

УДК: 532.517.4

Приближенное решение одной модели дальнего осесимметричного турбулентного следа

А. В. Шмидт

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Россия, 660036, г. Красноярск, Академгородок, д. 50/44

E-mail: schmidt@icm.krasn.ru

Получено 06.04.2026, после доработки — 09.07.2026.

Принято к публикации 15.07.2026.

Рассматриваются вопросы моделирования течения в дальних областях осесимметричного безымпурсного турбулентного следа, возникающего при обтекании тела. Основными особенностями исследуемого течения являются его практически бесследный характер и близость к автомодельному режиму, что подтверждается имеющимися экспериментальными данными. Для описания течения в дальнем следе привлекается полуэмпирическая ϵ - ϵ -модель турбулентности, основанная на алгебраической модели рейнольдсовых напряжений Роды. С помощью теоретико-группового анализа получена автомодельная редукция привлекаемой модели турбулентности к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведено построение приближенного автомодельного решения второго рода соответствующей краевой задачи для редуцированной системы уравнений с помощью метода, основанного на сшивании усечений асимптотических разложений ее решения, найденных в окрестностях граничных точек. Привлекаемый подход также позволил осуществить выделение приближенного значения показателя автомодельности и других неизвестных параметров задачи в процессе выполнения процедуры сшивания асимптотических разложений. Сопоставление сконструированного в виде рядов Пуанкаре приближенного решения поставленной краевой задачи, включающего 16 аппроксимирующих слагаемых, с численным решением, найденным с помощью метода стрельбы, показало, что максимальная относительная погрешность между решениями не превосходит 2 %. Установленное в данной работе приближенное значение показателя автомодельности задачи хорошо согласуется с точным значением, полученным ранее другими авторами в результате аналитического решения соответствующей нелинейной задачи на собственные значения. Проведено сопоставление приближенного решения с доступными экспериментальными данными по осесимметричному безымпурсному турбулентному следу, полученными в ИГиЛ СО РАН, имеет место удовлетворительное соответствие. Построенные в работе приближенные формулы имеют практическое значение и могут быть использованы для быстрой оценки значений гидродинамических величин в дальних областях безымпурсного осесимметричного турбулентного следа. Развиваемый метод построения приближенных решений краевых задач свободной турбулентности может найти применение и в других прикладных областях, которые не связаны с теорией турбулентности.

Ключевые слова: безымпурсный турбулентный след, ϵ - ϵ -модель турбулентности, автомодельность второго рода, краевая задача, приближенное решение, асимптотическое разложение

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (код проекта FWES-2024-0025).

UDC: 532.517.4

Approximate solution to one model of axisymmetric turbulent wake

A. V. Shmidt

Institute of Computational Modelling SB RAS,
50/44 Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russia

E-mail: schmidt@icm.krasn.ru

Received 06.04.2026, after completion — 09.07.2026.

Accepted for publication 15.07.2026.

In this paper we consider the problem of modeling of flow in the far regions of an axisymmetric momentumless turbulent wake that occurs when a body is flowed. The main features of the studied flow are its almost shear-free nature and its proximity to the self-similar regime, which is confirmed by the available experimental data. A semi-empirical e - ε model of turbulence based on the Rodi algebraic model of Reynolds stresses is invoked to describe a flow in the far wake. Using group-theoretic analysis, similarity reduction of the invoked model of turbulence to a system of ordinary differential equations is obtained. An approximate self-similar solution of the second kind of the corresponding boundary value problem for the reduced system of equations was constructed using a method based on matching the truncations of asymptotic expansions of its solution found in neighborhoods of the boundary points. The involved approach also allowed for the extraction of an approximate value of the self-similarity exponent and other unknown parameters of the problem during the procedure of matching of the asymptotic expansion. Comparison of the approximate solution of the given boundary value problem constructed in the form of Puiseux series, which includes 16 approximating terms, with the numerical solution found using the shooting method, showed that the maximum relative error between the solutions does not exceed 2 %. The approximate value of the self-similarity exponent of the problem established in this work is in a good agreement with the exact value obtained earlier by other authors as a result of the analytical solution of the corresponding nonlinear eigenvalue problem. The approximate solution was compared with the available experimental data on the axisymmetric momentumless turbulent wake obtained at the Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, and a satisfactory agreement was found. The approximate formulas developed in this work have practical significance and can be used for quick estimation of the values of hydrodynamic quantities in the far regions of the axisymmetric momentumless turbulent wake. The developed method for constructing approximate solutions to the boundary value problems of free turbulence can also be used in other applied fields that are not related to turbulence theory.

