КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2026 Т. 18 № 5 С. 1093–1120
DOI: 10.20537/2076-7633-2026-18-5-1093-1120

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 004.932.2; 619.6

Многомасштабный анализ цифровых изображений в терминах «энтропия – сложность» с использованием шиарлет-преобразования

И. В. Красняков

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Россия, 614000, г. Пермь, ул. Комсомольский проспект, д. 29

E-mail: krasnyakov_ivan@mail.ru

Получено 30.03.2026, после доработки — 23.09.2026.
Принято к публикации 23.09.2026.

В работе представлен метод анализа цифровых изображений, основанный на совместном использовании быстрого дискретного шиарлет-преобразования и статистически значимых мер информационной энтропии и сложности. Предложенный подход ориентирован на исследование пространственных структур различной природы, включая регулярные, стохастические и многомасштабные системы, и позволяет выявлять закономерности их организации без необходимости предварительной сегментации или обучения моделей.

В основе метода лежит построение локальных вероятностных распределений на основе коэффициентов шиарлет-преобразования, учитывающего масштабную и направленную структуру изображений. На базе этих распределений вычисляются нормированная энтропия Шеннона и статистическая сложность, определяемая через дивергенцию от равномерного распределения. Это позволяет перейти от анализа отдельных коэффициентов к более устойчивому описанию структурных свойств изображений в пространстве «энтропия – сложность».

Метод протестирован на ряде синтетических и реальных данных. В частности, исследован переход от упорядоченных систем к хаотическим, продемонстрирована чувствительность предложенных мер к разрушению регулярных структур. На примере фрактальных объектов (треугольник Серпинского) показано, что статистическая сложность достигает максимума на характерных масштабах самоподобия. Применение метода к изображениям поверхности Марса продемонстрировало его потенциал для задач дистанционного зондирования и геоморфологического анализа.

Отдельное внимание уделено устойчивости метода к шуму. Показано, что даже слабое зашумление приводит к росту энтропии и снижению сложности, что позволяет использовать данные характеристики как индикаторы деградации структур.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что пространство «энтропия – сложность», сформированное на основе шиарлет-преобразования, может служить универсальным инструментом для анализа многомасштабных изображений. Предложенный подход обладает высокой чувствительностью к структурным особенностям данных и может быть применен в широком спектре задач, включая обработку текстур, анализ природных изображений и медицинскую диагностику.

Ключевые слова: шиарлет-преобразование, энтропия – сложность, многомасштабный анализ, анализ структур, анализ изображений

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант № 24-1-4-63-1.

© 2026 Иван Васильевич Красняков
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2026 VOL. 18 NO. 5 P. 1093–1120
DOI: 10.20537/2076-7633-2026-18-5-1093-1120

Ки&М

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 004.932.2; 619.6

Multiscale analysis of digital images in terms of entropy – complexity using the shearlet transform

I. V. Krasnyakov

Perm National Research Polytechnic University,
29 Komsomolsky prospect, Perm, 614990, Russia

E-mail: krasnyakov_ivan@mail.ru

Received 30.03.2026, after completion — 23.09.2026.
Accepted for publication 23.09.2026.

This paper presents a method for digital image analysis based on the combined use of the Fast Finite Shearlet Transform and statistically significant measures of information entropy and complexity. The proposed approach is aimed at studying spatial structures of various nature, including regular, stochastic, and multiscale systems, and enables the identification of their organizational patterns without the need for preliminary segmentation or model training.

The method is based on constructing local probability distributions derived from shearlet decomposition coefficients, which capture both the scale and directional properties of images. Using these distributions, the normalized Shannon entropy and statistical complexity — defined via divergence from the uniform distribution — are computed. This allows transitioning from the analysis of individual coefficients to a more robust characterization of structural properties in the entropy – complexity space.

The method has been tested on a range of synthetic and real-world data. In particular, the transition from ordered to chaotic systems has been investigated, demonstrating the sensitivity of the proposed measures to the degradation of regular structures. Using fractal objects (such as the Sierpinski triangle) as an example, it is shown that statistical complexity reaches its maximum at characteristic scales of self-similarity. Application of the method to images of the Martian surface demonstrates its potential for remote sensing and geomorphological analysis.

Special attention is given to noise robustness. It is shown that even weak noise leads to an increase in entropy and a decrease in complexity, allowing these measures to be used as indicators of structural degradation.

The obtained results indicate that the entropy – complexity framework based on the shearlet transform can serve as a universal tool for multiscale image analysis. The proposed approach exhibits high sensitivity to structural features and can be applied across a wide range of tasks, including texture analysis, natural image processing, and medical diagnostics.

Keywords: shearlet-transform, entropy – complexity, multiscale analysis, structure analysis, image analysis

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 5, pp. 1093–1120 (Russian).

The work was supported by the Foundation for the Advancement of Theoretical Physics and Mathematics “BASIS”, grant No. 24-1-4-63-1.

© 2026 Ivan V. Krasnyakov
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

Анализ пространственных структур и закономерностей в изображениях представляет собой ключевую задачу в таких областях, как медицинская визуализация [He et al., 2012], дистанционное зондирование [Jia et al., 2021], физика сложных систем [Saalbrink et al., 2025], биофизика [Astinchap et al., 2022] и компьютерное зрение [Jalontzki et al., 2025]. Одним из универсальных подходов к количественной характеристике структуры является использование информационно-энтропийных и статистических мер сложности [Lopez-Ruiz et al., 1995; Zunino, Ribeiro, 2016], позволяющих оценить степень упорядоченности и выраженности внутренних паттернов на изображении. Особенно актуальными становятся подходы, способные улавливать многомасштабные, анизотропные и направленные особенности, что наблюдается, например, при анализе текстурных поверхностей, фрактальных структур и биологических тканей.

За последние годы интерес к совместному анализу энтропии и сложности в плоскости «энтропия – сложность» значительно возрос [Аристов, Ильин, 2018; Plata et al., 2018; Argyroudis, Siokis, 2019; Xiong et al., 2020; Bratsun, Krasnyakov, 2022; Pinto et al., 2025]. Такие меры позволяют не только различать случайные и структурированные сигналы, но и выявлять степени переходов от порядка к хаосу. В работе [Xiong et al., 2020] проведен сравнительный анализ различных мер сложности, включая евклидову, Вуттерса и Йенсена – Шеннона, на предмет их способности различать хаос, периодичность и шум, а также учитывать задержки в динамике систем.

Наиболее распространенная и теоретически обоснованная мера сложности в таких подходах основана на шенноновской энтропии [Lopez-Ruiz et al., 1995] и расстоянии Йенсена – Шеннона [Xiong et al., 2020] от наблюдаемого распределения до равновероятного. В классической работе [Lopez-Ruiz et al., 1995] это расстояние было названо дивергенцией. Мера сложности, обладая выпуклым характером, достигает максимума при промежуточных состояниях между полным порядком и полной случайностью, что делает ее особенно полезной для анализа фазовых переходов и самоорганизации.

Для построения распределения вероятностей, необходимых для вычисления этих метрик, традиционно применялись подходы, основанные на перестановочной энтропии [Bandt, Pompe, 2002; Martin et al., 2006; Rosso et al., 2007; Ribeiro et al., 2012; Zunino, Ribeiro, 2016; Xiong et al., 2020], однако для двумерных изображений они обладают ограниченной разрешающей способностью и высокой вычислительной сложностью. Для преодоления этих недостатков в последние годы активно разрабатываются методы, основанные на направленных многомасштабных преобразованиях, таких как дискретное шиарлет-преобразование [Guo et al., 2009; Hauser, Steidl, 2012; Hauser, Steidl, 2014; Brazhe, 2018]. В отличие от подхода на основе перестановочной энтропии, который дает лишь интегральную характеристику, шиарлет-преобразование позволяет строить распределение вероятностей P_i по масштабно направленным признакам. Это открывает возможность для локального и многомасштабного анализа сложности. В отличие от фрактальных методов, которые требуют стационарности и больших объемов данных, шиарлет-подход применим к зашумленным и неоднородным изображениям и дает интерпретируемые результаты на плоскости «энтропия – сложность».

Так, автор в работе [Brazhe, 2018] предложил подход к вычислению глобальной и локальной сложности на основе статистики мощности коэффициентов быстрого конечного шиарлет-преобразования (FFST). Это позволило количественно описывать сложность двухмерных паттернов и строить карты распределения энтропии и сложности с пространственным разрешением. Проведенные автором эксперименты с упорядоченными структурами, изинг-поверхностями и зашумленными текстурами показали, что шиарлет-подход позволяет чувствительно отслеживать переходы порядка в хаос и выявлять критические состояния.

Применение шиарлет-преобразования доказало свою эффективность и в прикладных задачах. Например, в медицинской визуализации. Авторы работы [Thakur et al., 2015] разработали гибридный метод шумоподавления для медицинских изображений, основанный на сочетании шиарлет-преобразования и билинеарной фильтрации, что позволило улучшить метрики PSNR и SSIM. В другой работе авторы [Xu et al., 2024] предложили модификацию для подавления пуассон-гауссовского шума в рентгеновских изображениях, улучшив визуализацию анатомических структур за счет адаптивного порогового шиарлет-анализа.

Другим перспективным направлением является анализ геофизических и гиперспектральных данных. В работе [Jia et al., 2021] продемонстрирована высокая точность классификации материалов поверхности Земли при использовании адаптивного фильтра ShearSAF, учитывающего пространственную структуру объектов в гиперспектральных изображениях. Шиарлет-преобразование позволяет учитывать направленную и многомасштабную природу объектов, что повышает достоверность выделения классов.

Также стоит отметить работу [Reisenhofer et al., 2016], в которой представлен метод CoShREM для выявления фронтов пламени в диагностике горения. Метод на основе комплексных шиарлетов превзошел традиционные подходы (Canny, фазовая когерентность) по устойчивости к шуму и точности локализации структур.

Автором данной работы в соавторстве был предложен алгоритм автоматической классификации архитектурных форм инвазивной карциномы, основанный на вычислении спектров энтропии и сложности с помощью шиарлет-преобразования [Bratsun, Krasnyakov, 2022]. Также было показано, что данная методика может быть использована в качестве инструмента оценки смешиваемости двух жидкостей в микрореакторах проточного типа [Mosheva, Krasnyakov, 2024].

Однако, несмотря на доказанную эффективность шиарлет-преобразования в задачах шумоподавления, классификации и выделения границ, его потенциал для количественного многомасштабного анализа структур на изображениях в терминах «энтропия – сложность» остается раскрытым не полностью. Существующие подходы либо ограничиваются глобальными характеристиками, либо не учитывают анизотропию и направленность структур на разных масштабах. В частности, до настоящего времени не предложено универсальной методики, позволяющей одновременно строить локальные карты энтропии и сложности с высоким пространственным разрешением, анализировать вклад различных масштабов в общую структурную организацию и выявлять иерархические переходы между структурными уровнями.

На фоне вышеупомянутых исследований особенно актуальной становится задача объединения шиарлет-преобразования и информационно-энтропийного анализа для получения количественных метрик порядка и структурной сложности, способных описывать пространственные закономерности изображений, в том числе многомасштабные и переходные структуры. Многие природные и искусственные структуры обладают иерархической организацией, т. е. их свойства на крупных масштабах не сводятся к простому усреднению мелкомасштабных характеристик. Более того, критические состояния часто проявляются именно на определенных масштабах, и их выявление требует анализа всего спектра масштабов, а не только одного оптимального.

Таким образом, основное внимание в данной работе уделено многомасштабному анализу изображений и выявлению признаков вложенных структур в координатах плоскости «энтропия – сложность». Решение этой задачи не только позволит количественно оценивать структурную сложность изображений, но и создаст основу для автоматического выявления критических состояний, классификации структур и мониторинга динамики сложных систем по их пространственным изображениям в приложении от биопсийных срезов до спутниковых снимков.

2. Описание методики вычисления спектров «энтропия – сложность»

Понятия энтропии и сложности широко используются в физике, информационной теории и анализе сигналов для количественной оценки степени порядка, случайности и структурной организованности систем. При переходе к анализу двумерных изображений эти величины становятся важными инструментами для диагностики, классификации и структурного сравнения изображений в различных приложениях — от биофизики до дистанционного зондирования.

2.1. Информационная энтропия

Введенная К. Шенноном в 1948 году, информационная энтропия (или энтропия Шеннона) отражает среднюю неопределенность, связанную с вероятностным распределением состояний системы N. Для дискретного распределения $P = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$, где $p_i \geqslant 0$ и $\sum p_i = 1$, энтропия H вычисляется как

$$H[P] = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i. \tag{1}$$

Выражение (1) принимает максимальное значение $H_{\max} = H[P_e] = \log_2 N$ при равномерном распределении вероятностей $P_e = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}\right)$. В практических задачах удобно использовать нормированное значение энтропии:

$$H_n[P] = \frac{H[P]}{H_{\max}} = \frac{-\sum\limits_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i}{\log_2 N}. \tag{2}$$

Таким образом, значение H_n варьируется от 0 (полная упорядоченность, одно состояние) до 1 (полный хаос, равновероятное распределение).

2.2. Сложность

В отличие от энтропии, которая характеризует количество беспорядка, сложность C отражает структурную организованность, т. е. несет содержательную информацию. В классической работе [Lopez-Ruiz et al., 1995] было предложено определение сложности как произведение двух величин: энтропии H и меры неравновесия (или дисбаланса) D между текущим и равномерным распределениями: $C = H \cdot D$.

