

УДК: 517.957 + 519.876.5

## Реакционно-диффузионная многокомпонентная модель эволюции ткани миокарда на основе параметров распределения Дирихле

Е. Ю. Щетинин<sup>а</sup>, А. А. Шевчук<sup>б</sup>

Севастопольский государственный университет (СевГУ),  
Россия, 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, д. 33

E-mail: <sup>а</sup> riviera-molto@mail.ru, <sup>б</sup> andreiluck11@yandex.ru

Получено 08.04.2026, после доработки — 25.05.2026.

Принято к публикации 26.05.2026.

Предлагается пространственно распределенная математическая модель эволюции пяти состояний миокардиальной ткани — здорового миокарда, воспалительного инфильтрата, некроза, замещающего фиброза и интерстициального фиброза — в виде многокомпонентной реакционно-диффузионной системы параболического типа. Разработка таких моделей имеет ключевое значение для понимания механизмов постинфарктного ремоделирования левого желудочка и прогнозирования структурных аритмогенных субстратов. В каждой точке области состояние ткани описывается вектором параметров распределения Дирихле, что позволяет одновременно учитывать средний тканевой состав и уровень неопределенности классификации, связанный с гетерогенными переходными зонами повреждения. Дополнительной особенностью предложенной постановки является использование нелинейного анизотропного тензора диффузии, интенсивность направленной компоненты которого локально управляется суммарной долей поврежденной ткани.

Для усеченной системы, совпадающей с исходной в инвариантной области, устанавливаются локальная липшицевость и квазиположительность расширенного реакционного оператора. Доказаны глобальное существование слабого решения, неотрицательность, явная априорная верхняя оценка и количественная экспоненциальная нижняя оценка. Из этих результатов следуют инвариантность допустимой области и существование глобального слабого решения исходной модели. Доказана единственность в усиленном классе решений, задаваемом дополнительной регулярностью градиентов. Для обратимого вспомогательного варианта матрицы переходов формально выводится энтропийный баланс для гладких положительных решений; для клинически обоснованной необратимой матрицы переходов формулируется модовое условие спектральной устойчивости линеаризации.

В вычислительной части получено условие положительности для реакционного подшага схемы расщепления относительно адаптивного верхнего барьера траектории и выполнены численные эксперименты для воспроизводимой калиброванной вычислительной версии. В одномерном сценарии к 60-м суткам в центре очага доля замещающего фиброза возрастает с 0,091 до 0,855, а суммарный параметр концентрации  $\alpha_0$  — с 11,0 до 15,9; в двумерном сценарии на 14-е сутки средняя величина  $\bar{p}_4$  составляет 0,431 в ядре повреждения против 0,097 в здоровой зоне. Доказана корректность модели для анализа процессов рубцевания и переходных зон, что формирует математическую базу для интеграции алгоритма с данными пациент-специфической клинической визуализации.

Ключевые слова: реакционно-диффузионная система, распределение Дирихле, фиброз миокарда, глобальное существование, инвариантная область, единственность в усиленном классе, энтропийный баланс, марковская цепь

Работа выполнена при финансовой поддержке Севастопольского государственного университета, проект 42-01-09/319/2025-1.

UDC: 517.957 + 519.876.5

## Reaction – diffusion model of multicomponent myocardial injury based on Dirichlet concentration parameters

E. Yu. Shchetinina<sup>a</sup>, A. A. Shevchuk<sup>b</sup>

Sevastopol State University,  
33 Universitetskaya st., Sevastopol, 299053, Russia

E-mail: <sup>a</sup> riviera-molto@mail.ru, <sup>b</sup> andreiluck11@yandex.ru

Received 08.04.2026, after completion – 25.05.2026.

Accepted for publication 26.05.2026.

A spatially distributed mathematical model is proposed for the evolution of five myocardial tissue states — healthy myocardium, inflammatory infiltrate, necrosis, replacement fibrosis, and interstitial fibrosis — in the form of a multicomponent parabolic reaction–diffusion system. At each spatial point the tissue state is described by a vector of Dirichlet concentration parameters, which allows one to encode both the expected tissue composition and the uncertainty of classification associated with transition zones of damage. For a truncated system that coincides with the original one inside an invariant region, local Lipschitz continuity and quasi-positivity of the extended reaction operator are established. Global existence of a weak solution, non-negativity, an explicit a priori upper bound, and a quantitative exponential lower bound are proved. These results imply invariance of the admissible region and hence existence of a global weak solution to the original model. Uniqueness is established in a strengthened class of solutions characterized by additional gradient regularity. For an auxiliary reversible transition matrix, a formal entropy balance is derived for smooth positive solutions; for the clinically motivated irreversible transition matrix, a modal spectral stability condition is formulated for the linearized problem. On the numerical side, a positivity condition is derived for the reaction substep of a splitting scheme relative to an adaptive upper trajectory bound, and numerical experiments are conducted for a reproducible calibrated computational variant. In the one-dimensional scenario, by day 60 the replacement-fibrosis fraction at the lesion center increases from 0.091 to 0.855, while the total concentration parameter  $\alpha_0$  rises from 11.0 to 15.9; in the two-dimensional scenario, on day 14 the mean value of  $\bar{p}_4$  is 0.431 in the lesion core versus 0.097 in the healthy region. These results confirm the mathematical well-posedness of the proposed model and its applicability for the quantitative description of post-infarction scar formation and heterogeneous transition zones.

**Keywords:** reaction – diffusion system, Dirichlet distribution, myocardial fibrosis, global existence, invariant region, uniqueness in a strengthened class, entropy balance, Markov chain

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 4, pp. 929–972 (Russian).

This work was financially supported by Sevastopol State University, project 42-01-09/319/2025-1.

## 1. Введение

### 1.1. Актуальность задачи

Фиброз миокарда относится к числу ключевых патологических процессов, определяющих течение ишемической болезни сердца, дилатационной кардиомиопатии и постинфарктного ремоделирования левого желудочка [Frangogiannis, 2015; Cleutjens et al., 1999; De Jong et al., 2011; Travers et al., 2016]. Особый клинический интерес представляют переходные зоны повреждения, визуализируемые при МРТ с поздним контрастированием гадолинием и рассматриваемые как возможный субстрат желудочковых аритмий [Schelbert et al., 2010; Roes et al., 2009]. Для анализа таких зон недостаточно бинарных или трехфазных описаний; требуется модель, допускающая многокомпонентный состав ткани и вероятностную интерпретацию неопределенности.

### 1.2. Обзор основных подходов

Фазово-полевые и диффузно-интерфейсные модели, восходящие к уравнениям Аллена – Кана, Кана – Хилларда и их многокомпонентным обобщениям [Allen, Cahn, 1979; Cahn, Hilliard, 1958; Cristini et al., 2009], позволяют описывать переходы между фазами, однако обычно не дают вероятностной интерпретации состава ткани. Электрофизиологические и бидоменные модели [Tung, 1978; Vigmond et al., 2003; Keener, Sneyd, 2009] учитывают фиброз как модификатор проводимости, но не моделируют саму эволюцию тканевого состава. Существуют также модели аритмогенности при диффузном фиброзе [Kazbanov et al., 2016] и биомеханические модели пограничной зоны инфаркта [Guccione et al., 2001], однако и в них вероятностное описание тканевого состава не является основной переменной. Марковские схемы переходов между состояниями ткани естественны для описания каскадов ремоделирования, но в исходном виде не включают пространственную диффузию. Анизотропная структура миокарда подтверждается данными диффузионно-тензорной МРТ и структурных исследований [Helm et al., 2005; Hooks et al., 2007], поэтому включение волоконного направления в тензор диффузии представляется естественным. Описание через параметры распределения Дирихле удобно тем, что позволяет одновременно кодировать ожидаемый состав ткани и степень уверенности в нем; такая постановка требует аккуратного аналитического обоснования.

Близкое по предмету, но методологически иное направление развивается в работах новосибирской школы математического моделирования инфаркта миокарда. В цикле работ О. Ф. Воропаевой и Ч. А. Цгоева [Tsгоеv et al., 2020; Воропаева, Цгоев, 2023а; Воропаева, Цгоев, 2023b; Воропаева, Цгоев, 2024а; Воропаева, Цгоев, 2024b] и в диссертации Ч. А. Цгоева [Цгоев, 2026b; Цгоев, 2026а] построена иерархия точечных и двумерной реакционно-диффузионной моделей механизменного типа для воспалительной фазы инфаркта миокарда: переменными состояниями служат плотности кардиомиоцитов, моноцитов и фенотипов макрофагов M1/M2, а также концентрации цитокинов TNF- $\alpha$ , IL-1, IL-10; реакционный оператор основан на законе действующих масс и кинетике Хилла, диффузия включается лишь для цитокинов и принимается с постоянными коэффициентами. Эти модели ориентированы на острый период инфаркта (часы — первые сутки), идентифицируются по данным *in vivo* на сердце мыши с помощью генетического алгоритма BGA и направлены, в частности, на анализ M1/M2-поляризации макрофагов как потенциальной терапевтической мишени.

Настоящая работа дополняет указанное направление в трех отношениях. Во-первых, она ориентирована на последующую фазу постинфарктного ремоделирования (десятки суток) и формирование рубцовой структуры, а не на острый воспалительный каскад. Во-вторых, в ней используется принципиально иной класс переменных состояний: вместо измеримых биохимических концентраций — параметры распределения Дирихле, кодирующие композицию тканевых

состояний и уровень неопределенности их локальной классификации. В-третьих, диффузионный тензор является анизотропным и зависит от локального состояния (а не постоянным, как в [Tsgoev et al., 2020; Воропаева, Цгоев, 2024a]), а главным результатом аналитической части служат строгие теоремы существования, инвариантности и единственности, которые в указанном цикле работ систематически не рассматривались.

Таким образом, известные модели ремоделирования миокарда обычно используют фазовые, электрофизиологические, биомеханические, биокинетические или иные феноменологические переменные состояния. Насколько известно авторам, постановка, в которой локальное состояние ткани описывается именно вектором параметров распределения Дирихле и одновременно служит переменной многокомпонентной реакционно-диффузионной системы, для задачи постинфарктного ремоделирования миокарда ранее явно не рассматривалась. В этом состоит главная новизна предлагаемой модели по отношению к ближайшим известным подходам.

### **1.3. Основные результаты и научная новизна**

Научная новизна работы состоит в том, что впервые предложена многокомпонентная реакционно-диффузионная модель постинфарктного ремоделирования миокарда, в которой локальное состояние ткани описывается вектором параметров распределения Дирихле. В отличие от существующих подходов использование данного распределения в качестве переменной состояния позволяет одновременно моделировать пространственную эволюцию пяти тканевых фаз и количественно оценивать уровень неопределенности, неизбежно возникающий в переходных зонах повреждения.

Кроме того, к оригинальным элементам модели относится предложенный анизотропный тензор диффузии, в котором интенсивность направленной компоненты напрямую зависит от локальной доли поврежденной ткани. В рамках этой постановки получены следующие основные результаты:

- 1) впервые предложена многокомпонентная реакционно-диффузионная модель эволюции миокардиальной ткани, в которой локальный состав и уровень неопределенности описываются с помощью параметров распределения Дирихле;
- 2) для выбранного анизотропного диффузионного тензора, в котором интенсивность направленной компоненты зависит от доли поврежденной ткани, доказаны свойства равномерной эллиптичности и локальной липшицевости по состоянию;
- 3) для усеченной системы доказаны глобальное существование слабого решения, неотрицательность, явная верхняя априорная оценка, количественная нижняя экспоненциальная оценка и инвариантность допустимой области;
- 4) единственность устанавливается в усиленном классе решений с дополнительной регулярностью градиентов;
- 5) для обратимого вспомогательного режима выводится энтропийный баланс для гладких положительных решений, а для клинически мотивированной необратимой матрицы переходов формулируется модовое условие спектральной устойчивости линеаризации;
- 6) численный блок демонстрирует согласованность схемы расщепления с аналитическими и апостериорными оценками и сопровождается воспроизводимым набором параметров.

В аналитической части используются классические инструменты теории нелинейных параболических уравнений: усечение, барьерные функции, метод неподвижной точки Шаудера, компактность Обена – Лионса – Симона, неравенство Гронуолла и лемма Эрлинга [Ладыженская

и др., 1967; Pao, 1992; Smoller, 1994; Simon, 1986; Evans, 2010; Lieberman, 1996]. Этот аппарат применяется к многокомпонентной модели миокардиального ремоделирования с вероятностной интерпретацией переменных состояния.

Далее последовательно рассматриваются аналитические свойства базовой реакционно-диффузионной системы, а численные результаты служат вычислительной иллюстрацией полученных свойств модели.

## 2. Математическая формулировка модели

### 2.1. Геометрия и допустимое множество состояний

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , — ограниченная область с границей класса  $C^{2+\mu}$ ,  $\mu > 0$ , и  $T > 0$  — фиксированный горизонт наблюдения. В данной работе рассматривается пятикомпонентная модель, то есть

$$K = 5.$$

Для  $M > 0$  положим

$$\mathcal{A}_0^M := \{a \in \mathbb{R}^K : 0 \leq a_k \leq M, k = 1, \dots, K\}. \quad (1)$$

### 2.2. Реакционно-диффузионная система

Искомая система имеет вид

$$\partial_t \alpha_k = \nabla \cdot (\mathbf{D}_k(x, \alpha) \nabla \alpha_k) + R_k(\alpha), \quad k = 1, \dots, K. \quad (2)$$

Она дополняется однородными условиями Неймана и начальными данными:

$$\mathbf{D}_k(x, \alpha) \nabla \alpha_k \cdot n = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T), \quad \alpha_k(x, 0) = \alpha_k^0(x). \quad (3)$$

### 2.3. Диффузионный тензор

Полагаем

$$\mathbf{D}_k(x, \alpha) = d_k^{(\text{iso})} \mathbf{I} + d_k^{(\text{aniso})}(\alpha)(\mathbf{f}(x) \otimes \mathbf{f}(x)), \quad (4)$$

где

$$d_k^{(\text{aniso})}(\alpha) = \beta_k \frac{\alpha_{\text{dam}}}{\alpha_0 + \varepsilon}, \quad \alpha_{\text{dam}} := \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \quad \alpha_0 := \sum_{j=1}^K \alpha_j. \quad (5)$$

Численная иллюстрация влияния этого слагаемого приведена в § 8.

Предполагается, что

$$d_k^{(\text{iso})} > 0, \quad \beta_k \geq 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \mathbf{f} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d). \quad (6)$$

## 2.4. Реакционный оператор

Реакция задается формулой

$$R_k(\alpha) = \sum_{j=1}^K q_{jk} \alpha_j - S_k(\alpha), \quad (7)$$

где

$$S_k(\alpha) = \kappa_k \alpha_k \left( \frac{\alpha_k}{M_k} - 1 \right)^+. \quad (8)$$

Вводим обозначения

$$q_k^{\text{out}} := -q_{kk}, \quad q_k^{\text{in}} := \sum_{j \neq k} q_{jk}, \quad q_* := \max_{1 \leq k \leq K} q_k^{\text{in}}. \quad (9)$$

На параметры реакционного оператора накладываются следующие знаковые ограничения:

$$q_{jk} \geq 0 \quad (j \neq k), \quad q_{kk} \leq 0, \quad \kappa_k \geq 0, \quad j, k = 1, \dots, K. \quad (10)$$

Равенства допускаются:  $q_{jk} = 0$  при  $j \neq k$  означает отсутствие прямого перехода из состояния  $j$  в состояние  $k$ ;  $q_{kk} = 0$  соответствует «инертному» (поглощающему) состоянию — именно так строка  $k = 4$  задана в клинической матрице (12);  $\kappa_k = 0$  исключает нелинейный логистический сток в  $k$ -м уравнении, что используется для замещающего фиброза ( $k = 4$ ) в численном блоке (см. (196)). Условия (10) совместимы со строчным балансом (13) и обеспечивают неотрицательность входных слагаемых в реакционном операторе (7); на них опираются лемма 1 (квазиположительность) и последующие оценки.

Предполагается также, что

$$M_k \geq 1, \quad k = 1, \dots, K. \quad (11)$$

Условие (11) будет использовано в подпараграфе 6.1 при анализе энтропийного функционала.

**ЗАМЕЧАНИЕ О ДВУХ УРОВНЯХ ПОСТАНОВКИ.** Во всех аналитических разделах далее рассматривается именно базовая система (2) с реакционным оператором (7) и клинической матрицей переходов (12). Калиброванные множители, пространственная модуляция линейных переходов и дополнительный источник для  $\alpha_0$ , используемые в § 8, изначально вводятся как элементы вычислительной версии; затем в подпараграфе 4.11 для них отдельно записывается аналитическая адаптация, совместимая с используемой схемой доказательств и согласованная с вариантом improved\_v9.

## 2.5. Клинически обоснованная матрица переходов

Используется матрица переходов

$$Q = \begin{pmatrix} -(q_{12} + q_{15}) & q_{12} & 0 & 0 & q_{15} \\ 0 & -(q_{23} + q_{24} + q_{25}) & q_{23} & q_{24} & q_{25} \\ 0 & 0 & -q_{34} & q_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{52} & 0 & q_{54} & -(q_{52} + q_{54}) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Здесь коэффициент  $q_{jk}$  интерпретируется как интенсивность перехода из состояния  $j$  в состояние  $k$ . Поэтому для каждой строки выполняется баланс

$$\sum_{k=1}^K q_{jk} = 0, \quad j = 1, \dots, K. \quad (13)$$

Матрица (12) необратима: состояние замещающего фиброза является поглощающим. Следовательно, детальный баланс для нее в общем случае невозможен.



