КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2026 Т. 18 № 5 С. 1081–1091
DOI: 10.20537/2076-7633-2026-18-5-1081-1091

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.6:534.1

Исследование сходимости метода конечных элементов для упругих волн в анизотропных средах

И. Е. Смирнов

Московский физико-технический институт,
Россия, 141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: smirnov.ie@mipt.ru

Получено 10.07.2026, после доработки — 12.09.2026.
Принято к публикации 29.09.2026.

В работе представлен подробный и систематический анализ сходимости метода конечных элементов при моделировании распространения упругих волн в анизотропных средах, обладающих ортотропной симметрией тензора упругости. Пространственная дискретизация основана на применении метода конечных элементов с квадратичными базисными функциями P_2 на неструктурированных тетраэдральных сетках, что обеспечивает гибкость при работе со сложными геометриями. Для интегрирования по времени используется схема Ньюмарка с параметрами $\beta = 0{,}302$, $\gamma = 0{,}6$; при этом выбор именно этой схемы не оказывает влияния на пространственную сходимость, которая является предметом настоящего исследования.

Анализ сходимости выполнен на тестовой задаче с гладким локализованным начальным импульсом в полупространстве с граничными условиями свободной поверхности. Начальные условия подобраны таким образом, что решение остается гладким, а импульс не достигает границ расчетной области до момента сравнения решений. Это позволяет исключить влияние аппроксимации граничных условий на исследуемую сходимость и сосредоточиться исключительно на пространственной составляющей погрешности. Серия вычислительных расчетов проведена на шести последовательно сгущающихся неструктурированных сетках с числом тетраэдров от 39 728 до 372 904. Сравнение производилось с эталонным решением, полученным на существенно более мелкой сетке, что обеспечивает достаточную точность референсных данных. Для корректного вычисления нормы разности решения на всех сетках проецировались на единую грубую пространственную сетку.

Установлено, что порядок сходимости в норме L_2 составляет 2,314 при использовании медианной длины ребра тетраэдров в качестве характерного размера сетки и 2,878 при использовании обратного кубического корня из числа элементов. Полученные значения свидетельствуют о хорошей сходимости реализованной численной схемы и подтверждают корректность предложенного подхода.

Ключевые слова: метод конечных элементов, сходимость, упругие волны, анизотропные среды

© 2026 Иван Евгеньевич Смирнов
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2026 VOL. 18 NO. 5 P. 1081–1091
DOI: 10.20537/2076-7633-2026-18-5-1081-1091

Ки&М

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 519.6:534.1

Convergence study of the finite element method for elastic waves in anisotropic media

I. E. Smirnov

Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, 141701, Russia

E-mail: smirnov.ie@mipt.ru

Received 10.07.2026, after completion — 12.09.2026.
Accepted for publication 29.09.2026.

The paper presents a detailed and systematic convergence analysis of the finite element method for modeling elastic wave propagation in anisotropic media possessing orthotropic symmetry of the elasticity tensor. Spatial discretization is based on the application of the finite element method with quadratic basis functions P_2 on unstructured tetrahedral meshes, which provides flexibility in handling complex geometries. For time integration, the Newmark scheme with parameters $\beta = 0.302$, $\gamma = 0.6$ is used; however, the choice of this particular scheme does not affect the spatial convergence, which is the subject of the present study.

The convergence analysis is performed on a benchmark problem with a smooth localized initial pulse in a half-space with free-surface boundary conditions. The initial conditions are chosen such that the solution remains smooth and the pulse does not reach the boundaries of the computational domain until the moment of solution comparison. This allows one to eliminate the influence of boundary condition approximation on the studied convergence and to focus exclusively on the spatial component of the error. A series of computational calculations is carried out on six successively refined unstructured meshes with the number of tetrahedra ranging from 39 728 to 372 904. The comparison is performed against a reference solution obtained on a substantially finer mesh, which ensures sufficient accuracy of the reference data. To correctly compute the norm of the difference, the solutions on all meshes were projected onto a common coarse spatial mesh.