В работе [Xiong et al., 2020] проведен систематический анализ различных метрик сложности, основанных на различных подходах к вычислению меры неравновесия D. Авторы работы провели анализ на примере временных рядов, характеризующих хаос, шум и регулярность. Среди сравниваемых мер — евклидова, Вуттерса, Фишера и Йенсена – Шеннона. Ключевым выводом вышеупомянутой работы [Xiong et al., 2020] является то, что мера неравновесия Йенсена – Шеннона D_{JS} показывает наилучшую способность различать хаотические, шумовые и регулярные сигналы. Таким образом, методология, опирающаяся на вычисление сложности, используя меру неравновесия Йенсена – Шеннона D_{JS}, не только устойчива и интерпретируема, но и универсальна, что делает ее особенно привлекательной для анализа изображений разной природы — от биологических срезов до фрактальных поверхностей и динамических текстур. Именно поэтому в данной работе для оценки неравновесия мы будем использовать нормированную меру неравновесия Йенсена – Шеннона Q_{JS}:

$$Q_{\mathrm{JS}}[P, P_e] = \frac{D_{\mathrm{JS}}[P, P_e]}{D_{\max}}, \tag{3}$$

где D_{JS} — мера неравновесия Йенсена – Шеннона:

$$D_{\text{JS}}[P,\ P_e] = H\left[\frac{P + P_e}{2}\right] - \frac{1}{2}(H[P] + H[P_e]), \tag{4}$$

а $D_{\max}$ — максимальное значение неравновесия при полностью детерминированном распределении P:

$$D_{\max} = -\frac{1}{2}\left[\frac{N+1}{N}\log_2(N+1) - 2\log_2(2N) + \log_2(N)\right]. \tag{5}$$

Итоговое выражение для вычисления нормированной сложности:

$$C_n[P] = H_n[P] \cdot Q_{\text{JS}}[P,\ P_e]. \tag{6}$$

Таким образом, функция $C_n[P]$ принимает нулевые значения как в случае полной упорядоченности ($H_n = 0$, $Q_{\text{JS}} = 1$), так и при полном беспорядке ($H_n = 1$, $Q_{\text{JS}} = 0$). Максимум сложности достигается при промежуточных значениях, что отражает наличие структуры, закономерностей, фрактальности или корреляций в распределении.

Этот эффект ярко проявляется в комплексных или критических состояниях, таких как изинг-модели в точке фазового перехода [Brazhe, 2018], развивающиеся паттерны в биологических тканях [Bratsun, Krasnyakov, 2022], сложные текстуры [Mosheva, Krasnyakov, 2024] и фракталы.

2.3. Шиарлет-преобразование

Шиарлет-преобразование — это инструмент многомасштабного анализа, разработанный для эффективного выявления направленных и анизотропных признаков в двумерных изображениях. В отличие от вейвлет-преобразования, которое хорошо улавливает изотропные особенности, шиарлеты позволяют анализировать изображения с различной ориентацией и масштабом локальных структур. Это делает их особенно полезными при анализе границ, текстур, фрактальных структур, а также сложных многомасштабных паттернов.

Шиарлет-функции формируются путем масштабирования, сдвига и трансляции базовой функции $\psi(x)$. Преобразование реализуется как свертка изображения с набором фильтров, ориентированных по разным направлениям:

$$\psi_{a,s,t}(x) = a^{-3/4}\psi\left(A_a^{-1}S_s^{-1}(x - t)\right), \tag{7}$$

где

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}$$

— анизотропная матрица масштабирования ($a \in \mathbf{R}^+$),

$$S_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрица сдвига ($s \in \mathbf{R}^+$), t — параметр трансляции. Анизотропность преобразования позволяет точнее выделять направленные структуры. При $a < 1$ функция сжимается по горизонтали и растягивается по вертикали, что делает ее чувствительной к узким и длинным структурам.

В данной работе мы используем быстрое конечное дискретное шиарлет-преобразование, подробно описанное в работах [Hauser, Steidl, 2012; Hauser, Steidl, 2014]. В дискретной реализации быстрого конечного дискретного шиарлет-преобразования изображение $f(x, y)$ дискретизируется и раскладывается на множество компонентов по масштабам и сдвигам.

Здесь кратко изложим основные принципы дискретизации. Например, если у нас имеется изображение $f(M, N)$, то нам нужно определить общее количество масштабов j_0, укладывающееся на его размеры:

$$j_0 = \frac{1}{2}\log_2(\max\{M, N\}). \tag{8}$$

Затем, в соответствии с имеющимся количеством масштабов, дискретизируем параметры масштабирования a, сдвига s и трансляции t:

$$\begin{aligned} a_j &:= 2^{-2j}, \quad j = 0, \ldots, j_0 - 1, \\ s_{j,k} &:= 2^{-j}k, \quad -2^j \leqslant k \leqslant 2^j, \\ t_m &:= \left(\frac{m_1}{M}, \frac{m_2}{N}\right), \quad m \in \sigma. \end{aligned} \tag{9}$$

Последнее уравнение в системе (9) является избыточным, как и процесс трансляции, так как материнскую шиарлет-функцию (7) с соответствующими значениями масштаба a_j и сдвига $s_{j,k}$ мы применяем к каждому пикселю изображения. Параметр масштаба a_j определяет разрешающую способность шиарлет-функции. Таким образом, изображение раскладывается на множество компонентов $S_{j,k}(x, y) = (f \cdot g_{j,k})(x, y)$, где $g_{j,k}$ — фильтр на j-м масштабе и k-м сдвиге. Каждый такой компонент можно интерпретировать как отклик изображения на специфический ориентированно-масштабный фильтр. В итоге для изображения получаем набор шиарлет-коэффициентов на каждом масштабе a_j по каждому сдвигу $s_{j,k}$. Следует отметить, что общее количество сдвиговых коэффициентов k зависит от масштаба j, что влияет на максимально достижимые значения энтропии и сложности. Поэтому в работе мы не будем проводить прямого сравнения абсолютных значений для разных масштабов. Основные выводы будут основаны на сравнении формы спектров и положениях максимумов сложности.

Стоит отметить, что шиарлет-преобразование — это обобщение классического вейвлет-преобразования на случай анизотропного масштабирования и учета направленности структур. В качестве материнской шиарлет-функции используются вейвлет Мейера [Guo et al., 2009] или его частотная маска [Hauser, Steidl, 2014]. Ключевым отличием от вейвлетов является введение сдвиговой матрицы S_s. Это обеспечивает чувствительность к ориентации структур на изображении.

2.4. Вычисление спектров «энтропия – сложность» на основе шиарлет-преобразования

Ключевой задачей, предшествующей вычислению энтропии и сложности, является построение корректного вероятностного распределения, отражающего структурные особенности изображения. В предлагаемом подходе это достигается за счет интерпретации мощности шиарлет-коэффициентов как локализованных признаков различных масштабов и пространственной ориентации сдвига.

Быстрое дискретное шиарлет-преобразование изображения $f(x, y)$ возвращает набор шиарлет-коэффициентов $S_{j,k}(x, y)$, где j — индекс масштаба, k — индекс сдвига. На основе этих коэффициентов определим локальную энергию признаков как

$$E_{j,k}(x, y) = S^2_{j,k}(x, y). \tag{10}$$

Энергия (10) отражает интенсивность соответствующего масштаба и пространственной ориентации сдвига в данной точке изображения. Таким образом, каждое значение $E_{j,k}(x, y)$ может быть интерпретировано как нормированная плотность признаков на множестве индексов (j, k). Для удобства можно ввести последовательную индексацию i, объединяющую индексы j и k: $i = (j, k)$, и тогда получим набор энергий шиарлет-коэффициентов $E_i(x, y) \equiv E_{j,k}(x, y)$.

Если анализ проводится на уровне всего изображения (глобальная характеристика), вероятностное распределение формируется путем нормализации суммы энергии по всему пространству:

$$P_i^{(g)} = \frac{\sum\limits_{x,\,y} E_i(x,\,y)}{\sum\limits_{j,\,k,\,x,\,y} E_{j,k}(x,\,y)}. \tag{11}$$

Это распределение отражает, насколько сильно представлены различные масштабно направленные признаки на всем изображении. Оно особенно эффективно для однородных структур, где не требуется пространственное разрешение.

Для анализа неоднородных изображений — с локальными областями повышенной или пониженной сложности — используется локальное распределение вероятностей, определяемое в каждой точке $(x,\,y)$. Так как использование «сырых» $E_i(x,\,y)$ может быть чувствительным к шуму, применяется сглаживание по пространству с использованием гауссова фильтра, параметры которого зависят от масштаба:

$$E_i^*(x,\,y) = (K_{\sigma j} \cdot E_i)(x,\,y), \tag{12}$$

где $K_{\sigma j}$ — двумерный гауссов фильтр со стандартным отклонением $\sigma j = \sigma_0 \cdot 2^{j0-j-1}$, позволяющий учитывать контекст в зависимости от масштабного уровня анализа. Затем локальное распределение

$$P_i^{(l)}(x,\,y) = \frac{\sum E_i^*(x,\,y)}{\sum\limits_{j,\,k} E^*(x,\,y)} \tag{13}$$

обеспечивает пространственно разрешенную характеристику. Для каждой точки $(x,\,y)$ формируется вектор вероятностей, отражающий локальное представление разных признаков.

Затем на основе глобального или локального распределения $P = P_i$ вычисляются нормированные значения энтропии (2), неравновесия Йенсена – Шеннона (3) и сложности (6). В случае локального анализа значения H_n и C_n можно визуализировать в виде карт локальной энтропии и сложности. Карта энтропии $H_n(x,\,y)$ показывает уровень неопределенности структуры в данной области изображения. Карта сложности $C_n(x,\,y)$ отражает степень структурной организованности в каждой точке. Такие карты являются мощным инструментом анализа, позволяя не только оценить средние характеристики изображения, но и выявить локальные аномалии, границы, фрактальные области, островки порядка и т. д.

Отметим, что описанная методика для вычисления спектров энтропии и сложности на основе шиарлет-преобразования впервые была описана в работе А. Р. Браже [Brazhe, 2018]. Но в отличие от вышеупомянутой работы, где анализируется ансамбль всех масштабов одновременно, в данной работе акцент сделан на анализе каждого масштаба a_j по отдельности. Это позволяет: выявлять наиболее точно характерные масштабы структуры, сравнивать поведение системы на разных масштабных уровнях, определять характерный масштаб структурной сложности. Данный подход не отменяет многомасштабный анализ, а дополняет его, предоставляя более детальную информацию о вкладе каждого масштаба в общую структурную организацию.

2.5. Вычислительная сложность метода

Приведем априорную оценку вычислительной сложности предлагаемого алгоритма с учетом следующих параметров. Максимальное количество масштабов шиарлет-преобразования — $j_{\max} = 6$. Данное число приведено для самого крупного изображения, анализируемого в настоящей работе, 2880×1800 пикселей. Количество направлений на каждом масштабе равно $Z_j = 2^{j+1}$. Тогда суммарное количество масштабно-сдвиговых компонент составляет $B = 127$.

Основной вклад в вычислительную сложность вносит быстрое конечное шиарлет-преобразование (FFST), сложность которого для изображения размером $\{M, N\}$ пикселей составляет $O(B \cdot (M \cdot N) \log_2(M \cdot N))$. Таким образом, на анализируемое изображение приходится примерно $4{,}4 \cdot 10^9$ элементарных операций. Все вычисления проводились на системе: процессор 13th Gen Intel Core i5, 3,5 ГГц; ОЗУ DDR5 32 Гб, 4800 МГц. Последующие этапы, связанные с вычислением энергии коэффициентов, пространственным сглаживанием, построением распределений вероятностей и расчетом энтропии и сложности, имеют вычислительную сложность порядка $O(B \cdot M \cdot N)$ и не превышают сложность FFST.

Можно заключить, что общая асимптотическая сложность описанного метода составляет $O(B \cdot (M \cdot N) \log_2(M \cdot N))$. Это сопоставимо с классическим многомасштабным вейвлет-анализом и значительно ниже, чем у методов, основанных на мультифрактальном анализе, в которых вычислительная сложность достигает $O\left((M \cdot N)^2\right)$ элементарных операций.

Таким образом, при увеличении линейных размеров изображения в 2 раза, то есть при росте числа пикселей $(M \cdot N)$ в 4 раза, время работы алгоритма, имеющего вычислительную сложность $O(B \cdot (M \cdot N) \log_2(M \cdot N))$, увеличивается примерно в $4\left(1 + \frac{\log_2 4}{\log_2(M \cdot N)}\right)$ раз. Для приведенного в расчете размера изображения это дает множитель $\approx 4{,}36$. То есть рост времени незначительно превышает линейный.

3. Результаты анализа

3.1. Разрушение регулярного паттерна

В качестве первого тестового случая для демонстрации возможностей энтропийно-шиарлетного анализа была выбрана система с контролируемым разупорядочиванием регулярной структуры, имитирующей переход от упорядоченного (кристаллического) состояния к хаотическому (газообразному) (рис. 1). Такая модель является аналогом фазового перехода, широко исследуемого в статистической физике и нелинейной динамике.

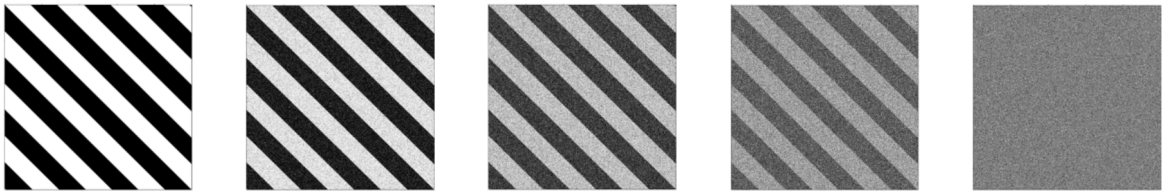


Рис. 1. Исследуемая система, имитирующая переход от кристаллического состояния к газообразному. Параметры сгенерированного изображения: размеры — 1024×1024 пикселей, цветовая палитра — градации серого

На исходном этапе изображение представляет собой строго регулярный двумерный паттерн — «кристалл» (см. рис. 1), характеризующийся высокой степенью симметрии, периодичностью и отсутствием вариативности на локальном уровне. По мере внесения флуктуаций (в виде точечных нарушений структуры, шумов, случайных сдвигов элементов и пр.) система постепенно переходит в состояние с разрушенной регулярностью — состояние, близкое к полностью разупорядоченному «идеальный газ», где каждый пиксель не коррелирован с соседями, и структура становится статистически изотропной и случайной (см. рис. 1). Внесение флуктуаций в исходное изображение «кристалл» осуществлялось случайным образом с вероятностью p^{image} по следующему сценарию: $p^{\text{image}} \in [0{,}01,\ 0{,}02,\ 0{,}03,\ 0{,}04,\ 0{,}05,\ 0{,}1,\ 0{,}15,\ 0{,}2,\ 0{,}25,\ \ldots,\ 1{,}0]$.

