

УДК: 519.87 + 519.86

Модель диффузии технологии, основанная на уравнениях «потребитель – ресурс»

А. Мустафин

Казахский национальный исследовательский технический университет им. К. И. Сатпаева,
Казахстан, 050013, г. Алматы, ул. Сатпаева, д. 22

E-mail: a.mustafin@satbayev.university

Получено 10.06.2026.

Принято к публикации 16.07.2026.

В статье решается актуальная научно-практическая задача математического моделирования и прогнозирования процессов диффузии инноваций и технологических замещений на рынках с ограниченной емкостью. Целью работы является преодоление структурных ограничений классических феноменологических подходов, таких как модели Басса, Гомперца и Мэнсфилда, связанных с жестко фиксированной асимметрией S-образных кривых и отсутствием явного микроэкономического обоснования динамики систем. В основу исследования положен междисциплинарный подход, основанный на переносе экологической концепции рационального использования ограниченных ресурсов (модель Ардита – Гинзбурга – Контуа) в теорию операционного менеджмента посредством использования клиринговой функции Кармаркара и производственной функции Леонтьева – Либиха. Автором аналитически выведен альтернативный закон диффузии технологических инноваций, представленный в виде неявной зависимости времени от кумулятивного объема продаж или общего числа потребителей. Для идентификации неизвестных параметров модели по эмпирическим данным применен численный метод инвертирования неявной функции на основе нелинейной оптимизации наименьших квадратов, обеспечивающий высокую вычислительную стабильность алгоритма. Проведена сравнительная эмпирическая верификация предложенного закона в сопоставлении с классическими мировыми аналогами на двух контрастных макроэкономических кейсах: динамике кумулятивных продаж потребительской электроники Apple iPod (сорок девять квартальных точек) и развитии рынка подписок на мобильный интернет в Германии (восемнадцать годовых точек). Оценка качества аппроксимации осуществлялась по критерию остаточной суммы квадратов и коэффициенту детерминации. Показано математическое преимущество авторской модели, продемонстрировавшей наименьшую ошибку невязки на макроэкономических данных высокотехнологичных рынков за счет гибкого параметра асимметрии, адаптирующегося под стартовый лаг-период рынка. Научная новизна работы заключается в фундаментальном обосновании макроэкономической S-кривой через баланс уравнений системы «потребитель – ресурс». Разработанный математический аппарат может быть непосредственно использован аналитическими агентствами, регуляторами сектора информационно-коммуникационных технологий и менеджментом компаний для среднесрочного планирования емкости рынков и прогнозирования точек перегиба, соответствующих пикам темпов технологического замещения.

Ключевые слова: диффузия инноваций, S-кривая, модель Басса, модель Гомперца, клиринговая функция Кармаркара, рациональное использование ресурсов, нелинейный метод наименьших квадратов, хемостат

UDC: 519.87 + 519.86

A model for technology diffusion based on the “consumer – resource” equations

A. Mustafin

Satbayev University,
22 Satbayev st., Almaty, 050013, Kazakhstan

E-mail: a.mustafin@satbayev.university

Received 10.06.2026.

Accepted for publication 16.07.2026.

The author presents a new macroeconomic model designed to analyze and forecast technology diffusion processes in markets characterized by bounded capacity. The study addresses the major limitations of classical phenomenological models, such as the Bass and Gompertz frameworks, which suffer from a rigidly fixed trajectory asymmetry and lack explicit microeconomic foundations. To overcome these constraints, we employ an interdisciplinary approach that transfers the ecological concept of limited resource rationing from the Arditì–Ginzburg–Contois model into operations management theory. This framework integrates the Karmarkar clearing function with the Leontief–Liebig production function to establish a rigorous dynamic balance. By applying this integration, the author analytically derives an alternative technological innovation diffusion law that expresses time as an explicit function of the cumulative market volume. To identify parameters from empirical data, the study develops a robust numerical grid inversion algorithm that utilizes vector linear interpolation within the MATLAB computing environment. This approach avoids iterative root-finding errors and ensures high computational stability for the non-linear least squares optimization procedure. We test the empirical validity of the developed diffusion law using two distinct historical macroeconomic cases: the quarterly cumulative sales of the Apple iPod and the annual subscription data for the mobile broadband market in Germany. The resulting statistical metrics demonstrate that the proposed model provides superior approximation quality and mathematical advantages on high-tech market data due to its highly flexible asymmetry parameter. The fundamental scientific novelty of this research lies in the theoretical justification of the macroeconomic S-curve through the internal balance equations of an open chemostat-type system operating under a competitive vacuum. The proposed mathematical apparatus offers a practical tool for corporate management and regulatory agencies to plan market capacity and accurately forecast peak technological substitution rates.

Keywords: technology diffusion, S-curve, Bass model, Gompertz model, Karmarkar clearing function, resource rationing, non-linear least squares, chemostat

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 4, pp. 1035–1052 (Russian).

Введение

Эмпирические работы по изучению динамики принятия новых технологий, начатые в 1940-е годы Б.Райаном и Н.Гроссом [Ryan, Gross, 1943] и продолженные Ц.Грилихсом [Griliches, 1957], породили самостоятельное научное направление исследований диффузии нововведений (инноваций), которое по-прежнему высокоактуально. Диффузия есть увеличение количества производителей или пользователей нового продукта. Обобщенно: это процесс распространения инновации — будь то новый продукт, новый процесс или новый метод управления — в пределах отдельно взятой хозяйственной системы или в глобальном масштабе [Stoneman, 2018]. Инновация в данном определении понимается в смысле Й. Шумпетера [Шумпетер, 2022, с. 159], чья классическая трактовка термина включает в себя новый продукт или новое качество уже существующего продукта, новый метод производства, выход на новый рынок, освоение нового источника ресурса и реорганизацию в отрасли путем объединения или дробления компаний. Примечательно, что в немецком оригинале Шумпетер называет инновацию новой комбинацией (*neue Kombination*), и к важности этого обстоятельства мы вернемся в следующем разделе (см. также [Harper, 2020]).

Наиболее часто используются такие количественные меры текущего использования новой технологии, как общее число пользователей, число пользователей в расчете на единицу выпуска (например, валового внутреннего продукта) или общее число пользователей относительно некоторого ожидаемого по окончании диффузии уровня применения (в асимптотике или при насыщении) [Pulkki-Brännström, Stoneman, 2013]. Эмпирические данные показывают, что технология, как правило, монотонно развивается во времени по ограниченной S-образной кривой [Lechman, 2018, ch. 3]: скорость принятия продукта вначале увеличивается, достигая максимума, после чего постепенно уменьшается до нуля по мере насыщения рынка.

Все известные к настоящему времени концептуальные модели диффузии нововведений были построены к середине 1980-х годов. Большинство из них разработаны в рамках популяционной парадигмы. В этом подходе актуальные либо потенциальные пользователи конкретной технологии, будь то физические лица или фирмы, объединяются по данному признаку в однородную совокупность — популяцию. В модели задаются формально-математические правила входа в популяцию и выхода из нее. Не будет чрезмерным упрощением сказать, что рабочий арсенал базовых популяционных моделей, по сути, сводится к двум качественно различными уравнениям: Б.Гомперца [Smith, Keyfitz, 2015, с. 231–234] и Ф.Басса [Bass, 2004]. Предлагаемые с тех пор новые модели представляют собой доработку, обобщение или синтез базовых. Новые модели в основном регрессионные и в первую очередь нацелены на практические потребности прогнозирования. Для точности заметим, что к популяционным моделям относится также и система уравнений А.Лотки, В.Вольтерры и Г.Гаузе, однако она применяется для моделирования конкуренции в группе родственных технологий из одной отрасли. Мы же в данной работе ограничиваемся развитием изолированной технологии, предполагая, что близкого аналога ее продукта на рынке нет (конкурентный вакуум).

