КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2026 Т. 18 № 5 С. 1189–1203
DOI: 10.20537/2076-7633-2026-18-5-1189-1203

Ки&М

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 530.182.1

Излучение бризеров уравнения Клейна – Гордона в модели с примесями

Е. Г. Екомасов[a], Д. К. Кабанов[b], М. И. Фахретдинов[c]

Уфимский университет науки и технологий,
Россия, 450076, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32/1

E-mail: [a] ekomasoveg@gmail.com, [b] danya.kabanov.95@mail.ru, [c] fmi106tf@gmail.com

Получено 30.05.2026, после доработки — 17.07.2026.
Принято к публикации 23.08.2026.

С помощью численных методов исследованы пространственно-временная структура и спектральные свойства излучения долгоживущих нелинейных локализованных волн бризерного типа для двух нелинейных дифференциальных уравнений типа Клейна – Гордона — уравнения синус-Гордона и уравнения φ^4 — при наличии одномерной пространственной модуляции потенциала, играющей роль притягивающей примеси. Рассмотрен случай протяженной примеси прямоугольного профиля, которая выступает в качестве потенциальной ямы для движущегося топологического солитона (кинка) и генератора локализованных колебаний. Для решения начально-краевых задач применялись метод конечных разностей и метод линий. В целях повышения вычислительной производительности и сокращения времени моделирования реализована векторная оптимизация численных алгоритмов на языке Python с использованием библиотеки NumPy, что позволило сохранить требуемую точность расчетов на длительных временных интервалах. Установлено, что возбуждаемые после прохождения примеси локализованные волны сопровождаются постепенным затуханием их амплитуды из-за потери энергии на излучение волн. Временная зависимость этого излучения разделена на зоны сильной и слабой нелинейности. В первой из них излучения прошедшего кинка накладываются на излучение возбужденного бризера. Спектральный анализ Фурье излучаемых волн выявил наличие двух основных частот во всех исследованных точках наблюдения: первая соответствует нижней границе линейного фононного спектра ($\omega \approx 1$ для синус-Гордона и $\omega \approx \sqrt{2}$ для φ^4), а вторая связана с собственной частотой колебаний бризера. Для уравнения синус-Гордона вторая частота равна утроенной частоте колебаний бризера, тогда как для уравнения φ^4 — удвоенной частоте. Выявлено, что по мере удаления от примеси вклад частоты фононного спектра становится доминирующим. Показано, что амплитуда излучения медленно убывает со временем, следуя за уменьшением амплитуды самого бризера, а ее абсолютная величина вдали от примеси для случая уравнения синус-Гордона значительно превосходит аналогичный показатель для уравнения φ^4. Полученные количественные закономерности показывают, что варьированием параметров примеси можно изменять характеристики (спектр частот и амплитуду) излучаемых бризером волн.

Ключевые слова: кинк, бризер, уравнение синус-Гордона, уравнение φ^4, примесь

Авторы выражают благодарность Министерству науки и высшего образования Российской Федерации за поддержку (№ FRRR-2026-0010).

© 2026 Евгений Григорьевич Екомасов, Даниил Константинович Кабанов, Марат Ирекович Фахретдинов
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2026 VOL. 18 NO. 5 P. 1189–1203
DOI: 10.20537/2076-7633-2026-18-5-1189-1203

Ки&М

MODELS IN PHYSICS AND TECHNOLOGY

UDC: 530.182.1

Radiation of breathers in the Klein – Gordon model with impurities

E. G. Ekomasov[a], D. K. Kabanov[b], M. I. Fakhretdinov[c]

Ufa University of Science and Technology,
32/1 Zaki Validi st., Ufa, 450076, Russia

E-mail: [a] ekomasoveg@gmail.com, [b] danya.kabanov.95@mail.ru, [c] fmi106tf@gmail.com

Received 30.05.2026, after completion — 17.07.2026.
Accepted for publication 23.08.2026.

Using numerical methods, the spatiotemporal structure and spectral properties of radiation of long-lived nonlinear localized breather-type waves have been investigated for two nonlinear differential Klein – Gordon-type equations — the sine-Gordon equation and the φ^4 equation — in the presence of a one-dimensional spatial modulation of the potential acting as an attractive impurity. The case of an extended impurity with a rectangular profile, which acts as a potential well for a moving topological soliton (kink) and a generator of localized oscillations, is considered. To solve the initial-boundary value problems, the finite difference method and the method of lines were applied. To increase computational performance and reduce simulation time, vector optimization of the numerical algorithms in Python was implemented using the NumPy library, which made it possible to maintain the required accuracy of calculations over long time intervals. It is established that the localized waves excited after the passage of the impurity are accompanied by a gradual decay of their amplitude due to energy loss to wave radiation. The time dependence of this radiation is divided into zones of strong and weak nonlinearity. In the former, the radiation of the transmitted kink is superimposed on the radiation of the excited breather. Fourier spectral analysis of the radiated waves revealed the presence of two main frequencies at all investigated observation points: the first corresponds to the lower bound of the linear phonon spectrum ($\omega \approx 1$ for the sine-Gordon and $\omega \approx \sqrt{2}$ for the φ^4), and the second is related to the natural frequency of the breather oscillations. For the sine-Gordon equation, the second frequency is triple the breather oscillation frequency, whereas for the φ^4 equation, it is double the frequency. It is revealed that with increasing distance from the impurity, the contribution of the phonon spectrum frequency becomes dominant. It is shown that the radiation amplitude slowly decreases with time, following the decrease in the amplitude of the breather itself, and its absolute value far from the impurity for the case of the sine-Gordon equation significantly exceeds the corresponding value for the φ^4 equation. The obtained quantitative relationships show that by varying the impurity parameters, it is possible to modify the characteristics (frequency spectrum and amplitude) of the waves radiated by the breather.

Keywords: kink, breather, sine-Gordon equation, φ^4 equation, impurity

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 5, pp. 1189–1203 (Russian).

The authors acknowledge the support from Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (No. FRRR-2026-0010).

© 2026 Evgenii G. Ekomasov, Daniil K. Kabanov, Marat I. Fakhretdinov
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Введение

Описание современных физических процессов в теории нелинейных колебаний и волн требует нахождения решений нелинейных дифференциальных уравнений. Были найдены решения таких уравнений, которые описывают уединенные волны, сохраняющие свою форму и скорость во времени, в том числе при взаимодействии друг с другом, — солитоны. Открытие новых солитонных решений, описание их свойств и взаимодействий важны как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения. Одним из самых исследуемых представителей подобных уравнений является уравнение Клейна – Гордона [Dauxois, Peyrard, 2010]. Уравнение синус-Гордона (УСГ) и уравнение φ^4 — одни из самых интересных нелинейных дифференциальных уравнений, относящихся к классу уравнений Клейна – Гордона [Cuevas-Maraver et al., 2014; Kevrekidis, Cuevas-Maraver, 2019]. Данные уравнения описывают волновые процессы в самых разнообразных областях естествознания: в геологии [Быков, 2000], в молекулярной биологии [Якушевич, 2007; Chevizovich et al., 2020], в химии [Rice, Mele, 1980], в физике и космологии [Cuevas-Maraver et al., 2014; Kevrekidis, Cuevas-Maraver, 2019]. Например, в физике конденсированного состояния УСГ применимо при описании динамики волн намагниченности в ферромагнитных материалах [Калякин, Екомасов, 2024], динамики ансамбля взаимодействующих дислокаций в линейном дефекте электроконвективной структуры жидкого кристалла [Делев и др., 2019], а уравнение φ^4 — для описания физических процессов в графене [Yamaletdinov et al., 2017].