На рис. 2 представлены траектории состояния системы в пространстве средних значений H_n–C_n для шести различных масштабов a_j шиарлет-функции. Анализ показывает, что один

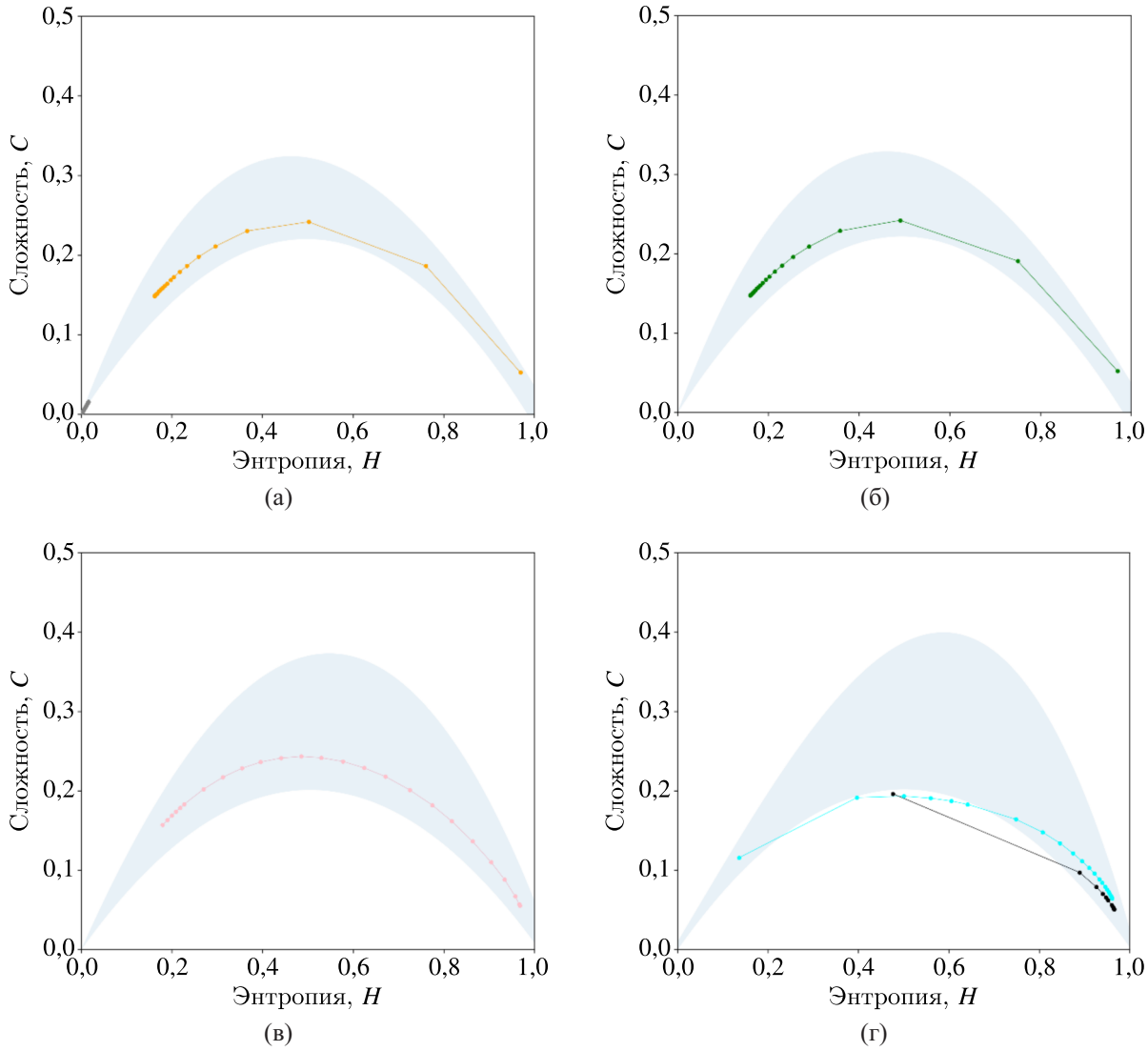


Рис. 2. Средние значения H_n–C_n для эволюционирующей системы, представленной на рис. 1. Траектория состояния системы в пространстве H_n–C_n для порядкового номера масштаба: а) $j = 0$ (серый) и $j = 1$ (оранжевый); б) $j = 2$; в) $j = 3$; г) $j = 4$ (голубой) и $j = 5$ (черный). Заливкой указана область, в которую ложатся локальные значения H_n–C_n. Область определена полиномиальной аппроксимацией третьего порядка

из масштабов, при $j = 3$, приводит к характерной выпуклой кривой, проходящей от левого нижнего угла (низкая энтропия и сложность — состояние «кристалл») к правому нижнему (высокая энтропия, но нулевая сложность — состояние «идеальный газ») (рис. 2, *в*). Остальные масштабы дают смещенные траектории, не охватывающие весь диапазон значений энтропии, а лишь его фрагменты — либо область низких значений (рис. 2, *а* и *б*) (структурно-глухие фильтры), либо область высоких значений (рис. 2, *в* и *г*) (перенасыщенность шумом). Это указывает на то, что только один масштаб a_j шиарлет-функции соответствует реальному масштабу структуры на изображении, остальные либо слишком крупные (избыточно усредняют), либо слишком мелкие (чувствительны к шуму).

На рис. 3, *а* представлена карта спектров мощности шиарлет-коэффициентов для разупорядоченной структуры с вероятностью $p^{\text{image}} = 0{,}85$ (соответствующее изображение приведено на рис. 3, *б*). Мощность шиарлет-коэффициентов рассчитывается стандартным образом,

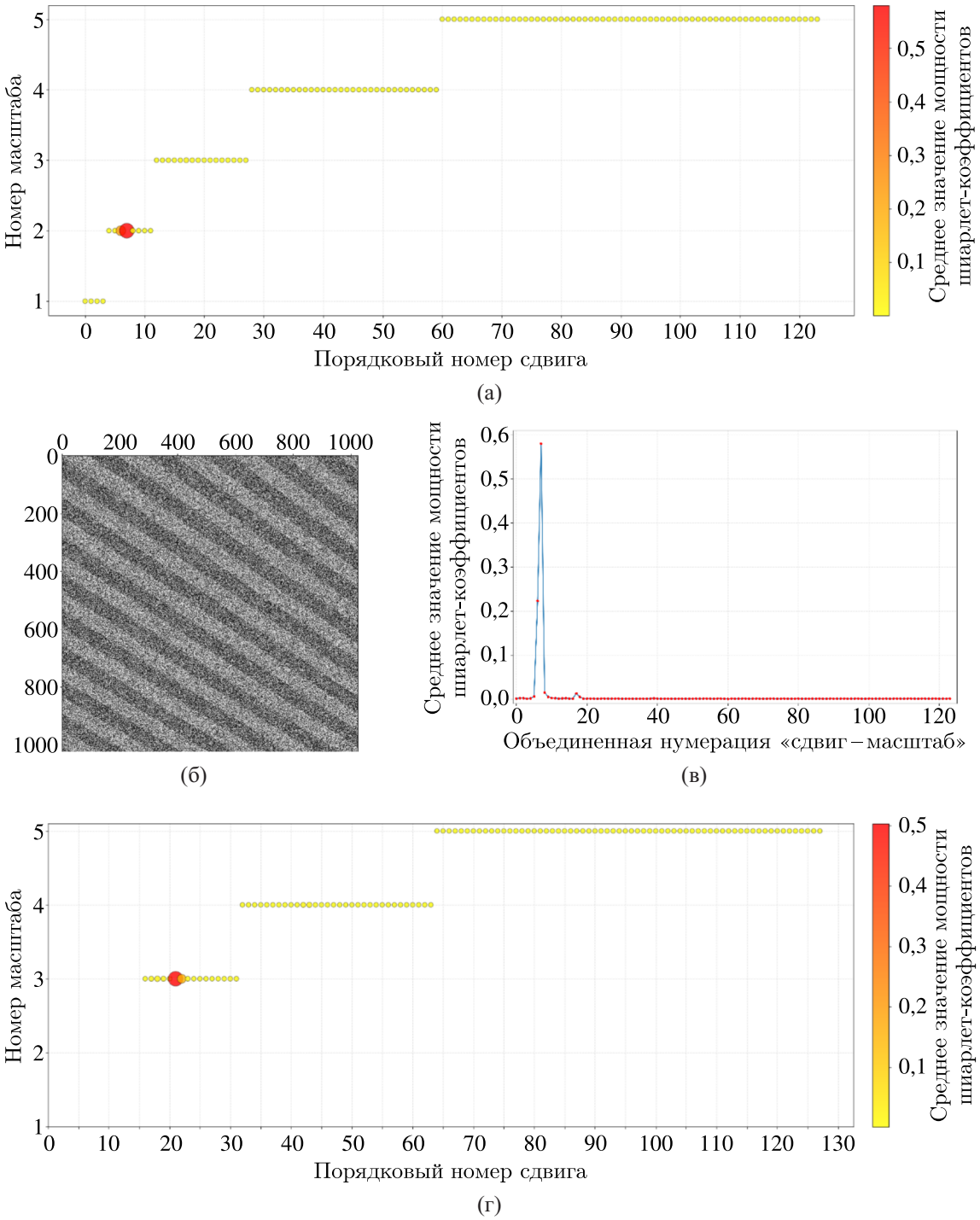


Рис. 3. а) Карта спектров мощности шиарлет-коэффициентов для масштабов $1 \leqslant j \leqslant 5$; б) изображение состояния разупорядоченной системы при вероятности $p^{\text{image}} = 0{,}85$; в) спектр мощности шиарлет-коэффициентов для масштабов $1 \leqslant j \leqslant 5$; г) карта спектров мощности шиарлет-коэффициентов для масштабов $3 \leqslant j \leqslant 5$

как $\sum\limits_{x,\,y} S^2_{j,k}(x,\,y)$. Это позволяет количественно оценить вклад каждой пары коэффициентов «масштаб – сдвиг» $(j,\,k)$ в общую энергию изображения.

Спектр мощности представлен для масштабов $1 \leqslant j \leqslant 5$, где каждый масштаб a_j соответствует определенному уровню разрешения, а сдвиговые коэффициенты k отражают ориентационную чувствительность шиарлет-функции. По данному спектру можно определить порядковый номер k сдвига, при котором пространственная ориентации шиарлет-функции совпадает с ориентацией структуры на изображении. Наибольшее значение мощности шиарлет-коэффициентов наблюдается при $j = 2$ и сдвиге при $k = 4$. Это говорит о том, что при данной паре коэффициентов «масштаб – сдвиг» (j, k) пространственная ориентация шиарлет-функции наиболее точно соответствует направлению протяженных элементов структуры на изображении. В то же время анализ кривых, представленных на рис. 2, показывает, что наилучшее соответствие шиарлет-коэффициентов с точки зрения динамики изменения сложности достигается для масштаба при $j = 3$. Данное различие указывает на то, что максимум энергии в спектре мощности не всегда совпадает с масштабом, на котором структурная организация наиболее информативна с точки зрения изучаемых характеристик.

На рис. 3, *в*, где также представлены спектры мощности шиарлет-коэффициентов, обнаруживается дополнительный, менее выраженный пик. Этот пик соответствует сдвиговому значению при третьем масштабе. Также это свидетельствует о наличии второстепенной ориентационной составляющей структуры, которая значительно уступает по интенсивности доминирующей. Мощность первого пика существенно превышает мощность второго, что позволяет интерпретировать его как своего рода фильтр, выделяющий крупномасштабные анизотропные элементы и подавляющий вклад более мелких деталей и шумовых компонент.

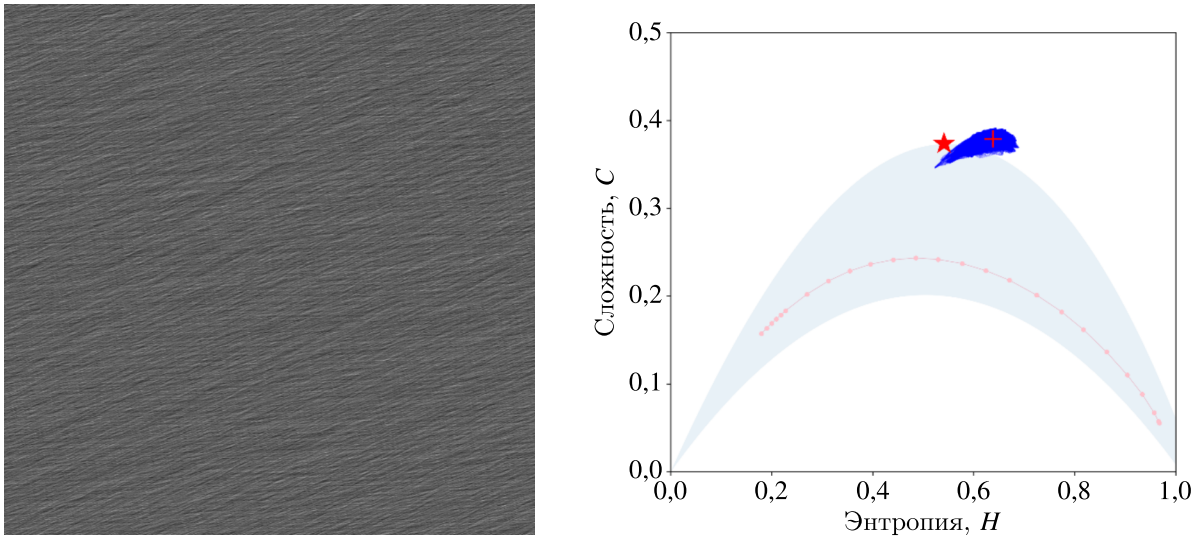
Если отсечь первые два масштабных уровня (соответствующие наиболее крупным структурам), то получим спектр мощности шиарлет-коэффициентов (см. рис. 3, *г*). Этот спектр охватывает масштабы начиная с $j = 3$ и демонстрирует более четкую локализацию ориентационных максимумов. В таком представлении становится возможным более точно определить номер сдвига k, при котором пространственная ориентация шиарлет-функции совпадает с ориентацией паттерна на мелкомасштабном уровне. Таким образом, последовательное исключение крупных масштабов позволяет выделять вклад различных иерархических уровней структуры, что особенно важно при анализе сложных многомасштабных изображений.