It is established that the convergence order in the L_2 norm is 2.314 when using the median edge length of tetrahedra as the characteristic mesh size, and 2.878 when using the inverse cube root of the number of elements. The obtained values indicate good convergence of the implemented numerical scheme and confirm the correctness of the proposed approach.

Keywords: finite element method, convergence, elastic waves, anisotropic media

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 5, pp. 1081–1091 (Russian).

© 2026 Ivan E. Smirnov
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Введение

Задачи моделирования распространения упругих волн в деформируемых твердых телах занимают центральное место в механике сплошной среды и имеют широкий спектр приложений: от сейсмологии [Petrov et al., 2017; Golubev et al., 2017] и аэрокосмической инженерии [Davies, Olsson, 2004; Georgantzinos et al., 2023] до биомеханики [Beklemysheva et al., 2015] и неразрушающего контроля композитных материалов [Zhou et al., 2017; Aksenov et al., 2024]. Особый интерес представляют анизотропные среды, которые благодаря своим уникальным физико-механическим свойствам все чаще используются в ответственных конструкциях. Однако именно анизотропия существенно усложняет как аналитическое, так и численное исследование волновых процессов, что обусловливает необходимость разработки и тщательной верификации специализированных вычислительных подходов.

Ранее [Smirnov, Vasyukov, 2025] был предложен численный подход для моделирования распространения упругих волн в композитных структурах, основанный на комбинации метода конечных элементов и схемы Ньюмарка. Данный подход показал свою эффективность при решении практических задач, однако вопрос сходимости метода остался за рамками указанного исследования. Восполнение этого пробела является целью настоящей работы.

Современные подходы к численному моделированию волновых задач можно условно разделить на несколько групп. Сеточные методы, такие как метод конечных разностей и сеточный характеристический метод [Vasyukov, Smirnov, 2023; Vasyukov, Petrov, 2018], хорошо зарекомендовали себя в сейсмологии и при решении задач с разрывными решениями. Метод разрывных методов Галёркина высокого порядка [Dumbser, Käser, 2006] обеспечивает высокую точность, однако требует значительных вычислительных ресурсов. Спектральные методы [Igel, 1999] эффективны для задач с гладкими решениями на регулярных областях, но их применение к сложным геометриям ограничено.

Метод конечных элементов [Zienkiewicz et al., 2024] остается одним из наиболее универсальных инструментов благодаря своей гибкости при работе со сложными геометриями и разнообразными граничными условиями. Для интегрирования по времени в задачах динамики конструкций широко используется семейство схем Ньюмарка [Newmark, 1962], которое включает как явные, так и неявные варианты. Описываемый метод, представляющий собой комбинацию МКЭ и схемы Ньюмарка, находит широкое применение в инженерной практике [Zimmermann, 1987]. Анализ сходимости этого подхода остается довольно сложной задачей, тем не менее существуют теоретические оценки сходимости для модельных задач, схожих с рассматриваемой в данной работе [Kumar et al., 2023; Bradji, Fuhrmann, 2014].

1. Математическая модель

Рассмотрим задачу о распространении упругих волн в деформируемом твердом теле. В рамках теории малых упругих деформаций математическая модель может быть представлена в виде системы уравнений движения и определяющих соотношений [Bedford, Drumheller, 2023; Седов, 1994]:

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}_i = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \\ \varepsilon_{kl} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_k}\right). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность среды, u_i — компоненты вектора перемещений, σ_{ij} и C_{ijkl} — компоненты тензоров напряжений и упругости соответственно, f_i — компоненты массовой силы, действующей на единицу объема. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Для анизотропных материалов, рассматриваемых в данной работе, тензор упругости в матричной форме (нотация Фойгта) имеет вид [Новацкий и др., 1971]

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Система (1) решается в пространственной области Ω с границей $\partial\Omega$ на интервале времени $[0, T]$. В данной работе рассматриваются только граничные условия типа Неймана (свободная поверхность), поэтому модификация системы для условий Дирихле не требуется. Для полноты изложения отметим, что при наличии условий Дирихле система (6) модифицируется стандартным способом: соответствующие строки и столбцы вычеркиваются, а в правую часть добавляются известные граничные значения. Начальные условия имеют вид

$$\vec{u}(0, x, y, z) = \vec{u}_0(x, y, z), \quad \dot{\vec{u}}(0, x, y, z) = \vec{v}_0(x, y, z). \tag{3}$$