УСГ, будучи нелинейным уравнением в частных производных, является полностью интегрируемым. Известны его точные решения в виде топологического солитона (или кинка), пространственно локализованные решения в виде бризера и солитона. Есть и более сложные мультисолитонные решения [Kalbermann, 2004; Ferreira et al., 2008; Cuevas-Maraver et al., 2014]. Для уравнения φ^4 есть точное решение в виде кинка, но, в отличие от уравнения синус-Гордона [Cuevas-Maraver et al., 2014; Kevrekidis, Cuevas-Maraver, 2019], нет локализованных в пространстве решений в виде солитонов и бризеров. Было обнаружено, что в континуальной теории для уравнения φ^4 существуют только «нанoптеронные» решения, характеризующиеся бесконечной энергией и осциллирующими хвостами малой амплитуды, уходящими в бесконечность. Кинк уравнения φ^4 отличается от кинка УСГ наличием внутренней моды колебаний. Исследовалась и возможность излучения волн кинками, бризерами и солитонами УСГ и уравнения φ^4 [Kevrekidis, Cuevas-Maraver, 2019]. Например, в [Oxtoby, Barashenkov, 2009] для уравнения φ^4 было аналитически показано, что внутренняя мода (wobbling kink) является долгоживущей.

Внимание исследователей привлекает вопрос влияния различных типов возмущений на структуру и динамику солитонов. Обычно для практических приложений УСГ и уравнение φ^4 модифицируют, считая коэффициенты функциями от координат и времени [Kevrekidis, Cuevas-Maraver, 2019; Cuevas-Maraver et al., 2014; González et al., 2017; Saadatmand, Javidan, 2013; Saadatmand et al., 2014]. Например, для биофизических моделей ДНК, сводящихся к модифицированному УСГ, неоднородность нуклеотидной последовательности в виде потенциальных барьеров и ям определяет динамику локальных раскрытий цепи (открытых состояний) и других нелинейных конформационных возмущений [Якушевич, 2007; Grinevich et al., 2015]. Если изучение влияния малых возмущений на решения УСГ и уравнения φ^4 может быть проведено с помощью хорошо разработанной теории возмущений для солитонов [Белова, Кудрявцев, 1997; Dauxois, Peyrard, 2010], то изучение влияния больших возмущений в общем случае может быть выполнено только с помощью численных методов. К настоящему времени существует довольно много надежных методов численного решения таких уравнений (см., например, [Currie et al., 1977; Campbell et al., 1983; Bratsos, Twizell, 1996; Dehghan, Shokri, 2008; Mohebbi, Dehghan, 2010]).

Часто вводят пространственную модуляцию потенциала, которую называют примесью. Введение примеси нарушает строгую интегрируемость как УСГ, так и уравнения φ^4 и приводит к богатой динамике рассеяния топологических солитонов (кинков) и генерации нелинейных локализованных волн. К настоящему времени как для УСГ, так и для уравнения φ^4 подробно исследован случай с одной примесью. Было показано, что одиночные точечные и протяженные примеси, имеющие разные пространственные профили, способны рассеивать или захватывать кинки, а также генерировать локализованную нелинейную волну (или примесную моду) даже для уравнения φ^4 [Браун, Кившарь, 2008; Lizunova et al., 2021; Lizunova et al., 2022; Fakhretdinov et al., 2023; Fakhretdinov et al., 2024]. Показаны качественное согласие полученных результатов для случая точечных и протяженных примесей и существенное количественное влияние профиля неоднородности на рассеяние кинков на примесях. Получено много интересных результатов (см., например, [Fakhretdinov et al., 2023; Гумеров и др., 2015; Ekomasov et al., 2017b; Fakhretdinov et al., 2025; Фахретдинов, Екомасов, 2025]), описывающих возбуждение локализованных на примесях волн бризерного и солитонного типа, их структуру и эволюцию. Вследствие неинтегрируемости системы колебания кинков и бризеров в области примеси должны сопровождаться излучением, например непрерывным испусканием линейных волн в фононный спектр. Несмотря на то, что сам факт радиационного затухания примесных мод констатировался в предшествующих работах [Гумеров и др., 2015; Fakhretdinov et al., 2024], качественный и количественный анализ характеристик поля излучения (его спектрального состава, пространственной структуры и зависимости от параметров дефекта) ранее не проводился. В контексте данной работы подчеркнем, что далее при проведении численных экспериментов свободно движущийся кинк будет использоваться исключительно как инструмент для доставки энергии в область примеси с целью возбуждения локализованных волн. Будут рассмотрены такие скорости, при которых кинк проходит через примесь и уходит на бесконечность. Детальное исследование излучения именно сформировавшихся примесных мод после завершения переходных процессов и ухода кинка из области наблюдения является главной целью настоящей работы.

Излучение бризера. Уравнение синус-Гордона

Рассмотрим модифицированное уравнение синус-Гордона (МУСГ) следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K(x)\sin u = 0, \tag{1}$$

где $K(x)$ описывает пространственную модуляцию периодического потенциала, которую дальше будем называть примесью. Далее будем ее брать в виде [Ekomasov et al., 2017a]

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x < -\dfrac{W}{2},\ x > \dfrac{W}{2}, \\ 1 - \Delta K, & |x| \leqslant \dfrac{W}{2}, \end{cases} \tag{2}$$

где параметры W, ΔK — константы. Для движущегося кинка, в зависимости от знака ΔK, примесь будет либо потенциальным барьером (отрицательное значение), либо потенциальной ямой (положительное значение). Как было показано в [Гумеров и др., 2015], при положительном значении ΔK в области примеси можно генерировать локализованную волну бризерного типа, которая излучает волны.

Уравнение (1) уже не имеет точных аналитических решений, однако для него хорошо развиты численные методы решения, в частности, часто применяется метод конечных разностей

(МКР) [Currie et al., 1977; Гумеров и др., 2015], который и используем далее. В этом методе для уравнения строится следующая разностная схема:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + K(x)\sin u_i^n = 0,$$

где Δt — шаг по времени, Δx — шаг по координате. Условием устойчивости является неравенство $\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$. Необходимые начальные условия задаются в виде точного аналитического решения УСГ типа «кинк»:

$$u(x,\, t = 0) = 4\arctan(\exp(\delta \cdot (x - x_0))),$$
$$u(x,\, t = \Delta t) = 4\arctan(\exp(\delta(x - x_0 - \upsilon\Delta t))),$$

где δ — ширина кинка, x_0 — начальное положение геометрического центра кинка, υ_0 — начальная скорость кинка. Граничные условия имеют вид

$$u(-L,\, t) = 0, \quad u(L,\, t) = 2\pi,$$

где L — это значение для границы координатной сетки. В дальнейших расчетах значение L мы будем задавать равным значению времени расчета. Это сделано для того, чтобы не допустить отражения излучаемых волн от границы расчетной области.

Для реализации численной схемы был использован язык Python и библиотека NumPy. Классическая реализация метода предполагает использование двух циклов для итерации по координатам x и t. Однако время выполнения программы на языке Python в таком случае становится неоправданно большим уже при $\Delta x = 0{,}01$ и $\Delta t = 0{,}005$. Для того чтобы избавиться от данной проблемы, была произведена векторизация метода с использованием библиотеки NumPy, которая позволяет работать с матрицами и вектор-строками (векторами) без использования циклов и итераций по массивам. Это позволяет производить необходимые вычисления в разы быстрее.