При переходе от упорядоченного состояния к хаотическому система перемещается по выпуклой траектории на плоскости «энтропия – сложность» (рис. 2, *в*), проходя через область максимальной сложности. Это соответствует состоянию, где структура частично разрушена, но все еще содержит фрагменты закономерностей. В рассматриваемом случае максимум сложности достигается при вероятности разупорядочения $p^{\text{image}} = 0{,}35$. Максимум сложности возникает вблизи критической точки между порядком и хаосом — аналог структурной критичности. Интересно, что именно на этом этапе эволюции системы, как следует из анализа спектров мощности, наиболее информативным оказывается масштаб при $j = 3$, который позволяет выявить остаточную ориентационную упорядоченность на фоне нарастающего хаоса.

Может возникнуть вопрос: если синтезировать изображение, соответствующее распределению верхней границы локальных значений «энтропия – сложность», и проанализировать его, то воспринимается ли оно как «сложное»? Для ответа на этот вопрос была разработана процедура генерации изображения по заданному распределению, соответствующему целевому значению энтропии $H_{\text{ц}}$. По заданному $H_{\text{ц}}$ рассчитываем максимальное ($H_{\max}$) и абсолютное ($H = H_{\text{ц}} \cdot H_{\max}$) значения энтропии. Затем, при условии равномерного распределения энтропии, оцениваем число o-состояний $\left(o \leqslant 2^H\right)$, вероятность которых будет равна $p_i = \frac{1}{o}$. Согласно полученному распределению вероятностей генерируем шиарлет-коэффициенты в области будущего изображения и выполняем обратное шиарлет-преобразование. Затем проводим нормировку изображения в диапазон [0, 1]. Так, по описанной методике получаем синтетическое изображение, соответствующее распределению верхней границы локальных значений.

В качестве примера рассмотрим случай разрушения регулярного паттерна при $j = 3$ (рис. 2, *в*). Точка локального максимума для верхней границы принимает значения $H_ц = 0{,}513$ и $C_ц = 0{,}375$ (отмечена красным символом «звезда» на рис. 4, *б*). По описанной выше методике получено синтетическое изображение (рис. 4, *а*), соответствующее $H_ц$.

Анализ этого изображения дает набор локальных значений энтропии и сложности, представленный синим цветом на рис. 4, *б*. Среднее значение энтропии и сложности полученного изображения — $H_n = 0{,}637$ и $C_n = 0{,}378$ (отмечено символом +). Среднее значение H_n синтезированного изображения сдвинулось в большую сторону от целевого, а среднее значение C_n соответствует $C_ц$. Таким образом, отвечая на поставленный вопрос, можно сказать, что синтезированное изображение (рис. 4, *а*), соответствующее распределению верхней границы локальных значений H_n–C_n, воспринимается как «сложное».



(а) (б)

Рис. 4. а) Сгенерированное изображение, соответствующее целевому значению энтропии $H_ц = 0{,}513$; (б) спектр локальных значений энтропии и сложности сгенерированного изображения, помещенный в координатную плоскость рис. 2, *в*. Спектр отмечен синим цветом, символом + отмечено его среднее значение. Символом «звезда» отмечена точка локального максимума верхней границы распределения H_n–C_n

Полученные результаты показывают, что предложенная методика позволяет не только количественно описывать эволюцию порядка и выявлять критические состояния по пику сложности, но и автоматически определять ключевой масштаб структурной релевантности. В данном случае таким масштабом является a_j при $j = 3$, на котором достигается баланс между чувствительностью к сохраняющимся закономерностям и устойчивостью к шумовым возмущениям. Это открывает возможность для переноса выявленных закономерностей на анализ реальных структур, где априорная информация о характерных масштабах организации, как правило, отсутствует.

3.2. Анализ фрактальных структур

Для энтропийно-шиарлетного анализа фрактальной структуры был выбран треугольник Серпинского как один из наиболее известных фракталов, обладающий строгой иерархией вложенных пустот и самоподобной геометрией. Параметры сгенерированного изображения: размеры — 1024 × 1024 пикселей, цветовая палитра — градации серого. На рис. 5, *а* представлены локальные, глобальные (желтые символы) и средние (красные символы) значения H_n–C_n, полученные при разных масштабах a_j шиарлет-функции.

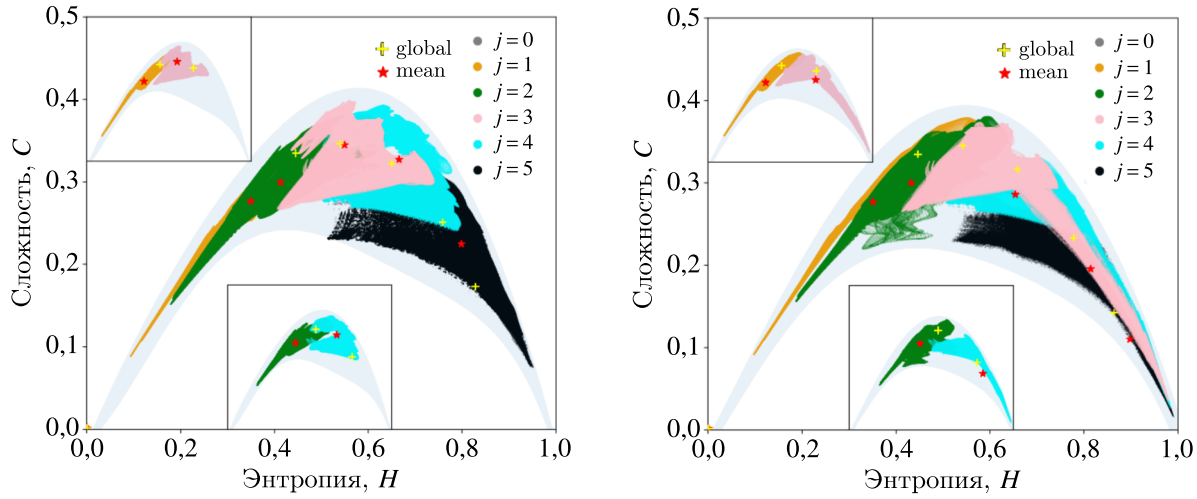


Рис. 5. Локальные, глобальные (желтые символы) и средние (красные символы) значения H_n–C_n, полученные при анализе фрактала Серпинского при разных масштабах a_j шиарлет-функции: а) случай без шума; б) случай с добавлением 1 % шума. На врезках к спектрам представлены локальные, глобальные и средние значения H_n–C_n для масштабов $j = 1$ и $j = 3$ (сверху в левом углу), $j = 2$ и $j = 4$ (снизу в центре). Заливкой указана область, в которую ложатся локальные значения H_n–C_n. Область определена полиномиальной аппроксимацией пятого порядка

Серые точки соответствуют масштабу с порядковым номером $j = 0$. В этом случае все локальные значения сгруппированы в области низких значений энтропии и сложности на плоскости H_n–C_n. При $j = 0$ мы имеем дело с самым крупным масштабом, который по своей сути является низкочастотным фильтром. Такой фильтр выделяет только наиболее общие, крупные структуры изображения и сглаживает высокочастотные детали. Поскольку фрактальная структура «треугольник Серпинского» характеризуется самоподобием и не содержит ярко выраженных крупномасштабных деталей, отклик низкочастотного фильтра оказывается минимальным. Как следствие, распределение вероятностей P_i, построенное на основе нормированной энергии шиарлет-коэффициентов E_i, стремится к вырожденному. Это и объясняет, почему получаемый спектр H_n–C_n лежит в области нулевых значений на карте «энтропия – сложность».

Для масштабов с номерами от $j = 1$ до $j = 5$ получен набор спектров H_n–C_n (см. рис. 5, *а*), отличный от нулевых значений. Анализ спектров показывает, что с увеличением номера масштаба j локальные и глобальные значения H_n и C_n смещаются в область более высоких значений энтропии. Данное поведение объясняется тем, что фильтры высших масштабов улавливают высокочастотные компоненты изображения, обеспечивая более точное представление его мелкомасштабной структуры и увеличивая тем самым неопределенность распределения признаков. На масштабе при $j = 1$ и $j = 2$ спектр значений демонстрирует наиболее широкие диапазоны сложности, однако средние значения составляют $H_n = 0{,}349$, $C_n = 0{,}277$ и $H_n = 0{,}413$, $C_n = 0{,}299$ соответственно. Это указывает на то, что на данном масштабе фильтр выделяет преимущественно крупные элементы структуры, что приводит к умеренным значениям энтропии и сложности. Локальный максимум сложности среди всего спектра значений $C_n = 0{,}398$ при энтропии $H_n = 0{,}560$ соответствует масштабу при $j = 3$. При этом же порядковом номере масштаба достигается максимальное среднее значение сложности $C_n = 0{,}345$ при энтропии $H_n = 0{,}55$ среди всех средних по масштабам. При номере масштаба $j = 4$ наблюдается смещение локальных и средних значений в сторону более высоких значений энтропии и меньших значений сложности. Среднее значение сложности $C_n = 0{,}327$ является вторым по величине.

При номерах масштабов $j = 3$ и $j = 4$ спектры энтропии – сложности локализованы в небольшом диапазоне значений энтропии, тогда как спектры при других масштабах имеют больший разброс значений информационной энтропии. При номере масштаба $j = 5$ наблюдается дальнейшее смещение как локальных, так и средних значений в сторону более высоких значений энтропии и меньших значений сложности. Это отражает вклад наиболее мелкомасштабных и высокочастотных компонентов изображения в итоговое распределение признаков. Достижение максимумов сложности при промежуточных значениях энтропии согласуется с определением нормированной сложности $C_n[P]$ из уравнения (6). Сложность максимальна в состояниях, далеких как от полного порядка, так и от полного хаоса. В контексте шиарлет-анализа это означает, что масштабы с порядковым номером $j = 3$ и $j = 4$ являются оптимальными для выявления структурной организованности фрактала, так как именно на них достигается баланс между количеством обнаруженных деталей (энтропия) и степенью их упорядоченности (неравновесие).

Обращает на себя внимание расхождение в положении средних и глобальных значений «энтропия – сложность» на шкале масштабов. Согласно карте, представленной на рис. 5, *а*, усредненные локальные значения H_n–C_n (красные символы) достигают пика сложности при номере масштаба $j = 3$. В противоположность этому глобальные значения H_n–C_n (желтые символы) демонстрируют максимальную сложность уже при $j = 2$.

При анализе полей локальных значений «энтропия – сложность» (рис. 6, *а*) отчетливо видно, что при номерах масштабов $j = 0$, $j = 1$ и $j = 2$ преобразование не улавливает характерной фрактальной структуры. На масштабах с номерами $j = 3$ и $j = 4$ наблюдается максимум сложности, а энтропия достигает средних значений. На данных масштабах преобразование улавливает структуру в виде вложенных треугольников, которая богата на локальные закономерности. При номере масштаба $j = 5$ значения энтропии возрастают, а сложности падают (см. рис. 5, *а* и рис. 6, *а*). Карты сложности и энтропии местами становятся «засвеченными», это говорит о том, что данный масштаб непригоден для анализа фракталов.

На рис. 6 представлены пространственные распределения нормированной энтропии H_n и статистической сложности C_n для фрактала «треугольник Серпинского» без шума (рис. 6, *а*) и с добавлением 1 % случайного шума (рис. 6, *б*). Основное различие между двумя изображениями заключается в характере пространственной локализации структуры. В идеальном фрактале наблюдается высокая степень регулярности и самоподобия, проявляющаяся в четко выраженных иерархических паттернах. В зашумленном случае происходит частичная деградация структуры, сопровождающаяся появлением мелкомасштабных флуктуаций.