2. Численный метод

2.1. Пространственная дискретизация

Для численного решения системы (1) применяется метод конечных элементов [Zienkiewicz et al., 2024]. Искомое векторное поле перемещений $\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u_1, u_2, u_3)$ представляется в виде

$$u_{k,h}(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{J} s_{kj}(t) \cdot \phi_j(x, y, z), \quad k = 1, 2, 3, \tag{4}$$

где J — число базисных функций, ϕ_j — скалярные базисные функции, $s_{kj}(t)$ — неизвестные коэффициенты.

Слабая формулировка задачи получается после умножения исходных уравнений (1) на тестовые вектор-функции $\mathbf{v}$, интегрирования по области Ω и применения формулы интегрирования по частям к слагаемым с напряжениями:

$$\rho \iiint\limits_{\Omega} \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{v}\, dV + \iiint\limits_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)\, dV = \iint\limits_{\partial\Omega_N} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}\, dS + \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dV, \tag{5}$$

где $\mathbf{v}$ — тестовая вектор-функция, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T\right)$ — тензор деформаций, $\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ — вектор поверхностных напряжений на границе с условиями типа Неймана $\partial\Omega_N$.

После подстановки аппроксимации (4) в слабую форму (5) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$M\ddot{s} + Ks = b, \tag{6}$$

где матрица масс M, матрица жесткости K и вектор внешних сил b определяются следующим образом:

$$M_{ij} = \rho \iiint\limits_{\Omega} \phi_i \cdot \phi_j \, dV, \quad K_{ij} = \iiint\limits_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\phi_i) : C : \boldsymbol{\varepsilon}(\phi_j) \, dV,$$
$$b_i = \iint\limits_{\partial\Omega_N} p \cdot \phi_i \, dS + \iiint\limits_{\Omega} f \cdot \phi_i \, dV. \tag{7}$$

Дискретизация осуществляется на основе элементов P_2 с помощью FreeFem [Hecht, 2012].

2.2. Интегрирование по времени

Для интегрирования системы (6) по времени используется метод Ньюмарка [Newmark, 1962]. Данный метод представляет собой семейство одношаговых схем, в которых перемещения и скорости на новом временном слое $t_{n+1} = t_n + \tau$ аппроксимируются следующим образом:

$$s_{n+1} = s_n + \tau \dot{s}_n + \frac{\tau^2}{2}[(1 - 2\beta)\ddot{s}_n + 2\beta\ddot{s}_{n+1}], \tag{8}$$

$$\dot{s}_{n+1} = \dot{s}_n + \tau[(1 - \gamma)\ddot{s}_n + \gamma\ddot{s}_{n+1}], \tag{9}$$

где β и γ — параметры метода, определяющие его свойства.

В настоящей работе выбраны параметры $\beta = 0{,}302$, $\gamma = 0{,}6$, что соответствует методу Хилбера – Хьюза – Тейлора (HHT-α) с контролируемым численным демпфированием для подавления паразитных высокочастотных колебаний в решении [Hilber et al., 1977]. Детальное описание вычислительной реализации схемы Ньюмарка опускается, так как она стандартна и не влияет на пространственную сходимость, которая является предметом настоящего исследования.

3. Анализ сходимости

Оценка сходимости производится путем сравнения эталонного решения с решениями на последовательно сгущающихся сетках [Richardson, 1910]. В качестве эталонного решения s^{exc} берется расчет на сетке с мелкостью в несколько раз меньше, чем у самой малой из исследуемых. Решения сравниваются в некоторый момент времени, при котором большая часть расчетной области имеет ненулевое значение. При этом расчеты на один и тот же момент времени на исследуемых и на эталонной сетках проецируются на грубую сетку с размером вектора решения J. На этой грубой сетке рассчитывается норма разности текущего исследуемого решения s^h с эталонным решением, здесь h — мелкость текущей исследуемой сетки. Используется норма

$$\|L\|_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^{J} \left| s_j^h - s_j^{exc} \right|^2}.$$