Старейшая из упомянутых моделей была сформулирована Гомперцем в 1825 году в связи с задачами актуарной математики (в частности, для прогнозирования смертности населения). С 1920-х годов она нашла применение в прогнозировании спроса на различные товары и услуги [Tjørve, Tjørve, 2017]. С того же времени модель используется и для количественного описания динамики массы тела животных и развития популяций клеток. Модель представляет собой дифференциальное уравнение

$$\frac{dN}{dt} = aN \ln\left(\frac{K}{N}\right), \quad N(0) = N_0, \quad (1)$$

где a — скоростной параметр, подлежащий эмпирической оценке, $K = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$ — несущая емкость (carrying capacity), то есть максимальный уровень развития, который может достигнуть популяция в данных условиях, t — время. Решением (1) служит функция

$$N = K \exp \left[- \ln \left(\frac{K}{N_0} \right) \exp(-at) \right]. \quad (2)$$

Модель Гомперца можно интерпретировать в терминах роста биомассы N под каталитическим действием некоторого фактора роста f , динамика которого не зависит от биомассы. Фактор роста не потребляется биомассой, но в то же время подвержен постепенному распаду в силу внутренних причин. Соответствующая система уравнений выглядит как

$$\begin{cases} \frac{df}{dt} = -\alpha f, & f(0) = f_0, \\ \frac{dN}{dt} = \beta N f, & N(0) = N_0, \end{cases} \quad (3)$$

где α и β — кинетические константы. Нетрудно убедиться, что система (3) равносильна уравнению (1), в котором $K = N_0 \exp \left(\frac{\beta f_0}{\alpha} \right)$.

Функция роста Гомперца (2) успешно применяется для аппроксимации эмпирических S-кривых диффузии технологий [Dhakal, Lim, 2020], хотя и не имеет ясного экономического обоснования.

Модель Басса, предложенная в 1969 году, принадлежит к подтипу эпидемических. В эпидемических моделях, основанных на идеях коммуникативной теории диффузии инноваций, нововведение уподобляется инфекции. Согласно широко известному определению Э. Роджерса [Rogers, 2003, с. 35] диффузия есть процесс, в котором инновации с течением времени передаются по определенным каналам среди членов социальной системы. В этой трактовке распространение новой технологии, по сути, социальный процесс, не имеющий прямого отношения к коммерческим операциям. «Инфицирование» новшеством может произойти как вертикально (из внешних источников информации — печатных изданий, радио- и телепередач, веб-сайта производителя, наружной рекламы, от независимых посредников в лице лекторов, консультантов, коммивояжеров, продавцов и проч.), так и горизонтально (по механизму подражания внутри социальной группы). Пусть K — несущая емкость популяции, N — субпопуляция уже принявших нововведение к моменту t . Скорость «заражения» информацией о новшестве из внешних источников пропорциональна числу потенциальных реципиентов: $p(K - N)$, где константа p измеряет эффективность доступных вертикальных каналов коммуникации. Скорость принятия инновации за счет межличностных контактов внутри популяции пропорциональна частоте встреч между уже перешедшими на новую технологию и потенциальными пользователями: $\frac{qN(K-N)}{K}$, где константа q известна как коэффициент имитации. С учетом сказанного дифференциальное уравнение модели имеет вид

$$\frac{dN}{dt} = \left(p + \frac{qN}{K} \right) (K - N), \quad N(0) = N_0. \quad (4)$$

После интегрирования уравнения (4) получается закон роста:

$$N = \frac{K \left(1 + \frac{p}{q} \right)}{1 + \frac{\left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) \exp[-(p+q)t]}{\frac{K}{N_0} \cdot \frac{p}{q} + 1}} - K \cdot \frac{p}{q}. \quad (5)$$

В двух предельных случаях — чисто вертикального влияния на будущих реципиентов ($q = 0$) и чисто горизонтального обмена информацией внутри социальной группы ($p = 0$) — модель Басса переходит соответственно в модели Л. Фурта и Дж. Вудлока [Fourt, Woodlock, 1960]:

$$N = K \left[1 - \left(1 - \frac{N_0}{K} \right) \exp(-pt) \right]$$

и Э. Мэнсфилда [Mansfield, 1961]:

$$N = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) \exp(-qt)} \quad (6)$$

Модель Мэнсфилда (6) есть не что иное, как знаменитое логистическое уравнение, впервые выведенное в 1838 году П. Ферхюльстом [Smith, Keyfitz, 2015, с. 279–285] в связи с задачами демографии. После повторного открытия в 1920 году Р. Пёрлом и Л. Ридом [Smith, Keyfitz, 2015, с. 287–293] логистический закон роста был выявлен в самых различных областях знания, включая биологию, экологию, медицину, экономику и социологию [Fokas, 2007]. В теории диффузии нововведений логистическое уравнение приобрело широкую популярность в моделях замещения (substitution) технологий. Под последним обычно понимается процесс, в котором новая технология вытесняет на рынке старую. Для бинарных процессов (с участием двух технологий) Дж. Фишер и Р. Прай [Fisher, Pry, 1971] предложили удобную редукцию логистической функции к линейной зависимости. А именно, пусть $f = \frac{N}{K}$ — доля рынка, обслуживаемая новой технологией в момент t . Очевидно, $(1 - f)$ будет долей, приходящейся на старую технологию в тот же момент времени. Тогда (6) можно представить в виде

$$\ln \left(\frac{f}{1 - f} \right) = a + bt, \quad (7)$$

где $a = \ln \left[\frac{N_0}{K - N_0} \right]$ и $b = \frac{q}{K}$. Позднее модифицированный вариант модели (7) распространили на случай одновременного роста нескольких технологий [Marchetti, Nakicenovic, 1979].

Базовая эпидемическая модель Басса (4) допускает широкую интуитивную интерпретацию и одновременно неплохо согласуется с эмпирическими данными. Регрессионные эпидемические модели составляют значительную долю работ по диффузии технологий. Более подробные сведения о положении дел в указанном направлении можно почерпнуть из соответствующих обзоров [Meade, Islam, 2006; Kumar, 2015; Nagpal, Chanda, 2020; Guidolin, Manfredi, 2023].

Главный недостаток существующих популяционных моделей диффузии нововведений, записанных в терминах только количества производителей или пользователей технологии, заключается в отрыве рассматриваемой технологии от внешней экономической среды и внешних факторов, контролирующих динамику численности, — прежде всего ресурсов. Не следует забывать, что экономика это по определению наука об ограниченном ресурсе.

С другой стороны, вариация входных параметров экономической системы с необходимостью влечет вытеснение одних технологий и приход других. Количественные характеристики внешних лимитирующих факторов, рычаги управления технологической структурой отрасли, вообще отсутствуют в уравнениях, записанных только в терминах численностей популяций. Таким образом, для успешного и плодотворного развития математической теории диффузии инноваций, отвечающей нуждам практических менеджеров в решении вопросов, упомянутых выше, необходимо построение теории популяций фирм на новом содержательном экономическом уровне. В последние годы теоретические исследования сообществ взаимодействующих предприятий развиваются в рамках междисциплинарной концепции промышленного метаболизма [Aytes,

Simonis, 1994; Martín-Gómez et al., 2024] (и родственной ей концепции промышленной экосистемы [Frosch, Gallopoulos, 1989]), учитывающей конкретные взаимодействия фирм с ресурсами и другими контролирующими рост факторами. Модели, построенные на основе этой концепции, обладают высокой гибкостью и адекватностью изучаемым объектам. По-видимому, последнее направление более перспективно и в математической теории диффузии нововведений. Настоящая работа целиком выполнена в этом направлении.