При номерах масштаба $0 \leqslant j \leqslant 2$ поля энтропии и сложности практически однородны, а значения соотносятся с минимальными отклонениями (см. рис. 5, *а*, *б* и рис. 6, *а*, *б*). При $j = 0$, как и в случае без шума, отсутствует разрешающая способность для выявления структуры, и система воспринимается как однородная. При $j = 1$ и $j = 2$ начинают проявляться крупные треугольные структуры. Поле энтропии демонстрирует умеренные значения с плавными градиентами, а сложность локализуется в областях границ и вложенных элементов. На данных масштабах влияние шума на выявление структуры не оказывает влияния. При масштабе с номером $j = 3$ для фрактала без шума на полях сложности и энтропии четко выявляется самоподобная структура. Наблюдается локальный и средний максимум сложности. В пространстве сложность концентрируется на границах и вложенных треугольниках, а энтропия принимает значения из диапазона от 0,4 до 0,8. В зашумленном фрактале структура все еще различима, но появляются паразитные области повышенной энтропии. Среднее значение сложности заметно снижается по сравнению со случаем без шума, и границы становятся менее выраженными. Это обусловлено высокоэнтропийным хвостом, который виден на карте «энтропия – сложность» (рис. 5, *б*, $j = 3$) для данного масштаба. Все это подтверждает, что сложность чувствительна к разрушению корреляций, и даже слабый шум приводит к заметному снижению структурной

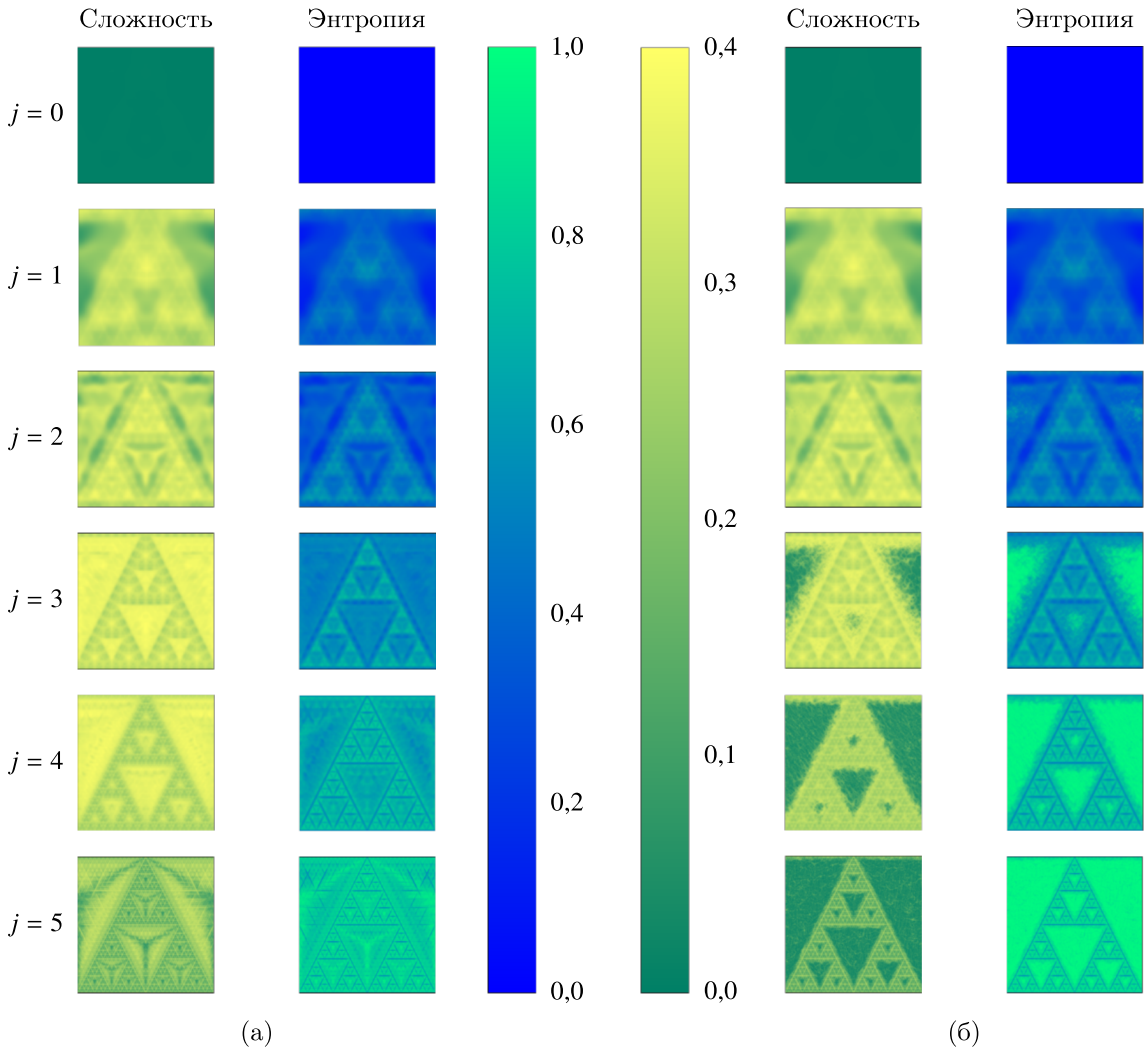


Рис. 6. Поля локальных значений энтропии (синие оттенки) и сложности (желтые оттенки) для фрактала «треугольник Серпинского» при различных масштабах a_j шиарлет-функции. Сверху вниз представлены поля энтропии и сложности для каждого масштаба. а) Случай без шума; б) случай с добавлением 1 % шума

организации. На масштабах с номерами $j = 4$ и $j = 5$ для фрактала без шума характерно выявление мелких деталей, соответствующих глубинным уровням самоподобия. Для зашумленного фрактала наблюдаются сильное «засвечивание» полей энтропии (рис. 6, *б*) и сильное смещение средней сложности в более низкие значения. Это демонстрирует, что на малых масштабах шум доминирует над структурой, т. е. происходит переход к состоянию, близкому к равновероятному распределению. Но микроструктура на этих масштабах практически не теряется на фоне шума. Шиарлет-преобразование улавливает структуру в виде вложенных треугольников, которая богата на локальные закономерности, как и в случае отсутствия шума.

Дополним раздельный анализ масштабов количественным критерием, позволяющим выделять масштаб, на котором структурная организация изображения проявляется наиболее выраженно. Назовем его «характерный масштаб структурной сложности». Для его определения будем использовать характеристику R_j:

$$R_j = \frac{\left\langle C_n^{(j)}(x, y) \right\rangle}{C_{\max}^{(j)}}, \tag{14}$$

где $C_{\max}^{(j)}$ — локальный максимум сложности на масштабе j. Тогда характерный масштаб структурной сложности j^* будем определять как максимум из набора R_j: $j^* = \max[R_0, \ldots, R_j]$. Такая нормировка делает сравнение разных масштабных уровней более менее корректным, поскольку устраняет зависимость максимальной сложности от числа сдвиговых компонент.

На рис. 7 представлены значения R_j и характерный масштаб структурной сложности j^* (отмечен жирным символом) для фрактала Серпинского с шумом и без. Каждый набор точек R_j может рассматриваться как спектр характерного масштаба структурной сложности. Наличие глобального максимума при $j = 3$ указывает на доминирующий уровень структурной организации фрактала. Присутствие дополнительных локальных максимумов (например, при $j = 2$ для случая с шумом и $j = 4$ для случая без шума) свидетельствует о наличии иерархической организации. Сравнение кривых для фрактала с шумом и без шума показывает, что шум подавляет структурную организацию на масштабах $j \geqslant 4$, и почти не изменяет положения доминирующего масштаба j^*. Это означает, что характерный масштаб структурной сложности является устойчивой характеристикой, слабо чувствительной к шуму.

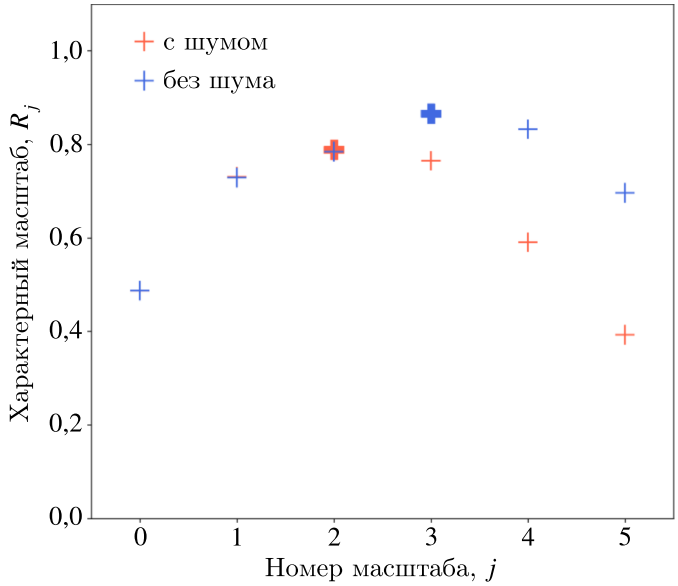


Рис. 7. Спектр характерного масштаба структурной сложности R_j для фрактала Серпинского. Показаны точки для случая без шума (синий цвет) и с добавлением 1 % случайного шума (красный цвет). Жирным символом + выделен доминирующий масштаб j^*, соответствующий максимуму R_j

Отметим, что величина j^* лишь выделяет доминирующий масштаб, тогда как дополнительные локальные максимумы R_j указывают на иерархическую или многомасштабную организацию и является самостоятельной характеристикой исследуемой структуры. Таким образом, выделение j^* не заменяет многомасштабный анализ, а служит его дополнительной количественной характеристикой.

Таким образом, фрактальные структуры демонстрируют пиковое значение сложности при промежуточных масштабах, что позволяет использовать статистическую сложность как критерий оценки многомасштабности. Поведение системы на плоскости H_n–C_n отличается от случая разрушения регулярного паттерна. Фрактал естественным образом находится в области средней энтропии и высокой сложности. А также сложность является более чувствительным индикатором структуры, чем энтропия. Ее значения резко падают даже при слабом зашумлении, что позволяет различать структурированный хаос и случайный шум. Стоит отметить, что для обоих случаев существует характерный масштаб структурной сложности с номером $j = 3$ и $j = 2$.

Именно на нем достигается максимум сложности. Такой же фрактальной структуре с большим разрешением будет соответствовать уже другой порядковый номер масштаба как самый характерный. Также отметим, что малые масштабы a_j непригодны для анализа многомасштабных структур в присутствии шума, так как сложность начинает деградировать.

3.3. Анализ снимков поверхности Марса

В качестве примера практического применения данного многомасштабного подхода был выполнен анализ изображений поверхности Марса. В отличие от синтетических изображений поверхность Марса представляет собой естественную многомасштабную систему, включающую дюнные поля, эрозионные структуры, пылевые и песчаные отложения.

В работе тщательно изучены три изображения Марса с различным паттерном. Снимки обладают высоким разрешением и находятся в открытом доступе на сервисе Photojournal (планетарный архив изображений NASA). Выбраны изображения, обозначенные как PIA18624 (ледяная поверхность северного полюса, 2880×1800 пикселей), PIA18620 (песчаные дюны — поперечные эоловые гряды, 2880×1800 пикселей) и PIA18513 (конус выноса на низкоширотном кратере, 2880×1800 пикселей). Они показаны на рис. 8–10. Более подробную информацию об изображениях можно получить по следующей ссылке: http://photojournal.jpl.nasa.gov/.

Стоит отметить, что данные дистанционного зондирования планет представляют собой сложные пространственные структуры, формируемые под воздействием геологических, климатических и эрозионных процессов. Их количественная характеристика является важной задачей в планетологии, в частности для выявления морфологических особенностей и реконструкции процессов формирования поверхности. Основной целью данного этапа являлись выявление структурных особенностей поверхности на различных масштабах, количественная оценка степени упорядоченности и сложности рельефа. Особое внимание уделено анализу пространственного распределения энтропии и сложности для выделения различных морфологических областей.

Сравнительный анализ показывает, что различные морфологические структуры проявляют себя по-разному (см. рис. 8–10). На снимке PIA18624 с ледяной поверхностью присутствуют отверстия во льдах (черные точки). Структура на изображении (рис. 8, *а*) соответствует состоянию, близкому к стохастическому или равновероятному. Однако анализ дает более глубокую картину. При номерах масштабов $1 \leqslant j \leqslant 4$ шиарлет-фильтры выделяют крупные анизотропные элементы изображения, соответствующие чередующимся полосам из отверстий во льдах (рис. 8, *б* и *в*). На этих масштабах наблюдается достаточно упорядоченная структура, что отражается в умеренных значениях энтропии H_n (в диапазоне 0,5–0,8) и повышенных значениях сложности C_n (в диапазоне 0,33–0,38) на плоскости H_n–C_n (рис. 8, *б*). Поля локальной энтропии (рис. 8, *в*) демонстрируют четкую пространственную привязку к границам полос, подтверждая наличие структурной организации. И только при номере масштаба $j = 5$ шиарлет-преобразование достигает разрешения, достаточного для выделения микроскопической структуры — отдельных отверстий (рис. 8, *в*). Спектр значений H_n–C_n значительно смещается в область высокой энтропии и низкой сложности. В данном случае шиарлет-анализ позволяет выявить, на каких пространственных масштабах формируются те или иные морфологические элементы.