Расчет степени сходимости осуществляется исходя из предположения, что решение на текущей исследуемой сетке s^h зависит от эталонного решения s^{exc} следующим образом:

$$s^h = s^{exc} + R(h), \tag{10}$$

где невязку $R(h)$ можно оценить как $R(h) = h^p + o(h)$, здесь h — мелкость исследуемой сетки, p — степень зависимости невязки от мелкости сетки, то есть степень сходимости решения от мелкости сетки.

Таким образом, норма разности исследуемого и эталонного решений $\left\|s^h - s^{exc}\right\|_2$ равняется $h^p + o(h)$. Отношение логарифма нормы разности $\log\left\|s^h - s^{exc}\right\|_2$ к логарифму мелкости $\log h$ покажет степень сходимости реализованного метода:

$$p \approx \frac{\log\left\|s^h - s^{exc}\right\|_2}{\log h}. \tag{11}$$

Для оценки мелкости сетки используется два способа:

- медианный размер ребра h_{med} по всем тетраэдрам сетки;
- обратный кубический корень из количества тетраэдров N в сетке $h_{count} = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$.

При этом все тетраэдральные сетки формируются с помощью Gmsh [Geuzaine, Remacle, 2009] с различным для разных исследуемых сеток, но одинаковым по всей сетке параметром *scale*. Расчетная область также одинаковая, поэтому сравнение по количеству тетраэдров корректно.

Для контроля качества сеток были вычислены двугранные углы. Для всех исследуемых сеток медианные значения двугранных углов лежат в узком диапазоне 62,6–63,7 градусов, что подтверждает сопоставимость качества сеток и позволяет исключить влияние сеточных искажений на наблюдаемый порядок сходимости.

4. Численные эксперименты

4.1. Тестовая задача

В качестве тестовой задачи для анализа сходимости используются начальные условия типа гладкого локализованного импульса в центре расчетной области $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$. Характерные размеры области: $L_x = L_y = 20$ м, $L_z = 10$ м. Начальные смещения: $u(t = 0,\ x,\ y,\ z) = 0$, а скорости задаются выражением

$$\dot{u}(t = 0,\ x,\ y,\ z) = \begin{cases} \dfrac{\cos^4(\omega r)}{r + \varepsilon}, & r < R, \\ 0, & r \geqslant R, \end{cases} \tag{12}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — радиус-вектор точки, $R = 2$ — радиус области локализации импульса, $\varepsilon = 10^{-8}$ — малая константа для регуляризации вблизи $r = 0$, $\omega = \frac{2\pi}{4R}$ — параметр, определяющий пространственный период осцилляций. Параметры подобраны таким образом, чтобы импульс гладко сходился к нулю вблизи R.

На всех границах расчетной области заданы граничные условия типа Неймана «свободная поверхность» с нулевым напряжением:

$$\sigma(t,\ x,\ y,\ z) = \{0 \mid (x, y, z) \in \partial\Omega\}. \tag{13}$$

Сравнение производится на момент времени, когда импульс еще не достиг границ расчетной области.

Расчет производился на временном интервале $t \in [0,\ T]$ с равномерным шагом по времени $\tau = 10^{-4}$ секунд. Шаг по времени выбран из условия $\tau = \frac{h_{\min}}{c_{\max}}$ для обеспечения точности, при этом схема Ньюмарка безусловно устойчива. Здесь $T = 2 \cdot 10^{-3}$ секунд — время, при котором осуществлялось сравнение решений.

Таблица 1. Компоненты тензора упругих модулей (2)

Компонента	Значение, ГПа
C_{11}	25
C_{12}	0,366
C_{13}	0,366
C_{22}	8,612
C_{23}	0,239
C_{33}	8,612
C_{44}	6,732
C_{55}	6,732
C_{66}	6,732

Решением, представленным методом задачи (1) с указанными начальными (12) и граничными (13) условиями, являются значения перемещений, скоростей и ускорений на сетке в некоторые моменты времени. Оценка сходимости осуществляется путем сравнения смещений на момент времени T.