Численный эксперимент проводился следующим образом. В начальный момент времени $t_0 = 0$ имеем кинк, который начинает двигаться с постоянной скоростью $\upsilon_0 < 1$ с точки $x_0 = -15$ (см. рис. 1). Будем рассматривать только такие случаи, когда υ_0 больше некоторой критической скорости υ_{crit}, при которой кинк проходит область примеси и движется далее. В контексте данной работы важно подчеркнуть, что налетающий на примесь свободно движущийся кинк используется исключительно как инструмент для доставки энергии в область примеси с целью возбуждения локализованных колебаний. На рис. 1 показано, что после прохождения кинка через область примеси с параметрами $\Delta K = 1{,}3$, $W = 2{,}0$ на ней генерируются нелинейные локализованные волны бризерного типа.

Частота колебаний бризера, как известно [Ekomasov et al., 2017b], зависит от параметров ΔK, W и не зависит от начальной скорости кинка υ_0. Амплитуда бризера зависит от υ_0, и для проведения численных экспериментов удобно использовать случай ее максимального значения. Зависимость максимальной амплитуды бризера от υ_0 показана на рис. 2, *а*. Из него видно, что на кривых имеется максимум. Например, при $W = 2{,}0$, $\Delta K = 1{,}3$ он имеется при $\upsilon_0 \approx 0{,}64$. При $\upsilon_0 \to 1$ значения амплитуды стремятся к нулю. Как показано ранее [Гумеров и др., 2015], амплитуда возбуждаемого бризера убывает со временем, так как его колебания сопровождаются излучением. На рис. 2, *б* для случая $W = 2{,}0$, $\Delta K = 1{,}3$ показана зависимость $U_{\text{br}}(t)$ при $\upsilon_0 \approx 0{,}64$. По значениям этого графика с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) можно найти частоту колебаний бризера, равную $\omega_{\text{br}} = 0{,}58$. Также можно построить огибающую функцию — a_{br}. Коэффициент экспоненциальной экстраполяции огибающей можно связать с коэффициентом затухания амплитуды бризера k, который для данного случая имеет значение $k \approx 6 \cdot 10^{-4}$. Проведя аналогичный численный эксперимент для других скоростей кинка,

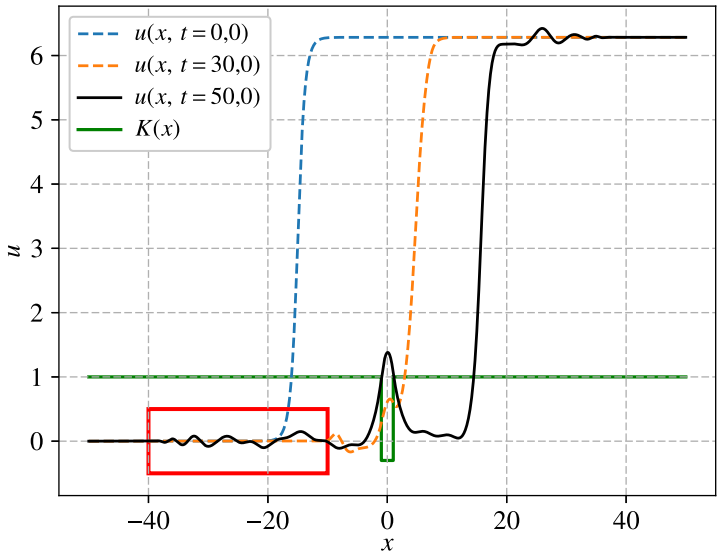


Рис. 1. Пример результатов численного эксперимента инерционной динамики для системы с параметрами $W = 2{,}0$, $\Delta K = 1{,}3$, $\alpha = 0{,}0$, $v_0 = 0{,}64$, $x_0 = -15$. В красной области выделены излучения примесной моды

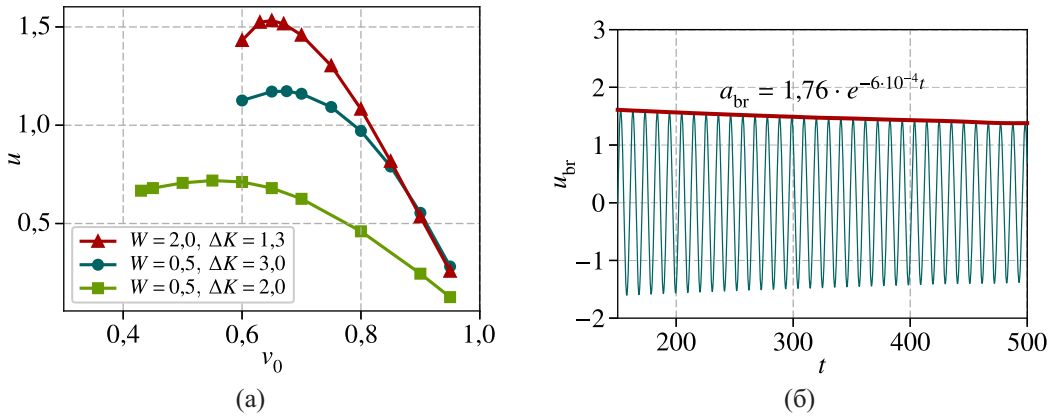


Рис. 2. Зависимость (а) максимального значения амплитуды бризера от начальной скорости кинка (б) $U_{\text{br}}(t)$ при $W = 2{,}0$, $\Delta K = 1{,}3$, $v_0 = 0{,}64$, с выделенной огибающей и уравнениями экспоненциальной экстраполяции

для $v_0 = 0{,}85$ найдено $k \approx 4 \cdot 10^{-5}$, а для $v_0 = 0{,}95$ — $k \approx 9 \cdot 10^{-7}$. Поскольку в уравнении (1) нет слагаемого, учитывающего затухание в системе, то уменьшение амплитуды колебаний связано с потерей энергии бризером на излучение. Следует ожидать, что для систем с большими коэффициентами k мощность излучений будет больше. Частоты колебаний бризеров для всех трех рассмотренных случаев k равны. Для двух других рассмотренных систем на рис. 2, *а* имеем $W = 0{,}5$, $\Delta K = 2{,}0$, $v_0 = 0{,}55$: $k \approx 2 \cdot 10^{-5}$, $\omega_{\text{br}} \approx 0{,}88$; $W = 0{,}5$, $\Delta K = 3{,}0$, $v_0 = 0{,}675$: $k \approx 3 \cdot 10^{-4}$, $\omega_{\text{br}} \approx 0{,}741$.

Для анализа излучаемых бризером волн будем рассматривать зависимости $u(x, t)$ в различных точках, по мере удаления от примеси. Для определенности рассмотрим зависимость $u(x, t)$ при $W = 2{,}0$, $\Delta K = 1{,}3$, $v_0 = 0{,}64$ в точке $x_1 = -25$. Координату $x = -25$ для анализа колебаний излучения выбираем из соображений того, что там уже достаточно быстро проходят переходные процессы, и она еще достаточно близко от источника излучения. Выбор слишком удаленной точки тоже нецелесообразен. Так как амплитуда излучения мала и затухает со временем, для ис-

следования решения для удаленных точек требуются длительные времена интегрирования. При этом также возрастает риск искажения спектра за счет накопления вычислительных погрешностей. Наконец, выбор именно отрицательной полуплоскости ($x < 0$) принципиален для чистоты эксперимента. Поскольку начальный кинк движется слева направо, после прохождения примеси он оказывается в области $x > 0$. Регистрация сигнала в области $x < 0$ позволяет исследовать излучение бризера без сильного фонового возмущения, создаваемого профилем прошедшего кинка.

