17):

$$b_0^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1}^{m} b_\beta^{(\alpha)} \cdot \overline{g}^{(\beta)} = \lambda_0^{(\alpha)} \equiv \frac{N_\alpha}{T}, \tag{18}$$

где

$$\overline{g}^{(\beta)} = \frac{\int_0^T g^{(\beta)}(s)\,ds}{T} \tag{19}$$

— среднее значение функции влияния. Подставляя $b_0^{(\alpha)}$ из (18) в (14), получим следующую задачу на максимум:

$$\Phi^{(\alpha)}\left(b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}\right) = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \ln\left(\lambda_0^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}\Delta g^{(1)}\left(t_j^{(\alpha)}\right) + b_2^{(\alpha)}\Delta g^{(2)}\left(t_j^{(\alpha)}\right)\right) \to \max_{b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}}, \tag{20}$$

где $\Delta g^{(\beta)}(t) = g^{(\beta)}(t) - \overline{g}^{(\beta)}$, при ограничениях

$$b_1^{(\alpha)} \geqslant 0, \quad b_2^{(\alpha)} \geqslant 0, \quad b_1^{(\alpha)}\overline{g}^{(1)} + b_2^{(\alpha)}\overline{g}^{(2)} \leqslant \lambda_0^{(\alpha)}. \tag{21}$$

Обозначим

$$Q^{(\alpha)}\left(t_j^{(\alpha)}\right) = \lambda_0^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1}^{2} b_\beta^{(\alpha)} \cdot \Delta g^{(\beta)}\left(t_j^{(\alpha)}\right).$$

Тогда матрица вторых производных (гессиан) функции (20) равна

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(\alpha)}}{\partial b_p^{(\alpha)}\,\partial b_q^{(\alpha)}} = -\sum_{j=1}^{N_\alpha} \frac{\Delta g^{(p)}\left(t_j^{(\alpha)}\right) \cdot \Delta g^{(q)}\left(t_j^{(\alpha)}\right)}{\left(Q^{(\alpha)}\left(t_j^{(\alpha)}\right)\right)^2}, \quad p, q = 1, 2. \tag{22}$$

Нетрудно убедиться в том, что гессиан (22) является отрицательно определенным и, следовательно, функция (20) выпукла вверх и имеет единственный максимум внутри ограниченного выпуклого множества, задаваемого неравенствами (21). Решив численно задачу (20)–(21) методом проекции градиента для заданного τ, можно ввести элементы матрицы влияния $\kappa_\beta^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, $\beta = 0, 1, 2$, согласно формулам

$$\kappa_0^{(\alpha)} = \frac{b_0^{(\alpha)}}{\lambda_0^{(\alpha)}} \geqslant 0, \quad \kappa_\beta^{(\alpha)} = \frac{b_\beta^{(\alpha)} \cdot \overline{g}^{(\beta)}}{\lambda_0^{(\alpha)}} \geqslant 0. \tag{23}$$

Величина $\kappa_0^{(\alpha)}$ является частью средней интенсивности $\lambda_0^{(\alpha)}$ процесса с номером α, являющейся чисто стохастической, часть $\kappa_\alpha^{(\alpha)}$ вызвана влиянием самовозбуждения $\alpha \to \alpha$ и $\kappa_\beta^{(\alpha)}$, $\beta \neq \alpha$ обусловлена внешним влиянием $\beta \to \alpha$. Из формулы (23) вытекает условие нормировки:

$$\kappa_0^{(\alpha)} + \kappa_1^{(\alpha)} + \kappa_2^{(\alpha)} = 1, \quad \alpha = 1, 2. \tag{24}$$

В результате можно определить матрицу влияния:

$$\begin{pmatrix} \kappa_0^{(1)} & \kappa_1^{(1)} & \kappa_2^{(1)} \\ \kappa_0^{(2)} & \kappa_1^{(2)} & \kappa_2^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Первый столбец матрицы (25) составлен из долей Пуассона средних интенсивностей. Диагональные элементы правой подматрицы размером 2×2 состоят из самовозбуждающихся элементов средней интенсивности, тогда как недиагональные элементы соответствуют взаимному возбуждению. Суммы составляющих строк матрицы влияния (25) равны 1. Матрицы влияния оцениваются в некотором скользящем временном окне длиной L со смещением ΔL и с заданным значением параметра затухания τ. Как уже было написано, длина L временного окна была выбрана равной 2,7 лет. Смещение временных окон ΔL равняется 0,01 года.