Плотность материала при расчетах $\rho = 1489$ кг/м^3, упругие параметры материала указаны в таблице 1.

4.2. Исследование сходимости по пространству

На рис. 1 показаны расчеты, произведенные на исследуемых и эталонной сетках.

Решения спроецированы на одну и ту же сетку на момент времени T. Анализ сходимости производился на наборе сеток, параметры которых указаны в таблице 2.

Таблица 2. Значения количества тетраэдров N, медианной длины ребра h_{med}, обратного кубического корня от количества тетраэдров h_{count} для каждой из исследуемых сеток

Номер сетки	N	h_{med}	h_{count}
1	39 728	1,506	0,029
2	67 636	1,262	0,025
3	129 322	1,017	0,020
4	177 677	0,917	0,018
5	251 675	0,817	0,016
6	372 904	0,717	0,014

По результатам полученных расчетов был произведен расчет фактического порядка сходимости по пространству реализованной схемы (11). Графики сходимости с оценкой мелкости сеток по h_{med} и h_{count} представлены на рис. 2 и 3 соответственно.

Полученный порядок сходимости отражен в таблице 3.

Таблица 3. Порядок пространственной сходимости в зависимости от способа оценки мелкости исследуемых сеток

e	h_{med}	h_{count}
$\|\|L\|\|_2$	2,314	2,878

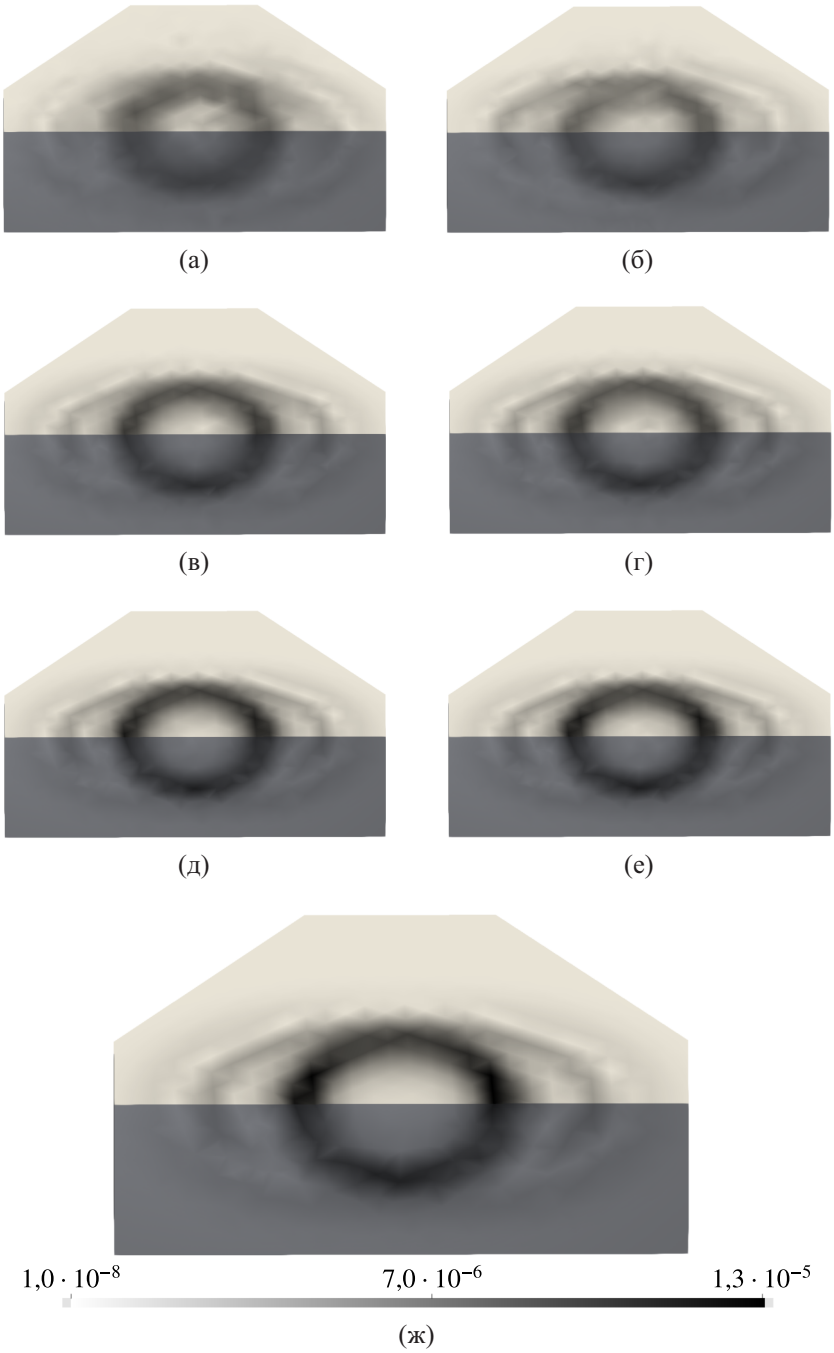


Рис. 1. Пространственное распределение модуля перемещений $\left|u^h\right|$ в метрах при расчетах на последовательности сгущающихся сеток: а)–е) численные решения на сетках 1–6 — параметры сеток указаны в таблице 2 соответственно; ж) эталонное решение u^{exc}. Цветовая шкала общая для всех сеток. Решения взяты в один момент времени и спроецированы на одинаковую грубую пространственную сетку для сравнения

Заключение

В настоящей работе выполнен анализ сходимости метода конечных элементов (с квадратичными базисными функциями P_2 и неявной схемой Ньюмарка для интегрирования по времени) при моделировании распространения упругих волн в анизотропных средах. На тестовой

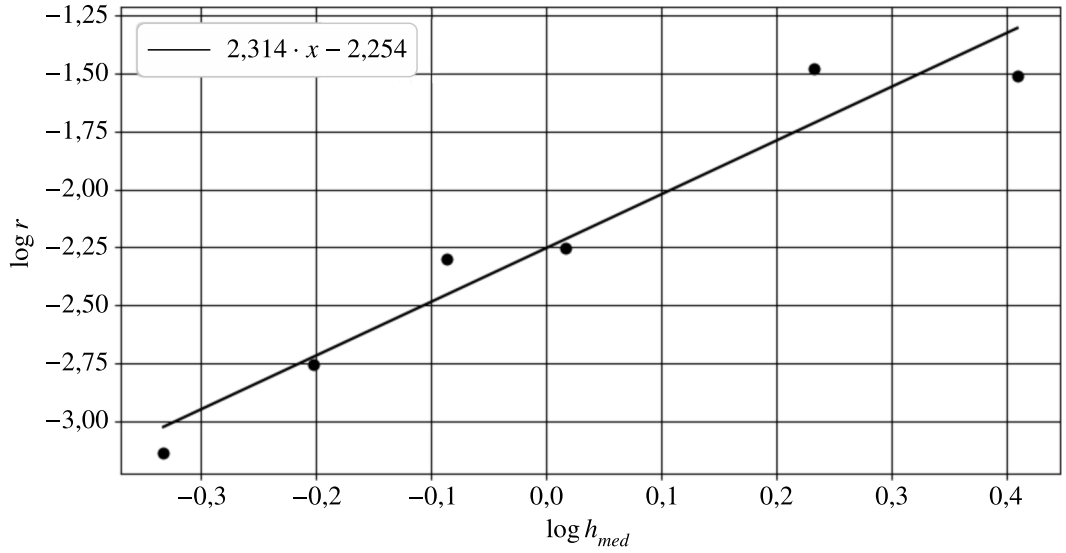


Рис. 2. Зависимость логарифма нормы разности эталонного решения с решениями на исследуемых сетках $r = \left\| s^{exc} - s^h \right\|_2$ от логарифма медианной длины ребра тетраэдров h_{med} на этих сетках