Сравним полученный результат с работой [Zunino, Ribeiro, 2016], где авторы проводили энтропийный анализ такого же снимка поверхности Марса модифицированным методом Бандта – Помпе. Отметим, что авторы вышеупомянутой работы не отмечали обнаружения макроскопической структуры чередующихся полос, состоящих из отверстий во льдах. Это связано с тем, что методика, основанная на методе перестановочной энтропии Бандта – Помпе, позволяет проводить оценку только усредненных значений энтропии и сложности. Главным преимуществом шиарлет-преобразования для оценки энтропии и сложности является возможность анализировать поля локальных значений энтропии и сложности. Данный инструмент в первую очередь

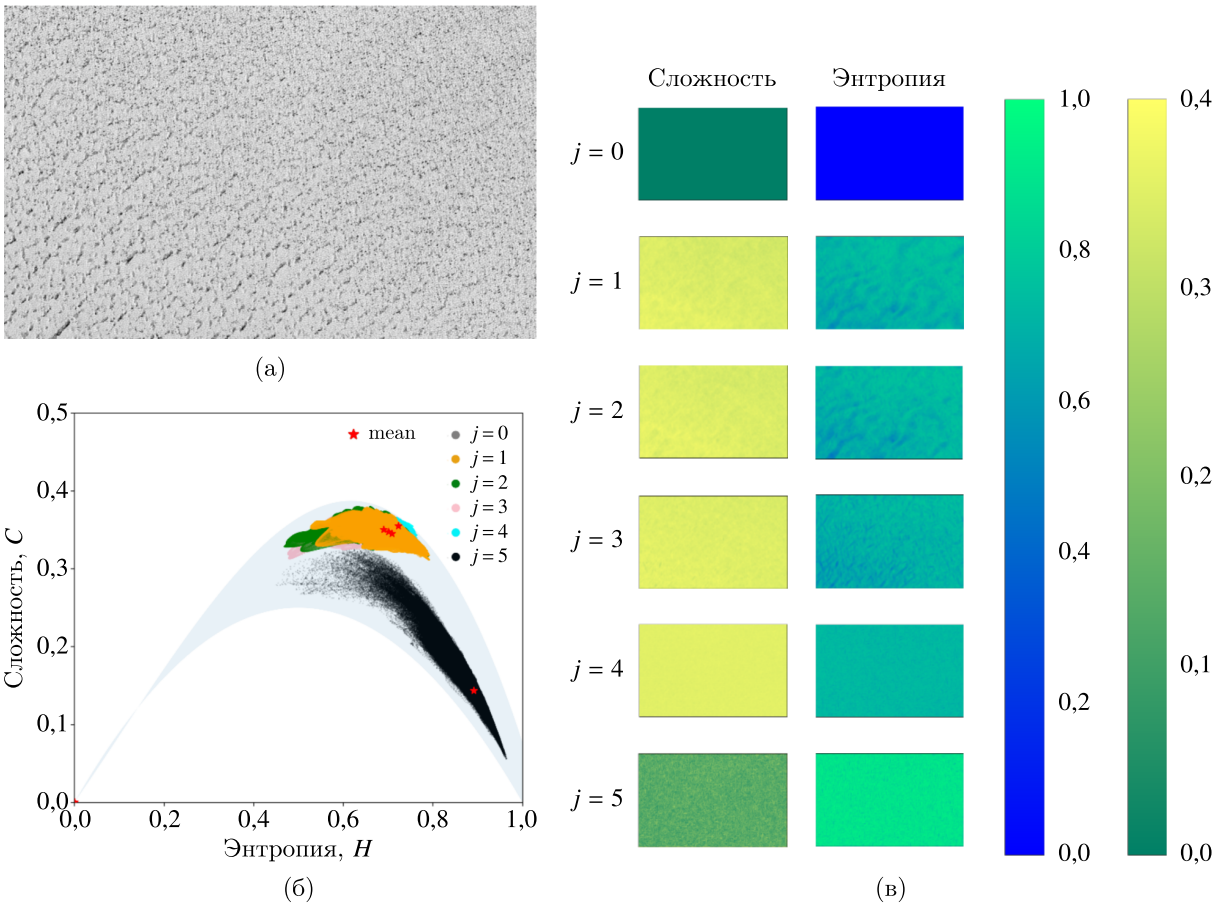


Рис. 8. а) Изображение поверхности Марса PIA18624 (ледяная поверхность северного полюса). Изображение переведено в цветовую палитру градации серого без сжатия. Оригинальный размер — 2880 × 1800 пикселей. б) Спектр значений H_n–C_n для всех масштабов. Красным символом отмечено среднее значение спектра. Заливкой указана область, в которую ложатся локальные значения. Область определена полиномиальной аппроксимацией третьего порядка. в) Поля локальных значений энтропии (синие оттенки) и сложности (желтые оттенки) при различных масштабах a_j шиарлет-функции. Сверху вниз последовательно представлены поля энтропии и сложности для каждого масштаба

акцентирует внимание на деталях, незаметных глазу. Это является необходимым при анализе изображений со сложной, иерархически организованной или слабоконтрастной структурой.

На снимке PIA18620 представлены песчаные дюны с выраженной периодичностью (рис. 9, *а*). При номерах масштабов $1 \leqslant j \leqslant 3$ шиарлет-фильтры выделяют периодическую структуру, для которой характерны низкие значения энтропии H_n (в диапазоне 0,23–0,26) и сложности C_n (в диапазоне 0,23–0,25) (см. рис. 9, *б* и *в*). Это соответствует высокоупорядоченной, регулярной текстуре с доминированием небольшого числа направлений сдвига k. При номере масштаба $j = 4$ алгоритм начинает улавливать микроструктуру, которую в планетологии описывают как «перья» (рис. 9, *в*). Эта структура представляет собой дюны меньшего размера, ориентированные перпендикулярно к крупным дюнам (рис. 9, *а*), что указывает на смену направления ветровой активности. На этом масштабе распределение энергии шиарлет-коэффициентов становится более равномерным по направлениям, что выражается в росте энтропии до $H_n \approx 0{,}6$ и появлении заметного вклада в сложность $C_n \approx 0{,}3$. При номере масштаба $j = 5$ спектр H_n–C_n занимает практически весь диапазон значений энтропии H_n (рис. 9, *б*). Это указывает на наличие иерархической структуры, аналогичной фрактальным объектам. Поля локальной сложности

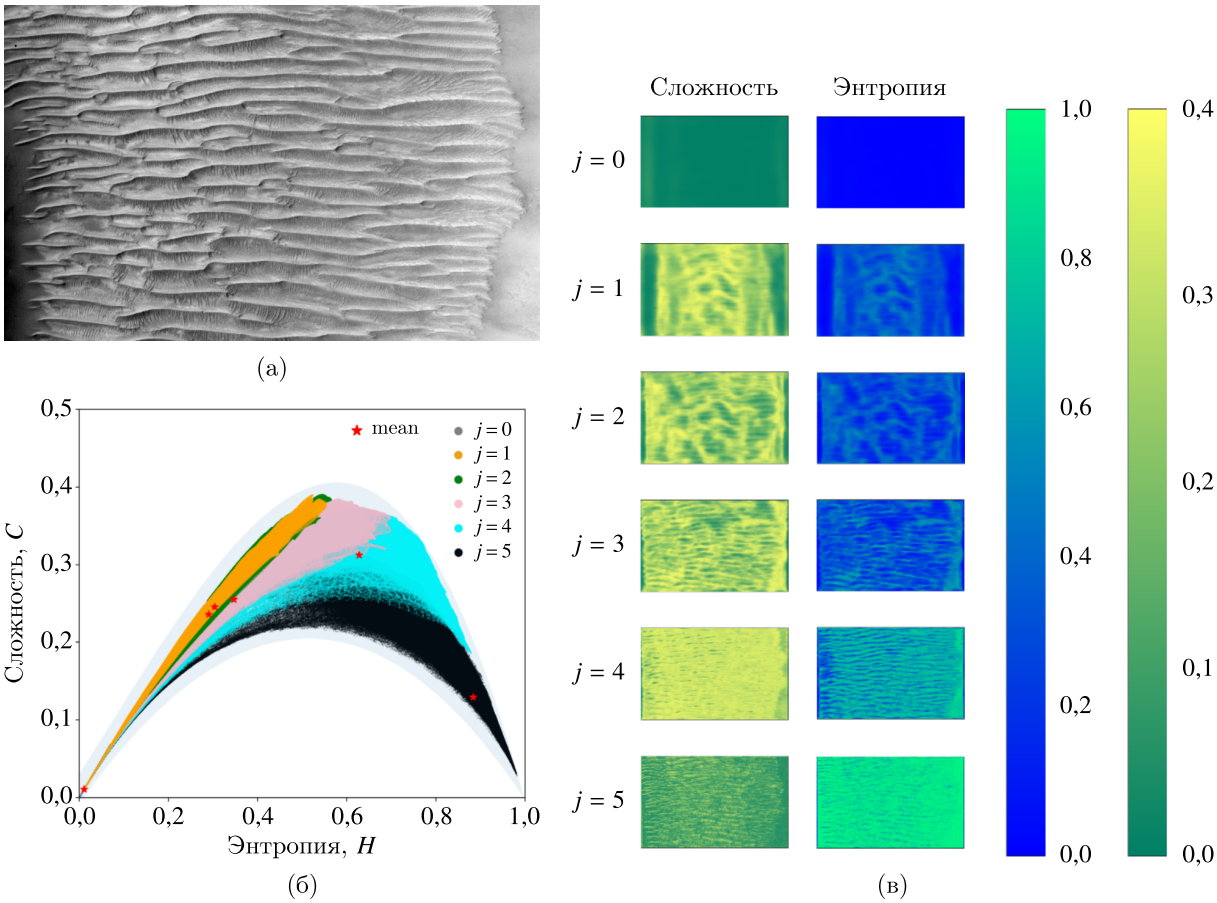


Рис. 9. а) Изображение поверхности Марса PIA18620 (песчаные дюны — поперечные эоловые гряды). Изображение переведено в цветовую палитру градации серого без сжатия. Оригинальный размер — 2880 × 1800 пикселей. б) Спектр значений H_n–C_n для всех масштабов. Красным символом отмечено среднее значение спектра. Заливкой указана область, в которую ложатся локальные значения. Область определена полиномиальной аппроксимацией второго порядка. в) Поля локальных значений энтропии (синие оттенки) и сложности (желтые оттенки) при различных масштабах a_j шиарлет-функции. Сверху вниз последовательно представлены поля энтропии и сложности для каждого масштаба

при $j = 4$ и $j = 5$ позволяют пространственно локализовать участки с наиболее выраженной перьевидной структурой.

Для снимка PIA18513 с конусом выноса кратера (рис. 10, *а*) наблюдается аналогичная картина, что и для снимка на рис. 9, *а*. При номерах масштабов $1 \leqslant j \leqslant 2$ шиарлет-преобразование выделяет макроструктуру конуса выноса, для которой характерны низкие значения энтропии и сложности (см. рис. 10, *б* и *в*). Проводя сравнение с результатами, представленными на рис. 9, видно, что в для данного случая средние значения сложности на карте H_n–C_n располагаются выше. При номере масштаба $j = 3$ проявляется микроструктура вкупе с макроструктурой, которая дает максимум средней сложности C_n (см. рис. 10, *б*). Можно заключить, что данный масштаб является ключевым. При остальных масштабах $j \geqslant 4$ улавливается исключительно микроструктура в виде малых дюн. Эти формы, скорее всего, образованы воздушным потоком, выходящим из кратера.

Проведенный анализ снимков поверхности Марса показал, что на разных масштабах выделяются различные типы структур. Крупные масштабы a_j выявляют глобальные формы рельефа, промежуточные масштабы наиболее информативны для анализа структуры, а малые масштабы чувствительны к шумам и микронеровностям поверхности. Можно заключить, что использова-

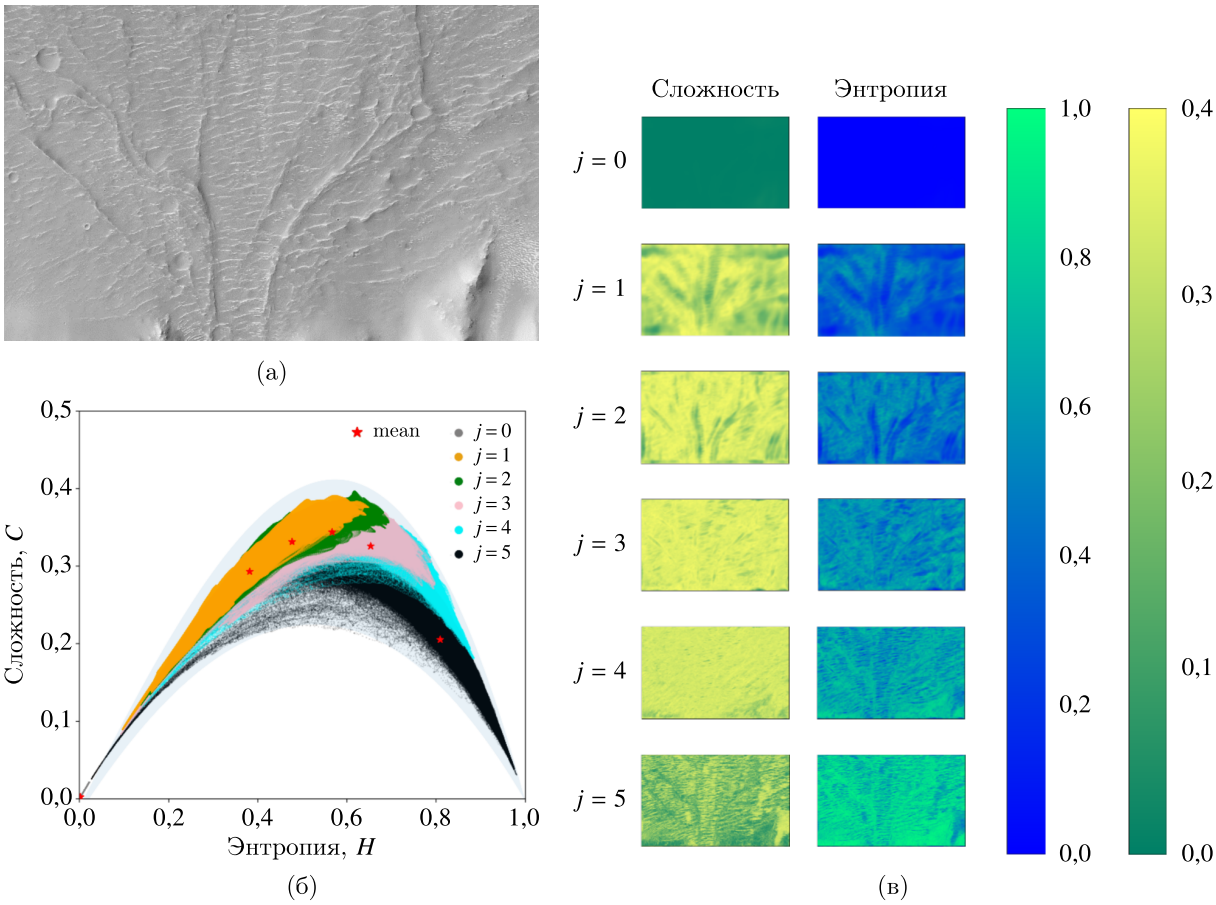


Рис. 10. а) Изображение поверхности Марса PIA18513 (конус выноса на низкоширотном кратере). Изображение переведено в цветовую палитру градации серого без сжатия. Оригинальный размер — 2880×1800 пикселей. б) Спектр значений H_n–C_n для всех масштабов. Красным символом отмечено среднее значение спектра. Заливкой указана область, в которую ложатся локальные значения. Область определена полиномиальной аппроксимацией второго порядка. в) Поля локальных значений энтропии (синие оттенки) и сложности (желтые оттенки) при различных масштабах a_j шиарлет-функции. Сверху вниз последовательно представлены поля энтропии и сложности для каждого масштаба

ние многомасштабного анализа позволяет разделять геологические структуры по их характерному размеру и тем самым давать описание процессов формирования рельефа.