Цель данного исследования — построить экономически осмысленную популяционную модель диффузии инноваций на основе уравнений «потребитель – ресурс» и апробировать ее адекватность на эмпирических данных. Дальнейшее изложение материала структурировано следующим образом. В разделе «Методология» формулируется общая многомерная система дифференциальных уравнений для n технологий, конкурирующих за m взаимодополняющих (комплементарных) ресурсов. Для детального анализа в рамках данной работы общая модель редуцируется до случая $n = m = 1$, что описывает диффузию изолированной технологии в конкурентном вакууме, когда нет близких аналогов нововведения. В разделе «Результаты» проводится качественный анализ полученной двумерной динамической системы и выводится аналитическое выражение для закона диффузии. В разделе «Обсуждение» осуществляется параметрическая идентификация модели в MATLAB на примерах кумулятивных продаж Apple iPod и рынка мобильного интернета в Германии. Для этого применяется оригинальный сеточный алгоритм инвертирования явной функции времени с помощью векторной интерполяции, обеспечивающий высокую вычислительную стабильность нелинейного метода наименьших квадратов. Ограничение случаем изолированной технологии позволяет провести корректное сравнительное сопоставление полученных результатов с классическими моделями Басса и Гомперца, которые также не учитывают эффекты межтехнологической конкуренции. В разделе «Заключение» подводятся итоги исследования и намечаются перспективы развития предложенного подхода.

Методология

В соответствии с экономической таксономией сходные по профилю компании объединяются в отрасли по признаку главного производимого продукта. Предположим, что в некоторой отрасли оперируют n различных технологий. Технология j ($j = 1, \dots, n$) в модели представляется популяцией N_j слабодифференцированных фирм, производящих продукт j в примерно одинаковом объеме за единичный период времени. Тем самым размер (численность) популяции фирм N_j есть мера развития j -й технологии к моменту t . Далее допустим, что в отрасль поступают m различных ресурсов, которые в том или ином соотношении каждая из n технологий потребляет и преобразует в свой конечный продукт. Пусть R_i ($i = 1, \dots, m$) — общее количество i -го ресурса, доступное всем n технологиям отрасли в момент времени t . Будем исходить из следующей системы уравнений «потребитель – ресурс» («хищник – жертва»):

$$\begin{aligned} \frac{dR_i}{dt} &= r_i - \sum_{j=1}^n N_j Q_{ij} \phi_j - d_i R_i, & i = 1, \dots, m, \\ \frac{dN_j}{dt} &= N_j (h_j \phi_j - D_j), & j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь r_i — скорость поступления i -го ресурса в отрасль, Q_{ij} — доля (концентрация) i -го ресурса в продукте j , $\phi_j(\cdot)$ — выпуск (объем произведенной продукции за единичный период времени) индивидуальной фирмы в j -й популяции (точка означает, что ϕ_j может зависеть от различных переменных, включая R_i и N_j), d_i — удельная скорость оттока непотребленного i -го ресурса из системы, h_j — переводной коэффициент, показывающий, сколько новых фирм, использующих технологию j , можно создать на выручку от реализации одной единицы j -го продукта, D_j —

частота выхода фирм из j -й популяции, обусловленная всеми видами потерь, включая банкротство, релокацию, расходы по техническому обслуживанию и текущему ремонту и прочее. Система уравнений (8) представляет собой разновидность модели хемостата [Smith, Waltman, 1995] — аппарата для непрерывного культивирования микроорганизмов, в котором постоянная скорость роста клеток поддерживается за счет строго контролируемой подачи свежей питательной среды.

В популяционной биологии функция роста ϕ_j , впервые введенная в общем виде А. Н. Колмогоровым [Kolmogoroff, 1936/1978], носит название трофической функции (термин окончательно канонизирован Ю. М. Свиричевым и Д. О. Логофетом [Свиричев, Логофет, 1978, с. 95]) или функционального отклика [Solomon, 1949].

Трофическая функция имеет размерность «поток», ее аргументы — «запас». В математическом аппарате экономики существует близкое, но не тождественное, понятие производственной функции Y_j , устанавливающей связь между выпуском продукта фирмой j -го типа и затратами ресурсов $I_{1j}, \dots, I_{mj}$ на его изготовление. Затраты ресурсов, однако, имеют размерность «поток». Согласно Й. Шумпетеру [Schumpeter, 2017, с. 87] инновация (в частности, новая технология) тождественна созданию новой производственной функции — новой комбинации производственных факторов. Трактую технологию как уникальный, строго детерминированный метод производства, не допускающий отклонения от технологических норм использования ресурсов на единицу продукции, можно полагать, что производственная функция фирмы должна обладать свойством взаимодополняемости (комплементарности) ресурсов. Подходящим выбором является производственная функция В. Леонтьева (например, [Hackman, 2008, ch. 4]) с фиксированными пропорциями аргументов:

$$Y_j = \min_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{I_{ij}}{I_{ij}^0} \right), \quad (9)$$

где $I_{1j}, \dots, I_{mj}$ — потоки вводимых ресурсов, $I_{1j}^0, \dots, I_{mj}^0$ — технические коэффициенты, выражающие затраты каждого ресурса из m на выпуск единицы продукта. Функциональная зависимость (9) показывает, что на объем выпуска положительно влияет увеличение лишь одного из факторов, в то время как вариация остальных ресурсов не приводит к росту производства. Уменьшение лимитирующего фактора невозможно компенсировать за счет увеличения других факторов — эластичность замещения факторов равна нулю.

Потоки ресурсов, поступающие на предприятие, участвуют в производстве, лишь пройдя стадию запаса. Именно из этого буферного запаса объемом S , вовлеченного в производство и ожидающего обработки, возникает потребляемый поток I . Зависимость $I(S)$ известна в операционном менеджменте под названием клиринговой функции. Минимальная модель клиринговой функции, удовлетворяющая эмпирически установленным свойствам монотонности, вогнутости и насыщения, вместе с самим термином была предложена У. Кармаркаром [Karmarkar, 1989] в виде гиперболической зависимости с горизонтальной асимптотой:

$$I_{ij} = \frac{\widehat{I}_{ij} S_i}{k_{ij} + S_i}. \quad (10)$$

Здесь S_i — количество i -го ресурса, находящегося в распоряжении фирмы, $\widehat{I}_{ij}$ — максимально возможная скорость потребления i -го ресурса фирмой j -го типа, k_{ij} — константа полунасыщения, такая, что $I_{ij} = \frac{1}{2} \widehat{I}_{ij}$ при $S_i = k_{ij}$. Хотя существуют и другие аналитические варианты записи клиринговой функции разной степени сложности [Missbauer, Uzsoy, 2020, ch. 7], формула Кармаркара в настоящее время наиболее популярна. Динамическое обоснование этой гиперболической зависимости на основе метода медленного инвариантного многообразия, а также строгие количественные критерии ее применимости в нестационарных режимах работы системы приведены в [Мустафин, Кантарбаева, 2023].

Подставляя (10) в (9), получаем явное выражение для функции ϕ_j из системы (8) в представлении «запас $\rightarrow$ поток»:

$$\phi_j = \min_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{\widehat{\phi}_{ij} S_i}{k_{ij} + S_i} \right), \quad (11)$$

где $\widehat{\phi}_{ij} = \frac{\widehat{I}_{ij}}{I_{ij}^0}$.