Видно, что колебания имеют сложный нелинейный характер (рис. 3, *а*). Для упрощения их анализа можно условно разделить полученные зависимости на две временные области — 1 и 2. В первой области (сильной нелинейности) регистрируются волны, излучаемые не только бризером, но еще и кинком, поэтому зависимости $u(t)$ имеют вид более сложный, чем во второй области (слабой нелинейности). Это отличие наглядно можно увидеть на рис. 3, *б* и рис. 3, *в*, на которых изображены частотные спектры зависимостей $u(t)$ первой и второй областей, полученные с помощью БПФ. Заметим, что на рис. 3, *б* в спектре присутствуют две основные частоты — $\omega_1 \approx 1{,}005$ и $\omega_2 \approx 1{,}790$, которые являются равномощными, что приводит к сильным биениям. Первая частота примерно равна единице, что соответствует минимальной частоте линейного фононного спектра, а вторая, связанная с частотой колебаний бризера, примерно равна его утроенной величине. Если начальная скорость кинка $v_0 = 0{,}85$, то спектр также содержит две равномощные частоты — $\omega_1 \approx 1{,}005$ и $\omega_2 \approx 1{,}751$, однако для $v_0 = 0{,}95$, когда амплитуда бризера становится совсем маленькой, картина меняется. Частота $\omega_1 \approx 1{,}005$ становится основной, а мощность частоты $\omega_2 \approx 1{,}735$ значительно уменьшается. При этом частота ω_2 также связана с собственной частотой колебаний бризера — $\omega_2 = 3 \cdot \omega_{\text{br}}$.

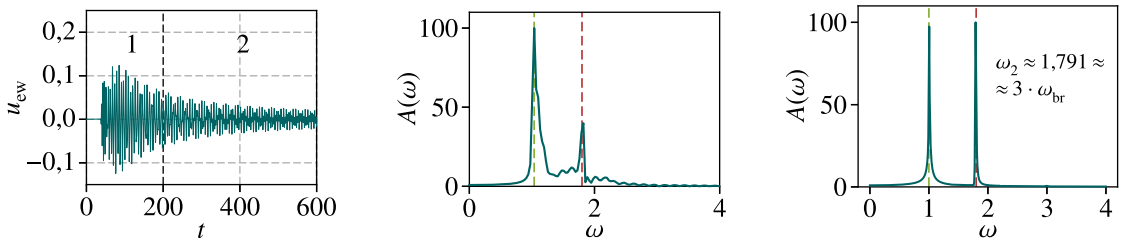


Рис. 3. (а) Зависимость $u(t)$ для $W = 2{,}0$, $\Delta K = 1{,}3$, $v_0 = 0{,}64$ в точке $x_1 = -25$. Цифрами 1 и 2 обозначены зоны сильной и слабой нелинейности соответственно; (б) частотный спектр БПФ соответствующей зависимости для первой зоны; (в) частотный спектр соответствующей зависимости для второй зоны, полученный с помощью БПФ (зеленой и красной пунктирными линиями обозначены частоты со значениями $\omega_1 = 1{,}0$ и $\omega_2 = 1{,}74 = 3\omega_{\text{br}}$ соответственно)

Амплитуды бризера при определенных значениях параметров W, ΔK зависят от начальной скорости кинка [Ekomasov et al., 2017a]. Исследована зависимость a_{ew} (амплитуды излучения) от времени для разных начальных скоростей кинка. Для этого построена функция от времени огибающих зависимостей $u(t)$ в точке $x_1 = -25$ (рис. 4). Из рисунка видно, что чем больше начальная скорость кинка, тем меньше амплитуда колебаний бризера и тем меньше амплитуда колебаний излучаемых волн. По значениям данных огибающих получаем, что на больших временах для $v_0 = 0{,}64$ среднее значение амплитуды $\overline{a}$ примерно равно 0,018; для $v_0 = 0{,}85$ — $\overline{a} \approx 0{,}0047$, а для $v_0 = 0{,}95$ — $\overline{a} \approx 0{,}0004$.

Также исследованы зависимости $u(x, t)$ и соответствующие им частотные спектры в различных точках, по мере удаления от примеси. Было показано, что для системы с параметрами $W = 2{,}0$, $\Delta K = 1{,}3$, $v_0 \approx 0{,}64$ в спектре излучений в точке $x = -25$ содержится две частоты: $\omega_1 \approx 1$ и $\omega_2 \approx 1{,}791$. На рис. 5 показано, как изменяются мощности A этих частот в зависимости от x. Видно, что при x, близких к центру примеси, мощность $A(\omega_2)$ значительно больше

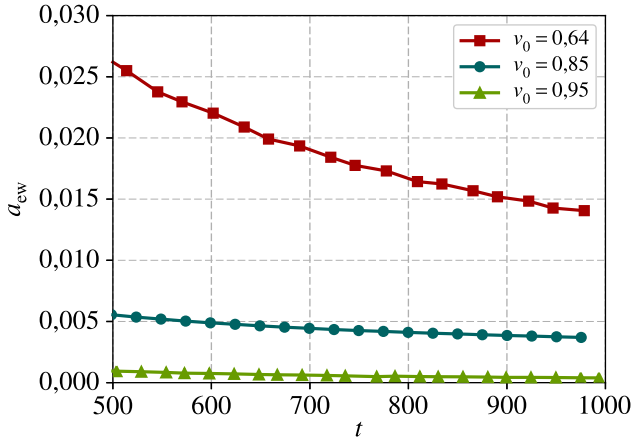


Рис. 4. Зависимость a_{ew} (амплитуды излучаемых волн) от времени в точке $x_1 = -25$ при $W = 2{,}0$, $\Delta K = 1{,}3$ для различных начальных скоростей кинка

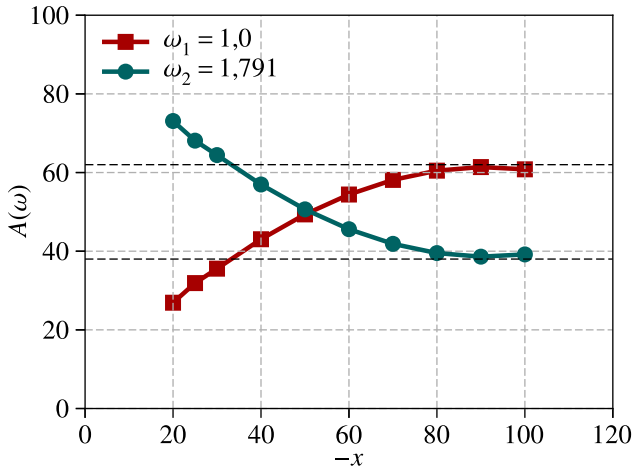


Рис. 5. Зависимость мощности частот излучений от расстояния до источника для системы с параметрами $W = 2{,}0$, $\Delta K = 1{,}3$, $v_0 \approx 0{,}64$

мощности частоты $A(\omega_1)$, однако при удалении от примеси мощность ω_1 растет, в точке $x \approx -50$ мы получаем $A(\omega_1) = A(\omega_2)$, и при дальнейшем удалении мощности приходят к некоторым стационарным значениям.