Keywords: momentumless turbulent wake, e - ε model of turbulence, similarity of the second kind, boundary value problem, approximate solution, asymptotic expansion

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 4, pp. 823–836 (Russian).

This work was supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation (code of project FWES-2024-0025).

Введение

К настоящему моменту имеется достаточно обширная библиография, посвященная исследованию безымпультных турбулентных следов за осесимметричными телами (см., например, [Naudascher, 1965; Алексенко, Костомаха, 1987; Higuchi, Kubota, 1990; Sirviente, Patel, 2000; Finson, 1975; Городцов, 1979; Hassid, 1980; Maderich, Konstantinov, 2010]). В работах [Naudascher, 1965; Алексенко, Костомаха, 1987; Higuchi, Kubota, 1990; Sirviente, Patel, 2000] представлены результаты лабораторных экспериментов по турбулентным следам рассматриваемого типа. Одной из основных особенностей таких турбулентных следов является то, что на относительно небольших расстояниях от тела реализуется близкий к автомодельному режим течения, кроме того, оно становится практически бессдвиговым.

Теоретическому исследованию безымпультных турбулентных следов за осесимметричными телами посвящены работы [Finson, 1975; Городцов, 1979; Hassid, 1980; Maderich, Konstantinov, 2010], где установлены асимптотические законы автомодельного вырождения следов. Численные расчеты, согласующиеся с экспериментальными данными, выполнены в [Chernykh et al., 1992; Воропаева, 2002; Воропаева, 2003; Воропаева, 2007; Деменков, Черных, 2015]. Отметим работу [Воропаева, 2007], где предложены новые численные модели для описания динамики безымпультного турбулентного следа за телами вращения и основанные на иерархии полуэмпирических моделей турбулентности второго и третьего порядка. Имеет место хорошее согласие выполненных численных расчетов с экспериментальными данными [Алексенко, Костомаха, 1987]. Необходимо также отметить, что вопросами разрешимости начально-краевых задач свободной турбулентности занимался В. Н. Гребенев [Гребенев, 1990; Гребенев, 1998]. Одна из основных сложностей подобных задач связана с наличием особенностей у коэффициентов уравнений привлекаемых полуэмпирических моделей турбулентности в граничных точках.

Для построения согласующихся с экспериментальными данными решений краевых задач для редуцированных полуэмпирических моделей свободных турбулентных течений ранее (см., например, [Шмидт, 2015]) применялся модифицированный метод стрельбы [Капцов, Шанько, 2006]. Тем не менее весьма важным практическим вопросом является построение приближенных решений полуэмпирических моделей турбулентности, что дало бы возможность проводить быструю оценку значений гидродинамических величин, описывающих турбулентное течение. Попытки применения известных и широко используемых методов построения приближенных решений краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [Ван-Дайк, 1967; Ильин, 1989] к вышеуказанному классу задач не приводили к удовлетворительным результатам. В работах [Шмидт, 2023; Shmidt, 2024; Шмидт, 2025] был предложен метод построения приближенных решений краевых задач свободной турбулентности, который основан на сшивании усечений координатных разложений и позволяет для задач с автомодельностью второго рода проводить выделение значения показателя автомодельности.

Данная работа является продолжением [Shmidt, 2024] и посвящена построению приближенного решения, описывающего течение в дальних областях осесимметричного безымпультного турбулентного следа за телом. При этом используется усовершенствованная версия процедуры сшивания усечений асимптотических разложений, предложенная в [Шмидт, 2025].

Постановка задачи

Схема течения в дальних областях осесимметричного безымпультного турбулентного следа представлена на рис. 1. В данном случае тяга движителя, расположенного в кормовой части тела, компенсирует силу гидродинамического сопротивления тела. Развитие турбулентного следа преимущественно осуществляется вдоль оси Ox , r — радиальная координата. Жидкость предполагается однородной и несжимаемой, а течение в дальних областях следа — установившимся.