Далее производится оптимизация по параметру τ при заданной длине временного окна с целью максимизации среднего значения разности $\Delta\kappa = \kappa_2^{(1)} - \kappa_1^{(2)} \to \max\limits_{\tau}$, где $\kappa_2^{(1)}$ — часть интенсивности последовательности землетрясений (первого процесса), обусловленная влиянием последовательности локальных экстремумов (второго процесса), а $\kappa_1^{(2)}$ — часть интенсивности последовательности локальных экстремумов, обусловленная опережающим влиянием сейсмических событий. Условимся называть $\kappa_2^{(1)}$ прямым опережением, а $\kappa_1^{(2)}$ — обратным опережением. Чем больше разность $\Delta\kappa$, тем больше эффект опережения моментами времени локальных экстремумов относительно моментов времени землетрясений. В результате оптимизации по параметру τ было найдено его значение 0,286 года, для которого среднее значение разности $\Delta\kappa$ равно 0,453. Аналогичные вычисления для последовательности 113 наибольших локальных максимумов первой главной компоненты дали значение усредненной меры 0,265.

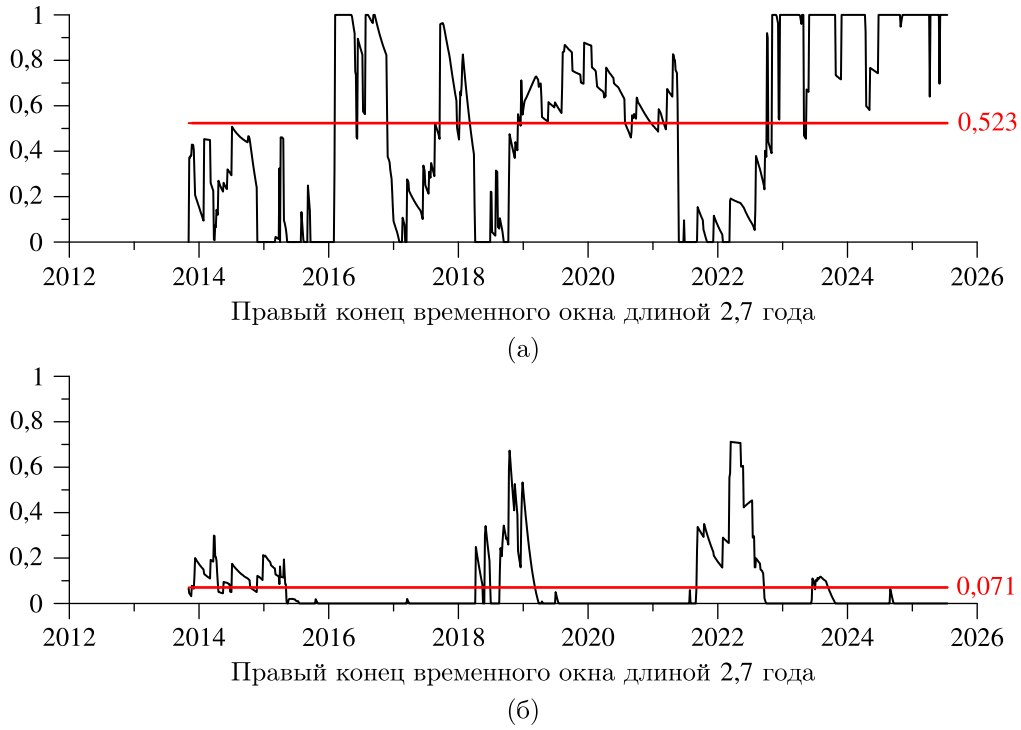


Рис. 7. (а) Прямая мера опережения локальными минимумами первой главной компоненты относительно моментов времени сейсмических событий; (б) обратная мера опережения моментами времени сейсмических событий относительно локальных минимумов первой главной компоненты. Красными горизонтальными линиями и цифрами показаны средние значения мер опережения

На рис. 7 показаны графики взаимных мер опережения в скользящем временном окне длиной 2,7 года со смещением 0,01 года.

Из графиков на рис. 7 видна динамика изменения мер взаимного опережения, и ярко проявляется прогностический эффект опережения временными точками локальных экстремумов первой главной компоненты моментов времени землетрясений фоновой сейсмичности на рис. 4, *а*. При этом следует отметить выход меры опережения на максимальное значение, равное 1, для почти всех положений правого конца скользящего временного окна начиная с метки 2022,8. Поскольку длина временного окна равна 2,7 года, то это означает, что полная длина проявления прогностического эффекта перед форшоком мегаземлетрясения равна 5,5 года.