Так как частота $\omega_2 = 3 \cdot \omega_{br}$, а частота колебаний бризера зависит от параметров W, ΔK, то, меняя эти параметры, можно менять эту частоту в спектре колебаний излучения бризера. Так, на рис. 6, *а* приведены спектры излучений в точке $x = -25$ для систем с параметрами $W = 0{,}5$, $\Delta K = 2{,}0$, $v_0 \approx 0{,}550$ и $W = 0{,}5$, $\Delta K = 3{,}0$, $v_0 \approx 0{,}675$. Как и в предыдущем случае, спектры содержат две частоты: $\omega_1 = 1{,}0$, $\omega_2 = 1{,}791$ для $W = 0{,}5$, $\Delta K = 2{,}0$ и $\omega_2 = 2{,}623$ для $W = 0{,}5$, $\Delta K = 3{,}0$. Если сравнить эти частоты с частотами ω_{br} соответствующих систем, то мы подтвердим выражение $\omega_2 = 3 \cdot \omega_{br}$. Мощности в данных случаях меняются так, как показано на рис. 6, *б*. Характер поведения этих зависимостей аналогичен уже рассмотренному случаю, однако имеются различия. Так, для системы $W = 0{,}5$, $\Delta K = 2{,}0$ мощность $A(\omega_1)$ значительно больше $A(\omega_2)$ на большом удалении от примеси, и равенство $A(\omega_1) = A(\omega_2)$ достигается значительно ближе — уже при $x \approx -30$. Для $W = 0{,}5$, $\Delta K = 3{,}0$ равенство $A(\omega_1) = A(\omega_2)$ достигается при $x \approx -70$, а разница $A(\omega_1) - A(\omega_2)$ сравнима со случаем системы $W = 2{,}0$, $\Delta K = 1{,}30$, $v_0 \approx 0{,}64$. Отметим, что все фурье-спектры, по которым были построены зависимости, были сделаны для зон слабой нелинейности.

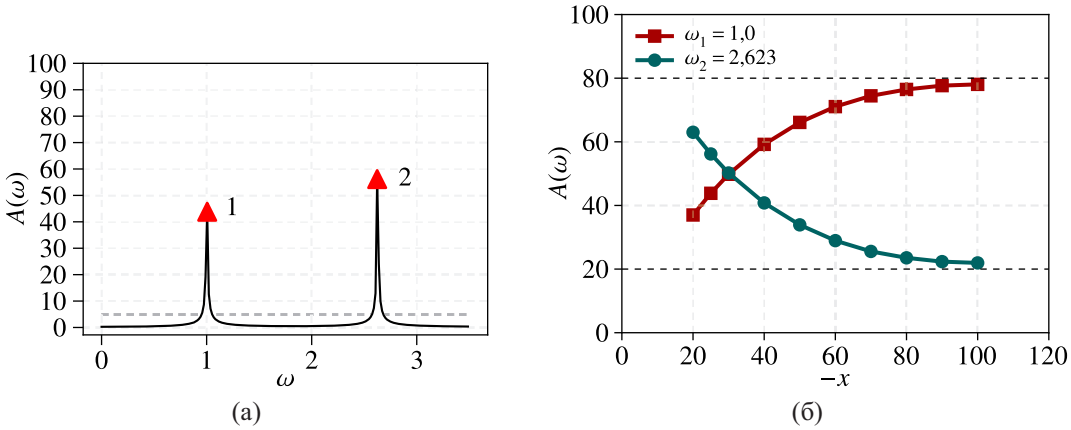


Рис. 6. (а) Фурье-спектр излучений, полученный по значениям $u(t)$ в точке $x = -25$ для системы с параметрами $W = 0{,}5$, $\Delta K = 2{,}0$, $v_0 \approx 0{,}550$, где $\omega_1 = 1{,}0$ и $\omega_2 = 2{,}623$; (б) зависимость мощности частот излучений A от расстояния до источника

Излучение бризера. Уравнение φ^4

Рассмотрим модифицированное уравнение φ^4:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K(x)\left(u^3 - u\right) = 0, \tag{3}$$

где $K(x)$ описывает пространственную неоднородность потенциала (примесь) и берется в виде (2). Так же как и для случая УСГ, в зависимости от знака ΔK примесь будет либо потенциальным барьером (отрицательное значение), либо потенциальной ямой (положительное значение) для движущегося кинка. Уравнение (3) при $\Delta K = 0$ сводится к обычному нелинейному уравнению φ^4, которое имеет решение в виде движущегося со скоростью v_0 кинка (x_0 — начальная координата кинка):

$$u(x,\, t) = \tanh\left(\frac{x - v_0 t - x_0}{\sqrt{2\left(1 - v_0^2\right)}}\right). \tag{4}$$

Уравнение (3) уже не имеет точных аналитических решений. Для его решения воспользуемся методом линий [Fakhretdinov et al., 2023]. Для этого уравнение (3) записывается в виде

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + K_i\left(u_i - u_i^3\right)$$

и решается как система ОДУ с начальными условиями:

$$u_i(t = 0) = \tanh\left(\frac{x_i - x_0}{\sqrt{2\left(1 - v_0^2\right)}}\right), \quad \frac{du_i(t = 0)}{dt} = -\frac{2v_0}{\sqrt{1 - v_0^2}\cosh\left(\frac{x_i - x_0}{\sqrt{1 - v_0^2}}\right)}.$$

Граничные условия — Неймана $u_x(x = -L) = u_x(x = L) = 0$. Шаг по координате $\Delta x \approx$ $\approx 0{,}02$, шаг по времени выбирается автоматически программой-решателем системы ОДУ. Кинк запускался в направлении примеси с точки $x_0 = -10{,}0$ с разными начальными скоростями v_0. Размер расчетной области x от -100 до 100.

При $\Delta K > 0$ движущийся по инерции кинк вида (4) взаимодействует с примесью. Аналогично случаю уравнения синус-Гордона налетающий кинк используется здесь исключительно

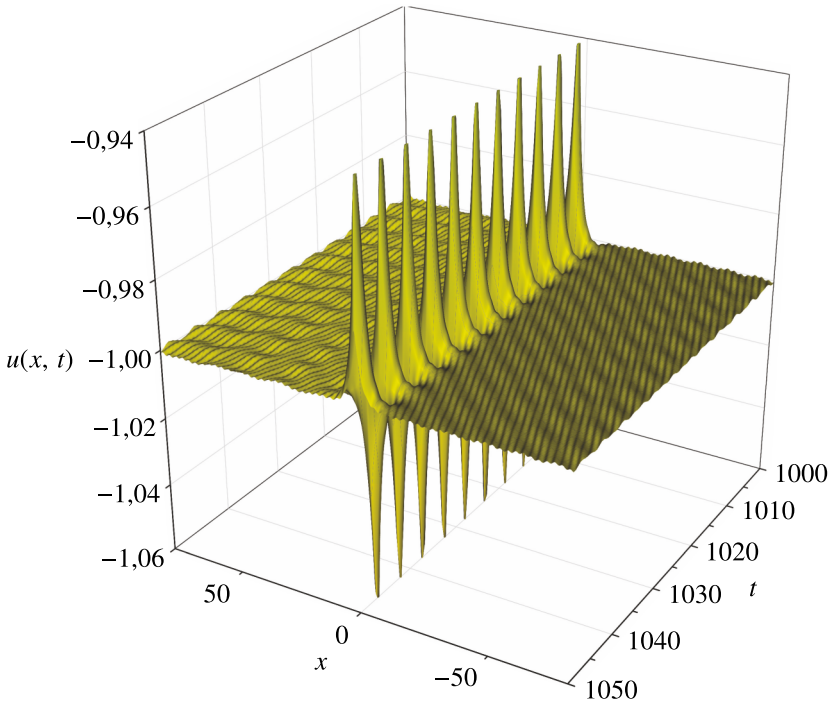


Рис. 7. Пример пространственно-временной эволюции поля $u(x, t)$ для уравнения (3) на временах $t > 1000$. Параметры: $W = 1{,}0$ и $\Delta K = 0{,}8$, $\upsilon_0 = 0{,}65$

как инструмент для возбуждения колебаний. В результате на дефекте генерируется долгоживущая примесная мода бризерного типа. Пространственно-временная динамика поля с уже сформировавшейся модой на временах $t > 1000$ (после прохождения кинка) показана на рис. 7. На графике наглядно видно пульсирующее ядро локализованной моды и расходящиеся от него в обе стороны волны малой амплитуды — излучение. Отметим, что амплитуда таких бризеров и их излучения значительно меньше, чем в модели синус-Гордона, а сами колебания сопровождаются медленным радиационным затуханием.