## 2.6. Биологическая мотивация структуры переходов

Матрица (12) рассматривается как феноменологическое редуцированное описание доминирующих направлений постинфарктного ремоделирования. Пять состояний, нумерация которых принята во всех формулах модели, имеют следующий клинический смысл:

$k = 1$ : здоровый миокард;

$k = 2$ : воспалительный инфильтрат;

$k = 3$ : некроз;

$k = 4$ : замещающий фиброз;

$k = 5$ : интерстициальный (диффузный) фиброз.

Современные обзоры по заживлению миокарда после инфаркта указывают на последовательность фаз: острая воспалительная реакция, удаление некротических масс, подавление воспаления, активация фибробластов и формирование рубца, а также реактивный интерстициальный фиброз в пограничной и удаленной зонах (см. [Prabhu, Frangogiannis, 2016; Talman, Ruskoaho, 2016; Scalise et al., 2021]).

Эта логика отражается в топологии переходов следующим образом.

1. Переход  $1 \rightarrow 2$  моделирует запуск воспалительной фазы в поврежденной ткани.
2. Переходы  $2 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 4$ ,  $2 \rightarrow 5$  описывают дальнейшее разветвление воспалительного состояния в сторону некроза, репаративного рубцевания и диффузного интерстициального фиброза.
3. Переход  $3 \rightarrow 4$  отражает замещение некротической ткани рубцом.
4. Переход  $5 \rightarrow 4$  интерпретируется как усиление и локальная концентрация фиброзного ремоделирования.
5. Переход  $5 \rightarrow 2$  описывает возможность повторной активации воспалительных сигналов в хронически ремоделированной ткани.

Прямой переход  $1 \rightarrow 4$  не вводится, поскольку замещающий рубец трактуется как исход повреждения, опосредованный фазой воспаления и/или некроза, а не как мгновенное преобразование здоровой ткани в рубцовую. Напротив, прямой переход  $1 \rightarrow 5$  допускается как упрощенное описание реактивного диффузного фиброза вне зоны грубого некроза.

Величины  $q_{jk}$  в статье понимаются как эффективные феноменологические коэффициенты. Их количественная идентификация требует отдельной обратной задачи и здесь не рассматривается. Вместе с тем качественные временные масштабы фаз воспаления и рубцевания, лежащие в основе топологии матрицы, согласуются с клиническими и экспериментальными обзорами [Prabhu, Frangogiannis, 2016; Talman, Ruskoaho, 2016; Scalise et al., 2021].

## 2.7. Проверка структурных гипотез для конкретного тензора

Ниже теоремы формулируются для класса коэффициентов, удовлетворяющих равномерной эллиптичности и локальной липшицевости по состоянию. Для конкретного тензора (4)–(5) эти свойства проверяются явно.

**Предложение 1.** Пусть выполнены условия (6), а

$$\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq F_*. \quad (14)$$

Тогда для любого  $M > 0$  существуют константы  $d_{\min} > 0$ ,  $d_{\max}(M) > 0$  и  $L_D(M) > 0$  такие, что для всех  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^K$  с

$$\|\mathbf{a}\|_\infty \leq M, \quad \|\mathbf{b}\|_\infty \leq M$$

и всех  $\xi \in \mathbb{R}^d$  справедливы

$$d_{\min} |\xi|^2 \leq \xi^\top \mathbf{D}_k(x, (\mathbf{a})^+) \xi \leq d_{\max}(M) |\xi|^2, \quad (15)$$

$$|\mathbf{D}_k(x, (\mathbf{a})^+) - \mathbf{D}_k(x, (\mathbf{b})^+)| \leq L_D(M) |\mathbf{a} - \mathbf{b}|_\infty \quad \text{для почти всех } x \in \Omega. \quad (16)$$

*Доказательство.* По определению

$$\mathbf{D}_k(x, (\mathbf{a})^+) = d_k^{(\text{iso})} \mathbf{I} + \beta_k \frac{a_{\text{dam}}^+}{a_0^+ + \varepsilon} (\mathbf{f} \otimes \mathbf{f}),$$

где

$$a_{\text{dam}}^+ = (a_2)^+ + (a_3)^+ + (a_4)^+ + (a_5)^+, \quad a_0^+ = \sum_{j=1}^K (a_j)^+.$$

Так как

$$0 \leq \frac{a_{\text{dam}}^+}{a_0^+ + \varepsilon} \leq \frac{KM}{\varepsilon},$$

получаем

$$\xi^\top \mathbf{D}_k(x, (\mathbf{a})^+) \xi = d_k^{(\text{iso})} |\xi|^2 + \beta_k \frac{a_{\text{dam}}^+}{a_0^+ + \varepsilon} (\mathbf{f} \cdot \xi)^2 \geq d_k^{(\text{iso})} |\xi|^2.$$

Следовательно,

$$d_{\min} := \min_{1 \leq k \leq K} d_k^{(\text{iso})} > 0.$$

С другой стороны,

$$\xi^\top \mathbf{D}_k(x, (\mathbf{a})^+) \xi \leq \left( d_k^{(\text{iso})} + \beta_k \frac{KM}{\varepsilon} F_*^2 \right) |\xi|^2,$$

что дает верхнюю оценку (15).

Для липшицевости отметим, что функция

$$g(\mathbf{z}) := \frac{z_2 + z_3 + z_4 + z_5}{z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + \varepsilon}$$

гладка на  $\mathbb{R}_+^K$  и имеет ограниченный градиент на каждом кубе  $[0, M]^K$ . Так как отображение  $\mathbf{a} \mapsto (\mathbf{a})^+$  липшицево с константой 1, функция

$$\mathbf{a} \mapsto g((\mathbf{a})^+)$$

локально липшицева на множестве  $\{\|\mathbf{a}\|_\infty \leq M\}$ . Следовательно,

$$\left| \frac{a_{\text{dam}}^+}{a_0^+ + \varepsilon} - \frac{b_{\text{dam}}^+}{b_0^+ + \varepsilon} \right| \leq C(M, \varepsilon, K) |\mathbf{a} - \mathbf{b}|_\infty.$$

Умножая на  $\beta_k \|\mathbf{f} \otimes \mathbf{f}\|_{L^\infty} \leq \beta_k F_*^2$ , получаем (16).  $\square$



ЗАМЕЧАНИЕ 1. Тем самым результаты §4 действительно применимы к конкретному тензору (4)–(5), а не только к абстрактному классу коэффициентов.

### 3. Расширенный реакционный оператор

#### 3.1. Расширение на все пространство

Для работы с уравнением на всем  $\mathbb{R}^K$  вводим усеченный оператор

$$\widetilde{R}_k(\alpha) := \sum_{j \neq k} q_{jk}(\alpha_j)^+ - q_k^{\text{out}}(\alpha_k)^+ - \kappa_k(\alpha_k)^+ \left( \frac{(\alpha_k)^+}{M_k} - 1 \right)^+. \quad (17)$$

На неотрицательном конусе он совпадает с исходным:

$$\widetilde{R}_k(\alpha) = R_k(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^K. \quad (18)$$

#### 3.2. Квазиположительность

**Лемма 1.** Если  $\alpha_k \leq 0$ , то

$$\widetilde{R}_k(\alpha) = \sum_{j \neq k} q_{jk}(\alpha_j)^+ \geq 0. \quad (19)$$

*Доказательство.* При  $\alpha_k \leq 0$  имеем  $(\alpha_k)^+ = 0$ , поэтому отрицательные слагаемые в (17) исчезают.  $\square$

#### 3.3. Односторонние оценки

**Лемма 2.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}_+^K$ . Тогда для каждого  $k$  справедливы оценки

$$R_k(\alpha) \geq -q_k^{\text{out}}\alpha_k \quad \text{при } 0 \leq \alpha_k \leq M_k, \quad (20)$$

$$R_k(\alpha) \geq -\left[ q_k^{\text{out}} + \kappa_k \left( \frac{\alpha_k}{M_k} - 1 \right) \right] \alpha_k \quad \text{при } \alpha_k > M_k, \quad (21)$$

$$R_k(\alpha) \leq q_k^{\text{in}}|\alpha|_\infty. \quad (22)$$

Если дополнительно  $0 \leq \alpha_k \leq M_T$ , то

$$R_k(\alpha) \geq -\Lambda_k \alpha_k, \quad \Lambda_k := q_k^{\text{out}} + \kappa_k \left( \frac{M_T}{M_k} - 1 \right)^+. \quad (23)$$

*Доказательство.* Если  $0 \leq \alpha_k \leq M_k$ , то  $S_k(\alpha) = 0$ , и потому

$$R_k(\alpha) = \sum_{j \neq k} q_{jk} \alpha_j - q_k^{\text{out}} \alpha_k \geq -q_k^{\text{out}} \alpha_k,$$

так как все входные слагаемые неотрицательны. Это дает (20).

Если  $\alpha_k > M_k$ , то

$$S_k(\alpha) = \kappa_k \alpha_k \left( \frac{\alpha_k}{M_k} - 1 \right),$$

следовательно,

$$R_k(\alpha) = \sum_{j \neq k} q_{jk} \alpha_j - q_k^{\text{out}} \alpha_k - \kappa_k \alpha_k \left( \frac{\alpha_k}{M_k} - 1 \right) \geq -\left[ q_k^{\text{out}} + \kappa_k \left( \frac{\alpha_k}{M_k} - 1 \right) \right] \alpha_k.$$

Получаем (21).

Для верхней оценки достаточно отбросить отрицательные слагаемые:

$$R_k(\alpha) \leq \sum_{j \neq k} q_{jk} \alpha_j \leq q_k^{\text{in}} |\alpha|_\infty.$$

Это дает (22).

Наконец, если  $0 \leq \alpha_k \leq M_T$ , то из (20)–(21) следует

$$R_k(\alpha) \geq - \left[ q_k^{\text{out}} + \kappa_k \left( \frac{M_T}{M_k} - 1 \right)^+ \right] \alpha_k = -\Lambda_k \alpha_k,$$

то есть получаем (23). □

### 3.4. Локальная липшицевость

**Лемма 3.** Для любого  $M > 0$  существует  $L_R(M) > 0$  такое, что

$$|\widetilde{R}(\alpha) - \widetilde{R}(\beta)|_\infty \leq L_R(M) |\alpha - \beta|_\infty \quad (24)$$

при  $|\alpha|_\infty \leq M$  и  $|\beta|_\infty \leq M$ .

*Доказательство.* Для фиксированного  $k$  положим

$$h_k(z) := z^+ \left( \frac{z^+}{M_k} - 1 \right)^+. \quad (25)$$

Функция  $z \mapsto z^+$  липшицева на  $\mathbb{R}$  с константой 1. Кроме того,

$$h_k(z) = \begin{cases} 0, & z \leq M_k, \\ \frac{z^2}{M_k} - z, & z > M_k, \end{cases}$$

поэтому на отрезке  $[-M, M]$  имеем

$$|h'_k(z)| \leq \frac{2M}{M_k} + 1.$$

Следовательно,  $h_k$  липшицева на  $[-M, M]$  с константой

$$L_{h,k}(M) := \frac{2M}{M_k} + 1. \quad (26)$$

Пусть теперь  $|\alpha|_\infty \leq M$  и  $|\beta|_\infty \leq M$ . Тогда

$$|\widetilde{R}_k(\alpha) - \widetilde{R}_k(\beta)| \leq \sum_{j \neq k} |q_{jk}| \cdot |(\alpha_j)^+ - (\beta_j)^+| + q_k^{\text{out}} |(\alpha_k)^+ - (\beta_k)^+| + \kappa_k |h_k(\alpha_k) - h_k(\beta_k)|.$$

Отсюда

$$|\widetilde{R}_k(\alpha) - \widetilde{R}_k(\beta)| \leq \left( \sum_{j \neq k} |q_{jk}| + q_k^{\text{out}} + \kappa_k \left( \frac{2M}{M_k} + 1 \right) \right) |\alpha - \beta|_\infty.$$

Следовательно, можно взять

$$L_R(M) := \max_{1 \leq k \leq K} \left( \sum_{j \neq k} |q_{jk}| + q_k^{\text{out}} + \kappa_k \left( \frac{2M}{M_k} + 1 \right) \right). \quad (27)$$

□

### 3.5. Баланс реакций

**Лемма 4.** Для  $\alpha \in \mathbb{R}_+^K$  выполняется

$$\sum_{k=1}^K R_k(\alpha) = - \sum_{k=1}^K S_k(\alpha) \leq 0. \quad (28)$$

*Доказательство.* Из (7) имеем

$$\sum_{k=1}^K R_k(\alpha) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^K q_{jk} \alpha_j - \sum_{k=1}^K S_k(\alpha) = \sum_{j=1}^K \alpha_j \sum_{k=1}^K q_{jk} - \sum_{k=1}^K S_k(\alpha).$$

По условию (13) для каждой строки матрицы  $Q$  выполняется  $\sum_k q_{jk} = 0$ . Следовательно, получаем (28).  $\square$

## 4. Глобальное существование, инвариантность и единственность

### 4.1. Структурные гипотезы

Используются следующие условия.

**(Н1) Равномерная эллиптичность.** Существуют  $0 < d_{\min} \leq d_{\max}$  такие, что для всех  $a \in \mathbb{R}^K$ , почти всех  $x \in \Omega$  и всех  $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$d_{\min} |\xi|^2 \leq \xi^\top \mathbf{D}_k(x, (a)^+) \xi \leq d_{\max} |\xi|^2. \quad (29)$$

**(Н2) Локальная липшицевость усеченного коэффициента.** Для каждого  $M > 0$  существует  $L_D(M) > 0$  такое, что для всех  $a, b \in \mathbb{R}^K$  с  $|a|_\infty \leq M$  и  $|b|_\infty \leq M$  и почти всех  $x \in \Omega$

$$|\mathbf{D}_k(x, (a)^+) - \mathbf{D}_k(x, (b)^+)| \leq L_D(M) |a - b|_\infty. \quad (30)$$

**(Н3) Начальные данные:**

$$\alpha_k^0 \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad 0 < \delta_0 \leq \alpha_k^0(x) \leq M_0 \quad \text{п.в. в } \Omega. \quad (31)$$

**(Н4) Граница области:**

$$\partial\Omega \in C^{2+\mu}, \quad \mu > 0. \quad (32)$$

### 4.2. Слабое решение

**Определение 1.** Вектор-функция  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)$  называется слабым решением системы (2)–(3) на  $[0, T]$ , если

$$\alpha_k \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t \alpha_k \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (33)$$

и для всякой тестовой функции  $\psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  выполнено

$$\int_0^T \langle \partial_t \alpha_k, \psi \rangle dt + \int_0^T \int_\Omega \mathbf{D}_k(x, \alpha) \nabla \alpha_k \cdot \nabla \psi dx dt = \int_0^T \int_\Omega R_k(\alpha) \psi dx dt. \quad (34)$$

### 4.3. Усеченная система

Рассматриваем задачу

$$\partial_t \alpha_k = \nabla \cdot (\widetilde{\mathbf{D}}_k(x, \alpha) \nabla \alpha_k) + \widetilde{R}_k(\alpha), \quad \widetilde{\mathbf{D}}_k(x, \alpha) := \mathbf{D}_k(x, (\alpha)^+). \quad (35)$$

На множестве  $\mathbb{R}_+^K$  система (35) совпадает с исходной.

### 4.4. Принцип сравнения для линейной скалярной задачи

**Предложение 2.** Пусть  $a(x, t) \in L^\infty(\Omega_T; \mathbb{R}^{d \times d})$  равномерно эллиптичен:

$$\lambda |\xi|^2 \leq \xi^\top a(x, t) \xi \leq \Lambda |\xi|^2 \quad \text{для почти всех } (x, t) \in \Omega_T. \quad (36)$$

Пусть

$$f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \quad (37)$$

— заданная функция правой части и функции  $u, v$  удовлетворяют

$$u, v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \partial_t u, \partial_t v \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (38)$$

Пусть в слабом смысле (то есть при тестировании на любую неотрицательную функцию  $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ )

$$\partial_t u - \nabla \cdot (a \nabla u) \leq f, \quad \partial_t v - \nabla \cdot (a \nabla v) \geq f \quad (39)$$

в  $\Omega_T$ , причем выполнены одинаковые однородные условия Неймана и

$$u(\cdot, 0) \leq v(\cdot, 0) \quad \text{н.в. в } \Omega. \quad (40)$$

Тогда

$$u(x, t) \leq v(x, t) \quad \text{н.в. в } \Omega_T. \quad (41)$$

*Доказательство.* Положим  $z := u - v$ . Тогда

$$\partial_t z - \nabla \cdot (a \nabla z) \leq 0.$$

Тестирование на  $z^+ := \max\{z, 0\}$  дает

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z^+\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} a \nabla z^+ \cdot \nabla z^+ dx \leq 0.$$

По эллиптичности

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z^+\|_{L^2}^2 + \lambda \|\nabla z^+\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

Так как  $z^+(\cdot, 0) = 0$ , имеем  $\|z^+(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \equiv 0$ , откуда  $z \leq 0$  почти всюду.  $\square$

#### 4.5. Локальное существование для усеченной системы

Зафиксируем число  $M \geq 1$  и рассмотрим начальные данные

$$\alpha^{\text{in}} \in [L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)]^K, \quad \|\alpha_k^{\text{in}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M. \quad (42)$$

Положим

$$C_R(M) := \max_{1 \leq k \leq K} \sup_{|\alpha|_\infty \leq M} |\widetilde{R}_k(\alpha)|. \quad (43)$$

Далее полагаем

$$\tau_M := \begin{cases} \min \left\{ 1, \frac{M}{C_R(2M)} \right\}, & C_R(2M) > 0, \\ 1, & C_R(2M) = 0. \end{cases} \quad (44)$$

Тогда

$$M + \tau_M C_R(2M) \leq 2M. \quad (45)$$

Рассмотрим множество

$$\mathbb{K}_{\tau_M} := \left\{ \bar{\alpha} \in [L^2(\Omega \times (0, \tau_M))]^K : \|\bar{\alpha}_k\|_{L^\infty(\Omega \times (0, \tau_M))} \leq 2M \right\}. \quad (46)$$

Множество  $\mathbb{K}_{\tau_M}$  непусто, выпукло, замкнуто и ограничено в пространстве  $[L^2(\Omega \times (0, \tau_M))]^K$ .