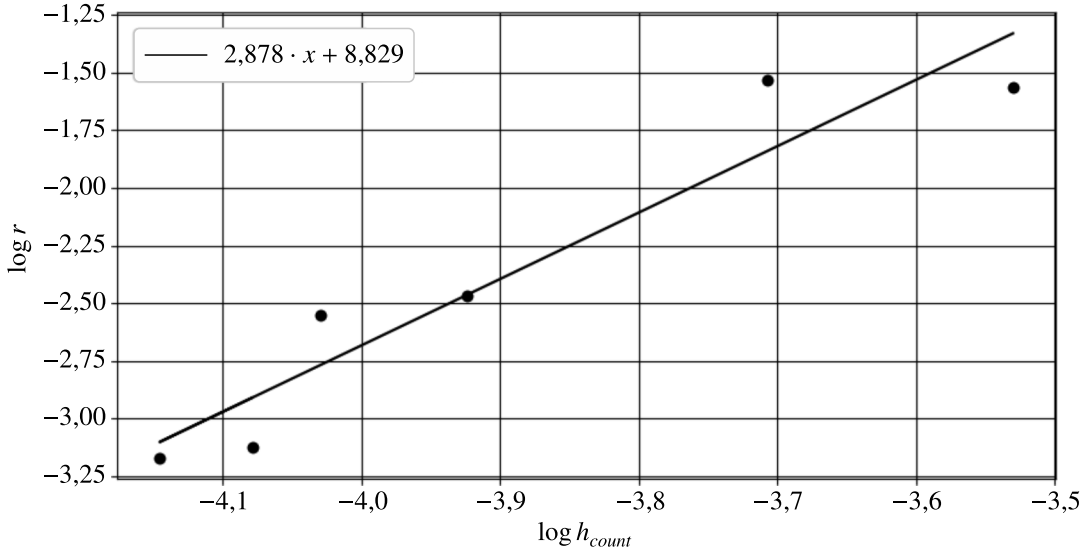


Рис. 3. Зависимость логарифма нормы разности эталонного решения с решениями на исследуемых сетках $r = \left\| s^{exc} - s^h \right\|_2$ от логарифма обратного кубического корня из количества тетраэдров h_{count}

задаче с гладким локализованным импульсом и свободной границей установлены фактические порядки сходимости в норме L_2: 2,314 при оценке размера сетки по медианной длине ребра и 2,878 при оценке по обратному кубическому корню из числа элементов. Оба значения близки к теоретическому третьему порядку, что подтверждает корректность реализации вычислительной схемы.

Научная новизна исследования заключается в верификации сходимости предложенного подхода на неструктурированных тетраэдральных сетках для анизотропных сред с ортотропной симметрией тензора упругости. Полученные результаты свидетельствуют о том, что метод обеспечивает высокую точность и может быть рекомендован для решения практических задач волновой динамики в анизотропных материалах, включая задачи неразрушающего контроля и сейсморазведки. Однако следует подчеркнуть, что анализ выполнен для гладких решений; исследование

сходимости в случае разрывных решений, а также влияния аппроксимации граничных условий на точность требует отдельного изучения.

Перспективы дальнейших исследований связаны с переходом к более сложной геометрии и решением задачи о контакте нескольких деформируемых тел, а также со сравнением предложенного подхода с другими численными методами.

Список литературы (References)

Новацкий В., Савин Г. Н., Рущицкий Я. Я. Теория упругости // Прикладная механика. — 1971. — Т. 7, № 7. — С. 1–12.
Novatskii V., Savin G. N., Rushchitskii Ya. Ya. Teoriya uprugosti [The theory of elasticity] // Soviet Applied Mechanics. — 1971. — Vol. 7, No. 7. — P. 1–12 (in Russian).

Седов Л. И. Механика сплошной среды. — Изд. 5-е, испр. — М.: Наука, 1994. — Т. I.
Sedov L. I. Mekhanika sploshnoi sredy [Mechanics of continuous media]. — 5th ed., rev. — Moscow: Nauka, 1994. — Vol. I (in Russian).