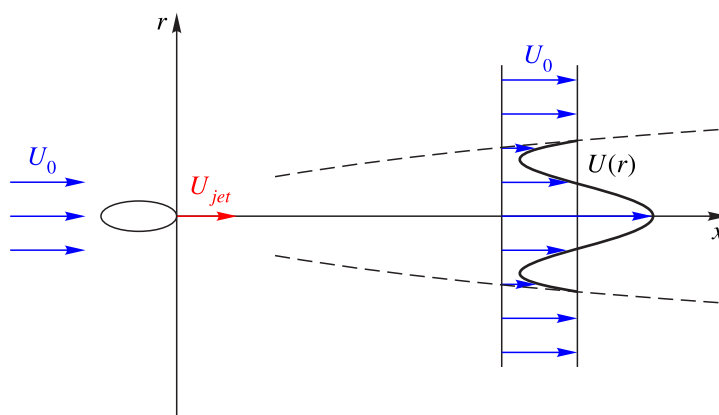


Рис. 1. Схема течения осесимметричного безимпульсного турбулентного следа. $U(r)$ — распределение продольной осредненной компоненты скорости в некотором сечении, перпендикулярном к оси Ox за телом, U_0 — скорость набегающего на тело невозмущенного потока, U_{jet} — скорость струйного течения, создаваемого двигателем

Для описания течения в дальних областях осесимметричного безимпульсного следа привлекается следующее упрощение алгебраической модели рейнольдсовых напряжений [Rodi, 1987; Мошкин и др., 2007], записанное в предположении бессдвиговости и изотропии течения:

$$U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_\mu r \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$U_0 \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_\mu r \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial e}{\partial r} \right) - \varepsilon, \quad (2)$$

$$U_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{C_\mu}{\sigma} r \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}, \quad (3)$$

где $U_1(x, r) = U(x, r) - U_0$ — дефект продольной осредненной компоненты скорости, e — кинетическая энергия турбулентности, ε — скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, $C_\mu = 0,136$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$, $\sigma = 1,3$ — эмпирические постоянные модели. В дальнейшем скорость набегающего на тело невозмущенного потока предполагается равной единице.

Интегрируя уравнение (1) по r в пределах от 0 до ∞ , получаем закон сохранения:

$$J = \int_0^\infty r U_1 dr = 0, \quad (4)$$

который справедлив при выполнении условия

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial U_1}{\partial r} = 0.$$

В связи с тем, что в дальних областях безимпульсных турбулентных следов реализуются автомодельные режимы, далее будем осуществлять построение автомодельной редукции уравнений математической модели (1)–(3) и приближенного решения соответствующей краевой задачи для редуцированной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Автомодельная редукция

Теоретико-групповой анализ [Овсянников, 1978] уравнений модели турбулентности (1)–(3) выполнен в [Ефремов, 2010]. Базис алгебры Ли рассматриваемой модели включает следующие

операторы:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial U_1}, \quad X_3 = U_1 \frac{\partial}{\partial U_1}, \quad X_4 = x \frac{\partial}{\partial x} - 2e \frac{\partial}{\partial e} - 3\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}, \quad X_5 = r \frac{\partial}{\partial r} + 2e \frac{\partial}{\partial e} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

Решение системы уравнений (1)–(3), инвариантное относительно группы преобразований, задаваемой линейной комбинацией операторов X_3 , X_4 и X_5 :

$$x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha r \frac{\partial}{\partial r} + \beta U_1 \frac{\partial}{\partial U_1} + (2\alpha - 2)e \frac{\partial}{\partial e} + (2\alpha - 3)\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon},$$

имеет вид

$$U_1(x, r) = x^\beta U_2(t), \quad e(x, r) = x^{2\alpha-2} K(t), \quad \varepsilon(x, r) = x^{2\alpha-3} E(t), \quad (5)$$

где $t = \frac{r}{x^\alpha}$ — автомодельная переменная.