Формула (11) формально идентична уравнению Ж. Моно [Monod, 1949] для зависимости удельной скорости роста микроорганизмов от концентрации лимитирующего субстрата, а также функциональному отклику II типа К. Холлинга [Holling, 1959], связывающего прирост биомассы хищника с плотностью популяции жертв. Важно, однако, отметить различный физический смысл ресурсной переменной, фигурирующей в (10), с одной стороны, и формулах Моно и Холлинга — с другой. Величина S_i в (10) — это количество i -го ресурса, в среднем приходящееся на одну фирму в отрасли:

$$S_i = \frac{R_i}{\sum_{j=1}^n N_j}, \quad (12)$$

где R_i — общий объем данного ресурса в отрасли. Такой подход к описанию ресурсопотребления связывается в экологии с именами Д. Контуа [Contois, 1959] и Р. Ардити и Л. Р. Гинзбурга [Arditi, Ginzburg, 1989]. У Моно и Холлинга потребители имеют равный доступ ко всему запасу ресурса (equable resource); обилие ресурса характеризуется его пространственной плотностью. Как известно (см. обзор [Тютюнов, Титова, 2018]), подход Моно и Холлинга, в котором I зависит только от R , берет начало в классических работах Вольтерры (где постулируется линейная форма зависимости $I(R)$) и соответствует однородному пространственному распределению ресурса. Например, у Моно это непрерывно перемешиваемый питательный раствор в хемостате фиксированного объема. По отношению же к популяции фирм нам представляется более адекватной модель рационаирования Ардити – Гинзбурга – Контуа.

Формула (11) — вариант записи известного в агрономии закона минимума Ю. Либиха [Tang, Riley, 2021]. Согласно этому принципу скорость роста растения или объем урожая находится в прямой (но необязательно прямо пропорциональной) зависимости от наиболее дефицитного минерального вещества.

Подставляя (11) в (8), вводя долю i -го ресурса в фирме j -го типа по формуле $\lambda_{ij} = \frac{Q_{ij}}{h_j}$ и максимальную удельную скорость роста j -й технологии за счет i -го ресурса — по формуле $\gamma_{ij} = h_j \widehat{\phi}_{ij}$, а также принимая во внимание формулу (12), получаем окончательные уравнения модели:

$$\begin{aligned} \frac{dR_i}{dt} &= r_i - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} N_j G_j - d_i R_i, & i = 1, \dots, m; \\ \frac{dN_j}{dt} &= N_j (G_j - D_j), & j = 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (13)$$

$$G_j = \min_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{\gamma_{ij} R_i}{R_i + k_{ij} \sum_{\ell=1}^n N_{\ell}} \right).$$

Все параметры модели предполагаются неотрицательными.

Система уравнений (13) описывает конкуренцию n различных технологий за m взаимодополняющих ресурсов. Исследованию ее свойств при произвольных m и n будет посвящена

отдельная статья. Частный случай $n = 1$ соответствует ситуации, когда нововведение не имеет близких аналогов и тем самым — конкурентов в лице других технологий. Допустим к тому же возможность идентифицировать некоторый ресурс, все время находящийся в относительном дефиците, при условии, что все прочие факторы производства имеются в избытке. Тогда в (13) можно опустить уравнения для всех ресурсов, кроме одного — ограничивающего, придя в результате к системе, служащей моделью новой технологии, развивающейся на лимитирующем ресурсе:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= r - \frac{\lambda \gamma R N}{R + kN} - dR, \\ \frac{dN}{dt} &= \frac{\gamma R N}{R + kN} - DN.\end{aligned}\quad (14)$$

Результаты

Для дальнейшего анализа удобно использовать безразмерную форму записи модели (14), перейдя к новым переменным и параметрам по формулам

$$\begin{aligned}x &= \frac{R}{\lambda K}, \quad y = \frac{N}{K}, \quad \tau = \gamma t, \quad K = \frac{R(0)}{\lambda} + N(0), \\ \kappa &= \frac{k}{\lambda}, \quad \rho = \frac{r}{\gamma \lambda K}, \quad \delta = \frac{d}{\gamma}, \quad \sigma = \frac{D}{\gamma}.\end{aligned}\quad (15)$$

В результате система (14) принимает вид

$$\dot{x} = \rho - \frac{xy}{x + \kappa y} - \delta x, \quad (16a)$$

$$\dot{y} = y \left(\frac{x}{x + \kappa y} - \sigma \right). \quad (16b)$$

Здесь и далее точка над зависимой переменной означает производную по времени τ .

Предположим, в текущий момент времени правая часть уравнения (16b) положительна — популяция фирм растет. При постоянном притоке ресурса увеличивающееся число предприятий приведет к сокращению потребления ресурса в расчете на одну фирму. Будет происходить снижение выпуска на одно предприятие и сокращение вложений в создание новых производств. Таков механизм внутритехнологической конкуренции (между фирмами — носителями одной и той же технологии) за общий лимитирующий ресурс. Указанная отрицательная обратная связь обеспечивает существование динамического равновесия между числом фирм и текущим запасом доступного ресурса. В результате достигается стационарный предел роста технологии.

Система (16) имеет два стационарных состояния:

$$(x^*, y^*)_1 = \left(\frac{\rho}{\delta}, 0 \right), \quad (17a)$$

$$(x^*, y^*)_2 = \left(\frac{\kappa \rho}{1 + \kappa \delta - \sigma}, \frac{\rho(1 - \sigma)}{\sigma(1 + \kappa \delta - \sigma)} \right). \quad (17b)$$

Пустое стационарное состояние (17a) всегда существует и соответствует «вымыванию» технологии из отрасли. Стационарное состояние (17b) с положительным размером популяции фирм имеет место только при $\sigma < 1$. В самом деле, $\sigma > 1$ влечет за собой $\dot{y} < 0$ для всех значений $x > 0$, в результате чего фирмы покидают популяцию чаще, чем входят в нее.

Фазовый портрет системы (16) представлен на рис. 1. Изоклина вертикальных касательных $\dot{x} = 0$ дается дробно-рациональной функцией

$$y = \frac{x(\rho - \delta x)}{x(1 + \kappa \delta) - \kappa \rho}, \quad (18)$$

изоклина горизонтальных касательных $\dot{y} = 0$ — двумя отдельными прямыми линиями:

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = \frac{x(1 - \sigma)}{\kappa\sigma}. \quad (19)$$

Неподвижные точки (17) лежат на пересечении нуль-изоклин. В зависимости от величины σ каждая из неподвижных точек может оказаться устойчивым узлом либо седлом, но обе они не могут быть устойчивыми одновременно. При $0 < \sigma < 1$ равновесие (17a) — седло, а (17b) — устойчивый узел/фокус. При $\sigma = 1$ происходит транскритическая бифуркация: неподвижные точки сливаются, «проходят сквозь друг друга» и «обмениваются» устойчивостью.

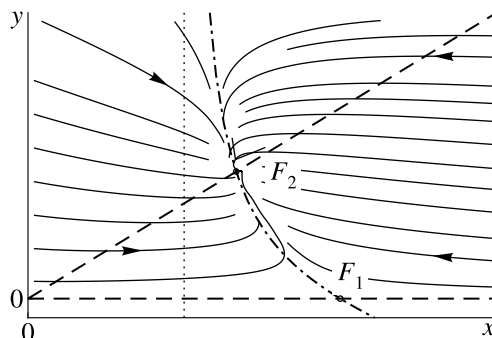


Рис. 1. Фазовый портрет системы (16) на плоскости (x, y) . Штриховая линия — изоклина вертикальных касательных $\dot{x} = 0$ (18), штрихпунктирные линии — изоклины горизонтальных касательных $\dot{y} = 0$ (19). Пунктирная линия — асимптота изоклины $\dot{x} = 0$. F_1 и F_2 — неподвижные точки (17a) и (17b) соответственно. Направление стрелок на фазовых траекториях отвечает возрастанию времени

Согласно формулам (17b) в стационарном состоянии количество ресурса, приходящееся на одну фирму (см. определение (12)), дается выражением

$$s^* = \frac{\kappa\sigma}{1 - \sigma}.$$

Это минимальная ресурсообеспеченность, при которой достигается динамическое равновесие между процессами создания и разорения фирм. Величина s^* может служить характеристикой эффективности технологии: чем она ниже, тем более конкурентоспособна технология в смысле утилизации данного ресурса.