Для  $\bar{\alpha} \in \mathbb{K}_{\tau_M}$  определим оператор  $\Phi$  так:  $\Phi(\bar{\alpha}) = \alpha$ , если  $\alpha$  решает линейную задачу

$$\partial_t \alpha_k - \nabla \cdot (\mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha})^+) \nabla \alpha_k) = \widetilde{R}_k(\bar{\alpha}), \quad \alpha_k(\cdot, 0) = \alpha_k^{\text{in}}. \quad (47)$$

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (Н1)–(Н4). Тогда для любых начальных данных (42) усеченная система (35) имеет слабое решение на  $[0, \tau_M]$ .

*Доказательство. Шаг 1. Разрешимость линейной задачи.* Для фиксированного  $\bar{\alpha} \in \mathbb{K}_{\tau_M}$  коэффициенты в (47) ограничены и равномерно эллиптичны по (29), а правая часть принадлежит  $L^\infty(\Omega \times (0, \tau_M))$ . Поэтому стандартная линейная параболическая теория для задач с ограниченными коэффициентами и однородным условием Неймана дает существование и единственность слабого решения (см. [Ладыженская и др., 1967, гл. III] и [Рао, 1992, гл. 2]).

*Шаг 2. Самосогласованность.* Используем оценку

$$|\widetilde{R}_k(\bar{\alpha})| \leq C_R(2M). \quad (48)$$

Рассмотрим барьеры

$$B_+(t) := M + C_R(2M)t, \quad B_-(t) := -M - C_R(2M)t. \quad (49)$$

Поскольку

$$\partial_t B_+ - \nabla \cdot (\mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha})^+) \nabla B_+) = C_R(2M) \geq \widetilde{R}_k(\bar{\alpha}), \quad (50)$$

$$\partial_t B_- - \nabla \cdot (\mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha})^+) \nabla B_-) = -C_R(2M) \leq \widetilde{R}_k(\bar{\alpha}) \quad (51)$$

и

$$B_-(0) \leq \alpha_k^{\text{in}} \leq B_+(0), \quad (52)$$

по предложению 2 имеем

$$B_-(t) \leq \alpha_k(x, t) \leq B_+(t) \quad \text{п.в. в } \Omega \times (0, \tau_M). \quad (53)$$

Из (45) следует

$$\|\alpha_k\|_{L^\infty(\Omega \times (0, \tau_M))} \leq 2M. \quad (54)$$

Следовательно,  $\Phi(\mathbb{K}_{\tau_M}) \subset \mathbb{K}_{\tau_M}$ .

*Шаг 3. Компактность.* Из стандартной энергетической оценки получаем

$$\|\alpha_k\|_{L^2(0, \tau_M; H^1(\Omega))} + \|\partial_t \alpha_k\|_{L^2(0, \tau_M; H^{-1}(\Omega))} \leq C(M, \tau_M). \quad (55)$$

По лемме Обена–Лионса–Симона множество  $\Phi(\mathbb{K}_{\tau_M})$  предкомпактно в  $[L^2(\Omega \times (0, \tau_M))]^K$  (см. [Simon, 1986]).

*Шаг 4. Непрерывность оператора  $\Phi$ .* Пусть

$$\bar{\alpha}^{(n)} \rightarrow \bar{\alpha} \quad \text{в } [L^2(\Omega \times (0, \tau_M))]^K. \quad (56)$$

Положим

$$\alpha^{(n)} := \Phi(\bar{\alpha}^{(n)}). \quad (57)$$

Из оценки (55) последовательность  $\alpha^{(n)}$  ограничена в  $[L^2(0, \tau_M; H^1(\Omega))]^K$ , а  $\partial_t \alpha^{(n)}$  — в  $[L^2(0, \tau_M; H^{-1}(\Omega))]^K$ . Поэтому после извлечения подпоследовательности

$$\alpha^{(n)} \rightarrow \alpha^* \quad \text{в } [L^2(\Omega \times (0, \tau_M))]^K, \quad (58)$$

$$\alpha^{(n)} \rightharpoonup \alpha^* \quad \text{в } [L^2(0, \tau_M; H^1(\Omega))]^K, \quad (59)$$

$$\partial_t \alpha^{(n)} \rightharpoonup \partial_t \alpha^* \quad \text{в } [L^2(0, \tau_M; H^{-1}(\Omega))]^K. \quad (60)$$

Кроме того, после извлечения подпоследовательности имеем почти всюду

$$\bar{\alpha}^{(n)}(x, t) \rightarrow \bar{\alpha}(x, t). \quad (61)$$

Тогда по непрерывности  $(\cdot)^+$ , гипотезе (30) и лемме 3

$$\mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha}^{(n)})^+) \rightarrow \mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha})^+) \quad \text{п.в. в } \Omega \times (0, \tau_M), \quad (62)$$

$$\tilde{R}_k(\bar{\alpha}^{(n)}) \rightarrow \tilde{R}_k(\bar{\alpha}) \quad \text{п.в. в } \Omega \times (0, \tau_M). \quad (63)$$

Обе последовательности равномерно ограничены в  $L^\infty$ , поэтому по теореме о доминированной сходимости

$$\tilde{R}_k(\bar{\alpha}^{(n)}) \rightarrow \tilde{R}_k(\bar{\alpha}) \quad \text{в } L^2(\Omega \times (0, \tau_M)). \quad (64)$$

Для любой тестовой функции  $\psi \in L^2(0, \tau_M; H^1(\Omega))$  имеем

$$\int_0^{\tau_M} \langle \partial_t \alpha_k^{(n)}, \psi \rangle dt + \int_0^{\tau_M} \int_\Omega \mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha}^{(n)})^+) \nabla \alpha_k^{(n)} \cdot \nabla \psi dx dt = \int_0^{\tau_M} \int_\Omega \tilde{R}_k(\bar{\alpha}^{(n)}) \psi dx dt. \quad (65)$$

Правая часть сходится по (64). Для диффузионного члена пишем разложение

$$\int_0^{\tau_M} \int_\Omega \mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha}^{(n)})^+) \nabla \alpha_k^{(n)} \cdot \nabla \psi dx dt - \int_0^{\tau_M} \int_\Omega \mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha})^+) \nabla \alpha_k^* \cdot \nabla \psi dx dt = I_{1,n} + I_{2,n}, \quad (66)$$

где

$$I_{1,n} := \int_0^{\tau_M} \int_{\Omega} \left[ \mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha}^{(n)})^+) - \mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha})^+) \right] \nabla \alpha_k^{(n)} \cdot \nabla \psi \, dx \, dt, \quad (67)$$

$$I_{2,n} := \int_0^{\tau_M} \int_{\Omega} \mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha})^+) (\nabla \alpha_k^{(n)} - \nabla \alpha_k^*) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt. \quad (68)$$

Для  $I_{2,n}$  используем слабую сходимость градиентов в  $L^2(\Omega \times (0, \tau_M))$  и ограниченность коэффициента  $\mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha})^+) \in L^\infty$ ; отсюда

$$I_{2,n} \rightarrow 0. \quad (69)$$

Для  $I_{1,n}$  положим

$$g_n(x, t) := \left[ \mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha}^{(n)})^+) - \mathbf{D}_k(x, (\bar{\alpha})^+) \right] \nabla \psi(x, t). \quad (70)$$

По (62) ограниченности коэффициентов на  $\mathbb{K}_{\tau_M}$  и теореме о доминированной сходимости имеем

$$g_n \rightarrow 0 \quad \text{в } L^2(\Omega \times (0, \tau_M)). \quad (71)$$

Так как последовательность  $\nabla \alpha_k^{(n)}$  ограничена в  $L^2(\Omega \times (0, \tau_M))$ , по неравенству Коши – Буняковского получаем

$$|I_{1,n}| \leq \|g_n\|_{L^2(\Omega \times (0, \tau_M))} \|\nabla \alpha_k^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times (0, \tau_M))} \rightarrow 0. \quad (72)$$

Следовательно,

$$I_{1,n} + I_{2,n} \rightarrow 0. \quad (73)$$

Переходя к пределу в (65), получаем, что  $\alpha^*$  удовлетворяет линейной задаче с коэффициентами, порожденными  $\bar{\alpha}$ . По единственности линейного решения

$$\alpha^* = \Phi(\bar{\alpha}). \quad (74)$$

Так как любая сходящаяся подпоследовательность  $\Phi(\bar{\alpha}^{(n)})$  имеет одним и тем же пределом функцию  $\Phi(\bar{\alpha})$ , сходится вся последовательность. Значит, оператор  $\Phi$  непрерывен.

По теореме Шаудера оператор  $\Phi$  имеет неподвижную точку на множестве  $\mathbb{K}_{\tau_M}$ . Это и есть слабое решение усеченной системы на  $[0, \tau_M]$ .  $\square$

#### 4.6. Неотрицательность

**Лемма 5.** Любое слабое решение системы (35) удовлетворяет

$$\alpha_k(x, t) \geq 0 \quad \text{n.в. в } \Omega_T, \quad k = 1, \dots, K. \quad (75)$$

*Доказательство.* Тестируем  $k$ -е уравнение на  $-(\alpha_k)^-$ . С учетом эллиптичности и леммы 1 получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\alpha_k)^-\|_{L^2}^2 + d_{\min} \|\nabla(\alpha_k)^-\|_{L^2}^2 \leq - \int_{\{\alpha_k < 0\}} \tilde{R}_k(\alpha)(\alpha_k)^- \, dx \leq 0. \quad (76)$$

Так как  $(\alpha_k^0)^- = 0$ , имеем  $(\alpha_k)^- \equiv 0$ .  $\square$



#### 4.7. Верхний барьер

**Лемма 6.** Пусть  $\alpha$  — слабое решение системы (35), удовлетворяющее условию (31). Тогда

$$0 \leq \alpha_k(x, t) \leq B(t) := M_0 e^{q_* t} \quad \text{п.в. в } \Omega_T, \quad k = 1, \dots, K. \quad (77)$$

*Доказательство.* Неотрицательность уже установлена в лемме 5. Зафиксируем  $k \in \{1, \dots, K\}$  и положим

$$w_k := (\alpha_k - B)^+. \quad (78)$$

Так как  $B = B(t)$  не зависит от  $x$ , из уравнения для  $\alpha_k$  получаем

$$\partial_t(\alpha_k - B) - \nabla \cdot (\mathbf{D}_k(x, \alpha) \nabla(\alpha_k - B)) = R_k(\alpha) - B'(t). \quad (79)$$

Тестируя это равенство на  $w_k$ , имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \mathbf{D}_k(x, \alpha) \nabla w_k \cdot \nabla w_k dx = \int_{\Omega} (R_k(\alpha) - B'(t)) w_k dx. \quad (80)$$

На множестве  $\{w_k > 0\}$  имеем  $\alpha_k > B$ . Кроме того, для любого  $j$  выполнено

$$\alpha_j \leq B + w_j, \quad (81)$$

поскольку если  $\alpha_j \leq B$ , то  $w_j = 0$ , а если  $\alpha_j > B$ , то  $w_j = \alpha_j - B$ .

Следовательно,

$$R_k(\alpha) = \sum_{j \neq k} q_{jk} \alpha_j - q_k^{\text{out}} \alpha_k - S_k(\alpha) \leq q_k^{\text{in}} B + \sum_{j \neq k} q_{jk} w_j, \quad (82)$$

где отрицательные слагаемые отброшены. Так как

$$B'(t) = q_* B(t) \geq q_k^{\text{in}} B(t),$$

получаем на множестве  $\{w_k > 0\}$  неравенство

$$R_k(\alpha) - B'(t) \leq \sum_{j \neq k} q_{jk} w_j. \quad (83)$$

Поэтому

$$\int_{\Omega} (R_k(\alpha) - B'(t)) w_k dx \leq \sum_{j \neq k} q_{jk} \int_{\Omega} w_j w_k dx. \quad (84)$$

Суммируя по  $k = 1, \dots, K$  и используя

$$w_j w_k \leq \frac{1}{2} (w_j^2 + w_k^2),$$

получаем

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j \neq k} q_{jk} \int_{\Omega} w_j w_k dx \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{j \neq k} q_{jk} (\|w_j\|_{L^2}^2 + \|w_k\|_{L^2}^2). \quad (85)$$

Перегруппировка дает

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j \neq k} q_{jk} \int_{\Omega} w_j w_k dx \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (q_k^{\text{in}} + q_k^{\text{out}}) \|w_k\|_{L^2}^2. \quad (86)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^K \|w_k\|_{L^2}^2 + d_{\min} \sum_{k=1}^K \|\nabla w_k\|_{L^2}^2 \leq C_Q \sum_{k=1}^K \|w_k\|_{L^2}^2, \quad (87)$$

где

$$C_Q := \frac{1}{2} \max_{1 \leq k \leq K} (q_k^{\text{in}} + q_k^{\text{out}}). \quad (88)$$

Из начального условия и выбора  $B(0) = M_0$  следует

$$w_k(\cdot, 0) = (\alpha_k^0 - M_0)^+ = 0. \quad (89)$$

По лемме Гронуолла

$$\sum_{k=1}^K \|w_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \equiv 0,$$

и потому

$$\alpha_k(x, t) \leq B(t) \quad \text{п.в. в } \Omega_T. \quad (90)$$

Вместе с леммой 5 это дает требуемое двустороннее ограничение.  $\square$

#### 4.8. Количественная нижняя граница

**Лемма 7.** Пусть  $\alpha$  — решение системы (35). Тогда для каждого  $k$

$$\alpha_k(x, t) \geq \delta_0 e^{-\Lambda_k t} \quad \text{п.в. в } \Omega_T, \quad (91)$$

где

$$\Lambda_k := q_k^{\text{out}} + \kappa_k \left( \frac{M_T}{M_k} - 1 \right)^+, \quad M_T := M_0 e^{q_* T}. \quad (92)$$

*Доказательство.* По лемме 6 выполняется  $0 \leq \alpha_k \leq M_T$ , а значит, по (23)

$$R_k(\alpha) \geq -\Lambda_k \alpha_k. \quad (93)$$

Положим

$$v_k(x, t) := e^{\Lambda_k t} \alpha_k(x, t). \quad (94)$$

Тогда

$$\partial_t v_k - \nabla \cdot (\mathbf{D}_k(x, \alpha) \nabla v_k) = e^{\Lambda_k t} (R_k(\alpha) + \Lambda_k \alpha_k) \geq 0. \quad (95)$$

Из начального условия

$$v_k(x, 0) = \alpha_k^0(x) \geq \delta_0. \quad (96)$$

Поскольку постоянная функция  $\delta_0$  является подрешением для (95), по предложению 2 имеем  $v_k(x, t) \geq \delta_0$ , откуда следует (91).  $\square$

#### 4.9. Глобальное продолжение и инвариантность

**Лемма 8.** Пусть решение усеченной системы (35) существует на интервале  $[0, S]$  и удовлетворяет оценке

$$\|\alpha_k(\cdot, S)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M \quad \text{для всех } k. \quad (97)$$

Тогда это решение можно продолжить как слабое решение еще на интервал длины  $\tau_M$ , где  $\tau_M$  определяется формулой (44) и зависит только от  $M$  и структурных констант задачи.

*Доказательство.* По определению слабого решения

$$\alpha_k(\cdot, S) \in L^2(\Omega),$$

а из (97) следует

$$\alpha_k(\cdot, S) \in L^\infty(\Omega), \quad \|\alpha_k(\cdot, S)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M.$$

Следовательно, функцию  $\alpha(\cdot, S)$  можно использовать как новые начальные данные в теореме 1. Получаем решение на  $[S, S + \tau_M]$ .  $\square$

**Следствие 1.** Для слабого решения усеченной системы (35), построенного локально в теореме 1 и продолженного по времени, выполняется

$$(\alpha)^+ = \alpha, \quad \bar{R}_k(\alpha) = R_k(\alpha), \quad \bar{\mathbf{D}}_k(x, \alpha) = \mathbf{D}_k(x, \alpha). \quad (98)$$

Следовательно, это решение является слабым решением исходной системы (2)–(3).

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (Н1)–(Н4). Тогда исходная система (2)–(3) имеет глобальное слабое решение

$$\alpha \in \left[ L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) \right]^K, \quad (99)$$

и для почти всех  $(x, t) \in \Omega_T$  выполняются оценки

$$\delta_0 e^{-\Lambda_k t} \leq \alpha_k(x, t) \leq M_0 e^{q_* T}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (100)$$

*Доказательство.* По теореме 1 существует локальное слабое решение усеченной системы на интервале  $[0, \tau_{M_0}]$ . По леммам 5–7 оно удовлетворяет неотрицательности, верхнему барьеру и нижней экспоненциальной границе. В частности,

$$0 \leq \alpha_k(x, t) \leq M_T := M_0 e^{q_* T} \quad \text{п.в. в } \Omega \times (0, \tau_{M_0}). \quad (101)$$

По формуле (44) число  $\tau_{M_T}$  зависит только от  $M_T$  и структурных констант, но не зависит от точки перезапуска. По лемме 8 решение можно продолжить еще на интервал длины  $\tau_{M_T}$ . Предположим, что максимальное время существования  $T_{\max}$  меньше  $T$ . Выберем  $S < T_{\max}$  так, чтобы

$$T_{\max} - S < \frac{\tau_{M_T}}{2}.$$

Тогда по лемме 8 решение продолжается на  $[S, S + \tau_{M_T}]$ , а потому существует и за моментом  $T_{\max}$ , что противоречит определению максимального времени. Следовательно,

$$T_{\max} \geq T.$$

Так как по леммам 5–7 решение остается в неотрицательной инвариантной области, усеченная и исходная системы совпадают на этом решении. Теорема доказана.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Оценки лемм 5–7 носят априорный характер и зависят только от структурных констант задачи и начальных данных. Поэтому те же рассуждения применимы к любому слабому решению исходной задачи (2)–(3) с начальными данными, удовлетворяющими условию (31); в частности, для любого такого решения справедливы оценки (100).