7. Заключение

Предложен метод выделения предвестников мегаземлетрясения на Камчатке 29 июля 2025 года, основанный на вычислении интегральных свойств сети сейсмических наблюдений за низкочастотным шумом — ежесуточных мультифрактальных и энтропийных медианных статистик. Метод основан на вычислении первой главной компоненты временных рядов свойств шума в годовом скользящем временном окне после удаления локальных трендов и оценки взаимных мер опережения между моментами времени существенных локальных минимумов первой главной компоненты и моментами времени землетрясений фоновой сейсмичности. Оценки мер опережения производились с помощью параметрической модели интенсивности взаимодействующих точечных процессов в скользящем временном окне, длина которого (2,7 года) равна статистически значимому периоду интенсивности фоновой сейсмичности. В результате проведенных оценок получен предвестниковый эффект мегаземлетрясения, заключающийся в выходе меры опережения локальных минимумов первой главной компоненты относительно сейсмических событий на максимальное значение, равное 1, за 5,5 года до форшока мегаземлетрясения.

Аппарат мер опережения, используемый в этой статье, дает возможность формально описать причинно-следственные связи между различными природными и антропогенными процессами. Первоначально этот метод был разработан для решения узкой задачи — анализа связей между последовательностями сейсмических событий в различных сейсмоактивных регионах [Любушин, Писаренко, 1993] — и был назван методом матриц влияния. Однако позже было осознано, что этот метод является универсальным средством построения количественной меры влияния одной последовательности событий на другую, не обязательно землетрясений.

Для двух обычных временных рядов с постоянным шагом по времени для оценки линейной связи друг с другом может быть использован коэффициент корреляции. В этом случае степень линейной связи оценивается как модуль или квадрат модуля коэффициента корреляции, причем эта мера линейной связи является симметричной. Если интересоваться частотной зависимостью меры линейной связи между двумя временными рядами, то можно использовать квадрат модуля спектра когерентности.

При рассмотрении двух реализаций точечных процессов (последовательностей времен событий) вопрос оценки степени их взаимной связи является более сложным как с теоретической, так и с методической точки зрения. Эти сложности обусловлены тем, что последовательности времен могут содержать как «затишья» (длительные интервалы отсутствия событий), так и «рои событий», когда промежуток времени между соседними событиями становится малым. Очевидно, что мера связи между двумя точечными процессами не может быть симметричной, подобно коэффициенту корреляции или спектру когерентности, поскольку если одна последовательность событий в среднем на некотором временном масштабе τ всегда предваряет другую, то одна из них может быть названа причиной, а вторая — следствием. Если их поменять местами, то это должно отражаться и в оценке меры связи между последовательностями событий.

Очевидно также, что степень влияния одной последовательности событий на другую должна зависеть от временного масштаба τ, на котором они рассматриваются. Поэтому программа оценки содержит свободный параметр времени τ (характерное время сравниваемых точечных процессов), который должен выбираться пользователем из физических или каких-то других соображений. Практически выбор этого параметра осуществляется путем перебора по разумному множеству значений и сравнением результатов для различных τ. В данном случае критерием выбора времени τ была максимальная средняя разность между элементами матриц влияния, отвечающих за взаимное возбуждение точечных процессов.

Если необходимо анализировать связи между каким-то точечным процессом (в нашем случае — последовательностью землетрясений) и данными мониторинга непрерывных процессов, которые представляют собой обычные временные ряды с постоянным шагом по времени, то возникает проблема, как из этих временных рядов получить другую последовательность моментов времени для того, чтобы можно было ее использовать в аппарате матриц влияния. Нужна последовательность некоторых характерных временных точек данных непрерывного мониторинга. Опыт показывает, что такими информативными точками являются локальные экстремумы мультифрактальных и энтропийных характеристик временных рядов систем мониторинга [Lyubushin, 2026].

Важным моментом используемого метода является возможность оценки в скользящем временном окне. Таким образом, помимо характерного времени τ, еще одним свободным параметром, который необходимо найти, является длина временного окна. В данном случае длина временного окна выбрана равной периоду локального максимума приращения логарифмической функции правдоподобия модели интенсивности последовательности землетрясений, содержащей периодическую компоненту, по сравнению с чисто случайной пуассоновской моделью. Однако и длина временного окна может быть включена в список параметров, которые определяются из условия максимума средней разности между элементами матриц влияния, отвечающих за взаимное возбуждение точечных процессов [Lyubushin, Rodionov, 2025b].