Подставляя автомодельное представление (5) в (1)–(3), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$C_\mu \frac{K^2 U_2''}{E} + \left(C_\mu \frac{K}{E} \left(2K' - \frac{KE'}{E} + \frac{K}{t} \right) + \alpha t \right) U_2' - \beta U_2 = 0, \quad (6)$$

$$C_\mu \frac{K^2 K''}{E} + 2C_\mu \frac{KK'^2}{E} + \left(C_\mu \frac{K^2}{E^2} \left(\frac{E}{t} - E' \right) + \alpha t \right) K' - 2(\alpha - 1)K - E = 0, \quad (7)$$

$$\frac{C_\mu}{\sigma} \frac{K^2 E''}{E} - \frac{C_\mu}{\sigma} \frac{K^2 E'^2}{E^2} + \left(\frac{C_\mu}{\sigma} \frac{K}{E} \left(2K' + \frac{K}{t} \right) + \alpha t \right) E' - C_{\varepsilon 2} \frac{E^2}{K} - (2\alpha - 3)E = 0, \quad (8)$$

где дифференцирование осуществляется по независимой переменной t . Для редуцированной системы уравнений (6)–(8) ставятся следующие краевые условия:

$$U_2'(0) = K'(0) = E'(0) = 0, \quad (9)$$

$$U_2(a) = K(a) = E(a) = 0. \quad (10)$$

Краевые условия (9) отвечают симметрии течения в турбулентном следе относительно оси Ox . Краевые условия (10) являются следствием требования невозмущенности течения вне области турбулентного следа. В краевые условия (10) входит заранее неизвестное значение a , связанное с поперечным размером турбулентного следа. Так как система обыкновенных дифференциальных уравнений (6)–(8) инвариантна относительно преобразования растяжения, можно положить $a = 1$. Значение a также может быть согласовано с экспериментальными данными или определено из следующего соотношения на кинетическую энергию турбулентности:

$$e(x, a) = \frac{1}{2} e(x, 0). \quad (11)$$

В дальнейших вычислениях для определения значения a будет привлекаться соотношение (11).

Решение поставленной краевой задачи (6)–(10) осложняет наличие особенностей у коэффициентов системы уравнений (6)–(8) в граничной точке a . Для решения краевых задач подобного вида (с автомодельностью первого рода) в работе [Rubel, Melnik, 1984] привлекалось преобразование, трансформирующее a в бесконечно удаленную точку. В [Капцов, Шанько, 2006] было построено автомодельное решение краевой задачи для стандартной k - ε -модели дальнего турбулентного следа за буксируемым телом с применением модифицированного метода стрельбы.

Краевая задача (6)–(10) принадлежит к классу задач с автомодельностью второго рода [Баренблатт, 1982]. Значение показателя автомодельности α было установлено аналитически [Maderich, Konstantinov, 2010] в процессе решения соответствующей нелинейной задачи на собственные значения:

$$\alpha = \frac{2C_{\varepsilon 2} - 3}{4(C_{\varepsilon 2} - 1)},$$

что при $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ дает $\alpha = \frac{21}{92} \approx 0,2283$. Кроме того, указанная нелинейная задача на собственные значения решалась численно в работе [Hassid, 1980], где получено значение $\alpha = 0,27$.

Приближенное решение

С помощью метода [Шмидт, 2023], основанного на сшивании усечений асимптотических разложений, в [Shmidt, 2024] построено приближенное решение краевой задачи (6)–(10), относительная погрешность которого по сравнению с численным решением, полученным методом стрельбы, не превосходит 5 %. Далее представлены результаты применения усовершенствованной версии [Шмидт, 2025] развиваемого метода построения приближенных решений к краевой задаче (6)–(10).

Вблизи особой точки $t = a$ имеют место следующие асимптотические разложения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6)–(8):

$$U_2^a = \sum_{i=1}^{16} u_i |t - a|^{i/2} + o(|t - a|^8), \quad (12)$$

$$K^a = \sum_{i=1}^{16} k_i |t - a|^{i/2} + o(|t - a|^8), \quad (13)$$

$$E^a = \sum_{i=1}^{16} e_i |t - a|^{i/2} + o(|t - a|^8), \quad (14)$$

где u_1 , k_1 и e_1 — произвольные постоянные. Остальные коэффициенты u_i , k_i , e_i ($i = 2, \dots, 16$) рядов Пуизё (12)–(14) определенным образом выражаются через a , α , β , u_1 , k_1 и e_1 . Мы не приводим здесь эти выражения ввиду их громоздкости.