Aksenov V. V., Vasyukov A. V., Beklemysheva K. A. Acquiring elastic properties of thin composite structure from vibrational testing data // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. — 2024. — Vol. 32, No. 3. — P. 467–484. — DOI: 10.1515/jiip-2022-0081

Bedford A., Drumheller D. S. Introduction to elastic wave propagation. — Springer Nature Switzerland, 2023. — 345 p.

Beklemysheva K. A., Vasyukov A. V., Petrov I. B. Numerical simulation of dynamic processes in biomechanics using the grid-characteristic method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2015. — Vol. 55, No. 8. — P. 1346–1355.

Bradji A., Fuhrmann J. Some new error estimates for finite element methods for second order hyperbolic equations using the Newmark method // Mathematica Bohemica. — 2014. — Vol. 139, No. 2. — P. 125–136.

Davies G. A. O., Olsson R. Impact on composite structures // The Aeronautical Journal. — 2004. — Vol. 108, No. 1089. — P. 541–563.

Dumbser M., Käser M. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes — II. The three-dimensional isotropic case // Geophysical Journal International. — 2006. — Vol. 167, No. 1. — P. 319–336.

Georgantzinos S. K., Giannopoulos G. I., Stamoulis K., Markolefas S. Composites in aerospace and mechanical engineering // Materials. — 2023. — Vol. 16, No. 22. — P. 7230.

Geuzaine C., Remacle J.-F. Gmsh: A 3-D Finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2009. — Vol. 79, No. 11. — P. 1309–1331.

Golubev V. I., Gilyazutdinov R. I., Petrov I. B., Khokhlov N. I., Vasyukov A. V. Simulation of dynamic processes in three-dimensional layered fractured media with the use of the grid-characteristic numerical method // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2017. — Vol. 58, No. 3. — P. 539–545.

Hecht F. New development in FreeFem++ // Journal of Numerical Mathematics. — 2012. — Vol. 20, No. 3–4. — P. 251–265.

Hilber H. M., Hughes T. J. R., Taylor R. L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics // Earthquake Engineering & Structural Dynamics. — 1977. — Vol. 5, No. 3. — P. 283–292.

Hughes T. J. R. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. — Dover Publications, 2000. — 704 p.

Igel H. Wave propagation in three-dimensional spherical sections by the Chebyshev spectral method // Geophysical Journal International. — 1999. — Vol. 136, No. 3. — P. 559–566.

Kumar N., Dutta J., Deka B. L^2 estimates for weak Galerkin finite element methods for second-order wave equations with polygonal meshes // Applied Numerical Mathematics. — 2023. — Vol. 192. — P. 84–103.

Newmark N. M. A method of computation for structural dynamics // Transactions of the American Society of Civil Engineers. — 1962. — Vol. 127, No. 1. — P. 1406–1433.

Petrov I. B., Favorskaya A. V., Khokhlov N. I. Grid-characteristic method on embedded hierarchical grids and its application in the study of seismic waves // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 57, No. 11. — P. 1771–1777.

Richardson L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. — 1910. — Vol. 210, No. 459–470. — P. 307–357.

Smirnov I. E., Vasyukov A. V. Numerical modeling of wave propagation in anisotropic media and complex geometries // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2025. — Vol. 17, No. 2. — P. S204–S213.

Vasyukov A. V., Petrov I. B. Grid-characteristic method on tetrahedral unstructured meshes with large topological inhomogeneities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2018. — Vol. 58, No. 8. — P. 1259–1269.

Vasyukov A. V., Smirnov I. E. Grid-characteristic numerical method on an irregular grid with extending the interpolation stencil // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2023. — Vol. 63, No. 10. — P. 1751–1759.

Zhou J., Chui Y. H., Gong M., Hu L. Comparative study on measurement of elastic constants of wood-based panels using modal testing: choice of boundary conditions and calculation methods // Journal of Wood Science. — 2017. — Vol. 63, No. 5. — P. 523–538.

Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Govindjee S. The finite element method: its basis and fundamentals. — 8th ed. — Oxford: Butterworth-Heinemann, 2024. — 650 p.

Zimmermann T. The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1987. — Vol. 65, No. 2. — P. 191.