#### 4.10. Условная единственность в усиленном классе

Для блока единственности вводим усиленный класс

$$\mathcal{U}_r(S) := \left\{ \alpha - \text{слабое решение на } [0, S]: \nabla \alpha_k \in L^\infty(0, S; L^r(\Omega)), k = 1, \dots, K \right\}, \quad (102)$$

где

$$r > d. \quad (103)$$

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (Н1)–(Н4). Пусть  $\alpha^{(1)}$  и  $\alpha^{(2)}$  — два слабых решения системы (2)–(3) на интервале  $[0, S]$ , принадлежащие классу  $\mathcal{U}_r(S)$  для некоторого  $r > d$ . Тогда

$$\alpha^{(1)} \equiv \alpha^{(2)} \quad \text{в } \Omega \times (0, S). \quad (104)$$

*Доказательство.* Поскольку  $\alpha^{(1)}$  и  $\alpha^{(2)}$  являются слабыми решениями одной и той же задачи с начальными данными, удовлетворяющими условию (31), к каждому из них применимы те же аргументы, что и в леммах 5, 6, 7 (см. замечание 2). Поэтому

$$0 \leq \alpha_k^{(i)}(x, t) \leq M_T := M_0 e^{q_* T} \quad \text{п.в. в } \Omega \times (0, S), \quad i = 1, 2.$$

Следовательно,  $(\alpha^{(i)})^+ = \alpha^{(i)}$ , и гипотеза (30) применима к коэффициентам

$$\mathbf{D}_k^{(i)} := \mathbf{D}_k(x, \alpha^{(i)}), \quad i = 1, 2.$$

Положим

$$w_k := \alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)}. \quad (105)$$

Тогда  $w_k(\cdot, 0) = 0$ , и разность уравнений имеет вид

$$\partial_t w_k - \nabla \cdot (\mathbf{D}_k^{(1)} \nabla w_k) = \nabla \cdot ((\mathbf{D}_k^{(1)} - \mathbf{D}_k^{(2)}) \nabla \alpha_k^{(2)}) + (R_k(\alpha^{(1)}) - R_k(\alpha^{(2)})). \quad (106)$$

Тестируя на  $w_k$ , получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_k\|_{L^2}^2 + d_{\min} \|\nabla w_k\|_{L^2}^2 \leq |I_D^{(k)}| + |I_R^{(k)}|, \quad (107)$$

где

$$I_D^{(k)} := \int_{\Omega} (\mathbf{D}_k^{(1)} - \mathbf{D}_k^{(2)}) \nabla \alpha_k^{(2)} \cdot \nabla w_k \, dx, \quad (108)$$

$$I_R^{(k)} := \int_{\Omega} (R_k(\alpha^{(1)}) - R_k(\alpha^{(2)})) w_k \, dx. \quad (109)$$

По лемме 3 и неравенству Коши

$$|I_R^{(k)}| \leq L_R(M_T) \sum_{j=1}^K \|w_j\|_{L^2} \|w_k\|_{L^2} \leq C_{\text{react}} \sum_{j=1}^K \|w_j\|_{L^2}^2, \quad (110)$$

где константа  $C_{\text{react}} > 0$  зависит только от  $L_R(M_T)$  и  $K$ .

Положим

$$s := \frac{2r}{r-2}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2} = 1. \quad (111)$$

Так как  $r > d$ , имеем компактное вложение

$$H^1(\Omega) \Subset L^s(\Omega). \quad (112)$$

Следовательно, по лемме Эрлинга для любого  $\eta > 0$  существует  $C_\eta > 0$  такое, что

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} \leq \eta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + C_\eta \|u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (113)$$

Кроме того, по гипотезе (30)

$$|\mathbf{D}_k^{(1)} - \mathbf{D}_k^{(2)}| \leq L_D(M_T) \sum_{j=1}^K |w_j|. \quad (114)$$

Введем обозначение

$$A_* := \max_{1 \leq k \leq K} \|\nabla \alpha_k^{(2)}\|_{L^\infty(0, S; L^r(\Omega))} < \infty. \quad (115)$$

Тогда

$$|I_D^{(k)}| \leq L_D(M_T) A_* \sum_{j=1}^K \|w_j\|_{L^s} \|\nabla w_k\|_{L^2}. \quad (116)$$

Подставляя (113), получаем

$$|I_D^{(k)}| \leq L_D(M_T) A_* \sum_{j=1}^K (\eta \|\nabla w_j\|_{L^2} + C_\eta \|w_j\|_{L^2}) \|\nabla w_k\|_{L^2}. \quad (117)$$

Обозначим

$$G(t) := \sum_{k=1}^K \|\nabla w_k(t)\|_{L^2}^2, \quad W(t) := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \|w_k(t)\|_{L^2}^2. \quad (118)$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^K |I_D^{(k)}| \leq L_D(M_T) A_* \left[ \eta \sum_{j,k=1}^K \|\nabla w_j\|_{L^2} \|\nabla w_k\|_{L^2} + C_\eta \sum_{j,k=1}^K \|w_j\|_{L^2} \|\nabla w_k\|_{L^2} \right]. \quad (119)$$

Для первого двойного суммирования

$$\sum_{j,k=1}^K \|\nabla w_j\|_{L^2} \|\nabla w_k\|_{L^2} \leq KG(t). \quad (120)$$

Для второго суммирования по неравенству Коши – Буняковского

$$\sum_{j,k=1}^K \|w_j\|_{L^2} \|\nabla w_k\|_{L^2} \leq 2KW(t)^{1/2}G(t)^{1/2}. \quad (121)$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^K |I_D^{(k)}| \leq L_D(M_T) A_* \eta KG(t) + 2L_D(M_T) A_* C_\eta KW(t)^{1/2}G(t)^{1/2}. \quad (122)$$

К последнему члену применяем неравенство Юнга: для любого  $\varepsilon > 0$

$$2L_D(M_T) A_* C_\eta KW^{1/2}G^{1/2} \leq \varepsilon G + C(\varepsilon, \eta, A_*)W. \quad (123)$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^K |I_D^{(k)}| \leq (L_D(M_T)A_*\eta K + \varepsilon)G(t) + C(\varepsilon, \eta, A_*)W(t). \quad (124)$$

Выбираем сначала  $\eta > 0$  так, чтобы

$$L_D(M_T)A_*\eta K \leq \frac{d_{\min}}{4}, \quad (125)$$

а затем  $\varepsilon > 0$  — так, чтобы

$$\varepsilon \leq \frac{d_{\min}}{4}. \quad (126)$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^K |I_D^{(k)}| \leq \frac{d_{\min}}{2}G(t) + C_1 W(t). \quad (127)$$

С учетом обозначений  $w_k$  из (105) и  $I_D^{(k)}$  из (108), подставляя оценку (127) для суммарного диффузионного вклада и оценку (110) для суммарного реакционного вклада в энергетическое тождество (107) и суммируя его по  $k = 1, \dots, K$ , получаем

$$\frac{d}{dt}W(t) + \frac{d_{\min}}{2}G(t) \leq C_2 W(t), \quad (128)$$

где постоянная  $C_2 > 0$  зависит только от  $C_1$  из (127) и  $C_{\text{реакт}}$  из (110). Так как  $W(0) = 0$ , по лемме Гронуолла

$$W(t) \equiv 0 \quad \text{на } [0, S]. \quad (129)$$

Следовательно,  $\alpha^{(1)} \equiv \alpha^{(2)}$ . □

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Теорема 3 является условной: в статье не доказывается непустота класса  $\mathcal{U}_r(S)$  для общей постановки теоремы 2. Вопрос о построении решений в пространстве максимальной регулярности остается открытым.

#### 4.11. Замечания к вычислительной реализации

Зафиксируем поле повреждения

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad (130)$$

и введем пространственный множитель

$$g(x) := 0,01 + 0,99\rho(x)^{1,7}, \quad 0,01 \leq g(x) \leq 1. \quad (131)$$

Пусть  $Q^{\text{imp}} = (q_{jk}^{\text{imp}})$  — матрица, получаемая из клинической матрицы (12) умножением переходов  $1 \rightarrow 5$ ,  $2 \rightarrow 5$ ,  $2 \rightarrow 4$ ,  $3 \rightarrow 4$ ,  $5 \rightarrow 4$  на коэффициенты 1,15, 1,10, 0,95, 0,90, 0,95 соответственно, последующим общим масштабированием на 0,94 и восстановлением диагонали из условия

$$\sum_{k=1}^K q_{jk}^{\text{imp}} = 0, \quad j = 1, \dots, K. \quad (132)$$

Вне диагонали при этом сохраняется неотрицательность:

$$q_{jk}^{\text{imp}} \geq 0, \quad j \neq k. \quad (133)$$

Обозначим, как и раньше,

$$q_{k,\text{out}}^{\text{imp}} := -q_{kk}^{\text{imp}}, \quad q_{k,\text{in}}^{\text{imp}} := \sum_{j \neq k} q_{jk}^{\text{imp}}, \quad q_*^{\text{imp}} := \max_{1 \leq k \leq K} q_{k,\text{in}}^{\text{imp}}. \quad (134)$$

Для неотрицательного вектора  $\alpha$  положим

$$\alpha_0 := \sum_{j=1}^K \alpha_j, \quad \bar{p}_k := \frac{\alpha_k}{\alpha_0}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (135)$$

Пусть  $\mathfrak{s}(\bar{p}, \rho)$  обозначает ограниченную функцией отсечения величину оценки уверенности из формулы (202). Тогда

$$\alpha_0^*(x, \alpha) := 7,6 + 15,6\mathfrak{s}(\bar{p}, \rho(x)), \quad 7,6 \leq \alpha_0^*(x, \alpha) \leq 23,2. \quad (136)$$

Источник уверенности и калиброванный реакционный оператор определим формулами

$$C_k(x, \alpha) := \lambda_c \bar{p}_k (\alpha_0^*(x, \alpha) - \alpha_0), \quad \lambda_c := 0,045, \quad (137)$$

$$R_k^{\text{imp}}(x, \alpha) := g(x) \sum_{j=1}^K q_{jk}^{\text{imp}} \alpha_j - S_k(\alpha) + C_k(x, \alpha). \quad (138)$$

Соответствующая калиброванная система имеет вид

$$\partial_t \alpha_k = \nabla \cdot (\mathbf{D}_k(x, \alpha) \nabla \alpha_k) + R_k^{\text{imp}}(x, \alpha), \quad k = 1, \dots, K, \quad (139)$$

и снабжается теми же условиями Неймана и начальными данными, что и (3).

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия (Н1)–(Н4) и дополнительно (130). Тогда калиброванная система (139), (3) имеет глобальное слабое решение в смысле определения 1 с заменой  $R_k$  на  $R_k^{\text{imp}}$ . Для почти всех  $(x, t) \in \Omega_T$  выполняются оценки

$$\delta_0 e^{-\widehat{\Lambda}_k t} \leq \alpha_k(x, t) \leq B_{\text{imp}}(t), \quad k = 1, \dots, K, \quad (140)$$

где

$$B_{\text{imp}}(t) := \begin{cases} M_0 + \lambda_c 23,2t, & q_*^{\text{imp}} = 0, \\ \left( M_0 + \frac{\lambda_c 23,2}{q_*^{\text{imp}}} \right) e^{q_*^{\text{imp}} t} - \frac{\lambda_c 23,2}{q_*^{\text{imp}}}, & q_*^{\text{imp}} > 0, \end{cases} \quad (141)$$

$$\widehat{\Lambda}_k := q_{k,\text{out}}^{\text{imp}} + \lambda_c + \kappa_k \left( \frac{B_{\text{imp}}(T)}{M_k} - 1 \right)^+. \quad (142)$$

*Доказательство. Шаг 1. Локальное существование на положительной полосе.* Положим

$$\Gamma_+ := 2M_0 q_*^{\text{imp}} + \lambda_c 23,2, \quad \Gamma_- := 2M_0 \max_{1 \leq k \leq K} \left[ q_{k,\text{out}}^{\text{imp}} + \lambda_c + \kappa_k \left( \frac{2M_0}{M_k} - 1 \right)^+ \right]. \quad (143)$$

Выберем

$$\tau_* := \min \left\{ 1, \frac{M_0}{\Gamma_+}, \frac{\delta_0}{2\Gamma_-} \right\} \quad (144)$$

и рассмотрим множество

$$\mathbb{K}_{\tau_*}^+ := \left\{ \bar{\alpha} \in \left[ L^2(\Omega \times (0, \tau_*)) \right]^K : \frac{\delta_0}{2} \leq \bar{\alpha}_k(x, t) \leq 2M_0 \text{ п.в. в } \Omega \times (0, \tau_*) \right\}. \quad (145)$$

На множестве (145) выполнена оценка

$$\alpha_0(x, t) \geq \frac{K\delta_0}{2}, \quad (146)$$

поэтому отображения

$$\alpha \mapsto \bar{p}, \quad \alpha \mapsto \alpha_0^*(\cdot, \alpha), \quad \alpha \mapsto C(\cdot, \alpha)$$

локально липшицевы на  $\mathbb{K}_{\tau_*}^+$ , а значит, то же верно и для  $\alpha \mapsto R^{\text{imp}}(\cdot, \alpha)$ .

Для фиксированного  $\bar{\alpha} \in \mathbb{K}_{\tau_*}^+$  рассмотрим линейную задачу

$$\partial_t \alpha_k - \nabla \cdot (\mathbf{D}_k(x, \bar{\alpha}) \nabla \alpha_k) = R_k^{\text{imp}}(x, \bar{\alpha}), \quad \alpha_k(\cdot, 0) = \alpha_k^0. \quad (147)$$

По стандартной линейной параболической теории она имеет слабое решение. Далее используем барьеры

$$b_+(t) := M_0 + \Gamma_+ t, \quad b_-(t) := \delta_0 - \Gamma_- t. \quad (148)$$

Поскольку  $0 \leq \bar{p}_k \leq 1$  и  $\alpha_0^*(x, \bar{\alpha}) \leq 23,2$ , для источника уверенности  $C_k$  из (137) выполняются оценки сверху и снизу:

$$-\lambda_c \bar{\alpha}_k \leq C_k(x, \bar{\alpha}) \leq \lambda_c \cdot 23,2, \quad (149)$$

которые в более общем виде доказаны на шагах 2, 3 ниже (см. (152) и (154)). Объединяя (149) с неотрицательностью линейной части  $g(x) \sum_j q_{jk}^{\text{imp}} \bar{\alpha}_j$  при  $\bar{\alpha}_j \geq 0$ , неотрицательностью  $S_k \geq 0$  и ограничениями  $\bar{\alpha}_k \leq 2M_0$  на множестве  $\mathbb{K}_{\tau_*}^+$ , из определений  $\Gamma_{\pm}$  получаем

$$R_k^{\text{imp}}(x, \bar{\alpha}) \leq \Gamma_+ = b'_+(t), \quad (150)$$

$$R_k^{\text{imp}}(x, \bar{\alpha}) \geq -\Gamma_- = b'_-(t). \quad (151)$$

По предложению сравнения 2 получаем

$$b_-(t) \leq \alpha_k(x, t) \leq b_+(t) \quad \text{п.в. в } \Omega \times (0, \tau_*).$$

Из выбора (144) следует, что  $b_-(t) \geq \frac{\delta_0}{2}$  и  $b_+(t) \leq 2M_0$ , так что соответствующий оператор Шаудера отображает  $\mathbb{K}_{\tau_*}^+$  в себя. Далее дословно повторяется доказательство теоремы 1: компактность и непрерывность следуют из тех же энергетических оценок и локальной липшицевости коэффициентов на положительной полосе (145). Значит, калиброванная система имеет локальное слабое решение на  $[0, \tau_*]$ .

*Шаг 2. Неотрицательность и верхний барьер.* Для калиброванного оператора повторим рассуждения леммы 5, отдельно проверив квазиположительность  $R^{\text{imp}}$  (лемма 1 установлена для базового усеченного оператора  $\tilde{R}$ , поэтому в данной постановке требуется отдельная проверка). Зафиксируем  $k$  и рассмотрим точку, в которой  $\alpha_k = 0$  и  $\alpha_j \geq 0$  для  $j \neq k$ . Тогда  $\bar{p}_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0} = 0$ , поэтому источник уверенности обращается в нуль:

$$C_k(x, \alpha)|_{\alpha_k=0} = \lambda_c \bar{p}_k (\alpha_0^*(x, \alpha) - \alpha_0)|_{\bar{p}_k=0} = 0.$$



Кроме того,  $S_k(\alpha)|_{\alpha_k=0} = 0$  из (8). Поскольку  $g(x) \geq 0,01 > 0$  по (131),  $q_{jk}^{\text{imp}} \geq 0$  при  $j \neq k$  по (133) и  $\alpha_j \geq 0$  для  $j \neq k$ , имеем

$$R_k^{\text{imp}}(x, \alpha)|_{\alpha_k=0} = g(x) \sum_{j \neq k} q_{jk}^{\text{imp}} \alpha_j \geq 0.$$

Это и есть квазиположительность калиброванного оператора. Тестируя  $k$ -е уравнение системы (139) на  $-(\alpha_k)^-$  и используя стандартное рассуждение леммы 5, получаем  $(\alpha_k)^- \equiv 0$ , то есть  $\alpha_k \geq 0$  почти всюду.