Перейдем к рассмотрению замкнутой системы, в которой имеется некоторый начальный запас ресурса, причем дополнительно ресурс извне не поступает и расходуется только на развитие технологии, не уходя по другим каналам. Кроме того, будем предполагать, что фирмы не покидают популяцию. Таким образом, $\rho = \delta = \sigma = 0$ ($r = d = D = 0$ — для размерных параметров), и модель (16) принимает вид

$$\dot{x} = -\frac{xy}{x + \kappa y}, \quad \dot{y} = \frac{xy}{x + \kappa y}. \quad (20)$$

Уравнения (20) дополняются начальными условиями: $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$.

Беглый взгляд на систему (20) дает возможность заключить, что кинетика популяции фирм имеет вид S-образной кривой. Пока ресурс в избытке ($x \gg y$), технология растет почти экспоненциально. По мере роста технологии запас ресурса монотонно истощается, его количество, приходящееся на долю одной фирмы, уменьшается, и внутритехнологическая конкуренция за общий ресурс приводит к замедлению скорости роста популяции. В конце концов ресурс практически заканчивается ($x \ll y$), скорость роста технологии падает до нуля, вследствие чего численность популяции фирм достигает насыщения.

В системе (20) есть очевидный первый интеграл

$$x + y = 1. \quad (21)$$

Отметим, что, в силу определения (15), размерная величина $K = \frac{R}{\lambda} + N = \frac{R_0}{\lambda} + N_0$ имеет смысл несущей емкости в непроточной системе (20).

После исключения переменной x с помощью (21) система (20) сводится к одному уравнению относительно y :

$$\dot{y} = \frac{y(1-y)}{1 + (\kappa - 1)y}, \quad (22a)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\gamma N(K - N)}{K + (\kappa - 1)N} \quad \text{— в размерном виде.} \quad (22b)$$

Примечательно, что при $\kappa = 1$ уравнение (22) становится логистическим.

Уравнение роста (22a) имеет два стационарных решения: $y_1^* = 0$ и $y_2^* = 1$. При любых начальных условиях первое всегда неустойчиво, а второе — асимптотически устойчиво.

Аналитическое решение уравнения (22) удастся выписать только в неявной форме:

$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) + \kappa \ln\left(\frac{1-y_0}{1-y}\right) = \tau, \quad (23a)$$

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) + \kappa \ln\left(\frac{K-N_0}{K-N}\right) = \gamma t \quad \text{— в размерном виде.} \quad (23b)$$

На рис. 2 приведены S-кривые, полученные решением уравнения (22a) для различных значений параметра κ .

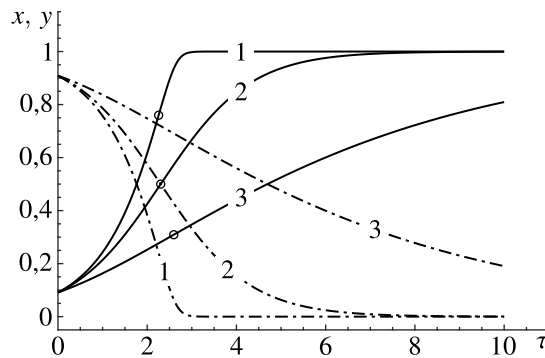


Рис. 2. Диффузия технологии, лимитируемой исчерпаемым ресурсом, согласно модели (22a). Начальное условие $y_0 = \frac{N_0}{K} = 0,09$. Сплошные S-кривые отображают численность популяции фирм (y), штрихпунктирные линии — объем ресурса (x). Точки перегиба S-кривых отмечены кружками. Горизонтальная ось — время τ в безразмерных единицах. 1 — $\kappa = 0,1$; 2 — $\kappa = 1$; 3 — $\kappa = 5$

Точка перегиба S-кривой определяется из условия $\ddot{y} = 0$. В силу автономности уравнения (22a) имеем $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dy}\dot{y}$. Поскольку $\dot{y} \neq 0$ при любых физически допустимых y , то уравнение для точки перегиба сводится к $\frac{d\dot{y}}{dy} = 0$. В координатах $(y, \dot{y})$ точка перегиба соответствует максимуму кривой $\dot{y}(y)$, как показано на рис. 3.

Точка перегиба и соответствующая максимальная скорость диффузии даются соответственно выражениями

$$y_{\text{infl}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\kappa}} \quad \text{и} \quad \dot{y}_{\text{max}} = \frac{1}{(1 + \sqrt{\kappa})^2}.$$

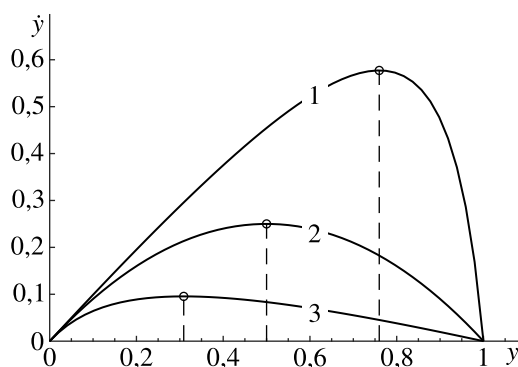


Рис. 3. Кривые скорости диффузии в модели (22а) на фазовой плоскости $(y, \dot{y})$. Кружками отмечены максимумы кривых. При $\kappa < 1$ кривые скошены влево, а при $\kappa > 1$ — вправо. 1 — $\kappa = 0,1$; 2 — $\kappa = 1$; 3 — $\kappa = 5$. Симметричная кривая 2 при $\kappa = 1$ соответствует логистическому росту

Для $\kappa > 1$ пик скорости роста достигается при размере популяции, меньшем половины несущей емкости, тогда как для $\kappa < 1$ максимум скорости наблюдается на уровне развития технологии выше половины от максимально возможного.

Для сравнения приведем формулы точек перегиба трех наиболее известных базовых S-кривых:

$$\frac{N_{\text{infl}}}{K} = \frac{1}{2}, \quad \text{Мэнсфилд, формула (6),}$$

$$\frac{N_{\text{infl}}}{K} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{q} \right), \quad \text{Басс, формула (5),}$$

$$\frac{N_{\text{infl}}}{K} = e^{-1} \approx 0,368, \quad \text{Гомперц, формула (2).}$$

Все три закона роста развивают наибольшую скорость при размере популяции, не превышающем половины от максимально возможного. Причем в моделях Мэнсфилда (логистической) и Гомперца точка перегиба фиксирована. В нашей модели (22) надлежащий подбор параметра κ позволяет задать точку перегиба где угодно в промежутке от 0 до 1 (от 0 до K — в размерном представлении). Таким образом, предлагаемая нами модель диффузии изолированной технологии с исчерпаемым лимитирующим ресурсом сочетает в себе простоту с достаточной гибкостью.

Согласно предлагаемой модели диффузия технологии с невозобновляемым ресурсом следует S-образной кривой по закону (23). По-видимому, верно и обратное утверждение: наблюдаемый S-образный рост может быть признаком исчерпания некоторого лимитирующего ресурса.