Используемый метод обладает значительным потенциалом его применения не только в задачах геофизики и прогноза землетрясений, но и в любой другой области прикладного анализа данных, где необходимо получить формальную количественную меру, описывающую нестационарную степень взаимного влияния между двумя последовательностями событий.

Список литературы (References)

Любушин А. А., Копылова Г. Н., Касимова В. А., Таранова Л. Н. Мультифрактальные и энтропийные статистики сейсмического шума на Камчатке в связи с сильнейшими землетрясениями // Компьютерные исследования и моделирование. — 2023. — Т. 15, № 6. — С. 1509–1523. — https://doi.org/10.20537/2076-7633-2023-15-6-1507-1521

Lyubushin A. A., Kopylova G. N., Kasimova V. A., Taranova L. N. Mul'tifraktal'nye i entropijnye statistiki sejsmicheskogo shuma na Kamchatke v sviazi s sil'nejshimi zemletriaseniiami [Multifractal and entropy statistics of seismic noise in Kamchatka in connection with the strongest earthquakes] // Computer Research and Modeling. — 2023. — Vol. 15, No. 6. — P. 1507–1521 (in Russian).

Любушин А. А., Писаренко В. Ф. Исследование сейсмического режима с помощью линейной модели интенсивности взаимодействующих точечных процессов // Физика Земли. — 1993. — № 12. — С. 81–87.

Lyubushin A. A., Pisarenko V. F. Research on seismic regime using linear model of intensity of interacting point processes // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. — 1994. — Vol. 29. — P. 1108–1113. (Original Russian paper: *Lyubushin A. A., Pisarenko V. F.* Issledovanie sejsmicheskogo rezhima s pomoshch'iu linejnoj modeli intensivnosti vzaimodejstvuiushchih tochechnyh processov // Fizika Zemli. — 1993. — No. 12. — P. 81–87.)

Любушин А. А., Писаренко В. Ф., Ружич В. В., Буддо В. Ю. Выделение периодичностей в сейсмическом режиме // Вулканология и сейсмология. — 1998. — № 1. — С. 62–76.

Lyubushin A. A., Pisarenko V. F., Ruzich V. V., Buddo V. Yu. A new method for identifying seismicity periodicities // Volcanology and Seismology. — 1998. — Vol. 20. — P. 73–89. (Original Russian paper: *Lyubushin A. A., Pisarenko V. F.,*

Ruzhich V. V., Buddo V. Yu. Vydelenie periodichnostej v sejsmicheskom rezhime // Vulkanologiia i sejsmologiia. — 1998. — No. 1. — P. 62–76.)

Bilek S. L., Lay T. Subduction zone megathrust earthquakes // Geosphere. — 2018. — Vol. 14, No. 4. — P. 1468–1500. — https://doi.org/10.1130/GES01608.1

Costa M., Goldberger A. L., Peng C.-K. Multiscale entropy analysis of biological signals // Physical Review. — 2005. — Vol. 71. — P. 021906.

Costa M., Peng C.-K., Goldberger A. L., Hausdorf J. M. Multiscale entropy analysis of human gait dynamics // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2003. — Vol. 330, No. 1. — P. 53–60.

Cox D. R., Lewis P. A. W. The statistical analysis of series of events. — London: Methuen, 1966.

Donoho D. L., Johnstone I. M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage // Journal of the American Statistical Association. — 1995. — Vol. 90, No. 432. — P. 1200–1224.

Dutta S., Ghosh D., Chatterjee S. Multifractal detrended fluctuation analysis of human gait diseases // Front. Physiol. — 2013. — Vol. 4. — Art. 274. — https://doi.org/10.3389/fphys.2013.00274

Feder J. Fractals. — New York, London: Plenum Press, 1988.

Hardle W. Applied nonparametric regression. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

Humeaua A., Chapeau-Blondeau F., Rousseau D., Rousseau P., Trzepizur W., Abraham P. Multifractality, sample entropy, and wavelet analyses for age-related changes in the peripheral cardiovascular system: preliminary results // Med. Phys., Am. Assoc. Phys. Med. — 2008. — Vol. 35, No. 2. — P. 717–727.

Ivanov P. Ch., Amaral L. A. N., Goldberger A. L., Havlin S., Rosenblum M. G., Struzik Z. R., Stanley H. E. Multifractality in human heartbeat dynamics // Nature. — 1999. — Vol. 399. — P. 461–465.

Jolliffe I. T. Principal component analysis. — New York, NY: Springer 2002.