Приведем простейший пример автоматизированной сегментации структур изображения на основе полей сложности. На каждом шиарлет-масштабе a_j формируется собственное поле сложности $C_n(x, y)$, отражающее пространственную организацию структур данного масштаба. Как показано в подпараграфе 3.2 на примере фрактала Серпинского (см. рис. 6), разные масштабы выделяют разные уровни иерархии. При $3 \leqslant j \leqslant 5$ отчетливо видны вложенные треугольники (кроме случая без шума, там поля H_n–C_n становятся «засвеченными»). Аналогичная картина наблюдается и на снимках поверхности Марса (см. рис. 8–10, *в*). Каждый морфологический тип структуры (ледяные отверстия, дюны, конус выноса) проявляется на своем характерном масштабе.

Для автоматизированной сегментации структур на конкретном масштабе j можно предложить следующий простой алгоритм, который опишем коротко. Алгоритм: вычисляем градиент поля сложности и по резкому перепаду значений вычисленного градиента, с определенным порогом, определяем область сегментации структур. Поскольку естественные структуры, как прави-

ло, не одномасштабны, необходимо отсекать подструктуры других масштабов. Поле сложности для конкретного масштаба j как раз подавляет вклад других масштабов благодаря самой природе шиарлет-преобразования.

На рис. 11, *а* представлено поле градиента сложности для поверхности Марса PIA18513 (см. рис. 10, *а*). Отсюда видно, что конус выноса кратера хорошо отображен на масштабе $j = 2$, а мелкая структура из дюн — на масштабе $j = 5$. Аналогично для поверхности Марса PIA18620 (см. рис. 9). В этом случае поле градиента сложности (рис. 11, *б*) отчетливо проявляет крупномасштабные хребты дюн при $j = 3$, а мелкая перьевидная структура наблюдается при $j = 5$. Представленные поля позволяют с хорошей точностью выполнить сегментацию изображения.

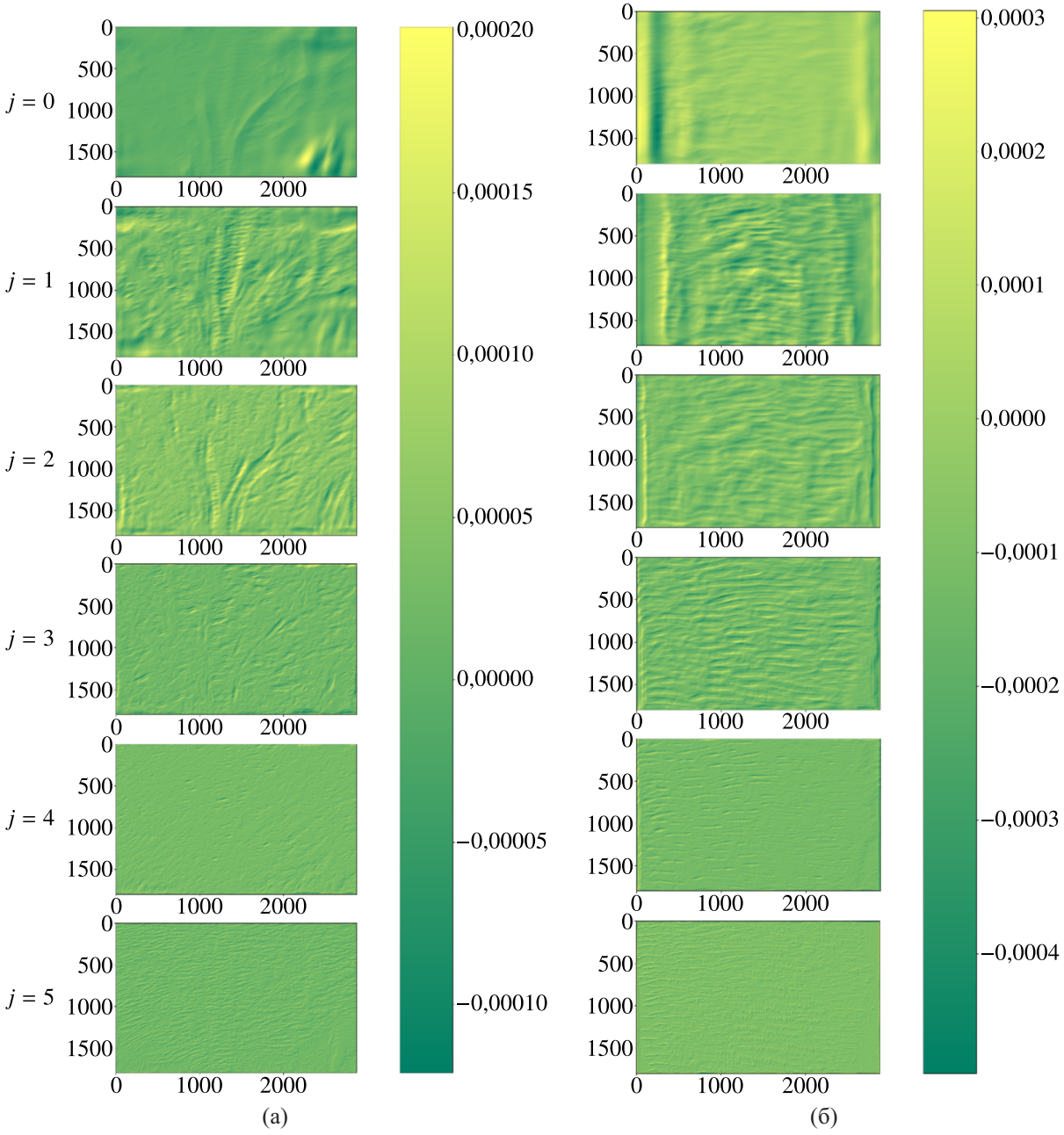


Рис. 11. а) Градиент поля сложности, соответствующий рис. 10, *в*. б) Градиент поля сложности, соответствующий рис. 9, *в*

Отметим, что приведенный алгоритм является примитивным и имеет некоторые ограничения. Например, на крупных масштабах границы структур могут быть размытыми, а на малых — шум создает ложные границы, как это видно из полей H_n–C_n рис. 6. Также выбор порога сегментации может быть неоднозначным. Описанный алгоритм является лишь примером автоматизированной сегментации по полям H_n–C_n, мы не ставим целью данной работы его разработку.

Полученные результаты демонстрируют, что пространство «энтропия – сложность» может использоваться как инструмент для морфологической сегментации поверхности, а статистическая сложность эффективно выявляет структурно значимые области. В данном подразделе показано, что разные морфологические типы поверхностей (ледяные отверстия, дюны, конус выноса) занимают разные области на плоскости параметров H_n–C_n. Для каждого морфологического типа поверхности можно выделить характерные масштабы, на которых наиболее выражена их макро- или микроструктура. Также показано, что поля сложности и энтропии позволяют пространственно локализовать области с разной организацией (например, квазипериодические полосы ледяных отверстий на рис. 8, которые отчетливо видны на полях сложности при масштабах $j = 2, 3$). Особенно важно, что данный подход не требует предварительной разметки данных и является полностью автоматическим. Применение метода к изображениям поверхности Марса открывает возможности для автоматической классификации типов рельефа, выявления аномальных областей и анализа динамики поверхности (при наличии временных данных).

3.4. Сравнение схожих паттернов

Сравним две схожие структуры. Первая — с поверхности Марса: снимок PIA18620 с песчаными дюнами, который обсуждался выше (см. рис. 9, *а*). Вторая — с поверхности Земли: снимок Namib-Naukluft National Park, Namibia (см. рис. 12, *а*). Оба снимка взяты с одного и того же сервиса Photojournal (планетарный архив изображений NASA) и имеют высокое разрешение, отличное друг от друга. Снимок со структурой с поверхности Земли был предварительно обработан: вырезана область размером 2880×1800 пикселей, на которой представлены исключительно песчаные дюны. Схожесть структур заключается в их одинаковой природе образования — эоловое происхождение и выраженная периодичность. Но масштабы структур, степень их зрелости и воздействие внешних факторов отличаются.

При сравнении рис. 9, *а* и рис. 12, *а* наблюдаются схожие периодические черты структуры. Но в марсианских условиях преобладают линейные дюны с перпендикулярной к ним перьевидной структурой (рис. 9, *а*). Также известно, что из-за отсутствия растительности и слабой эрозии эти структуры на Марсе стабильны, что приводит к их высокой упорядоченности и периодичности. В земных условиях наблюдается разнообразие форм: звездчатые дюны, сложные барханы, поперечные гряды с частыми изломами и перьевидные структуры. Это в первую очередь связано с наличием переменных ветров, влиянием влажности и биоты. Все это характеризует структуру как нестабильную. Известно, что в земных условиях дюны мигрируют и меняют свою форму за десятки лет, что делает их менее периодическими.

Анализируя и сравнивая спектры локальных значений энтропии и сложности (рис. 9, *б* и рис. 12, *б*), заметим, что для земной структуры при номерах масштабов $1 \leqslant j \leqslant 2$ область значений в околонулевой области отсутствует (рис. 12, *б*). В первую очередь это говорит о плохой степени периодичности структуры. На это также указывает и повышенное значение сложности для распределений, соответствующих двум масштабам при номерах $1 \leqslant j \leqslant 2$ (локальные максимумы — $C_{\max} = 0{,}395$ при $j = 1$ и $C_{\max} = 0{,}394$ при $j = 2$). При масштабе $j = 3$ наблюдается глобальный максимум сложности $C_n = 0{,}349$ (рис. 12, *б*), а для структуры в марсианских условиях глобальный максимум сложности приходится на масштаб $j = 4$ со значением $C_n = 0{,}312$. Интересно сравнить распределение локальных значений энтропии и сложности при масштабе $j = 5$.

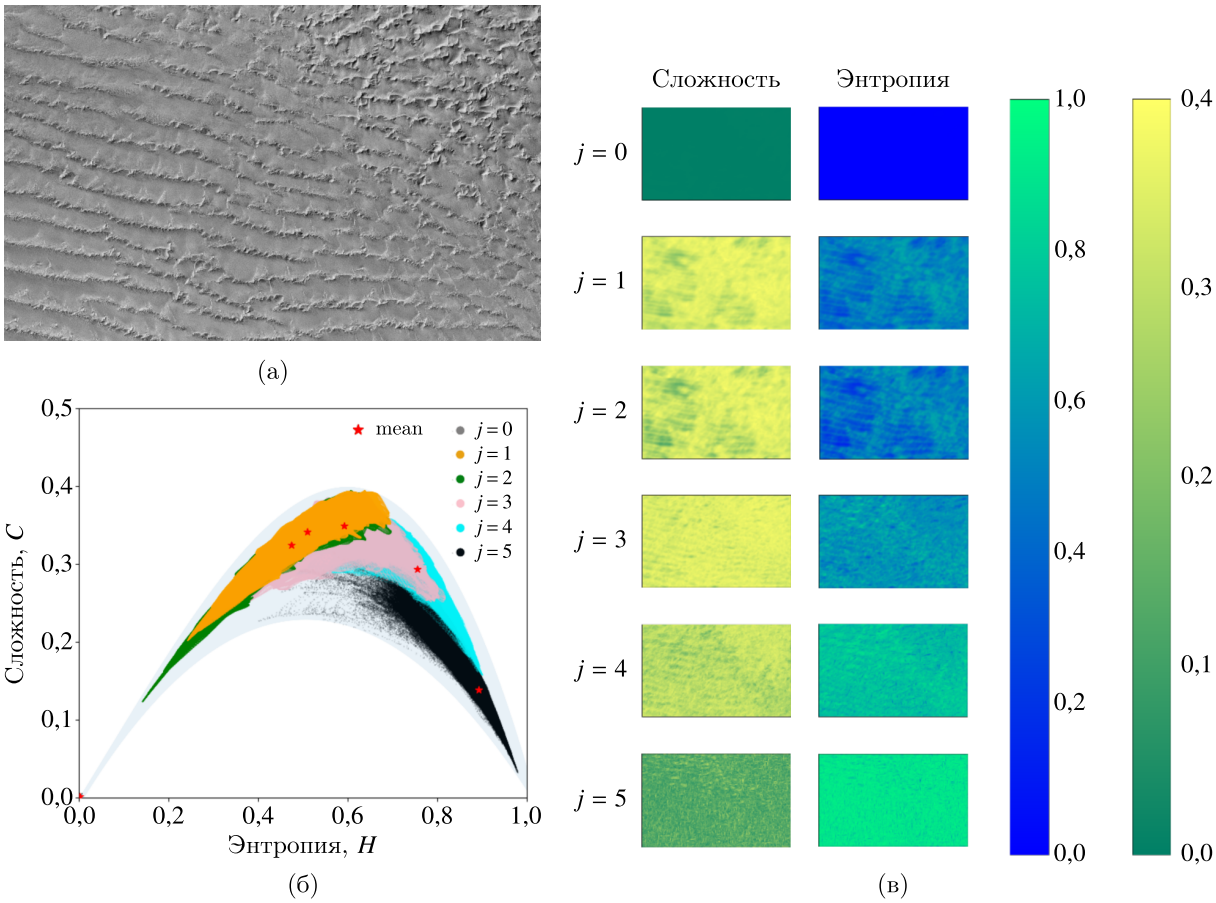


Рис. 12. а) Изображение поверхности Земли Namib-Naukluft National Park, Namibia (самые высокие песчаные дюны на Земле). После предварительной обработки изображение было переведено в цветовую палитру градации серого без сжатия. б) Спектр значений H_n–C_n для всех масштабов. Красным символом отмечено среднее значение спектра. Заливкой указана область, в которую ложатся локальные значения. Область определена полиномиальной аппроксимацией третьего порядка. в) Поля локальных значений энтропии (синие оттенки) и сложности (желтые оттенки) при различных масштабах a_j шиарлет-функции. Сверху вниз последовательно представлены поля энтропии и сложности для каждого масштаба

Для марсианской структуры (рис. 9, *б*) значения сложности разбросаны во всем диапазоне энтропии, а для структуры с Земли (рис. 12, *б*) значения энтропии H_n находятся в диапазоне от 0,5 до 1,0. Это говорит о том, что в марсианских условиях присутствует периодическая микроскопическая субструктура, которую и называют перьевидной. В земных условиях такая субструктура отсутствует, что подтверждается отсутствием значений с низкой энтропией (рис. 12, *б* и *в*) на этом масштабе. Но средние значения энтропии и сложности H_n–C_n на этом масштабе ($j = 5$) примерно одинаковые, (0,884; 0,129) — для структуры с Марса и (0,892; 0,139) — для структуры с Земли.