Обсуждение

Важной вычислительной особенностью аппроксимации данных по авторской модели является то, что теоретический закон диффузии выражается в виде явной функции времени от численности популяции $t(N)$ (формула (23b)), тогда как для сравнения с данными требуется обратная зависимость — размер популяции от времени $N(t)$. Прямой расчет значений $N(t)$ для нужд оптимизатора с помощью стандартных итерационных процедур MATLAB (например, `fzero`) вычислительно неэффективен. Для преодоления этой трудности предложен стабильный алгоритм: внутри пользовательской функции модели, вызываемой оптимизатором `lsqcurvefit`, по явной аналитической формуле (23b) строится плотная опорная сетка пар значений (N, t) , после чего искомые значения $N(t)$ для эмпирических точек времени восстанавливаются с помощью

быстрой векторной линейной интерполяции (`interp1`). Это исключает накопление погрешностей итерационного поиска корней и обеспечивает высокую скорость и стабильность сходимости алгоритма нелинейного метода наименьших квадратов.

В качестве первого числового примера рассмотрим S-кривую диффузии карманного медиаплеера iPod, заслуженно считающегося одним из самых успешных продуктов компании Apple. Поквартальные данные о мировых продажах изделия в штуках доступны на сайте AAPLinvestors.net [AAPLinvestors, 2015], поддерживаемом сообществом инвесторов и трейдеров корпорации Apple. Данные охватывают 49 последовательных кварталов, начиная с Q1 2002 (первым кварталом считается промежуток времени с 1 октября по 31 декабря, так как финансовый год в компании начинается в октябре), спустя год после выхода продукта на рынок 23 октября 2001 года, и заканчивая Q1 2014, когда Apple перестала публиковать отдельной графой объемы сбыта iPod в своих финансовых отчетах (официально выпуск линейки iPod полностью прекратился 10 мая 2022 года). Динамику кумулятивных объемов продаж можно видеть на рис. 4. Пик продаж пришелся на Q1 2009, когда за три месяца было продано 22,7 млн единиц. По эмпирическим данным с помощью нелинейного метода наименьших квадратов из пакета `lsqcurvefit` MATLAB были подобраны параметры предлагаемой модели (23b), а также моделей Басса (5) и Гомперца (2), которые сведены в табл. 1. Сравнение по показателю суммы квадратов остатков регрессии (residual sum of squares, RSS) показывает, что наша модель по точности почти не уступает модели Гомперца; модель Басса же в данном случае значительно менее точна.

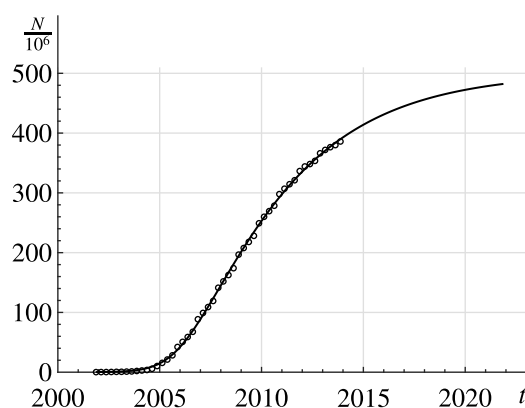


Рис. 4. Завоевание мирового рынка медиаплеером iPod компании Apple в 2002–2014 гг. Горизонтальная ось — время t в годах, вертикальная ось — общий объем N продаж товара в млн штук. Кружки — статистические данные [AAPLinvestors, 2015]. Сплошная кривая — результат расчета по авторской модели (23b). Модель предсказывает, что с 2014 по 2022 год потенциально могло быть реализовано еще примерно 100 млн единиц iPod

Другой пример — динамика роста количества подписчиков на услуги широкополосного мобильного интернета в Германии с 2007 по 2024 год, по данным Международного союза электросвязи (МСЭ) [ITU, 2025], представленная на рис. 5. Можно видеть, что к настоящему времени рынок данной услуги приблизился к насыщению. Результаты расчетов по выбранным трем моделям диффузии, приведенные в табл. 1, показывают, что преимущество в точности — на стороне авторской модели (23b).

Приведенные примеры на регрессию не ставят целью показать преимущество разработанной нами модели как инструмента прогноза по сравнению с моделями мейнстрима. Они скорее предназначены для иллюстрации работоспособности самой теоретической концепции, лежащей в основе новой модели.

Таблица 1. Сравнительный анализ работоспособности моделей диффузии технологии на конкретных кейсах. Пояснение: $RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ — сумма квадратов остатков, где y_i — фактическое значение, $\hat{y}_i$ — расчетное значение для каждой точки $i = 1, \dots, n$; $R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}$ — коэффициент детерминации, показывающий, какой процент дисперсии данных объясняется теоретической кривой, TSS — общая сумма квадратов

Кейс	Авторская модель	Басс	Гомперц
iPod	$\gamma = 0,355/\text{кв}$, $\kappa = 6,326$, $K = 501 \cdot 10^6$, $N_0 = 0,210 \cdot 10^6$, $RSS = 447 \cdot 10^{12}$, $R^2 = 0,999532$	$p = 0,00185/\text{кв}$, $q = 0,153/\text{кв}$, $K = 396 \cdot 10^6$, $N_0 = 0,0$, $RSS = 2518 \cdot 10^{12}$, $R^2 = 0,997368$	$a = 0,088/\text{кв}$, $K = 445 \cdot 10^6$, $N_0 = 0,0215 \cdot 10^6$, $RSS = 423 \cdot 10^{12}$, $R^2 = 0,999557$
Мобильный интернет	$\gamma = 0,3520/\text{год}$, $\kappa = 1,1015$, $K = 84,1651 \cdot 10^6$, $N_0 = 9,5313 \cdot 10^6$, $RSS = 61,1 \cdot 10^{12}$, $R^2 = 0,994256$	$p = 0,0$, $q = 0,3384/\text{год}$, $K = 83,6427 \cdot 10^6$, $N_0 = 9,7266 \cdot 10^6$, $RSS = 65,5 \cdot 10^{12}$, $R^2 = 0,994232$	$a = 0,2035/\text{год}$, $K = 90,4395 \cdot 10^6$, $N_0 = 7,3082 \cdot 10^6$, $RSS = 91,5 \cdot 10^{12}$, $R^2 = 0,991941$

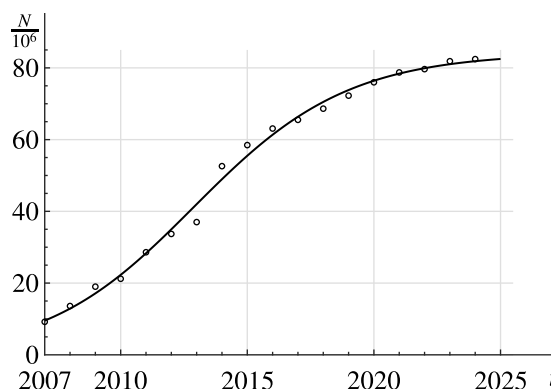


Рис. 5. Подписка на широкополосный мобильный интернет в Германии в период 2007–2024 гг. Горизонтальная ось — время t в годах, вертикальная ось — количество N заключенных контрактов на предоставление услуги в млн единиц. Кружки — статистические данные [ITU, 2025]. Сплошная кривая построена с помощью авторской модели (23b)

На первый взгляд предлагаемая нами альтернативная модель диффузии технологии (14) и ее предельно редуцированная версия (20), основанные на популяционных уравнениях «потребитель – ресурс», никак не соотносятся с эпидемической моделью Басса (4), представляющей собой математическую формализацию информационно-коммуникативной теории Роджерса [Rogers, 2003] о механизмах передачи сведений о новшестве в социальной сети потребителей. Однако в контексте более широкой трактовки понятия лимитирующего ресурса/фактора выясняется, что это не так.