Kantelhardt J. W., Zschiegner S. A., Konscienly-Bunde E., Havlin S., Bunde A., Stanley H. E. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series // Physica A. — 2002. — Vol. 316. — P. 87–114.

Kopylova G., Kasimova V., Lyubushin A., Boldina S. Variability in the statistical properties of continuous seismic records on a network of stations and strong earthquakes: a case study from the Kamchatka Peninsula, 2011–2021 // Applied Sciences. — 2022. — Vol. 12. — P. 8658. — https://doi.org/10.3390/app12178658

Liu C., Bai Y., Lay T., He P., Wen Y., Xiong X., Taymaz T. Simple unilateral rupture of the great M_w 8.8 2025 Kamchatka earthquake // Science. — 2026. — Vol. 391, No. 6787. — P. 812–817. — https://www.science.org/doi/10.1126/science.aeb8232

Lyubushin A. Low-frequency seismic noise properties in the Japanese Islands // Entropy. — 2021a. — Vol. 23. — P. 474. — https://doi.org/10.3390/e23040474

Lyubushin A. A. Seismic noise wavelet-based entropy in Southern California // Journal of Seismology. — 2021b. — Vol. 25. — P. 25–39. — https://doi.org/10.1007/s10950-020-09950-3

Lyubushin A. Investigation of the global seismic noise properties in connection to strong earthquakes // Frontiers in Earth Science. — 2022. — Vol. 10. — P. 905663. — https://doi.org/10.3389/feart.2022.905663

Lyubushin A. Multifractal and entropic properties of seismic noise in the Japanese Islands // Fractal and Fractional. — 2026. — Vol. 10, No. 2. — P. 122. — https://doi.org/10.3390/fractalfract10020122

Lyubushin A., Rodionov E. Prognostic properties of instantaneous amplitudes maxima of Earth surface tremor // Entropy. — 2024a. — Vol. 26, No. 8. — P. 710. — https://doi.org/10.3390/e26080710

Lyubushin A., Rodionov E. Wavelet-based correlations of the global magnetic field in connection to strongest earthquakes // Advances in Space Research. — 2024b. — Vol. 74, No. 8. — P. 3496–3510. — https://doi.org/10.1016/j.asr.2024.06.046

Lyubushin A., Rodionov E. Quantitative assessment of the trigger effect of proton flux on seismicity // Entropy. — 2025a. — Vol. 27, No. 5. — P. 505. — https://doi.org/10.3390/e27050505

Lyubushin A., Rodionov E. The relationship between the seismic regime and low-frequency variations in meteorological parameters measured at a network of stations in Japan // Atmosphere. — 2025b. — Vol. 16, No. 10. — P. 1129. — https://doi.org/10.3390/atmos16101129

Lyubushin A., Rodionov E. Relationship of multifractal and entropic properties of global seismic noise with major earthquakes, 1997–2025 // Fractal and Fractional. — 2026. — Vol. 10, No. 4. — P. 267. — https://doi.org/10.3390/fractalfract10040267

Lyubushin A., Kopylova G., Rodionov E., Serafimova Y. An analysis of meteorological anomalies in Kamchatka in connection with the seismic process // Atmosphere. — 2025. — Vol. 16, No. 1. — P. 78. — https://doi.org/10.3390/atmos16010078

MacInnes B. T., Weiss R., Bourgeois J., Pinegina T. K. Slip distribution of the 1952 Kamchatka great earthquake based on near-field tsunami deposits and historical records // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2010. — Vol. 100, No. 4. — P. 1695–1709. — https://doi.org/10.1785/0120090376

Mallat S. A. Wavelet tour of signal processing. — 2nd edition. — San Diego, London, Boston, New York, Sydney, Tokyo, Toronto: Academic Press, 1999.

Rao C. R Linear statistical inference and its applications. — N.Y., London, Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1965.

Taqqu M. S. Self-similar processes // Encyclopedia of Statistical Sciences. — New York, NY: Wiley, 1988. — Vol. 8. — P. 352–357.

Telesca L., Colangelo G., Lapenna V. Multifractal variability in geoelectrical signals and correlations with seismicity: a study case in southern Italy // Nat. Hazard. Earth Syst. Sci. — 2005. – Vol. 5, No. 5. — P. 673–677.

Telesca L., Lovallo M. Analysis of the time dynamics in wind records by means of multifractal detrended fluctuation analysis and the Fisher – Shannon information plane // J. Stat. Mech. — 2011. — P07001. — https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-5468/2011/07/P07001