Для спектрального анализа этих колебаний и уходящего излучения вычисления проводятся на больших временах ($t > 2000$). Использование меньших временных интервалов нецелесообразно, так как начальные нестационарные возмущения (переходные процессы после прохождения кинка) затухают медленно и сильно искажают полезный сигнал. Кроме того, из-за крайне малой амплитуды излучения надежное выделение спектральных пиков требует длинной временной выборки. Анализ при $t > 2000$ позволяет гарантированно исключить влияние переходных процессов и получить чистый спектр.

Частота колебаний локализованного на примеси бризера, как известно [Fakhretdinov et al., 2024], зависит от параметров W, ΔK и не зависит от начальной скорости кинка. Амплитуда же бризера зависит от начальной скорости кинка, и для проведения численных экспериментов удобно использовать случай ее максимального значения, которое достигается в данном случае при $\upsilon_0 \approx 0{,}65$ (см. рис. 8, *а*). Амплитуда излучения вдали от примеси значительно меньше, чем амплитуда бризера и излучения, получаемого для случая УСГ (см. рис. 8, *б*). Видно, что, как и для бризера, амплитуда излучения имеет некоторое максимальное значение (при $0{,}5 < \upsilon_0 < 0{,}6$) и уменьшается при увеличении начальной скорости кинка υ_0. Отметим, что при $\upsilon_0 < 0{,}14$ имеем случай пиннинга кинка на примеси. Для случая $W = 1{,}0$, $\Delta K = 0{,}5$ частота бризера равна $\Omega = 1{,}34$.

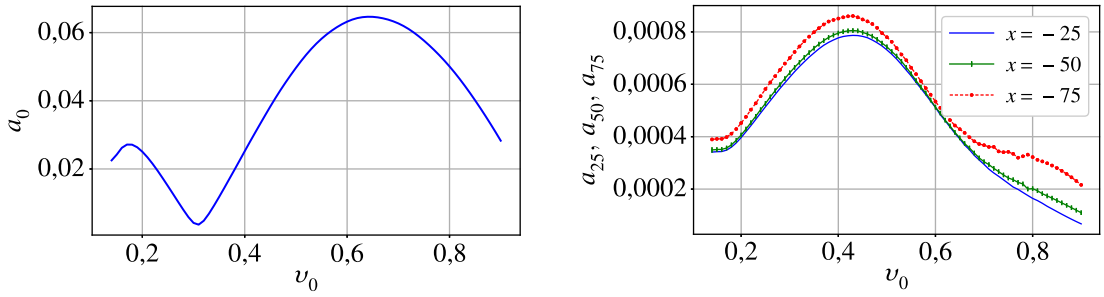


Рис. 8. (а) Зависимость амплитуды бризера от начальной скорости кинка; (б) зависимость амплитуд колебаний излучения от начальной скорости кинка вдали от области примеси. Параметры ямы: $W = 1{,}0$, $\Delta K = 0{,}5$

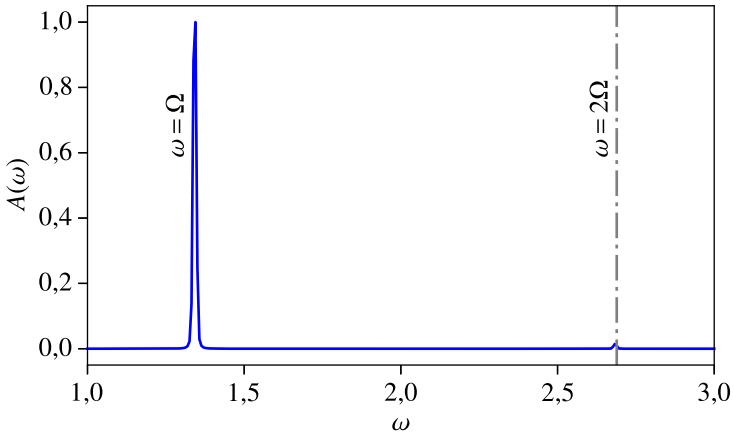


Рис. 9. Фурье-спектр зависимости $u(x = 0, t)$, $W = 1{,}0$, $\Delta K = 0{,}5$

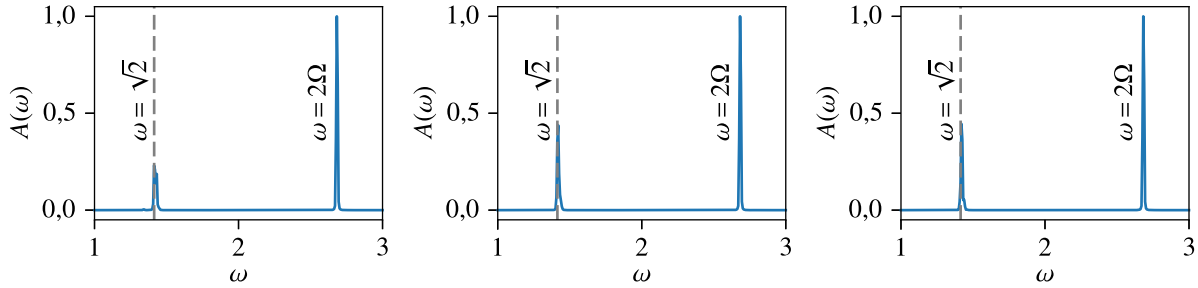


Рис. 10. Фурье-спектры зависимости $u(x = x_k, t)$ для $W = 1{,}0$, $\Delta K = 0{,}5$, $v_0 = 0{,}65$ в точках $x_1 = -25$, $x_2 = -50$, $x_3 = -75$

Фурье-спектр зависимости $u(x = 0, t)$ показан на рис. 9. Излучаемые примесной модой волны исследовались в точках $x_1 = -25$, $x_2 = -50$, $x_3 = -75$. Их фурье-спектры, найденные по временным срезам в диапазоне времени t от 2000 до 3000, приведены на рис. 10.

Как видно из рис. 10, на больших временах во всех наблюдаемых точках спектр Фурье излучаемых волн имеет две основные частоты: $\omega \approx \sqrt{2}$ — нижняя граница фононной зоны и $\omega \approx 2\Omega$, где $\Omega \approx 1{,}34$ — частота бризера для заданных значений параметров $W = 1{,}0$, $\Delta K = 0{,}5$. Аналогичный результат (две частоты, первая — $\omega \approx \sqrt{2}$, вторая — удвоенная частота примесной моды) наблюдается и для других значений параметров W и ΔK. На рис. 11 приведены зависимости

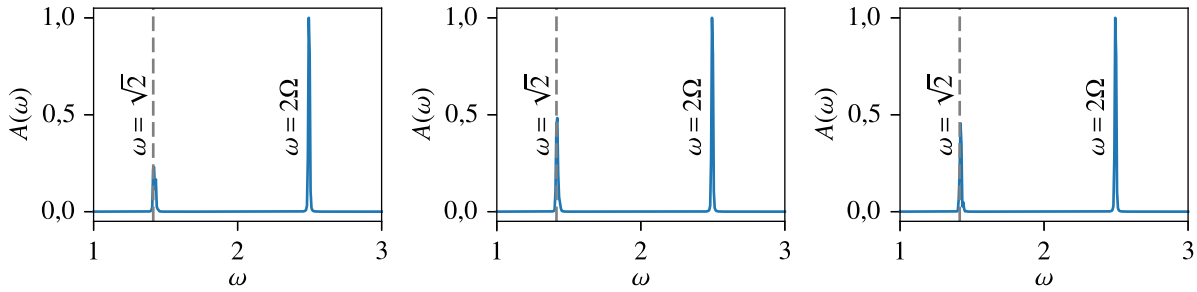


Рис. 11. Фурье-спектры временных срезов $u(x = x_k, t)$ для параметров $W = 1{,}0$, $\Delta K = 0{,}8$, $\upsilon_0 = 0{,}65$ в точках (а) $x_1 = -25$, (б) $x_2 = -50$, (в) $x_3 = -75$

фурье-спектров временного среза $u(x = x_k, t)$ в точках $x_1 = -25$, $x_2 = -50$, $x_3 = -75$ для случая $W = 1{,}0$, $\Delta K = 0{,}8$. Частота бризера $\Omega \approx 1{,}25$.