Построение приближенного решения краевой задачи (6)–(10) на основе усечений рядов Пуизё (12)–(14) осуществляется с привлечением разложений решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6)–(8) в степенные ряды в точке $t = 0$:

$$U_2^0 = U_2^* + \alpha_2 t^2 + \alpha_4 t^4 + \alpha_6 t^6 + \alpha_8 t^8 + \alpha_{10} t^{10} + o(t^{10}), \quad (15)$$

$$K^0 = K_0 + \beta_2 t^2 + \beta_4 t^4 + \beta_6 t^6 + \beta_8 t^8 + \beta_{10} t^{10} + o(t^{10}), \quad (16)$$

$$E^0 = E_0 + \gamma_2 t^2 + \gamma_4 t^4 + \gamma_6 t^6 + \gamma_8 t^8 + \gamma_{10} t^{10} + o(t^{10}), \quad (17)$$

где U_2^* , K_0 и E_0 — произвольные постоянные. Так как уравнение (6) инвариантно относительно преобразования растяжения, в дальнейших вычислениях полагаем $U_2^* = 1$. Мы также не приводим здесь выражения для коэффициентов α_i , β_i , γ_i ($i = 2, 4, 6, 8, 10$) в силу их громоздкости.

В соответствии с подходом, предложенным в работах [Шмидт, 2023; Shmidt, 2024; Шмидт, 2025], для построения приближенного решения будем проводить в точке $t = 0$ сшивание усечений асимптотических разложений (12)–(14) с усечениями степенных разложений (15)–(17). При этом, следуя работе [Шмидт, 2025], перед выполнением процедуры сшивания предполагаем произвольными некоторое количество коэффициентов u_i , k_i и e_i при старших членах усечений

рядов Пюизё (12)–(14). Значения этих коэффициентов будут определяться в результате выполнения процедуры сшивания. Построение приближенного решения краевой задачи (6)–(10) удобно реализовать в виде итерационного процесса по числу аппроксимантов p , удерживаемых в усеченных рядах Пюизё (12)–(14). В силу того что функция U_2 не входит в уравнения (7), (8), процедура сшивания может быть первоначально реализована для функций K и E . Необходимо отметить, что возможность реализации процедуры сшивания асимптотических разложений (12)–(14) и (15)–(17) связана с наличием области перекрытия этих разложений [Ильин, 1989].

Итерационный процесс начинается с $p = 7$. Усечения асимптотических разложений (13), (14) берутся в следующем виде (коэффициенты k_i , e_i ($i = 5, 6, 7$) считаем произвольными, их значения будут определены в результате выполнения процедуры сшивания):

$$\begin{aligned} \overline{K}_7^a = & k_1|t-a|^{1/2} + \frac{575a\alpha e_1}{102k_1}|t-a|^{2/2} + \frac{10\,404k_1^4 + 589\,375a^3\alpha^2e_1^2}{41\,616ak_1^3}|t-a|^{3/2} + \\ & + \frac{e_1}{10\,612\,080k_1^5} \left((52\,280\,100\alpha - 51\,499\,800)k_1^4 + 28\,590\,192k_1^3e_1 + \right. \\ & \left. + 120\,390\,625a^3\alpha^3e_1^2 \right) |t-a|^{4/2} + k_5|t-a|^{5/2} + k_6|t-a|^{6/2} + k_7|t-a|^{7/2}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \overline{E}_7^a = & e_1|t-a|^{1/2} + \frac{400a\alpha e_1^2}{51k_1^2}|t-a|^{2/2} + \frac{e_1(10\,404k_1^4 + 13\,409\,375a^3\alpha^2e_1^2)}{41\,616ak_1^4}|t-a|^{3/2} + \\ & + \frac{e_1^2}{2\,653\,020k_1^6} \left((17\,946\,900\alpha - 25\,229\,700)k_1^4 + 16\,875\,288k_1^3e_1 + \right. \\ & \left. + 167\,734\,375a^3\alpha^3e_1^2 \right) |t-a|^{4/2} + e_5|t-a|^{5/2} + e_6|t-a|^{6/2} + e_7|t-a|^{7/2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Приравнявая производные соответствующих порядков от усечений (18), (19) и (16), (17) в точке $t = 0$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^j}{dt^j} \overline{K}_7^a \right|_{t=0} &= \left. \frac{d^j}{dt^j} K^0 \right|_{t=0} \quad (j = 0, \dots, 5), \\ \left. \frac{d^j}{dt^j} \overline{E}_7^a \right|_{t=0} &= \left. \frac{d^j}{dt^j} E^0 \right|_{t=0} \quad (j = 0, \dots, 4) \end{aligned}$$