Перейдем к верхнему барьеру. Так как  $0 \leq \bar{p}_k \leq 1$  и  $\alpha_0^* \leq 23,2$ , для источника уверенности имеем

$$C_k(x, \alpha) \leq \lambda_c 23,2. \quad (152)$$

Положим  $w_k := (\alpha_k - B_{\text{imp}})^+$ . На множестве  $\{w_k > 0\}$  получаем, как и в доказательстве леммы 6,

$$\alpha_j \leq B_{\text{imp}} + w_j, \quad R_k^{\text{imp}}(x, \alpha) \leq q_{k,\text{in}}^{\text{imp}} B_{\text{imp}} + \sum_{j \neq k} q_{jk}^{\text{imp}} w_j + \lambda_c 23,2.$$

Поскольку

$$B'_{\text{imp}}(t) = q_*^{\text{imp}} B_{\text{imp}}(t) + \lambda_c 23,2 \geq q_{k,\text{in}}^{\text{imp}} B_{\text{imp}}(t) + \lambda_c 23,2,$$

дальнейшее суммирование по  $k$  и применение леммы Гронуолла повторяют доказательство леммы 6 без изменений и дают

$$0 \leq \alpha_k(x, t) \leq B_{\text{imp}}(t) \quad \text{п.в. в } \Omega_T. \quad (153)$$

*Шаг 3. Нижняя экспоненциальная граница.* Из равенства  $\bar{p}_k \alpha_0 = \alpha_k$  и неотрицательности  $\alpha_0^*$  следует

$$C_k(x, \alpha) = \lambda_c \alpha_k \left( \frac{\alpha_0^*(x, \alpha)}{\alpha_0} - 1 \right) \geq -\lambda_c \alpha_k. \quad (154)$$

Кроме того, по (153) имеем  $0 \leq \alpha_k \leq B_{\text{imp}}(T)$ , а значит,

$$S_k(\alpha) \leq \kappa_k \alpha_k \left( \frac{B_{\text{imp}}(T)}{M_k} - 1 \right)^+.$$

Следовательно,

$$R_k^{\text{imp}}(x, \alpha) \geq -\widehat{\Lambda}_k \alpha_k. \quad (155)$$

Теперь дословно повторяется доказательство леммы 7 с функцией  $v_k = e^{\widehat{\Lambda}_k t} \alpha_k$ , откуда и получаем нижнюю оценку из (140).

*Шаг 4. Глобальное продолжение.* Полученные априорные оценки зависят только от структурных констант,  $\rho$ ,  $T$  и начальных данных. Поэтому локальное решение можно продолжать по времени точно так же, как в лемме 8 и теореме 2. В частности, положительная инвариантная полоса

$$\delta_0 e^{-\widehat{\Lambda} t} \leq \alpha_k(x, t) \leq B_{\text{imp}}(t), \quad \widehat{\Lambda} := \max_{1 \leq k \leq K} \widehat{\Lambda}_k,$$

исключает потерю липшицевости источника уверенности и предотвращает взрыв решения на конечном промежутке времени. Теорема доказана.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для калиброванного оператора баланс реакций меняется по сравнению с леммой 4. Действительно, из (132) и (137) следует

$$\sum_{k=1}^K R_k^{\text{imp}}(x, \alpha) = - \sum_{k=1}^K S_k(\alpha) + \lambda_c (\alpha_0^*(x, \alpha) - \alpha_0). \quad (156)$$

Тем самым полная сумма уже не обязана убывать монотонно; вместо точного диссипативного баланса используется барьерный контроль, реализованный в теореме 4. На той же положительной инвариантной полосе оператор  $R^{\text{imp}}$  остается локально липшицевым, поэтому энергетический аргумент теоремы 3 переносится и на калиброванную систему в классе  $\mathcal{U}_r(S)$ .

## 5. Вероятностная интерпретация и выбор распределения Дирихле

### 5.1. Симплекс вероятностей и моменты

Из теоремы 2 следует, что

$$\alpha_k(x, t) > 0 \quad \text{для всех } k$$

почти всюду в  $\Omega_T$ , а потому

$$\alpha_0(x, t) := \sum_{k=1}^K \alpha_k(x, t) > 0. \quad (157)$$

Следовательно, величины

$$\bar{p}_k(x, t) := \frac{\alpha_k(x, t)}{\alpha_0(x, t)} \quad (158)$$

корректно определены, удовлетворяют

$$\bar{p}_k(x, t) \geq 0, \quad \sum_{k=1}^K \bar{p}_k(x, t) = 1, \quad (159)$$

и могут быть интерпретированы как средние вероятности компонент распределения

$$p(x, t) \sim \text{Dir}(\alpha(x, t)). \quad (160)$$

При этом

$$\mathbb{E}[p_k] = \bar{p}_k, \quad \text{Var}(p_k) = \frac{\bar{p}_k(1 - \bar{p}_k)}{\alpha_0 + 1}. \quad (161)$$

### 5.2. Выбор распределения Дирихле

Распределение Дирихле используется как естественная вероятностная модель для многокомпонентного тканевого состава. Его поддержка совпадает с симплексом вероятностей, все компоненты остаются положительными, а суммарный параметр концентрации  $\alpha_0$  допускает интерпретацию как меры уверенности. Кроме того, явные формулы для средних и дисперсий позволяют непосредственно связать вероятностное описание с аналитическими оценками модели. Такая параметризация согласуется и с неотрицательной инвариантной областью, установленной ранее.

Следует отметить, что распределение Дирихле не является единственно возможным выбором для описания композиционных данных. Однако по сравнению с логистически нормальными и более общими гауссовскими моделями на симплексе [Aitchison, 1986; van den Boogaart, Tolosana-Delgado, 2013] оно дает более прямую связь между переменными состояния и их моментными характеристиками, что делает его удобным именно в рамках рассматриваемой постановки.

## 6. Энтروпийный баланс и устойчивость

### 6.1. Обратимый вспомогательный режим

Рассмотрим вспомогательный вариант матрицы переходов, удовлетворяющий условию детального баланса:

$$\pi_j q_{jk} = \pi_k q_{kj}, \quad \pi_k > 0, \quad \sum_{k=1}^K \pi_k = 1. \quad (162)$$

Так как  $\sum_k \pi_k = 1$  и по условию (11)  $M_k \geq 1$ , автоматически имеем

$$0 < \pi_k \leq 1 \leq M_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (163)$$

Для гладких положительных решений вводится функционал

$$\mathcal{E}[\alpha] := \sum_{k=1}^K \int_{\Omega} \left( \alpha_k \ln \frac{\alpha_k}{\pi_k} - \alpha_k + \pi_k \right) dx. \quad (164)$$

**Предложение 3 (формальный энтروпийный баланс).** Пусть  $\alpha$  — достаточно гладкое и строго положительное решение реакционно-диффузионной системы (2) с однородными условиями Неймана (3), причем матрица переходов  $Q$  удовлетворяет условию детального баланса (162) (то есть рассматривается вспомогательный обратимый режим; для клинической матрицы (12) тождество в общем случае не выполняется, см. замечание 5). Тогда справедливо тождество

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}[\alpha(t)] + \mathcal{D}_{\text{diff}}(t) + \mathcal{D}_{\text{react}}(t) + \mathcal{D}_{\text{sink}}(t) = 0, \quad (165)$$

где

$$\mathcal{D}_{\text{diff}}(t) := \sum_{k=1}^K \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha_k} \mathbf{D}_k(x, \alpha) \nabla \alpha_k \cdot \nabla \alpha_k dx \geq 0, \quad (166)$$

$$\mathcal{D}_{\text{react}}(t) := \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^K \pi_j q_{jk} \int_{\Omega} \left( \frac{\alpha_j}{\pi_j} - \frac{\alpha_k}{\pi_k} \right) \left( \ln \frac{\alpha_j}{\pi_j} - \ln \frac{\alpha_k}{\pi_k} \right) dx \geq 0, \quad (167)$$

$$\mathcal{D}_{\text{sink}}(t) := \sum_{k=1}^K \int_{\Omega} \kappa_k \alpha_k \left( \frac{\alpha_k}{M_k} - 1 \right)^+ \ln \frac{\alpha_k}{\pi_k} dx \geq 0. \quad (168)$$

*Доказательство.* Умножим  $k$ -е уравнение на  $\ln \left( \frac{\alpha_k}{\pi_k} \right)$  и проинтегрируем по  $\Omega$ . После суммирования по  $k$  и использования тождества

$$\frac{d}{dt} \left( \alpha_k \ln \frac{\alpha_k}{\pi_k} - \alpha_k + \pi_k \right) = (\partial_t \alpha_k) \ln \frac{\alpha_k}{\pi_k} \quad (169)$$

получаем

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}[\alpha(t)] = I_{\text{diff}} + I_{\text{react}} + I_{\text{sink}}. \quad (170)$$

Для диффузионного вклада после интегрирования по частям и учета условий Неймана имеем

$$I_{\text{diff}} = - \sum_{k=1}^K \int_{\Omega} \mathbf{D}_k(x, \alpha) \nabla \alpha_k \cdot \nabla \ln \frac{\alpha_k}{\pi_k} dx = - \sum_{k=1}^K \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha_k} \mathbf{D}_k(x, \alpha) \nabla \alpha_k \cdot \nabla \alpha_k dx = -\mathcal{D}_{\text{diff}}. \quad (171)$$

Для реакционного вклада введем обозначения

$$u_k := \frac{\alpha_k}{\pi_k} > 0. \quad (172)$$

Тогда

$$I_{\text{react}} = \sum_{k=1}^K \int_{\Omega} \ln u_k \sum_{j=1}^K q_{jk} \alpha_j dx = \sum_{j,k=1}^K \int_{\Omega} \pi_j q_{jk} u_j \ln u_k dx. \quad (173)$$

Так как по строкам матрицы переходов выполняется  $\sum_k q_{jk} = 0$ , имеем

$$\sum_{j,k=1}^K \pi_j q_{jk} u_j \ln u_j = \sum_{j=1}^K \pi_j u_j \ln u_j \sum_{k=1}^K q_{jk} = 0. \quad (174)$$

Следовательно,

$$I_{\text{react}} = \sum_{j,k=1}^K \pi_j q_{jk} \int_{\Omega} u_j (\ln u_k - \ln u_j) dx. \quad (175)$$

Теперь симметризуем сумму. Используя детальный баланс (162), получаем

$$I_{\text{react}} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^K \pi_j q_{jk} \int_{\Omega} [u_j (\ln u_k - \ln u_j) + u_k (\ln u_j - \ln u_k)] dx. \quad (176)$$

Преобразуя выражение в квадратных скобках, имеем

$$u_j (\ln u_k - \ln u_j) + u_k (\ln u_j - \ln u_k) = -(u_j - u_k) (\ln u_j - \ln u_k).$$

Отсюда

$$I_{\text{react}} = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^K \pi_j q_{jk} \int_{\Omega} (u_j - u_k) (\ln u_j - \ln u_k) dx = -\mathcal{D}_{\text{react}}. \quad (177)$$

Неотрицательность  $\mathcal{D}_{\text{react}}$  следует из монотонности логарифма:

$$(u_j - u_k) (\ln u_j - \ln u_k) \geq 0. \quad (178)$$

Наконец,

$$I_{\text{sink}} = -\sum_{k=1}^K \int_{\Omega} \kappa_k \alpha_k \left( \frac{\alpha_k}{M_k} - 1 \right)^+ \ln \frac{\alpha_k}{\pi_k} dx. \quad (179)$$

Если

$$\left( \frac{\alpha_k}{M_k} - 1 \right)^+ > 0,$$

то  $\alpha_k > M_k \geq 1 \geq \pi_k$ , а значит,

$$\ln \frac{\alpha_k}{\pi_k} \geq 0. \quad (180)$$

Следовательно,

$$I_{\text{sink}} = -\mathcal{D}_{\text{sink}}, \quad \mathcal{D}_{\text{sink}} \geq 0. \quad (181)$$

Подставляя (171), (177) и (181) в (170), получаем (165).  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Предложение 3 относится только к обратимому вспомогательному режиму и не переносится автоматически на клиническую матрицу (12). Связанные энтропийные методы для систем реакции – диффузии обсуждаются, например, в [Mielke, 2011; Desvillettes, Fellner, 2006].

## 6.2. Модовое условие спектральной устойчивости для клинической матрицы

Пусть  $\alpha^*$  — однородный стационар клинической системы. Для линеаризации дополнительно предполагаем, что

$$\alpha_k^* \neq M_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (182)$$

чтобы избежать точки излома у функции стока.

Тогда якобиан реакционной части имеет вид

$$J = Q^\top - \text{diag} \left( \kappa_k \left( \frac{2\alpha_k^*}{M_k} - 1 \right) \mathbf{1}_{\{\alpha_k^* > M_k\}} \right). \quad (183)$$

**Предложение 4 (модовое условие спектральной устойчивости).** Если спектральная абсцисса матрицы  $J$  неположительна, то нулевая пространственная мода спектрально устойчива в линейном приближении. Для ненулевых пространственных мод диагональный диффузионный вклад не увеличивает спектральную абсциссу.

*Доказательство.* Для функции

$$s_k(\alpha_k) = \kappa_k \alpha_k \left( \frac{\alpha_k}{M_k} - 1 \right)^+$$

имеем

$$s'_k(\alpha_k) = \begin{cases} 0, & \alpha_k < M_k, \\ \kappa_k \left( \frac{2\alpha_k}{M_k} - 1 \right), & \alpha_k > M_k. \end{cases} \quad (184)$$

Отсюда следует кусочно-гладкая формула (183). При  $\alpha_k^* = M_k$  обычный якобиан не определен, поэтому такой случай исключен условием (182).

Для пространственной моды с волновым вектором  $\xi$  линейная система имеет вид

$$\dot{v} = (J - B(\xi))v, \quad B(\xi) := \text{diag} \left( \xi^\top \mathbf{D}_k^* \xi \right), \quad (185)$$

где  $\mathbf{D}_k^*$  — тензоры диффузии, замороженные в стационаре. Поскольку  $\mathbf{D}_k^*$  положительно определены, матрица  $B(\xi)$  диагональна и неотрицательна.

Матрица  $J$  является матрицей Метцлера: ее внедиагональные элементы неотрицательны. Для матриц Метцлера спектральная абсцисса монотонна по диагональному сдвигу, поэтому

$$s(J - B(\xi)) \leq s(J). \quad (186)$$

Следовательно, если

$$s(J) \leq 0,$$

то

$$s(J - B(\xi)) \leq 0 \quad \text{для всех } \xi.$$

Это и есть искомое модовое условие. Для общих свойств положительных линейных систем и матриц Метцлера см. [Farina, Rinaldi, 2000].  $\square$

## 7. Дискретизация

### 7.1. Схема расщепления

Используется схема Ли-расщепления:

- 1) реакционный подшаг — явный метод Эйлера;
- 2) диффузионный подшаг — неявная линейная схема.

На реакционном подшаге имеем

$$\alpha_k^{n+1/2} = \alpha_k^n + \Delta t \left( \sum_{j \neq k} q_{jk} \alpha_j^n - q_k^{\text{out}} \alpha_k^n - \kappa_k \alpha_k^n \left( \frac{\alpha_k^n}{M_k} - 1 \right)^+ \right). \quad (187)$$

### 7.2. Положительность реакционного подшага

Пусть на шаге  $n$  известна величина  $\widehat{M}^n > 0$  такая, что

$$0 \leq \alpha_k^n(x_i) \leq \widehat{M}^n \quad \text{для всех узлов } x_i \text{ и всех } k. \quad (188)$$

Определим

$$\widehat{\lambda}_k^n := q_k^{\text{out}} + \kappa_k \left( \frac{\widehat{M}^n}{M_k} - 1 \right)^+, \quad \widehat{\lambda}^n := \max_{1 \leq k \leq K} \widehat{\lambda}_k^n. \quad (189)$$

**Предложение 5.** Пусть на шаге  $n$  выполнено (188). Тогда

- (i) если  $\widehat{\lambda}^n > 0$  и

$$\Delta t \leq \frac{1}{\widehat{\lambda}^n}, \quad (190)$$

то

$$\alpha_k^{n+1/2}(x_i) \geq 0 \quad \text{для всех } i, k; \quad (191)$$

- (ii) если  $\widehat{\lambda}^n = 0$ , то (191) выполнено при любом  $\Delta t > 0$ .

*Доказательство.* Из (188) следует

$$q_k^{\text{out}} + \kappa_k \left( \frac{\alpha_k^n(x_i)}{M_k} - 1 \right)^+ \leq \widehat{\lambda}_k^n. \quad (192)$$

Следовательно,

$$\alpha_k^{n+1/2}(x_i) \geq (1 - \Delta t \widehat{\lambda}_k^n) \alpha_k^n(x_i) + \Delta t \sum_{j \neq k} q_{jk} \alpha_j^n(x_i). \quad (193)$$

*Случай  $\widehat{\lambda}^n > 0$ .* Тогда  $\widehat{\lambda}_k^n \leq \widehat{\lambda}^n$  и при условии (190) имеем  $1 - \Delta t \widehat{\lambda}_k^n \geq 0$ . По знаковым условиям (10) коэффициенты  $q_{jk} \geq 0$  при  $j \neq k$ , а значения  $\alpha_j^n(x_i) \geq 0$  по (188). Значит, все слагаемые в правой части (193) неотрицательны, откуда следует (191).

*Случай  $\widehat{\lambda}^n = 0$ .* Тогда  $\widehat{\lambda}_k^n = 0$  для всех  $k$ , и (193) дает

$$\alpha_k^{n+1/2}(x_i) \geq \alpha_k^n(x_i) + \Delta t \sum_{j \neq k} q_{jk} \alpha_j^n(x_i) \geq 0$$

при любом  $\Delta t > 0$ . Условие (190) в этом случае становится вакуумным, и неотрицательность реакционного подшага достигается без ограничения на временной шаг.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.** Теоретическая априорная оценка леммы 6 дает допустимый, но, как правило, грубый выбор

$$\widehat{M}^n = M_0 e^{q \cdot T} \quad \text{для всех } n. \quad (194)$$

В практических вычислениях естественно использовать более тесный адаптивный верхний барьер.