Обнаруженные различия в масштабном поведении энтропии и сложности позволяют не только различать дюнные поля Марса и Земли, но и количественно оценивать степень их зрелости, стабильности и иерархической организации.

4. Заключение и обсуждение

В данной работе рассмотрен подход к многомасштабному анализу структур на изображениях, основанный на вычислении спектров энтропии и сложности с использованием дискрет-

ного шиарлет-преобразования. Предложенный подход ориентирован на исследование многомасштабных структур различной природы и позволяет выявлять закономерности пространственной организации данных без привлечения априорной информации. Благодаря этому становится возможным построение распределений вероятностей, адекватно отражающих пространственную организацию изображений на различных масштабных уровнях.

Проведенные исследования на синтетических и реальных изображениях позволили установить ряд ключевых закономерностей. Во-первых, показано, что энтропия и сложность являются взаимодополняющими характеристиками. Энтропия отражает степень неопределенности и разнообразия распределения признаков, а сложность характеризует наличие структурной организации и корреляций. Их совместное использование обеспечивает более полное описание состояния системы, чем каждая из метрик по отдельности. Во-вторых, установлено, что наиболее информативным является промежуточный диапазон масштабов шиарлет-преобразования. Именно на этих масштабах достигается максимум статистической сложности. А также наиболее отчетливо проявляются структурные особенности изображений и обеспечивается оптимальный баланс между глобальной и локальной информацией. На малых масштабах a_j наблюдается доминирование шумовых компонент, а на крупных — потеря детализации. И в-третьих, показано, что различные типы структур занимают различные области на плоскости «энтропия – сложность». Регулярные системы характеризуются низкой энтропией и низкой сложностью, стохастические структуры — высокой энтропией и низкой сложностью, а многомасштабные и фрактальные системы — промежуточной или высокой энтропией и максимальной сложностью. Это позволяет использовать пространство «энтропия – сложность» как универсальное пространство признаков.

Результаты анализа подтверждают, что предложенный подход обладает высокой чувствительностью к изменениям структурной организации. В частности, показано, что даже слабое зашумление (на уровне 1 %) приводит к увеличению энтропии и заметному снижению сложности. Это свидетельствует о том, что сложность является чувствительным индикатором разрушения корреляционных структур, что особенно важно при анализе реальных данных.

Возможности применения метода представлены на реальных изображениях поверхности Марса и Земли. Это показывает применимость метода для анализа природных многомасштабных систем. Для каждого снимка были выявлены характерные масштабы, соответствующие различным морфологическим элементам. Показано, что пространство «энтропия – сложность» позволяет не только количественно характеризовать структуру, но и выполнять морфологическую сегментацию без предварительной разметки данных.

Следует отметить, что использование шиарлет-преобразования обеспечивает принципиальное преимущество по сравнению с изотропными методами, так как позволяет учитывать направленность структур, пространственную анизотропию и геометрические особенности границ и разломов. Также предлагаемый подход позволяет пространственно локализовать и многомасштабно охарактеризовать области, где система далека от равновесия, что дает более детальную картину, чем интегральная характеристика в кинетическом подходе [Аристов, Ильин, 2018]. А в работе [Любушин и др., 2023] предложен подход к анализу сейсмического шума, основанный на совместном использовании нормализованной энтропии распределения квадратов вейвлет-коэффициентов, индекса Донохо – Джонстона и ширины носителя мультифрактального спектра сингулярности. Авторы показывают, что увеличение сейсмической опасности сопровождается упрощением статистической структуры шума (ростом энтропии и падением мультифрактальности), что согласуется с результатами текущей работы по переходу от упорядоченного к хаотическому состоянию (подпараграф 3.1).

Описанный подход обладает рядом преимуществ: он автоматизирован, не требует априорной информации об изображении, устойчив к шуму (при выборе оптимальных масштабов) и позволяет проводить как глобальный, так и локальный анализ с построением карт энтропии

и сложности. Практическая значимость состоит в том, что предложенный метод не требует предварительной сегментации или обучения и устойчив к вариациям структуры. В совокупности эти свойства делают предложенный метод наилучшим инструментом для решения задач, связанных с выявлением скрытых многомасштабных структур, классификацией текстур по степени упорядоченности. Также метод применим для обнаружения критических состояний и фазовых переходов в сложных системах по их пространственным изображениям. В отличие от традиционных подходов данный метод позволяет не только количественно оценить степень хаотичности, но и пространственно локализовать области с различной структурной организацией. Это особенно важно при анализе неоднородных и зашумленных изображений в реальных прикладных задачах, от анализа медицинских изображений до дистанционного зондирования. Также стоит сделать акцент на том, что важно рассматривать каждый масштаб по отдельности. Именно такой подход дает возможность выявлять скрытые закономерности, которые не проявляются при одновременном рассмотрении всех масштабов или при ориентации только на один характерный масштаб. Как показано в подпараграфе 3.3, на примере анализа снимка PIA18624 (рис. 6) раздельное рассмотрение полей локальной энтропии и сложности по различным масштабам позволило обнаружить квазипериодическую структуру, образованную отверстиями во льдах.

Поскольку в данной работе мы выполняем анализ для каждого масштаба по отдельности, для этой цели могут быть использованы альтернативные подходы. Развитый инструмент для такого анализа, наиболее часто встречающийся в литературе, — это подход основанный на матрицах Гессе. Например, он применялся для выделения сосудистых структур [Frangi et al., 1998], анализа характерных локальных структур на разных масштабах [Garcia-Olalla et al., 2014], а также в современных приложениях для анализа наномасштабных структур [Suzuki, Igarashi, 2025].

Дальнейшее развитие работы может быть связано с анализом динамических систем и временных рядов изображений. Возможно расширение метода для анализа изображений на основе матриц Гессе. Видятся применение метода к медицинским данным (например, гистологическим срезам) и разработка автоматических алгоритмов классификации на основе траекторий в пространстве «энтропия – сложность». Таким образом, предложенный подход представляет собой универсальный инструмент для анализа сложных изображений и может служить основой для дальнейших исследований в области обработки и интерпретации многомасштабных структур.

Список литературы (References)

Аристов В. В., Ильин О. В. Методы и задачи кинетического подхода для моделирования биологических структур // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 6. — С. 851–866.

Aristov V. V., Ilyin O. V. Metody i zadachi kineticheskogo podkhoda dlya modelirovaniya biologicheskich structur [Methods and problems in the kinetic approach for simulating biological structures] // Computer Research and Modelling. — 2018. — Vol. 10, No. 6. — P. 851–866 (in Russian).

Любушин А. А., Копылова Г. Н., Касимова В. А., Таранова Л. Н. Мультифрактальные и энтропийные статистики сейсмического шума на Камчатке в связи с сильнейшими землетрясениями // Компьютерные исследования и моделирование. — 2023. — Т. 15, № 6. — С. 1507–1521.

Lyubushin A. A., Kopylova G. N., Kasimova V. A., Taranova L. N. Multifractalniye i entropiyniye statistiki seysmichekogo shuma na Kamchatke v svyazi s silneyshimi zemletryaseniyami [Multifractal and entropy statistics of seismic noise in Kamchatka in connection with the strongest earthquakes] // Computer Research and Modelling. — 2023. — Vol. 15, No. 6. — P. 1507–1521 (in Russian).

Argyroudis G. S., Siokis F. M. Spillover effects of great recession on Hong-Kong's real estate market: an analysis based on causality plane and tsallis curves of complexity – entropy // Physica A Stat. Mech. Appl. — 2019. — Vol. 524. — P. 576–586.

Astinchap B., Ghanbaripour H., Amuzgar R. Multifractal analysis of chest CT images of patients with the 2019 novel coronavirus disease (COVID-19) // Chaos Soliton. Fract. — 2022. — Vol. 156. — Art. 111820.

Bandt C., Pompe B. Permutation entropy: a natural complexity measure for time series // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 88. — Art. 174102.

Bratsun D. A., Krasnyakov I. V. Study of architectural forms of invasive carcinoma based on the measurement of pattern complexity // Math. Model. Nat. Phenom. — 2022. — Vol. 17. — Art. 15.

Brazhe A. Shearlet-based measures of entropy and complexity for two-dimensional patterns // Phys. Rev. E. — 2018. — Vol. 97. — Art. 061301.

Frangi A. F., Niessen W. J., Vincken K. L., Viergever M. A. Multiscale vessel enhancement filtering // Med. Image Comput. Comput. Assist. Interv. — 1998. — P. 130–137.

Guo K., Labate D., Lim W.-Q. Edge analysis and identification using the continuous shearlet transform // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 2009. — Vol. 27. — P. 24–46.

Garcia-Olalla O., Alegre E., Fernandez-Robles L., Gonzalez-Castro V. Local oriented statistics information bosting (LOSIB) for texture classification // Proc. Int. Conf. Pattern Recognit (ICPR 2014). — 2014. — P. 1114–1119.

Hauser S., Steidl G. Convex multiclass segmentation with shearlet regularization // Int. J. Comput. Mat. — 2012. — Vol. 90. — P. 62–81.

Hauser S., Steidl G. Fast finite shearlet transform: a tutorial // ArXiv. — 2014. — http://arxiv.org/abs/1202.1773

He L., Long L. R., Antani S., Thoma G. R. Histology image analysis for carcinoma detection and grading // Comput. Methods Programs Biomed. — 2012. — Vol. 107. — P. 538–556.

Jalontzki D., Zussman A., Pendurkar S., Sharon G., Kozak Y. A computer vision approach for analysis of detonation cellular structures // Appl. Energy Combust. Sci. — 2025. — Vol. 23. — Art. 100340.

Jia S., Zhan Z., Xu M. Shearlet-based structure-aware filtering for hyperspectral and LiDAR data classification // J. Remote Sens. — 2021. — Vol. 2021. — Art. 9825415.

Lopez-Ruiz R., Mancini Y. L., Calbet X. A statistical measure of complexity // Phys. Lett. A. — 1995. — Vol. 209. — P. 321–326.

Martin M. T., Plastino A., Rosso O. A. Generalized statistical complexity measures: geometrical and analytical properties // Physica A Stat. Mech. Appl. — 2006. — Vol. 369. — P. 439–462.

Mosheva E., Krasnyakov I. Applying the shearlet-based complexity measure for analyzing mass transfer incontinuous-flow microchannels // Fluid Dyn. Mater. Process. — 2024. — Vol. 20. — P. 1743–1758.

Pinto E. P., Pires M. A., da Silva R. N., Duarte Queiros S. M. Cryptocurrency time series on the binary complexity – entropy plane: ranking efficiency from the perspective of complex systems // Physica A Stat. Mech. Appl. — 2025. — Vol. 674. — Art. 130699.

Plata A., Lebedeva A., Denisov P., Nosova O., Postnikova T. Y., Pimashkin A., Brazhe A., Zaitsev A. V., Rusakov D. A., Semyanov A. Astrocytic atrophy following status epilepticus parallels reduced $Ca2^{+}$ activity and impaired synaptic plasticity in the rat hippocampus // Front. Mol. Neurosci. — 2018. — Vol. 11. — Art. 215.

Reisenhofer R., Kiefer J., King E. J. Shearlet-based detection of flame fronts // Exp. Fluids. — 2016. — Vol. 57. — Art. 41.

Ribeiro H. V., Zunino L., Lenzi E. K., Santoro P. A., Mendes R. S. Complexity-entropy causality plane as a complexity measure for two-dimensional patterns // PLOS ONE. — 2012. — Vol. 7. — Art. e40689.

Rosso O. A., Larrondo H. A., Martin M. T., Plastino A., Fuentes M. A. Distinguishing noise from chaos // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 99. — Art. 154102.

Saalbrink J., Loo T. Y. J., Mertesdorf J., Xu P., Pedersen M. T., Clausen M. P., Bonilla J. C. Quantifying microscopic droplets in colloidal systems through machine learning-based image analysis // Food Hydrocoll. — 2025. — Vol. 166. — Art. 111301.

Suzuki M., Igarashi Y. Application of a hessian-based image-processing method for enhanced visualization of nanoscale rubber cross-linked network structures from electron microscopy images // ACS Appl. Nano Mater. — 2025. — Vol. 8. — P. 112–120.

Thakur K., Damodare O., Sapkal A. Hybrid method for medical image denoising using shearlet transform and bilateral filter // Int. Conf. Inf. Process. — 2015. — P. 220–224.

Xiong H., Shang P., He J., Zhang Y. Complexity and information measures in planar characterization of chaos and noise // Nonlinear Dyn. — 2020. — Vol. 100. — P. 1673–1687.

Xu Y., Wang Q., Wu Z. Denoising method for X-ray images with poisson-gaussian noise based on a new threshold function and shearlet transform // J. Radiat. Res. Appl. Sci. — 2024. — Vol. 17. — Art. 101074.

Zunino L., Ribeiro H. V. Discriminating image textures with the multiscale two-dimensional complexity-entropy causality plane // Chaos Soliton. Fract. — 2016. — Vol. 91. — P. 679–688.