и учитывая соотношение (11), получаем систему алгебраических уравнений на неизвестные величины a , α , K_0 , E_0 и k_i , e_i ($i = 1, 5, 6, 7$):

$$\begin{aligned} & \frac{5}{4}a^{1/2}k_1 + \frac{5a^2e_1}{204k_1}(431\alpha - 198) + \frac{229a^2e_1^2}{85k_1^2} + \frac{589\,375a^{7/2}\alpha^2e_1^2}{41\,616k_1^3} + \frac{24\,078\,125a^5\alpha^3e_1^3}{2\,122\,416k_1^5} + \\ & \quad + a^{5/2}k_5 + a^3k_6 + a^{7/2}k_7 = K_0, \\ & \frac{7k_1}{8a^{1/2}} + \frac{5ae_1}{51k_1}(158\alpha - 99) + \frac{458ae_1^2}{85k_1^2} + \frac{589\,375a^{5/2}\alpha^2e_1^2}{27\,744k_1^3} + \frac{24\,078\,125a^4\alpha^3e_1^3}{1\,061\,208k_1^5} + \\ & \quad + \frac{5a^{3/2}k_5}{2} + 3a^2k_6 + \frac{7a^{5/2}k_7}{2} = 0, \\ & -\frac{k_1}{16a^{3/2}} + \frac{5e_1}{34k_1}(67\alpha - 66) + \frac{458e_1^2}{85k_1^2} + \frac{589\,375a^{3/2}\alpha^2e_1^2}{55\,488k_1^3} + \frac{24\,078\,125a^3\alpha^3e_1^3}{1\,061\,208k_1^5} + \\ & \quad + \frac{15a^{1/2}k_5}{4} + 6ak_6 + \frac{35a^{3/2}k_7}{4} = \frac{125E_0}{68K_0^2}(2(\alpha - 1)K_0 + E_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{9k_1}{32a^{5/2}} - \frac{589375a^{1/2}\alpha^2e_1^2}{110976k_1^3} + \frac{15k_5}{8a^{1/2}} + 6k_6 + \frac{105a^{1/2}k_7}{8} = 0, \\
& -\frac{51k_1}{64a^{7/2}} + \frac{589375\alpha^2e_1^2}{73984a^{1/2}k_1^3} - \frac{15k_5}{16a^{3/2}} + \frac{105k_7}{16a^{1/2}} = \frac{125E_0^2}{36992K_0^5} \left(-100(14\alpha + 9)(\alpha - 1)K_0^2 + \right. \\
& \quad \left. + (446\alpha - 1921)K_0E_0 + 872E_0^2 \right), \\
& \frac{375k_1}{128a^{9/2}} - \frac{2946875\alpha^2e_1^2}{147968a^{3/2}k_1^3} + \frac{45k_5}{32a^{5/2}} - \frac{105k_7}{32a^{3/2}} = 0, \\
& \frac{5}{4}a^{1/2}e_1 + \frac{5a^2e_1^2}{51k_1^2}(149\alpha - 97) + \frac{1622a^2e_1^3}{255k_1^3} + \frac{1309375a^{7/2}\alpha^2e_1^3}{41616k_1^4} + \frac{33546875a^5\alpha^3e_1^4}{530604k_1^6} + \\
& \quad + a^{5/2}e_5 + a^3e_6 + a^{7/2}e_7 = E_0, \\
& \frac{7e_1}{8a^{1/2}} + \frac{10ae_1^2}{51k_1^2}(109\alpha - 97) + \frac{3244ae_1^3}{255k_1^3} + \frac{1309375a^{5/2}\alpha^2e_1^3}{27744k_1^4} + \frac{33546875a^4\alpha^3e_1^4}{265302k_1^6} + \\
& \quad + \frac{5}{2}a^{3/2}e_5 + 3a^2e_6 + \frac{7}{2}a^{5/2}e_7 = 0, \\
& -\frac{e_1}{16a^{3/2}} + \frac{10e_1^2}{51k_1^2}(69\alpha - 97) + \frac{3244e_1^3}{255k_1^3} + \frac{1309375a^{3/2}\alpha^2e_1^3}{55488k_1^4} + \frac{33546875a^3\alpha^3e_1^4}{265302k_1^6} + \\
& \quad + \frac{15}{4}a^{1/2}e_5 + 6ae_6 + \frac{35}{4}a^{3/2}e_7 = \frac{13E_0^2}{136K_0^3}(25(2\alpha - 3)K_0 + 48E_0), \\
& \frac{9e_1}{32a^{5/2}} - \frac{1309375a^{1/2}\alpha^2e_1^3}{110976k_1^4} + \frac{15e_5}{8a^{1/2}} + 6e_6 + \frac{105}{8}a^{1/2}e_7 = 0, \\
& -\frac{51e_1}{64a^{7/2}} + \frac{1309375\alpha^2e_1^3}{73984a^{1/2}k_1^4} - \frac{15e_5}{16a^{3/2}} + \frac{105e_7}{16a^{1/2}} = \frac{13E_0^3}{73984K_0^6}(625(28\alpha + 37)(3 - 2\alpha)K_0^2 + \\
& \quad + 200(86\alpha - 663)K_0E_0 + 59808E_0^2), \\
& (a - 1)^{1/2}k_1 + \frac{575a(a - 1)\alpha e_1}{102k_1} + \frac{(a - 1)^{3/2}(589375a^3\alpha^2e_1^2 + 10404k_1^4)}{41616ak_1^3} + \\
& \quad + \frac{(a - 1)^2e_1(120390625a^3\alpha^3e_1^2 + 52280100\alpha k_1^4 + 28590192k_1^3e_1 - 51499800k_1^4)}{10612080k_1^5} + \\
& \quad + (a - 1)^{5/2}k_5 + (a - 1)^3k_6 + (a - 1)^{7/2}k_7 = \frac{K_0}{2},
\end{aligned}$$