### 7.3. Диффузионный подшаг

Для пространственной аппроксимации диффузионного оператора используется консервативная конечно-объемная схема. В одномерном случае это стандартная трехдиагональная аппроксимация потоков с гармоническим усреднением коэффициентов на полуузлах. В двумерном случае для выбранного в § 8 поля волокон  $\mathbf{f} = (1, 0)^T$  тензор диффузии остается диагональным,

$$\mathbf{D}_k = \begin{pmatrix} d_k^{(\text{iso})} + d_k^{(\text{aniso})} & 0 \\ 0 & d_k^{(\text{iso})} \end{pmatrix},$$

и используется стандартная пятиточечная конечно-объемная аппроксимация дивергентного оператора с гармоническими коэффициентами на ребрах (см. [Aavatsmark, 2002]).

**Предложение 6.** Если используемая пространственная аппроксимация диффузионного подшага порождает  $M$ -матрицу, то неявный диффузионный подшаг сохраняет неотрицательность.

*Доказательство.* При  $M$ -матричной структуре матрица линейной системы имеет неотрицательную обратную. Поэтому неотрицательность правой части влечет неотрицательность нового слоя.  $\square$

**Замечание 7.** Для конкретных вычислений § 8, где используются диагональный тензор на прямоугольной сетке и пятиточечная конечно-объемная аппроксимация, матрица диффузионного подшага действительно имеет  $M$ -матричную структуру. Тем не менее предложение 6 сохраняется в условной форме: его цель состоит в отделении свойства монотонной пространственной аппроксимации от оценки реакционного подшага.

## 8. Численные эксперименты

### 8.1. Параметры дискретизации и воспроизводимость

Вычисления носят иллюстративный характер; ниже приведены все данные, необходимые для их воспроизведения.

### 8.2. Геометрия, сетки и время

1. Для одномерных расчетов брались область

$$\Omega = (0, 40) \text{ мм},$$

равномерная сетка, базовый шаг по времени

$$\Delta t = \frac{1}{64} \text{ суток},$$

горизонт интегрирования

$$T = 60 \text{ суток}.$$

2. Для двумерного сценария использовались область

$$\Omega = (0, 40) \times (0, 40) \text{ мм}^2$$

и равномерная сетка  $100 \times 100$  с шагом по времени

$$\Delta t = \frac{1}{256} \text{ суток}.$$

3. На реакционном подшаге применялся явный метод Эйлера. На диффузионном подшаге решалась линейная система с замороженными коэффициентами, полученными на предыдущем подшаге.
4. В одномерном случае линейная система решалась методом прогонки. В двумерном случае использовался прямой разреженный решатель.
5. Для таблиц наблюдаемого порядка эталонным считалось решение на сетке

$$N_x^{\text{ref}} = 1600$$

с шагом по времени

$$\Delta t_{\text{ref}} = \frac{1}{1024}$$

при пространственном исследовании и на фиксированной пространственной сетке  $N_x = 1600$  при временном исследовании.

### 8.3. Коэффициенты модели

Во всех численных экспериментах использовались следующие эффективные параметры реакционной части:

$$\begin{aligned} q_{12} = 0,1692, \quad q_{15} = 0,04324, \quad q_{23} = 0,1128, \quad q_{24} = 0,07144, \\ q_{25} = 0,03102, \quad q_{34} = 0,0846, \quad q_{52} = 0,0470, \quad q_{54} = 0,03572; \end{aligned} \quad (195)$$

$$\kappa_1 = 0,35, \quad \kappa_2 = 0,35, \quad \kappa_3 = 0,45, \quad \kappa_4 = 0, \quad \kappa_5 = 0,25; \quad M_k = 8, \quad k = 1, \dots, 5. \quad (196)$$

Параметры диффузии выбирались следующим образом:

$$\begin{aligned} d_1^{(\text{iso})} = 0,30 \text{ мм}^2/\text{сут}, \quad d_2^{(\text{iso})} = 0,24 \text{ мм}^2/\text{сут}, \quad d_3^{(\text{iso})} = 0,18 \text{ мм}^2/\text{сут}, \\ d_4^{(\text{iso})} = 0,16 \text{ мм}^2/\text{сут}, \quad d_5^{(\text{iso})} = 0,22 \text{ мм}^2/\text{сут}; \end{aligned} \quad (197)$$

$$\beta_1 = 0,30, \quad \beta_2 = 0,40, \quad \beta_3 = 0,50, \quad \beta_4 = 0,20, \quad \beta_5 = 0,35; \quad \varepsilon = 10^{-2}. \quad (198)$$

Линейные переходы дополнительно модулировались полем исходного повреждения  $\rho$ :

$$g(\rho) = 0,01 + 0,99\rho^{1,7}. \quad (199)$$

В реакционном подшаге линейная часть применялась к величинам  $g(\rho)\alpha_k$ .

Для калибровки поздней динамики суммарного параметра концентрации использовался дополнительный источник, сонаправленный вектору средних долей  $\bar{p}_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0}$ :

$$C_k(\alpha, \rho) = 0,045 (\alpha_0^*(\bar{p}, \rho) - \alpha_0) \bar{p}_k, \quad (200)$$

где целевой уровень концентрации задавался формулой

$$\alpha_0^*(\bar{p}, \rho) = 7,6 + 15,6S(\bar{p}, \rho); \quad (201)$$

$$\begin{aligned} S(\bar{p}, \rho) = \text{clip}_{[0,1]} \left( 0,07 + 0,55 \sum_{k=1}^5 \bar{p}_k^2 + 0,20(1-\rho)\bar{p}_1 + 0,30\rho\bar{p}_4 + \right. \\ \left. + 0,07\bar{p}_5 + 0,26\rho\bar{p}_4 \sum_{k=1}^5 \bar{p}_k^2 - 0,27(\bar{p}_2 + \bar{p}_3) - 0,04\rho\bar{p}_5 - 0,80\rho(1-\rho) \right). \end{aligned} \quad (202)$$



Формулы (199)–(202) задают вычислительную постановку, использованную в табл. 1, 2 и на рис. 1–3.

Поле волокон во всех вычислениях полагалось постоянным:

$$\mathbf{f}(x) \equiv 1 \text{ в } 1D, \quad \mathbf{f}(x, y) \equiv (1, 0)^T \text{ в } 2D. \quad (203)$$

В двумерном случае анизотропия ориентирована вдоль оси  $x$ .

В численном блоке динамика суммарного параметра концентрации  $\alpha_0$  дополнительно калибровалась через локальный релаксационный сценарий, зависящий от текущей смеси тканевых состояний и поля исходного повреждения. Этот шаг использовался для согласования качественных сценариев ремоделирования и интерпретации переходных зон; аналитические утверждения предыдущих разделов относятся к базовой системе.

#### 8.4. Начальные данные

Для одномерного сценария вводилась гладкая очаговая функция

$$\chi(x) := \exp\left(-\frac{(x-20)^2}{2\sigma_1^2}\right), \quad \sigma_1 = 4. \quad (204)$$

Начальные данные задавались формулами

$$\alpha_1^0(x) = 7 - 6\chi(x), \quad \alpha_2^0(x) = 1 + 2\chi(x), \quad \alpha_3^0(x) = 1 + 4\chi(x), \quad (205)$$

$$\alpha_4^0(x) = 1, \quad \alpha_5^0(x) = 1. \quad (206)$$

Тогда

$$\alpha_0^0(x) = \sum_{k=1}^5 \alpha_k^0(x) \equiv 11. \quad (207)$$

Для двумерного сценария использовалась радиально-симметричная функция

$$\rho(x, y) := \exp\left(-\frac{(x-20)^2 + (y-20)^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad \sigma_2 = 5. \quad (208)$$

Начальные данные задавались формулами

$$\alpha_1^0(x, y) = 7 - 5\rho(x, y), \quad \alpha_2^0(x, y) = 1 + 1,5\rho(x, y), \quad \alpha_3^0(x, y) = 1 + 2,5\rho(x, y), \quad (209)$$

$$\alpha_4^0(x, y) = 1, \quad \alpha_5^0(x, y) = 1 + \rho(x, y), \quad (210)$$

и вновь

$$\alpha_0^0(x, y) \equiv 11. \quad (211)$$

#### 8.5. Пространственная аппроксимация

В одномерном случае диффузионный оператор аппроксимировался конечно-объемной схемой

$$(\mathcal{L}_h \alpha_k)_i = \frac{1}{h} \left( D_{k,i+1/2} \frac{\alpha_{k,i+1} - \alpha_{k,i}}{h} - D_{k,i-1/2} \frac{\alpha_{k,i} - \alpha_{k,i-1}}{h} \right), \quad (212)$$

где коэффициенты на полуузлах вычислялись гармоническим усреднением.

В двумерном случае, поскольку при выборе (203) тензор остается диагональным, использовалась пятиточечная конечно-объемная схема

$$(\mathcal{L}_h \alpha_k)_{i,j} = \frac{1}{h_x} \left( D_{xx,i+1/2,j} \frac{\alpha_{k,i+1,j} - \alpha_{k,i,j}}{h_x} - D_{xx,i-1/2,j} \frac{\alpha_{k,i,j} - \alpha_{k,i-1,j}}{h_x} \right) + \\ + \frac{1}{h_y} \left( D_{yy,i,j+1/2} \frac{\alpha_{k,i,j+1} - \alpha_{k,i,j}}{h_y} - D_{yy,i,j-1/2} \frac{\alpha_{k,i,j} - \alpha_{k,i,j-1}}{h_y} \right), \quad (213)$$

где

$$D_{xx} = d_k^{(\text{iso})} + d_k^{(\text{aniso})}, \quad D_{yy} = d_k^{(\text{iso})},$$

а коэффициенты на ребрах также вычислялись гармоническим усреднением.

### 8.6. Апостериорная проверка условия положительности

Теоретический барьер леммы 6 имеет вид

$$M_T^{\text{th}} = M_0 e^{q_* T}. \quad (214)$$

При параметрах (195)–(196) он оказывается заведомо грубым. Поэтому в вычислительной части используется адаптивный верхний барьер

$$\widehat{M}^n := \max_{i,k} \alpha_k^n(x_i) \text{ в } 1D, \quad \widehat{M}^n := \max_{i,j,k} \alpha_{k,i,j}^n \text{ в } 2D. \quad (215)$$

Кроме того,

$$\alpha_k^n \leq \alpha_0^n := \sum_{k=1}^K \alpha_k^n. \quad (216)$$

На вычисленной траектории наблюдалось ограничение порядка

$$\max_n \widehat{M}^n \lesssim 16. \quad (217)$$

Это дает представление о практически реализуемом масштабе величины

$$\widehat{\lambda}^n = \max_k \left[ q_k^{\text{out}} + \kappa_k \left( \frac{\widehat{M}^n}{M_k} - 1 \right)^+ \right]. \quad (218)$$

Строгая априорная гарантия выполнения условия (190) на данных параметрах через барьер (214) выходит за рамки настоящей работы.

### 8.7. Одномерный сценарий острого ремоделирования

Ниже приведены значения вероятностей тканевых состояний и суммарного параметра концентрации  $\alpha_0$  в центре начального очага  $x = 20$  мм для сценария ремоделирования на интервале 60 дней. Пространственные средние по полосе повреждения  $x \in [14, 26]$  мм показаны на рис. 1.

Наблюдаются убывание долей воспалительного инфильтрата и некроза, а также рост доли замещающего фиброза. Параметр  $\alpha_0$  в центре очага на ранней стадии слегка уменьшается, после чего возрастает до  $\approx 15,9$  к 60-м суткам, что интерпретируется как снижение неопределенности по мере созревания рубцовой структуры. Пространственно-временная картина этой эволюции представлена на рис. 1.

Рисунок 1 иллюстрирует расчет в калиброванной вычислительной версии при  $N_x = 600$ ,  $\Delta t = \frac{1}{64}$  сут и  $T = 60$  сут. На панелях (а)–(д) показаны пространственные профили средних вероятностей  $\bar{p}_k(x, t)$  в моменты  $t = 0, 7, 14, 30, 60$  сут; серая полоса обозначает зону начального

## Локальная диагностика одномерной модели

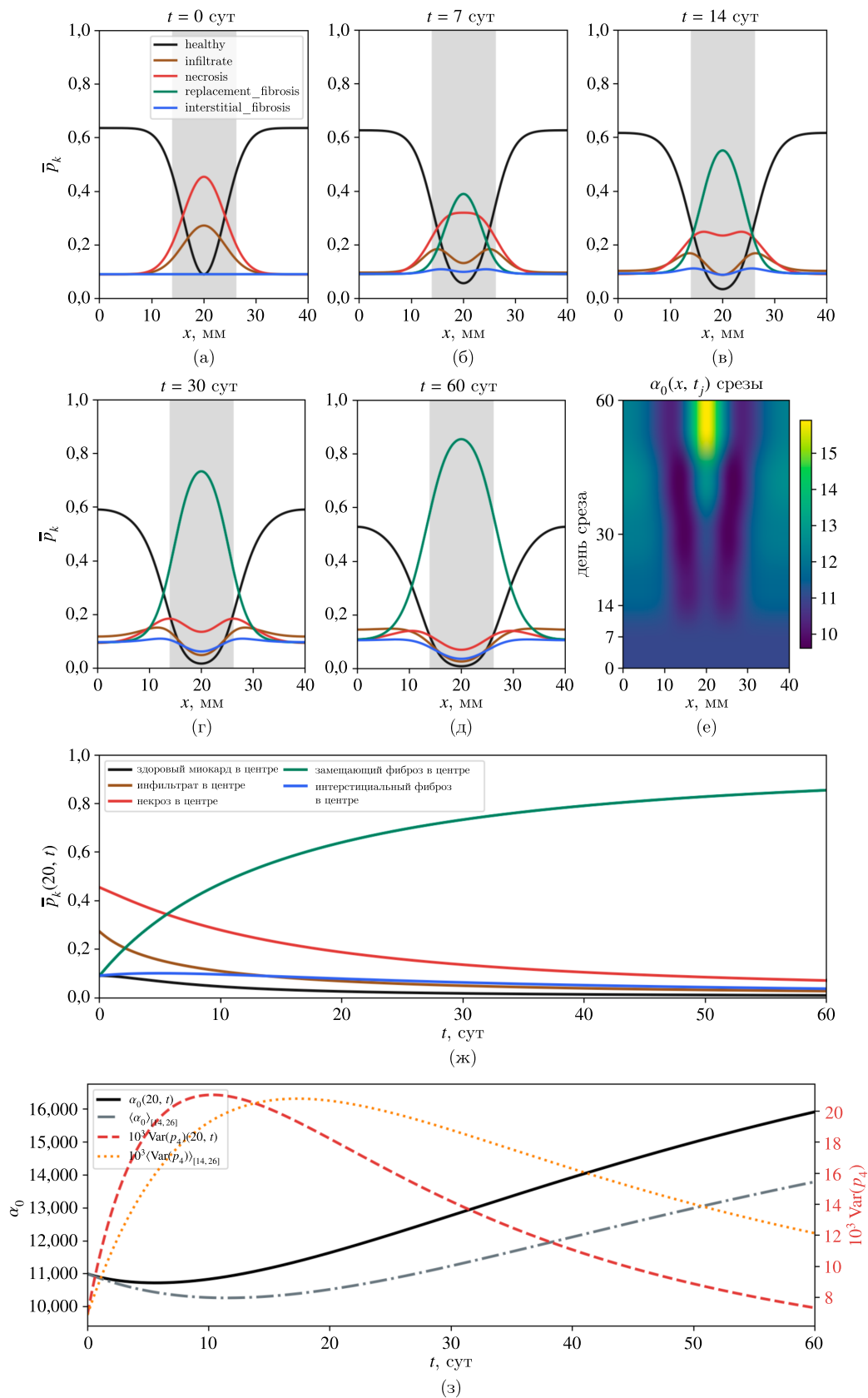


Рис. 1. Одномерный сценарий острого постинфарктного ремоделирования

Таблица 1. Одномерный сценарий в центре очага. Значения вероятностей тканевых состояний и суммарного параметра концентрации в точке  $x = 20$  мм

| $t$ , дни | $\bar{p}_1$ | $\bar{p}_2$ | $\bar{p}_3$ | $\bar{p}_4$ | $\bar{p}_5$ | $\alpha_0$ |
|-----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|
| 0         | 0,091       | 0,273       | 0,455       | 0,091       | 0,091       | 11,0       |
| 7         | 0,058       | 0,133       | 0,320       | 0,390       | 0,100       | 10,7       |
| 14        | 0,035       | 0,088       | 0,235       | 0,552       | 0,089       | 11,1       |
| 30        | 0,018       | 0,050       | 0,136       | 0,734       | 0,063       | 12,8       |
| 60        | 0,009       | 0,027       | 0,071       | 0,855       | 0,037       | 15,9       |

повреждения  $x \in [14, 26]$  мм. Панель (е) показывает снимки суммарного параметра концентрации  $\alpha_0(x, t_j)$ ; к 60-м суткам в центре очага достигается значение  $\approx 15,9$ . На панелях (ж), (з) показаны эволюция  $\bar{p}_k(20, t)$  в центре очага и совместная динамика  $\alpha_0(20, t)$ , среднего  $\langle \alpha_0 \rangle_{[14, 26]}$  по полосе повреждения, а также величин  $\text{Var}(p_4)(20, t)$  и  $\langle \text{Var}(p_4) \rangle_{[14, 26]}$ . Немонотонность  $\text{Var}(p_4)$  отражает прохождение ткани через промежуточные смешанные состояния, тогда как поздний рост  $\alpha_0$  фиксирует стабилизацию рубца.