Для разных значений параметров W и ΔK почти всегда амплитуда удвоенной частоты примесной моды оказывалась больше частоты нижней границы фононной зоны $\omega \approx \sqrt{2}$. Для исследования этого была построена зависимость пиковой частоты от изменения параметра ΔK от 0,5 до 1,0 и для двух значений параметра $W = 1{,}0$, $W = 1{,}5$. Для бризера $x = 0{,}0$ его частота плавно уменьшается с увеличением W и ΔK (см. рис. 12).

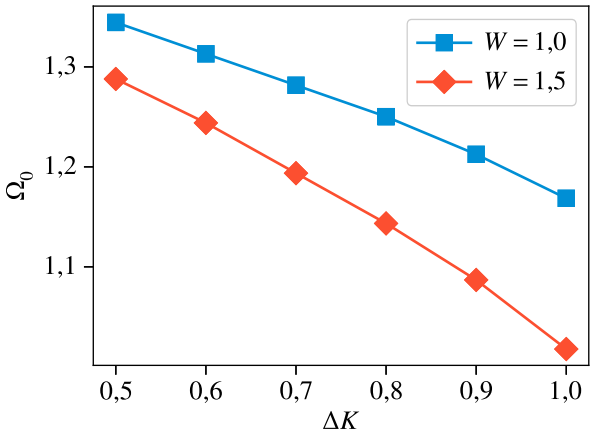


Рис. 12. Зависимость частоты бризера от параметров W и ΔK, $\upsilon_0 = 0{,}65$

Аналогично ведет себя и удвоенная частота для излучения в точке $x = -25$ (она максимальна) (см. рис. 13, *а*). По мере удаления точки регистрации излучения, в частности для $\Delta K \geqslant 1{,}0$, $W \geqslant 1{,}5$, доминирующей становится частота нижней границы фононной зоны $\omega \approx \sqrt{2}$ (см. рис. 13, *б*, рис. 13, *в*).

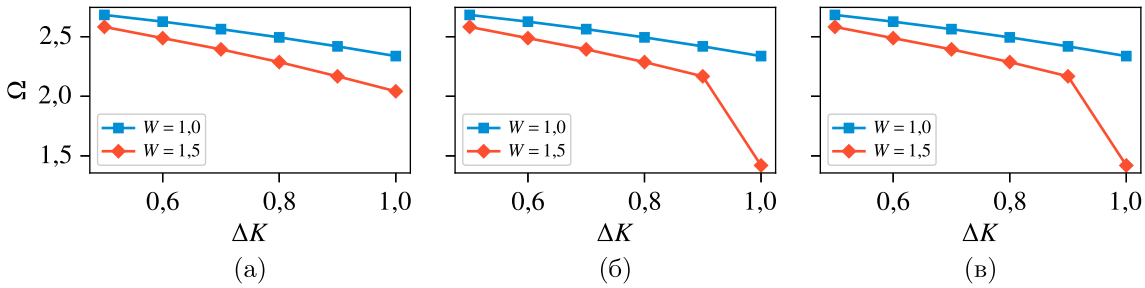


Рис. 13. Зависимость частоты излучения от параметров W и ΔK в точках (а) $x = -25$, (б) $x = -50$, (в) $x = -75$; $\upsilon_0 = 0{,}65$

Заключение

С помощью численных методов исследовано излучение бризеров в уравнении синус-Гордона и уравнении φ^4 при наличии протяженной притягивающей примеси, описываемой функцией прямоугольного вида. Показано, что параметры примеси, определяющие частоту и амплитуду колебаний бризера, напрямую влияют на характеристики излучаемых бризером волн, позволяя контролировать их амплитуду и частоту. Найдены зависимости амплитуды колебаний излучения от расстояния до примеси. Показано, что амплитуда излучения медленно уменьшается со временем вслед за уменьшением амплитуды колебаний бризера. Амплитуда излучения вдали от примеси значительно меньше, чем амплитуда самого бризера, а амплитуда излучения для случая УСГ значительно больше, чем для случая уравнения φ^4. Показано, что в фурье-спектре излучения бризера, помимо частоты, равной минимальной частоте линейного фононного спектра, появляются частоты, связанные с частотой колебаний бризера. Для случая уравнения синус-Гордона их частота равна утроенной частоте колебаний бризера, а для случая уравнения φ^4 — удвоенной. Обнаруженное для случая УСГ излучение на третьей гармонике согласуется с известными свойствами волновых полей в нелинейных системах типа синус-Гордона [Cuevas-Maraver et al., 2014]. Отметим также, что в [Oxtoby, Barashenkov, 2009] для уравнения φ^4 было аналитически показано, что внутренняя мода (wobbling kink) является долгоживущей, а в ее поле излучения возникает компонента на второй гармонике. В настоящем исследовании физически близкий механизм излучения волн на удвоенной частоте примесной моды обнаружен не для свободного кинка, а для локализованной примесной моды, возбуждаемой прошедшим кинком. Хотя прямое количественное сопоставление с [Oxtoby, Barashenkov, 2009] невозможно, тем не менее совпадение нелинейного механизма — генерации второй гармоники в неинтегрируемой модели — подтверждает динамическую, а не численную природу найденных спектральных компонент.

Полученные зависимости демонстрируют, что варьированием параметров примеси можно эффективно управлять частотой и амплитудой излучения возбужденных локализованных волн, что связано с возможностью создания генераторов волн. Регистрация же спектра вдали от примеси, в свою очередь, может рассматриваться как модельный способ диагностики параметров локальной неоднородности среды.

Список литературы (References)

Белова Т. И., Кудрявцев А. Е. Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // Успехи физических наук. — 1997. — Т. 167, № 4. — С. 377–406.
Belova T. I., Kudryavtsev A. E. Solitons and their interactions in classical field theory // Phys. Usp. — 1997. — Vol. 40, No. 4. — P. 359–386. (Original Russian paper: *Belova T. I., Kudryavtsev A. E.* Solitony i ih vzaimodejstviya v klassicheskoj teorii polya // Uspekhi fizicheskikh nauk. — 1997. — Vol. 167, No. 4. — P. 377–406.)

Браун О. М., Кившарь Ю. С. Модель Френкеля – Конторовой: концепции, методы, приложения. — М.: Физматлит, 2008. — 536 с.
Braun O. M., Kivshar Yu. S. The Frenkel – Kontorova model: Concepts, methods and applications. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. — 472 p. (Russ. ed.: *Braun O. M., Kivshar Yu. S.* Model Frenkelya – Kontorovoj: koncepcii, metody, prilozheniya. — Moscow: Fizmatlit, 2008. — 536 p.)

Быков В. Г. Нелинейные волновые процессы в геологических средах. — Владивосток: Дальнаука, 2000. — 190 с.
Bykov V. G. Nelinejnye volnovye processy v geologicheskih sredah [Nonlinear wave processes in geological media]. — Vladivostok: Dal'nauka, 2000. — 190 p. (in Russian).