численное решение которой дает

$$\begin{aligned}
a = 1,3481, \quad \alpha = 0,2043, \quad K_0 = 1,8667, \quad E_0 = 2,1680, \quad k_1 = 0,7389, \quad k_5 = -0,5215, \\
k_6 = 0,4606, \quad k_7 = -0,1177, \quad e_1 = 0,5932, \quad e_5 = -1,7378, \quad e_6 = 1,2052, \quad e_7 = -0,2692.
\end{aligned}$$

Последовательно увеличивая число p аппроксимирующих слагаемых в усечениях асимптотических разложений (13), (14), повторяем процедуру сшивания, используя результаты, полученные на $p - 1$ шаге, в качестве начальных значений при численном решении соответствующей системы алгебраических уравнений. Результаты расчетов представлены в табл. 1 (m — число коэффициентов при старших членах усечения ряда Пюизё, которые предполагаем произвольными перед выполнением процедуры сшивания). При $p = 16$ и $m = 9$ выделилось два решения соответствующей системы алгебраических уравнений. При этом наиболее близкое значение показателя

Таблица 1. Результаты процедуры сшивания в зависимости от количества аппроксимантов

$p(m)$	7(3)	8(5)	9(5)	10(5)	11(6)	12(7)	13(8)	14(9)	15(9)
α	0,2043	0,2188	0,2151	0,2143	0,2204	0,2169	0,2190	0,2182	0,2187
a	1,3481	1,3732	1,3774	1,3731	1,4062	1,3824	1,4013	1,3837	1,3901
K_0	1,8667	1,7347	1,7598	1,7692	1,7049	1,7430	1,7146	1,7341	1,7249
E_0	2,1680	2,0024	2,0388	2,0492	1,9722	2,0175	1,9864	2,0045	1,9955

автомодельности к установленному аналитически [Maderich, Konstantinov, 2010] дает следующее решение:

$$\begin{aligned} \alpha = 0,2312, \quad a = 1,4564, \quad K_0 = 1,6083, \quad E_0 = 1,8501, \quad k_1 = 0,1342, \quad k_8 = -17,1145, \\ k_9 = -56,4380, \quad k_{10} = 161,5800, \quad k_{11} = -209,2963, \quad k_{12} = 166,3926, \quad k_{13} = -85,9735, \\ k_{14} = 28,3764, \quad k_{15} = -5,4712, \quad k_{16} = 0,4712, \quad e_1 = 0,0568, \quad e_8 = 101,4543, \\ e_9 = -310,7109, \quad e_{10} = 491,7405, \quad e_{11} = -504,1537, \quad e_{12} = 353,7494, \\ e_{13} = -169,9741, \quad e_{14} = 53,7680, \quad e_{15} = -10,1293, \quad e_{16} = 0,8635. \end{aligned} \quad (20)$$