### 8.8. Двумерная переходная зона

Для двумерного сценария на момент  $t = 14$  дней используются три зоны, выделенные по начальному полю  $\rho(x, y)$  из (208):

$$\Omega_{\text{core}} := \{(x, y) \in \Omega: \rho(x, y) \geq 0,7\}, \quad (219)$$

$$\Omega_{\text{trans}} := \{(x, y) \in \Omega: 0,2 \leq \rho(x, y) < 0,7\}, \quad \Omega_{\text{healthy}} := \{(x, y) \in \Omega: \rho(x, y) < 0,2\}. \quad (220)$$

Для любой измеримой области  $E \subset \Omega$  обозначим

$$\langle g \rangle_E := \frac{1}{|E|} \int_E g(x, y) dx dy.$$

Таблица 2 содержит значения  $\langle \bar{p}_4 \rangle_E$ ,  $\langle \text{Var}(p_4) \rangle_E$  и  $\langle \alpha_0 \rangle_E$  на момент  $t = 14$  суток для этих трех областей.

Таблица 2. Двумерный сценарий в различных зонах. Осредненные значения  $\bar{p}_4$ ,  $\text{Var}(p_4)$  и  $\alpha_0$  на 14-е сутки

| Зона       | $\langle \bar{p}_4 \rangle_E$ | $\langle \text{Var}(p_4) \rangle_E$ | $\langle \alpha_0 \rangle_E$ |
|------------|-------------------------------|-------------------------------------|------------------------------|
| Ядро       | 0,431                         | 0,021                               | 10,3                         |
| Переходная | 0,211                         | 0,015                               | 9,9                          |
| Здоровая   | 0,097                         | 0,007                               | 11,9                         |

Минимальный суммарный параметр концентрации  $\alpha_0$  наблюдается в переходной зоне, тогда как величина  $\text{Var}(p_4)$  максимальна в ядре повреждения и прилегающей к нему области, где доля рубцовой компоненты уже велика. Поэтому в зоновой интерпретации неопределенности ниже основным индикатором служит поле  $\alpha_0$ , а  $\text{Var}(p_4)$  рассматривается как компонентная характеристика распределения  $\bar{p}_4$ . Пространственная структура полей  $\bar{p}_4$ ,  $\text{Var}(p_4)$  и  $\alpha_0$  в момент  $t = 14$  сут иллюстрирована на рис. 2.

Для двумерного случая расчет в области  $\Omega = (0, 40)^2$  мм<sup>2</sup> на сетке  $100 \times 100$  при поле волокон  $\mathbf{f} = (1, 0)^T$ , соответствующем анизотропии вдоль оси  $x$ , приведен на рис. 2. Стрелка у нижнего края панелей указывает направление  $\mathbf{f}$ ; пунктирная окружность радиусом 5 мм соответствует исходному очагу, сплошная окружность ограничивает переходную область. Панель (а) показывает поле доли замещающего фиброза  $\bar{p}_4(x, y)$ , панель (б) — поле  $\text{Var}(p_4)(x, y)$ ,

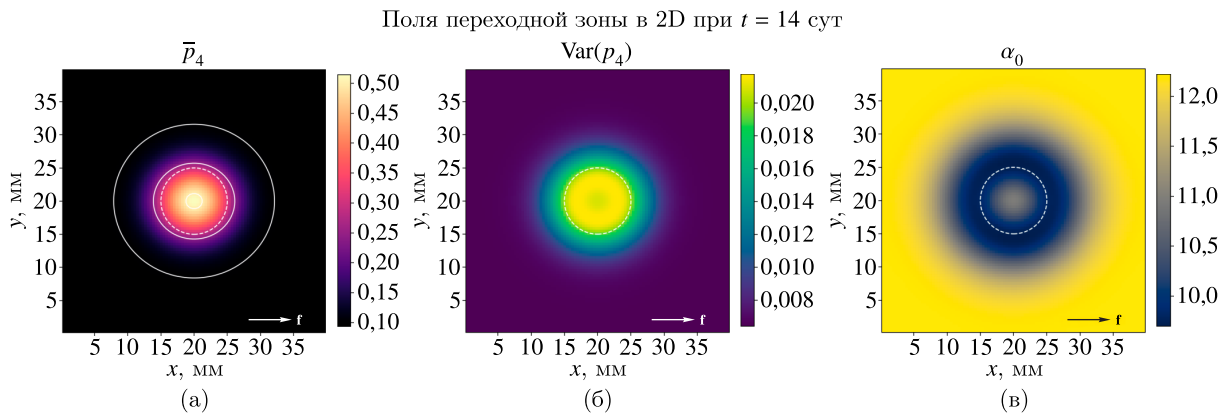


Рис. 2. Двумерные поля на 14-е сутки

панель (в) — суммарный параметр концентрации  $\alpha_0(x, y)$ . Наибольшие значения  $\bar{p}_4$  локализованы в ядре поражения, тогда как пониженные значения  $\alpha_0$  формируют выраженную переходную зону между ядром и здоровой тканью.

Количественные сечения, характеризующие анизотропию диффузии на 14-е сутки, собраны на рис. 3. Панель (а) содержит сечения поля  $\bar{p}_4$  через центр области вдоль волокон ( $y = 20$  мм, красный) и поперек волокон ( $x = 20$  мм, синий). Панель (б) показывает аналогичные сечения для  $\text{Var}(p_4) \cdot 10^3$ . Панель (в) содержит профили всех пяти компонент  $\bar{p}_k(x, y = 20)$  вдоль направления волокон. Неравенство полуширин  $\Delta x_{1/2} > \Delta y_{1/2}$  указывает на большее продольное распространение фиброза, а анизотропия сохраняется и в компонентной дисперсии.

### 8.9. Таблицы наблюдаемого порядка

Для проверки сходимости использовался специально построенный гладкий тест с точным решением, не совпадающий с клиническими сценариями подпараграфов 8.7–8.8. Рассматривалась одномерная вспомогательная задача для компоненты  $\alpha_3$  с замороженным коэффициентом диффузии  $\mathbf{D}_3 \equiv d_3^{(\text{iso})}$ , выключенной реакцией и искусственно подобранной правой частью, обеспечивающей точное решение

$$\alpha_3^{\text{ex}}(x, t) = 1 + 0,2 \cos\left(\frac{\pi x}{40}\right) e^{-t}, \quad (x, t) \in (0, 40) \times [0, 1]. \quad (221)$$

Однородные условия Неймана согласованы с этой формулой. Ошибка вычислялась для компоненты  $\alpha_3$  в норме  $L^2(\Omega)$  в момент времени  $T = 1$  относительно точного решения (221). При исследовании пространственного порядка временной шаг выбирался достаточно малым.

Таблица 3. Пространственное измельчение. Ошибка в норме  $L^2(\Omega)$  для гладкого теста с точным решением

| $N_x$ | $h$  | Ошибка               | Наблюдаемый порядок |
|-------|------|----------------------|---------------------|
| 100   | 0,40 | $3,58 \cdot 10^{-2}$ | 1,99                |
| 200   | 0,20 | $8,97 \cdot 10^{-3}$ | 2,00                |
| 400   | 0,10 | $2,24 \cdot 10^{-3}$ | 2,00                |

Таблица 4. Временное измельчение. Ошибка в норме  $L^2(\Omega)$  для гладкого теста с точным решением

| $\Delta t$ | Ошибка               | Наблюдаемый порядок |
|------------|----------------------|---------------------|
| 0,5        | $3,96 \cdot 10^{-2}$ | 0,99                |
| 0,25       | $1,99 \cdot 10^{-2}$ | 0,99                |
| 0,125      | $9,98 \cdot 10^{-3}$ | 1,00                |

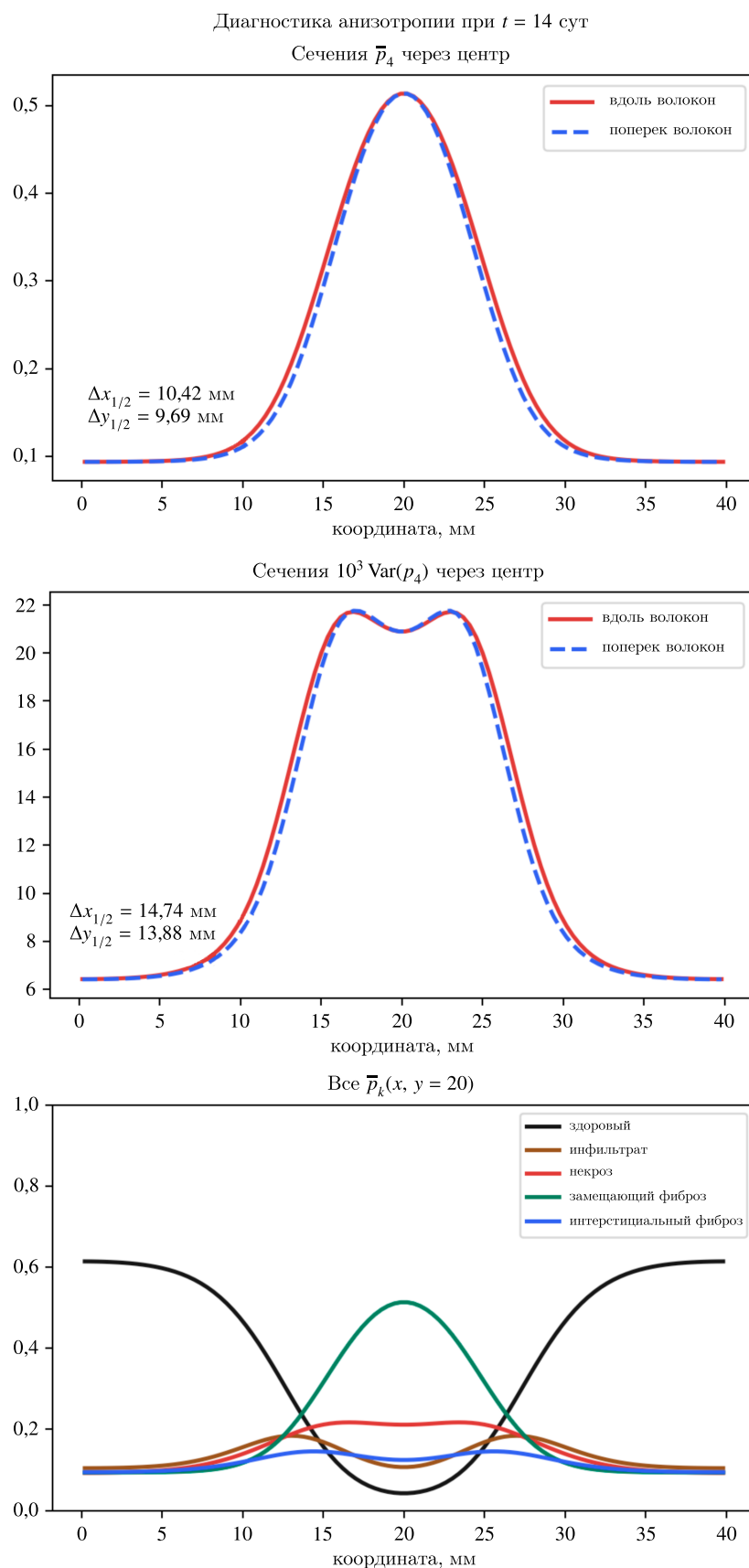


Рис. 3. Количественная демонстрация анизотропии диффузии

Почти целочисленный характер наблюдаемых порядков связан с тем, что расчет проводился на гладком тесте с точным решением (221) в асимптотическом режиме сходимости.

### **8.10. О негладких начальных данных**

Наблюдаемый второй пространственный порядок, приведенный в таблицах 3–4, относится именно к гладкому тесту с точным решением (221). В клинически мотивированных задачах начальные данные, как правило, имеют резкие переходы между зонами ткани. В этом случае на ранних временах второй порядок по пространству в общем случае не следует ожидать и таблицы данного раздела не должны интерпретироваться как универсальная характеристика порядка схемы для негладких профилей. Их смысл состоит в демонстрации того, что на гладком тесте базовая дискретизация ведет себя согласованно с ожидаемым порядком.

## **9. Результаты**

### **9.1. Аналитические результаты**

Центральный аналитический результат связан с построением глобального слабого решения системы (2)–(3), которое сохраняет физически допустимую область состояний на всем рассматриваемом промежутке времени. Для этого сначала рассматривается усеченная постановка (35): на ее уровне локальное существование получается методом неподвижной точки Шаудера, после чего решение продолжается по времени с опорой на априорные барьерные оценки. Переход к исходной системе оказывается корректным, поскольку на построенном решении усеченная и исходная задачи совпадают.

С точки зрения интерпретации модели теорема 2 доказывает три ключевых свойства:

- 1) каждая концентрационная переменная  $\alpha_k$  остается неотрицательной;
- 2) суммарный масштаб компонент остается ограниченным на любом конечном временном интервале;
- 3) для каждой компоненты сохраняется явная положительная нижняя оценка, зависящая только от начальных данных и структурных параметров.

Иначе говоря, эволюция не выводит систему за пределы естественной области допустимых концентраций, а вероятностная интерпретация через параметры распределения Дирихле сохраняет содержательный смысл на всем промежутке наблюдения.

Теорема 3 дополняет эту картину результатом о единственности в усиленном классе, где предполагается дополнительная регулярность градиентов. В таком режиме работает стандартный энергетический аргумент, позволяющий сравнивать решения и получать однозначность динамики. Этот результат естественно сочетается с уже полученными априорными оценками и задает тот уровень регулярности, на котором задача допускает строгую теорему единственности.

Еще один важный структурный результат дает предложение 3. Для обратимого вспомогательного режима удастся выписать энтропийный баланс, в котором диссипация распадается на три неотрицательных вклада — диффузионный, реакционный и стоковый. В клинической необратимой постановке на первый план выходит модовый спектральный анализ: предложение 4 связывает линейную устойчивость однородного режима со спектральными свойствами реакционного якобиана и с воздействием диффузионного сдвига на пространственные моды.



## 9.2. Вычислительные результаты

Численные эксперименты показывают, что схема расщепления согласуется с аналитическими ограничениями модели. Предложение 5 задает достаточное условие положительности реакционного подшага через адаптивный верхний барьер, а предложение 6 выделяет роль монотонной пространственной аппроксимации в сохранении неотрицательности на диффузионном подшаге.

В одномерном сценарии (табл. 1 и рис. 1) воспроизводится характерная последовательность стадий постинфарктного ремоделирования: доли воспалительного инфильтрата и некроза уменьшаются, тогда как доля замещающего фиброза возрастает. При этом суммарный параметр концентрации  $\alpha_0$  после начального переходного этапа начинает расти. Такая динамика естественно читается как уменьшение неопределенности в распределении тканевых состояний по мере того, как структура пораженного участка становится более устойчивой.

В двумерном сценарии (табл. 2 и рис. 2) переходная зона отчетливо выделяется по пониженным значениям  $\alpha_0$ . Величина  $\text{Var}(p_4)$ , напротив, достигает максимума в ядре повреждения и в прилегающей к нему области. Поэтому поле  $\alpha_0$  оказывается удобным интегральным индикатором степени определенности локального тканевого состава, тогда как  $\text{Var}(p_4)$  дает дополнительную компонентную характеристику распределения рубцовой доли. Рисунок 3 показывает, что анизотропия диффузионного тензора отражается не только в пространственном распределении рубцовой компоненты, но и в форме переходной области.

Таблицы наблюдаемого порядка (табл. 3 и 4) демонстрируют второй порядок по пространству и первый порядок по времени на гладком тесте с точным решением (221). Эти данные согласуются с используемой дискретизацией и подтверждают, что схема в регулярном режиме воспроизводит ожидаемое асимптотическое поведение. Численный блок, таким образом, поддерживает и качественную интерпретацию модельных сценариев, и базовую проверку вычислительной согласованности.

## 9.3. Согласованность аналитического и вычислительного блоков

Аналитическая часть фиксирует инвариантную область, априорные барьерные оценки и корректность постановки. Численный блок подтверждает эти свойства на конкретных сценариях эволюции. В расчетах сохраняется неотрицательность компонент, траектории остаются в пределах допустимой области состояний, а переходные зоны воспроизводятся как области пониженного уровня  $\alpha_0$  и смешанного тканевого состава. Таким образом, вычислительные результаты согласуются с аналитическими выводами и подтверждают вероятностную интерпретацию модели.

Таким образом, численные эксперименты подтверждают связь доказанных свойств системы с эволюцией миокарда.

# 10. Обсуждение

## 10.1. Интерпретация модели и ее места среди существующих подходов

Рассматриваемая модель занимает естественное место между классическими реакционно-диффузионными системами, описывающими пространственную эволюцию нескольких состояний, и вероятностными моделями композиционных данных на симплексе. В отличие от фазово-полевых и бидоменных подходов основной переменной здесь служит вектор параметров распределения Дирихле. За счет этого удается описывать не только преобладающее тканевое состояние, но и степень уверенности в его локальной идентификации через суммарный параметр концентрации.



Такой способ описания особенно важен для переходных зон. Именно эти области обычно оказываются наиболее сложными и с морфологической точки зрения, и с точки зрения возможной аритмогенности. В рамках рассматриваемой постановки переходная зона предстает не как резкая граница между фиксированными фазами, а как область смешанного состава с измененным уровнем концентрации  $\alpha_0$ . Численные результаты § 9 хорошо согласуются с такой интерпретацией и подчеркивают информативность вероятностной параметризации.