Фактор производства — это все то, что при увеличении его доступности способствует росту выпуска. Факторы могут иметь материальную, энергетическую, человеческую и финансовую природу. В нашей модели в роли лимитирующего фактора развития технологии может выступать не только материальный ресурс в виде сырья, сборочных частей, модулей или заготовок, но и потенциальный пользователь технологии или его готовность заплатить (willingness to pay), являющаяся фундаментом потребительского спроса. Потенциальные пользователи «потребляются» новой технологией в том смысле, что при этом меняется их состояние, а не физическая

сущность — они переходят в категорию принявших нововведение. С кибернетической точки зрения тут принципиальной разницы нет. Таким образом, в уравнениях (14) под переменной R могут также пониматься потенциальные реципиенты инновации — в случае если их количество лимитирует рост технологии.

Заключение

В настоящей работе предложена и верифицирована новая макроэкономическая модель диффузии изолированной технологии, базирующаяся на фундаментальном балансе динамической системы «потребитель – ресурс». Предложенный подход опирается на междисциплинарную концепцию промышленного метаболизма в задачах описания кинетики диффузии инноваций. В отличие от традиционных феноменологических S-образных кривых (моделей Басса, Гомперца, Мэнсфилда) динамика технологического замещения здесь выведена из микроэкономического баланса внутритехнологической конкуренции за ограниченный исчерпаемый фактор в рамках производственной функции Леонтьева – Либиха и рационалирования ресурсов Ардити – Гинзбурга – Контуга.

Основные теоретические и практические результаты исследования заключаются в следующем.

1. Сформулирована общая многомерная система уравнений для n технологий и m комплементарных ресурсов, представляющая собой макроэкономическую модификацию модели хемостата. Показано, что ее редукция до случая $n = m = 1$ позволяет адекватно описать макродинамику диффузии инновации в условиях конкурентного вакуума, когда на рынке отсутствуют близкие аналоги нововведения.
2. Разработан и успешно апробирован оригинальный численный алгоритм идентификации параметров модели. Поскольку теоретический закон диффузии аналитически выражается в виде явной функции времени от объема продаж $t(N)$, предложенный метод сеточного инвертирования с использованием векторной интерполяции внутри пользовательской функции модели, вызываемой оптимизатором `lsqcurvefit` MATLAB, показал высокую устойчивость к погрешностям эмпирических данных и быструю сходимость.
3. На примерах кумулятивных продаж Apple iPod и рынка мобильного интернета в Германии доказана высокая аппроксимирующая способность модели. Коэффициенты детерминации R^2 демонстрируют математическое преимущество авторского подхода за счет более гибкого управления точкой перегиба траектории.

Переход от исследованного изолированного случая к полной многомерной модели ($n, m > 1$) открывает широкие теоретические перспективы, однако наталкивается на серьезные эмпирические ограничения. Понимание законов развития и механизма регуляции технологической структуры экономической отрасли в целом — задача сложная и требует совместных теоретических и эмпирических исследований. В большей части эмпирических исследований экономисты наблюдают за состоянием отрасли, то есть определяют технологический состав, изучают динамику численности предприятий или валовой продукт, распределение фирм по различным количественным характеристикам в них и прочее. Такие знания необходимы, но они совершенно недостаточны для объяснения, почему отрасль «пришла» в данное состояние, какое будет следующее состояние и каким образом рационально повлиять на ее динамику. Ни численность предприятий, работающих по данной технологии, ни валовой продукт, производимый по данной технологии, сами по себе не могут служить удовлетворительными критериями ее продуктивности, ее значения в экономике всей отрасли. Необходима информация о кинетике функционирования отрасли,

о скоростях (удельных и валовых) протекающих в ней процессов. Именно эта информация и методы математического моделирования изучаемого объекта могут поднять теорию промышленного метаболизма и промышленных экосистем на новую количественную ступень и позволить решать задачи по регуляции техноценозов, управляемому воздействию и прогнозу.

Список литературы (References)

- Кузнецов Ю. А., Маркова С. Е. Математическое моделирование динамики смены поколений инновационных технологий // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Сер. Социальные науки. — 2017. — № 1 (45). — С. 37–45.
- Kuznetsov Yu. A., Markova S. E. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki smeny pokolenii innovatsionnykh tekhnologii [Mathematical modeling of the dynamics of generational change in innovative technologies] // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo. Ser. Sotsial'nye nauki [Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. Ser. Social Sciences]. — 2017. — No. 1 (45). — P. 37–45 (in Russian).
- Мустафин А. Т., Кантарбаева А. К. Клиринговая функция в контексте метода инвариантного многообразия // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2023. — № 2 (19). — С. 185–198.
- Mustafin A. T., Kantarbayeva A. K. Kliringovaya funktsiya v kontekste metoda invariantnogo mnogoobraziya [Clearing function in the context of the invariant manifold method] // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya [Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes]. — 2023. — No. 2 (19). — P. 185–198 (in Russian). — DOI: 10.21638/11701/spbu10.2023.205
- Свирижев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
- Svirezhev Yu. M., Logofet D. O. Stability of biological communities. — Moscow: Mir Publishers, 1983. — 319 p. (Russ. ed.: Svirezhev Yu. M., Logofet D. O. Ustoichivost' biologicheskikh soobshchestv. — Moscow: Nauka, 1978. — 352 p.)
- Тютюнов Ю. В., Титова Л. И. От Лотки–Вольтерры к Ардити–Гинзбургу: 90 лет эволюции трофических функций // Журнал общей биологии. — 2018. — Т. 79, № 6. — С. 428–448. — DOI: 10.1134/S004445961806009X
- Tutyunov Yu. V., Titova L. I. From Lotka–Volterra to Arditi–Ginzburg: 90 years of evolving trophic functions // Biology Bulletin Reviews. — 2020. — Vol. 10, No. 3. — P. 232–246. — DOI: 10.1134/S207908642003007X (Original Russian paper: Tutyunov Yu. V., Titova L. I. Ot Lotki–Vol'terra k Arditi–Ginzburgu: 90 let evolyutsii troficheskikh funktsii // Zhurnal obshchei biologii. — 2018. — Vol. 79, No. 6. — P. 428–448. — DOI: 10.1134/S004445961806009X)
- Шумпетер Й. А. Теория экономического развития / пер. с нем.; под ред. В. С. Автономова. — Изд. 3-е. — М.: URSS, 2022. — 398 с.
- Schumpeter J. A. Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung. — Berlin: Duncker und Humblot, 1987. — 369 p. (Russ. ed.: Shumpeter J. A. Teoriya ekonomicheskogo razvitiya / translation from German. — Moscow: URSS, 2022. — 398 p.)
- AAPLinvestors.net. The website of a collective of Apple, Inc. investors and traders. Summary of iPod shipments along with the milestone events. — [Electronic resource]. — <https://aaplinvestors.net/stats/ipod/> (accessed: 02.06.2026).
- Arditi R., Ginzburg L. R. Coupling in predator–prey dynamics: ratio-dependence // Journal of Theoretical Biology. — 1989. — Vol. 139, No. 3. — P. 311–326. — DOI: 10.1016/S0022-5193(89)80211-5
- Ayres R. U., Simonis U. E. (eds.) Industrial metabolism: restructuring for sustainable development. — Tokyo: United Nations University Press, 1994. — 376 p.
- Bass F. A new product growth for model consumer durables. Reprint of 1969 paper // Management Science. — 2004. — Vol. 50, No. 12. — P. 1825–1832. — DOI: 10.1287/mnsc.1040.0264
- Contois D. E. Kinetics of bacterial growth: Relationship between population density and specific growth rate of continuous cultures // Journal of General Microbiology. — 1959. — Vol. 21, No. 1. — P. 40–50. — DOI: 10.1099/00221287-21-1-40
- Dhakal T., Lim D.-E. Understanding ICT adoption in SAARC member countries // Letters in Spatial and Resource Sciences. — 2020. — Vol. 13, No. 1. — P. 67–80. — DOI: 10.1007/s12076-020-00245-2