Гумеров А. М., Екомасов Е. Г., Муртазин Р. Р., Назаров В. Н. Трансформация солитонов уравнения синус-Гордона в моделях с переменными коэффициентами и затуханием // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 4. — С. 631–640.
Gumerov A. M., Ekomasov E. G., Murtazin R. R., Nazarov V. N. Transformaciya solitonov uravneniya sinus-Gordona v modelyah s peremennymi koehfficientami i zatuhaniem [Transformation of solitons of the sine-Gordon equation in models with variable coefficients and damping] // Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki. — 2015. — Vol. 55, No. 4. — P. 631–640 (in Russian).

Делев В. А., Назаров В. Н., Скалдин О. А., Батыршин Э. С., Екомасов Е. Г. Сложная динамика каскада кинк-антикинковых взаимодействий в линейном дефекте электроконвективной структуры нематика // Письма в ЖЭТФ. — 2019. — Т. 110, № 9. — С. 607–613.
Delev V. A., Nazarov V. N., Scaldin O. A., Batyrshin E. S., Ekomasov E. G. Slozhnaya dinamika kaskada kink-antikinkovyh vzaimodejstvij v linejnom defekte ehlektrokonvektivnoj struktury nematika [Complex dynamics of the cascade of kink – antikink interactions in a linear defect of the electroconvective structure of a nematic liquid crystal] // JETP Lett. — 2019. — Vol. 110, No. 9. — P. 607–613 (in Russian).

Калякин Л. А., Екомасов Е. Г. Моделирование доменных стенок: простые волны в уравнении магнитодинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2024. — Т. 64, № 1. — С. 85–98.
Kalyakin L. A., Ekomasov E. G. Modelirovanie domennyh stenok: prostye volny v uravnenii magnitodinamiki [Simulation of domain walls: simple waves in the magnetodynamics equation] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2024. — Vol. 64, No. 1. — P. 85–98 (in Russian).

Фахретдинов М. И., Екомасов Е. Г. Локализованные волны уравнения ϕ^4 в модели с двумя протяженными примесями // Компьютерные исследования и моделирование. — 2025. — Т. 17, № 3. — С. 437–449.
Fakhretdinov M. I., Ekomasov E. G. Lokalizovannye volny uravneniya ϕ^4 v modeli s dvumya protyazhennymi primesyami [Localized waves of the ϕ^4 equation in models with two extended impurities] // Computer Research and Modeling. — 2025. — Vol. 17, No. 3. — P. 437–449 (in Russian).

Якушевич Л. В. Нелинейная физика ДНК. — М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. — 252 с.
Yakushevich L. V. Nelinejnaya fizika DNK [Nonlinear physics of DNA]. — Moscow – Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computer Research, 2007. — 252 p. (in Russian).

Bratsos A. G., Twizell E. H. The solution of the sine-Gordon equation using the method of lines // Int. J. Comput. Math. — 1996. — Vol. 61, Nos. 3–4. — P. 271–292.

Campbell D. K., Schonfeld J. F., Wingate C. A. Resonance structure in kink-antikink interactions in ϕ^4 theory // Physica D. — 1983. — Vol. 9, No. 1–2. — P. 1–32.

Chevizovich D., Michieletto D., Mvogo A., Zakiryanov F., Zdravkovic S. A review on nonlinear DNA physics // R. Soc. Open Sci. — 2020. — Vol. 7, No. 11. — Art. 200774.

Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P. G., Williams F. The sine-Gordon model and its applications: from pendula and Josephson junctions to gravity and high-energy physics. — Cham: Springer, 2014. — 263 p.

Currie J. P., Trullinger S. E., Bishop A. R., Krumhansl J. A. Numerical simulation of sine-Gordon soliton dynamics in the presence of perturbations // Phys. Rev. B. — 1977. — Vol. 15, No. 12. — P. 5567–5580.

Dauxois T., Peyrard M. Physics of solitons. — New York: Cambridge University Press, 2010. — 436 p.

Dehghan M., Shokri A. A numerical method for one-dimensional nonlinear sine-Gordon equation using collocation and radial basis functions // Numer. Methods Partial Differential Equations. — 2008. — Vol. 24, No. 3. — P. 687–698.

Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V. Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping // J. Comput. Appl. Math. — 2017. — Vol. 312. — P. 198–208.

Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Murtazin R. R. Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities // Math. Methods Appl. Sci. — 2017. — Vol. 40, No. 17. — P. 6178–6186.

Fakhretdinov M. I., Kabanov D. K., Ekomasov E. G. Localized waves of the ϕ^4 equation in the model with two-point impurities // Rus. J. Nonlin. Dyn. — 2025. — Vol. 21, No. 3. — P. 419–432.

Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Y., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G. Kink dynamics in the ϕ^4 model with extended impurity // Rus. J. Nonlin. Dyn. — 2023. — Vol. 19, No. 3. — P. 303–320.

Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Yu., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G. Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the ϕ^4 model // Rus. J. Nonlin. Dyn. — 2024. — Vol. 20, No. 1. — P. 15–26.

Ferreira L. A., Piette B., Zakrzewski W. J. Wobbles and other kink – breather solutions of the sine-Gordon model // Phys. Rev. E. — 2008. — Vol. 77, No. 3. — Art. 036613.

González J. A., Bellorín A., García-Ñustes M. A., Guerrero L. E., Jiménez S., Vázquez L. Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations // Phys. Lett. A. — 2017. — Vol. 381, No. 24. — P. 1995–1998.

Grinevich A. A., Ryasik A. A., Yakushevich L. V. Trajectories of DNA bubbles // Chaos, Solitons & Fractals. — 2015. — Vol. 75. — P. 62–75. — DOI: 10.1016/j.chaos.2015.02.009

Kalbermann G. The sine-Gordon wobble // J. Phys. A: Math. Gen. — 2004. — Vol. 37, No. 48. — P. 11603–11612.

Kevrekidis P. G., Cuevas-Maraver J. A dynamical perspective on the ϕ^4 model: past, present and future. — Cham: Springer, 2019. — 332 p.

Lizunova M., Kager J., de Lange S., van Wezel J. Emergence of oscillons in kink-impurity interactions // J. Phys. A: Math. Theor. — 2021. — Vol. 54, No. 31. — Art. 315701.

Lizunova M. A., Kager J., de Lange S., van Wezel J. Kinks and realistic impurity models in ϕ^4-theory // Int. J. Mod. Phys. B. — 2022. — Vol. 36, No. 05. — Art. 2250042.

Mohebbi A., Dehghan M. High-order solution of one-dimensional sine-Gordon equation using compact finite difference and DIRKN methods // Math. Comput. Modelling. — 2010. — Vol. 51, Nos. 5–6. — P. 537–549.

Oxtoby O. F., Barashenkov I. V. Asymptotic expansion of the wobbling kink // Theor. Math. Phys. — 2009. — Vol. 159, No. 3. — P. 863–869. — https://doi.org/10.1007/s11232-009-0074-7

Rice M. J., Mele E. J. Phenomenological theory of soliton formation in lightly-doped polyacetylene // Solid State Commun. — 1980. — Vol. 35, No. 6. — P. 487–491.

Saadatmand D., Dmitriev S. V., Borisov D. I., Kevrekidis P. G. Interaction of sine-Gordon kinks and breathers with a parity-time-symmetric defect // Phys. Rev. E. — 2014. — Vol. 90, No. 5. — Art. 052902.

Saadatmand D., Javidan K. Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein – Gordon field theory // Braz. J. Phys. — 2013. — Vol. 43, No. 1–2. — P. 48–56.

Yamaletdinov R. D., Slipko V. A., Pershin Y. V. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the ϕ^4 field model // Phys. Rev. B. — 2017. — Vol. 96, No. 9. — Art. 094306.