Отдельно стоит сопоставить рассматриваемую модель с биокинетическим направлением, развиваемым в работах [Воропаева, Цгоев, 2023а; Воропаева, Цгоев, 2024а; Цгоев, 2026b]. Там моделируется именно острая воспалительная фаза инфаркта, переменными состояниями служат биохимические величины (плотности кардиомиоцитов, моноцитов и фенотипов макрофагов, концентрации цитокинов), реакционный оператор строится на основе закона действующих масс и кинетики Хилла, а диффузия включается только для цитокинов с постоянными коэффициентами. Возникающее в таких моделях демаркационное воспаление и связанные с ним пространственные структуры близки по содержательному смыслу к понятию переходной зоны, но механизм ее формирования объясняется иначе: через волновую динамику популяционных и концентрационных полей. В настоящей работе анализируется более поздняя фаза, когда воспалительный каскад в основном завершен, а тканевый состав описывается не биохимическими концентрациями, а композиционными долями с явной вероятностной интерпретацией. Эти два направления, таким образом, не конкурируют, а описывают разные стадии единого процесса постинфарктного ремоделирования и используют разные классы переменных состояния.

### ***10.2. Статус математических результатов и уровень новизны***

Полученные теоремы охватывают глобальное существование слабого решения, инвариантность допустимой области и единственность в усиленном классе регулярности. В совокупности это образует строгое аналитическое ядро работы и обеспечивает корректность базовой постановки на уровне, достаточном для содержательной интерпретации модели и для дальнейшего развития вычислительного блока.

Новизна работы связана прежде всего с самой постановкой задачи. Используемые доказательные инструменты — усечение, барьерные функции, метод неподвижной точки Шаудера, стандартные энергетические оценки и энтропийная симметризация при детальном балансе — представляют собой устойчивый аппарат теории систем реакции – диффузии [Pao, 1992; Smoller, 1994; Mielke, 2011; Desvillettes, Fellner, 2006]. Существенным здесь является другое: этот аппарат адаптирован к многокомпонентной модели ремоделирования миокарда, в которой состояние ткани задается параметрами распределения Дирихле и потому получает одновременно композиционную и вероятностную интерпретацию.

Дополнительный интерес представляет разделение режимов. Для обратимого вспомогательного варианта удастся выделить энтропийный баланс, тогда как для клинически мотивированной необратимой матрицы переходов более естественным оказывается спектральный анализ линеаризации. Такое сочетание делает модель гибкой: она допускает и строгие аналитические результаты, и дальнейшее развитие в сторону более тонких структурных свойств.

### ***10.3. Калибровка, ограничения и перспективы***

С прикладной точки зрения модель носит феноменологический характер и ориентирована на описание качественной топологии постинфарктного ремоделирования. Коэффициенты переходов  $q_{jk}$  играют роль эффективных параметров, отражающих характерные направления эволюции тканевых состояний. Такая постановка удобна для анализа типовых сценариев и для того, чтобы проследить связь между структурой переходов, пространственной анизотропией и вероятностным описанием состава ткани.

Численный блок ориентирован на воспроизводимую демонстрацию характерных режимов динамики и на проверку согласованности схемы с аналитическими оценками. Он показывает, что модель способна описывать формирование рубцовой компоненты, пространственное выделение переходной области и влияние анизотропии на геометрию распространения повреждения. Следующий естественный шаг состоит в расширении параметрического анализа, переходе к пациент-специфическим геометриям и постановке задач идентификации по данным визуализации.

С математической точки зрения наиболее перспективными направлениями остаются:

- 1) исследование единственности в более широких и естественных классах регулярности;
- 2) анализ энтропийных или градиентных структур для необратимых матриц переходов;
- 3) получение априорных оценок для более общих анизотропных тензоров диффузии;
- 4) развитие обратных задач идентификации параметров по клиническим данным.

В этом смысле предложенная постановка задает содержательную теоретическую основу для дальнейших аналитических, вычислительных и прикладных расширений. Ее сильная сторона состоит в том, что многокомпонентная реакция – диффузия, вероятностная интерпретация состава ткани и прозрачная аналитическая схема здесь работают в единой конструкции.

## 11. Заключение

Предложена многокомпонентная реакционно-диффузионная модель ремоделирования миокарда в терминах параметров распределения Дирихле. Для конкретного диффузионного тензора явно проверены структурные гипотезы равномерной эллиптичности и локальной липшицевости. В рамках анализа расширенного реакционного оператора установлены квазиположительность, односторонние оценки, локальная липшицевость и баланс реакций. Для усеченной системы доказаны локальное и глобальное существование слабого решения, неотрицательность, наличие верхнего барьера и количественная нижняя экспоненциальная оценка. Из инвариантности допустимой области вытекает существование глобального слабого решения исходной системы.

Единственность установлена в усиленном классе решений, задаваемом дополнительной регулярностью градиентов. Кроме того, для обратимого вспомогательного режима получен энтропийный баланс для гладких положительных решений, а для клинической необратимой матрицы переходов сформулировано модовое условие спектральной устойчивости линеаризации. На этапе дискретизации выведено условие положительности реакционного подшага схемы расщепления относительно адаптивного верхнего барьера траектории. Численные эксперименты представлены в воспроизводимой калиброванной версии с полным указанием параметров и дополнены визуализацией одномерного и двумерного сценариев.

В совокупности аналитические и вычислительные результаты показывают, что предложенная модель допускает математически корректную постановку, сохраняет естественные ограничения на переменные состояния и вместе с тем дает интерпретируемое описание переходных зон повреждения миокарда. На этой основе открывается возможность дальнейшего развития подхода в задачах параметрической идентификации, исследования более сильной регулярности решений, учета сложной анизотропии и перехода к данным клинической визуализации.

## Список литературы (References)

- Воропаева О. Ф., Цгоев Ч. А. Численное моделирование инфаркта миокарда. I. Анализ пространственно-временных аспектов развития местной воспалительной реакции // Математическая биология и биоинформатика. — 2023. — Т. 18, № 1. — С. 49–71. — DOI: 10.17537/2023.18.49
- Voropaeva O. F., Tsgoev Ch. A. Chislennoe modelirovanie infarkta miokarda. I. Analiz prostranstvenno-vremennykh aspektov razvitiya mestnoi vospalitel'noi reaktsii [Numerical modeling of myocardial infarction. I. Analysis of spatio-temporal aspects of local inflammatory response development] // Mathematical Biology and Bioinformatics. — 2023. — Vol. 18, No. 1. — P. 49–71 (in Russian). — DOI: 10.17537/2023.18.49
- Воропаева О. Ф., Цгоев Ч. А. Численное моделирование инфаркта миокарда. II. Анализ механизма поляризации макрофагов как терапевтической мишени // Математическая биология и биоинформатика. — 2023. — Т. 18, № 2. — С. 367–404. — DOI: 10.17537/2023.18.367
- Voropaeva O. F., Tsgoev Ch. A. Chislennoe modelirovanie infarkta miokarda. II. Analiz mekhanizma polarizatsii makrofagov kak terapevticheskoi misheni [Numerical modeling of myocardial infarction. II. Analysis of the macrophage polarization mechanism as a therapeutic target] // Mathematical Biology and Bioinformatics. — 2023. — Vol. 18, No. 2. — P. 367–404 (in Russian). — DOI: 10.17537/2023.18.367
- Воропаева О. Ф., Цгоев Ч. А. Численное моделирование инфаркта миокарда при многососудистом поражении коронарного русла. I. Анализ некоторых модельных сценариев // Математическая биология и биоинформатика. — 2024. — Т. 19, № 1. — С. 183–211. — DOI: 10.17537/2024.19.183
- Voropaeva O. F., Tsgoev Ch. A. Chislennoe modelirovanie infarkta miokarda pri mnogososudistom porazhenii koronarnogo rusla. I. Analiz nekotorykh model'nykh stsensariiev [Numerical simulation of myocardial infarction in multivessel coronary lesion. I. Analysis of some model scenarios] // Mathematical Biology and Bioinformatics. — 2024. — Vol. 19, No. 1. — P. 183–211 (in Russian). — DOI: 10.17537/2024.19.183
- Воропаева О. Ф., Цгоев Ч. А. Численное моделирование инфаркта миокарда при многососудистом поражении коронарного русла. II. Закономерности формирования крупного очага повреждения и структурообразования // Математическая биология и биоинформатика. — 2024. — Т. 19, № 2. — С. 497–532. — DOI: 10.17537/2024.19.497
- Voropaeva O. F., Tsgoev Ch. A. Chislennoe modelirovanie infarkta miokarda pri mnogososudistom porazhenii koronarnogo rusla. II. Zakonomernosti formirovaniya krupnogo ochaga povrezhdeniya i strukturoobrazovaniya [Numerical simulation of myocardial infarction in multivessel coronary lesion. II. Patterns of large-scale lesion formation and structurization] // Mathematical Biology and Bioinformatics. — 2024. — Vol. 19, No. 2. — P. 497–532 (in Russian). — DOI: 10.17537/2024.19.497
- Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
- Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N. Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. — Moscow: Nauka, 1967 (in Russian).
- Цгоев Ч. А. Математическое моделирование воспалительной фазы инфаркта миокарда: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 1.2.2. — Новосибирск: ФИЦ ИВТ, 2026а. — 16 с.
- Tsgoev Ch. A. Matematicheskoe modelirovanie vospalitel'noi fazy infarkta miokarda [Mathematical modeling of the inflammatory phase of myocardial infarction]: PhD thesis abstract, 1.2.2. — Novosibirsk: FRC ICT, 2026a (in Russian).
- Цгоев Ч. А. Математическое моделирование воспалительной фазы инфаркта миокарда: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 1.2.2. — Новосибирск: ФИЦ ИВТ, 2026b. — 246 с. — <https://icmmg.nsc.ru/ru/content/dissertation-council-meetings/cgoev-chermen-alanovich>
- Tsgoev Ch. A. Matematicheskoe modelirovanie vospalitel'noi fazy infarkta miokarda [Mathematical modeling of the inflammatory phase of myocardial infarction]: PhD thesis, 1.2.2. — Novosibirsk: FRC ICT, 2026b (in Russian).
- Aavatsmark I. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids // Comput. Geosci. — 2002. — Vol. 6, No. 3–4. — P. 405–432. — DOI: 10.1023/A:1021291114475
- Aitchison J. The Statistical analysis of compositional data. — London: Chapman and Hall, 1986.
- Allen S. M., Cahn J. W. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening // Acta Metall. — 1979. — Vol. 27. — P. 1085–1095. — DOI: 10.1016/0001-6160(79)90196-2
- Cahn J. W., Hilliard J. E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. — 1958. — Vol. 28, No. 2. — P. 258–267. — DOI: 10.1063/1.1744102
- Cleutjens J. P. M., Blankesteijn W. M., Daemen M. J. A. P., Smits J. F. M. The infarcted myocardium: simply dead tissue, or a lively target for therapeutic interventions // Cardiovasc Res. — 1999. — Vol. 44, No. 2. — P. 232–241. — DOI: 10.1016/S0008-6363(99)00212-6

- Cristini V., Li X., Lowengrub J. S., Wise S. M.* Nonlinear simulations of solid tumor growth using a mixture model: invasion and branching // *J. Math. Biol.* — 2009. — Vol. 58, No. 4–5. — P. 723–763. — DOI: 10.1007/s00285-008-0215-x
- De Jong S., van Veen T. A. B., de Bakker J. M. T., Vos M. A., van Rijen H. V. M.* Biomarkers of myocardial fibrosis // *J. Cardiovasc. Pharmacol.* — 2011. — Vol. 57, No. 5. — P. 522–535. — DOI: 10.1097/FJC.0b013e31821823d9
- Desvillettes L., Fellner K.* Exponential decay toward equilibrium via entropy methods for reaction-diffusion equations // *J. Math. Anal. Appl.* — 2006. — Vol. 319, No. 1. — P. 157–176. — DOI: 10.1016/j.jmaa.2005.05.041
- Evans L. C.* Partial differential equations. — 2nd ed. — Providence, RI: American Mathematical Society, 2010.
- Farina L., Rinaldi S.* Positive linear systems: theory and applications. — New York: Wiley, 2000.
- Ferguson T. S.* A Bayesian analysis of some nonparametric problems // *Ann. Statist.* — 1973. — Vol. 1, No. 2. — P. 209–230. — DOI: 10.1214/aos/1176342360
- Frangogiannis N. G.* Pathophysiology of myocardial infarction // *Compr. Physiol.* — 2015. — Vol. 5, No. 4. — P. 1841–1875. — DOI: 10.1002/cphy.c150006
- Frigyik B. A., Kapila A., Gupta M. R.* Introduction to the Dirichlet distribution and related processes. — UWEE Technical Report UWEETR-2010-0006. — University of Washington, 2010.
- Guccione J. M., Moonly S. M., Moustakidis P., Costa K. D., Moulton M. J., Ratcliffe M. B., Pasque M. K.* Mechanism underlying mechanical dysfunction in the border zone of left ventricular aneurysm: a finite element model study // *Ann. Thorac. Surg.* — 2001. — Vol. 71, No. 2. — P. 654–662. — DOI: 10.1016/S0003-4975(00)02338-9
- Helm P. A., Tseng H.-J., Younes L., McVeigh E. R., Winslow R. L.* Ex vivo 3D diffusion tensor imaging and quantification of cardiac laminar structure // *Magn. Reson. Med.* — 2005. — Vol. 54, No. 4. — P. 850–859. — DOI: 10.1002/mrm.20622
- Hooks D. A., Trew M. L., Caldwell B. J., Sands G. B., LeGrice I. J., Smaill B. H.* Laminar arrangement of ventricular myocytes influences electrical behavior of the heart // *Circ. Res.* — 2007. — Vol. 101, No. 10. — P. e103–e112. — DOI: 10.1161/CIRCRESAHA.107.161075
- Kazbanov I. V., ten Tusscher K. H. W. J., Panfilov A. V.* Effects of heterogeneous diffuse fibrosis on arrhythmia dynamics and mechanism // *Sci. Rep.* — 2016. — Vol. 6. — P. 20835. — DOI: 10.1038/srep20835
- Keener J., Sneyd J.* Mathematical physiology II: systems physiology. — 2nd ed. — New York: Springer, 2009.
- Lieberman G. M.* Second order parabolic differential equations. — Singapore: World Scientific, 1996.
- Mielke A.* A gradient structure for reaction–diffusion systems and for energy-drift-diffusion systems // *Nonlinearity*. — 2011. — Vol. 24, No. 4. — P. 1329–1346. — DOI: 10.1088/0951-7715/24/4/016
- Pao C. V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. — New York: Plenum Press, 1992.
- Prabhu S. D., Frangogiannis N. G.* The biological basis for cardiac repair after myocardial infarction: from inflammation to fibrosis // *Circ. Res.* — 2016. — Vol. 119, No. 1. — P. 91–112. — DOI: 10.1161/CIRCRESAHA.116.303577
- Roes S. D., Borleffs C. J. W., van der Geest R. J., Westenberg J. J. M., Marsan N. A., Kaandorp T. A. M., Reiber J. H. C., Zeppenfeld K., Lamb H. J., de Roos A., Schalij M. J., Bax J. J.* Infarct tissue heterogeneity assessed with contrast-enhanced MRI predicts spontaneous ventricular arrhythmia in patients with ischemic cardiomyopathy and implantable cardioverter-defibrillator // *Circ. Cardiovasc. Imaging*. — 2009. — Vol. 2, No. 3. — P. 183–190. — DOI: 10.1161/CIRCIMAGING.108.826529

- Scalise R. F. M., De Sarro R., Caracciolo A., Lauro R., Squadrito F., Carerj S., Bitto A., Micari A., Bella G. D., Costa F., Irrera N.* Fibrosis after myocardial infarction: an overview on cellular processes, molecular pathways, clinical evaluation and prognostic value // *Med. Sci.* — 2021. — Vol. 9, No. 1. — P. 16. — DOI: 10.3390/medsci9010016
- Schelbert E. B., Hsu L.-Y., Anderson S. A., Mohanty B. D., Karim S. M., Kellman P., Aletras A. H., Arai A. E.* Late gadolinium-enhancement cardiac magnetic resonance identifies postinfarction myocardial fibrosis and the border zone at the near cellular level in ex vivo rat heart // *Circ. Cardiovasc. Imaging.* — 2010. — Vol. 3, No. 6. — P. 743–752. — DOI: 10.1161/CIRCIMAGING.108.835793
- Simon J.* Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$  // *Ann. Mat. Pura Appl.* — 1986. — Vol. 146. — P. 65–96. — DOI: 10.1007/BF01762360
- Smoller J.* Shock waves and reaction–diffusion equations. — 2nd ed. — New York: Springer, 1994.
- Talman V., Ruskoaho H.* Cardiac fibrosis in myocardial infarction — from repair and remodeling to regeneration // *Cell Tissue Res.* — 2016. — Vol. 365, No. 3. — P. 563–581. — DOI: 10.1007/s00441-016-2431-9
- Travers J. G., Kamal F. A., Robbins J., Yutzey K. E., Blaxall B. C.* Cardiac fibrosis: the fibroblast awakens // *Circ. Res.* — 2016. — Vol. 118, No. 6. — P. 1021–1040. — DOI: 10.1161/CIRCRESAHA.115.306565
- Tsgoev C. A., Voropaeva O. F., Shokin Yu. I.* Mathematical modelling of acute phase of myocardial infarction // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.* — 2020. — Vol. 35, No. 2. — P. 111–126. — DOI: 10.1515/rnam-2020-0009
- Tung L.* A Bi-domain model for describing ischemic myocardial D-C potentials: PhD thesis. — MIT, 1978.
- van den Boogaart K. G., Tolosana-Delgado R.* Analyzing compositional data with R. — Heidelberg: Springer, 2013.
- Vigmond E. J., Hughes M., Plank G., Leon L. J.* Computational tools for modeling electrical activity in cardiac tissue // *J. Electrocardiol.* — 2003. — Vol. 36, Suppl. — P. 69–74. — DOI: 10.1016/j.jelectrocard.2003.09.017