- Fisher J. C., Pry R. H.* A simple substitution model of technological change // *Technological Forecasting and Social Change*. — 1971. — Vol. 3. — P. 75–88. — DOI: 10.1016/S0040-1625(71)80005-7
- Fokas N.* Growth functions, social diffusion, and social change // *Review of Sociology*. — 2007. — Vol. 13, No. 1. — P. 5–30. — DOI: 10.1556/RevSoc.13.2007.1.1
- Fourt L. A., Woodlock J. W.* Early prediction of market success for new grocery products // *Journal of Marketing*. — 1960. — Vol. 25, No. 2. — P. 31–38. — DOI: 10.1177/002224296002500206
- Frosch R. A., Gallopoulos N. E.* Strategies for manufacturing // *Scientific American*. — 1989. — Vol. 261, No. 3. — P. 144–152. — DOI: 10.1038/scientificamerican0989-144
- Gort M., Klepper S.* Time paths in the diffusion of product innovations // *The Economic Journal*. — 1982. — Vol. 92, No. 367. — P. 630–653. — DOI: 10.2307/2232554
- Griliches Z.* Hybrid corn: An exploration in the economics of technological change // *Econometrica*. — 1957. — Vol. 25, No. 4. — P. 501–522. — DOI: 10.2307/1905380
- Guidolin M., Manfredi P.* Innovation diffusion processes: concepts, models, and predictions // *Annual Review of Statistics and Its Application*. — 2023. — Vol. 10, No. 1. — P. 451–473. — DOI: 10.1146/annurev-statistics-040220-091526
- Hackman S. T.* Production economics: Integrating the microeconomic and engineering perspectives. — Heidelberg, Germany: Springer, 2008. — 540 p.
- Harper D. A.* New combinations in Schumpeter's economics: The lineage of a concept // *History of Economics Review*. — 2020. — Vol. 75, No. 1. — P. 22–30. — DOI: 10.1080/10370196.2020.1743491
- Holling C. S.* The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the European pine sawfly // *The Canadian Entomologist*. — 1959. — Vol. 91, No. 5. — P. 293–320. — DOI: 10.4039/ent91293-5
- ITU. The official website of The International Telecommunication Union. Statistics: Mobile-broadband subscription, Germany, 2007–2024. — [Electronic resource]. — <https://www.itu.int/en/ITU-D/Statistics/Pages/stat/default.aspx> (accessed: 02.06.2026).
- Karmarkar U. S.* Capacity loading and release planning with work-in-progress (WIP) and lead-times // *Journal of Manufacturing and Operations Management*. — 1989. — Vol. 12, No. 1. — P. 105–123.
- Kolmogoroff A. N.* On Volterra's theory of the struggle for existence // *The golden age of theoretical ecology: 1923–1940. A Collection of works by V. Volterra, V. A. Kostitzin, A. J. Lotka and A. N. Kolmogoroff* / ed. by F. M. Scudo, J. R. Ziegler. — New York, NY: Springer, 1978. — P. 287–292. — DOI: 10.1007/978-3-642-50151-7_13
- Kumar N.* Review of innovation diffusion models // Working paper No. 1/2015-01. — New Delhi, India: CSIR-National Institute of Science Technology and Development Studies, 2015. — 54 p. — DOI: 10.13140/RG.2.1.2413.0728
- Lechman E.* The diffusion of information and communication technologies. — New York, NY; London, UK: Routledge, 2018. — 232 p.
- Mansfield E.* Technical change and the rate of imitation // *Econometrica*. — 1961. — Vol. 29, No. 4. — P. 741–766. — DOI: 10.2307/1911817
- Marchetti C., Nakicenovic N.* The dynamics of energy systems and the logistic substitution model // IIASA Research Report RR-79-013. — Laxenburg, Austria: International Institute for Applied Systems Analysis, 1979. — <https://pure.iiasa.ac.at/1024> (accessed: 02.06.2026).
- Martín-Gómez A. M., Ávila-Gutiérrez M. J., Lama-Ruiz J. R., Aguayo-González F.* Industrial metabolism: a multilevel characterization for designing sustainable manufacturing systems // *Machines*. — 2024. — Vol. 12, No. 1. — P. 16. — DOI: 10.3390/machines12010016

- Meade N., Islam T.* Modelling and forecasting the diffusion of innovation — A 25-year review // International Journal of Forecasting. — 2006. — Vol. 22, No. 3. — P. 519–545. — DOI: 10.1016/j.ijforecast.2006.01.005
- Missbauer H., Uzsoy R.* Production planning with capacitated resources and congestion. — New York, NY: Springer, 2020. — 295 p.
- Mitra S.* Forecasting the diffusion of innovative products using the Bass model at the takeoff stage: a review of literature from subsistence markets // Asian Journal of Innovation and Policy. — 2019. — Vol. 8, No. 1. — P. 141–161. — DOI: 10.7545/ajip.2019.8.1.141
- Monod J.* The growth of bacterial cultures // Annual Review of Microbiology. — 1949. — Vol. 3, No. 1. — P. 371–394. — DOI: 10.1146/annurev.mi.03.100149.002103
- Nagpal G., Chanda U.* A review of innovation diffusion modelling literature // Transforming Management Using Artificial Intelligence Techniques / ed. by V. Garg, R. Agrawal. — Boca Raton, FL: CRC Press, 2020. — P. 157–168. — DOI: 10.1201/9781003032410-11
- Pulkki-Brännström A., Stoneman P.* On the patterns and determinants of the global diffusion of new technologies // Research Policy. — 2013. — Vol. 42, No. 10. — P. 1768–1779. — DOI: 10.1016/j.respol.2013.08.011
- Rogers E. M.* Diffusion of innovations. — 5th ed. — New York, NY: Free Press, 2003. — 576 p.
- Ryan B., Gross N. C.* The diffusion of hybrid seed corn in two Iowa communities // Rural Sociology. — 1943. — Vol. 8, No. 1. — P. 15–24. — Available from: <https://iastate.edu>
- Schumpeter J. A.* Business cycles. Vol. 1. — Reprint of 1939 1st edition. — Eastford, CT: Martino Fine Books, 2017. — 466 p.
- Smith D. P., Keyfitz N.* (eds.) Mathematical demography: Selected papers. — 2nd ed. — Heidelberg, Germany: Springer, 2015. — 358 p.
- Smith H. L., Waltman P.* The theory of the chemostat: Dynamics of microbial competition. — Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1995. — 332 p. — DOI: 10.1017/cbo9780511530043
- Solomon M. E.* The natural control of animal populations // The Journal of Animal Ecology. — 1949. — Vol. 18, No. 1. — P. 1–35. — DOI: 10.2307/1578
- Stoneman P. L.* The diffusion of innovations: some reflections // International Journal of the Economics of Business. — 2018. — Vol. 25, No. 1. — P. 85–95. — DOI: 10.1080/13571516.2017.1390834
- Tang J., Riley W. J.* Finding Liebig's law of the minimum // Ecological Applications. — 2021. — Vol. 31, No. 8. — P. e02458. — DOI: 10.1002/eap.2458
- Tjørve K. M. C., Tjørve E.* The use of Gompertz models in growth analyses, and new Gompertz-model approach: An addition to the Unified-Richards family // PLoS ONE. — 2017. — Vol. 12, No. 6. — P. e0178691. — DOI: 10.1371/journal.pone.0178691