Далее, с учетом (20) представленная выше процедура построения приближенного решения на основе усечения асимптотического разложения (12) применялась к функции U_2 , что позволило получить

$$\begin{aligned} \beta = -1,6147, \quad u_1 = -0,1244, \quad u_8 = -130,5146, \quad u_9 = 406,8327, \quad u_{10} = -679,3294, \\ u_{11} = 732,1889, \quad u_{12} = -534,0190, \quad u_{13} = 263,8692, \quad u_{14} = -85,1236, \\ u_{15} = 16,2545, \quad u_{16} = -1,3993. \end{aligned} \quad (21)$$

Приведем значения коэффициентов u_i, k_i, e_i ($i = 2, \dots, 7$) усечений асимптотических разложений (12)–(14), для которых сохранялись их выражения через $a, \alpha, \beta, u_1, k_1$ и e_1 перед выполнением процедуры сшивания:

$$\begin{aligned} u_2 = -0,7452, \quad u_3 = -2,0115, \quad u_4 = -0,2027, \quad u_5 = 7,7799, \quad u_6 = 7,2174, \quad u_7 = -0,0737, \\ k_2 = 0,8041, \quad k_3 = 2,1702, \quad k_4 = 0,7385, \quad k_5 = -5,7981, \quad k_6 = -2,7531, \quad k_7 = 23,6155, \\ e_2 = 0,4739, \quad e_3 = 2,0305, \quad e_4 = 3,3739, \quad e_5 = -2,7129, \quad e_6 = -15,2976, \quad e_7 = 7,1000. \end{aligned} \quad (22)$$

Фигурирующие в (20) значения α, K_0 и E_0 привлекались для численного решения краевой задачи (6)–(10) методом стрельбы. При этом значение $\alpha = 0,2312$ фиксировалось в численных расчетах, а значения $K_0 = 1,6083$ и $E_0 = 1,8501$ использовались в качестве данных для пристрелки. В результате численных расчетов, с учетом условия (11), получены значения $K_0 = 1,6067$, $E_0 = 1,8488$ и $\beta = -1,6200$. Относительная погрешность приближенного решения (12)–(14), (20)–(22) краевой задачи (6)–(10), сконструированного на основе усечения ряда Пуизё, и численного решения, полученного с помощью метода стрельбы, не превосходит 2% (см. рис. 2, где сплошные линии — расчеты методом стрельбы, символы — приближенное решение).

Аналогичные расчеты были проведены и при фиксированном значении показателя автомодельности $\alpha = \frac{21}{92}$, получены следующие значения:

$$\begin{aligned} \beta = -1,6741, \quad a = 1,4403, \quad K_0 = 1,6348, \quad E_0 = 1,8833, \quad u_1 = -0,1758, \quad u_8 = 87,4390, \\ u_9 = 267,8284, \quad u_{10} = -448,9361, \quad u_{11} = 491,2906, \quad u_{12} = -365,5512, \quad u_{13} = 184,6633, \\ u_{14} = -60,9667, \quad u_{15} = 11,9207, \quad u_{16} = -1,0513, \quad k_1 = 0,1956, \quad k_8 = -7,0460, \\ k_9 = -37,8088, \quad k_{10} = 99,8634, \quad k_{11} = -127,1831, \quad k_{12} = 100,8952, \quad k_{13} = -52,3759, \\ k_{14} = 17,4385, \quad k_{15} = -3,4009, \quad k_{16} = 0,2968, \quad e_1 = 0,0975, \quad e_8 = 52,7878, \quad e_9 = -177,3736, \\ e_{10} = 289,4861, \quad e_{11} = -303,9796, \quad e_{12} = 218,6473, \quad e_{13} = -107,8897, \quad e_{14} = 35,0950, \\ e_{15} = -6,8023, \quad e_{16} = 0,5967. \end{aligned}$$

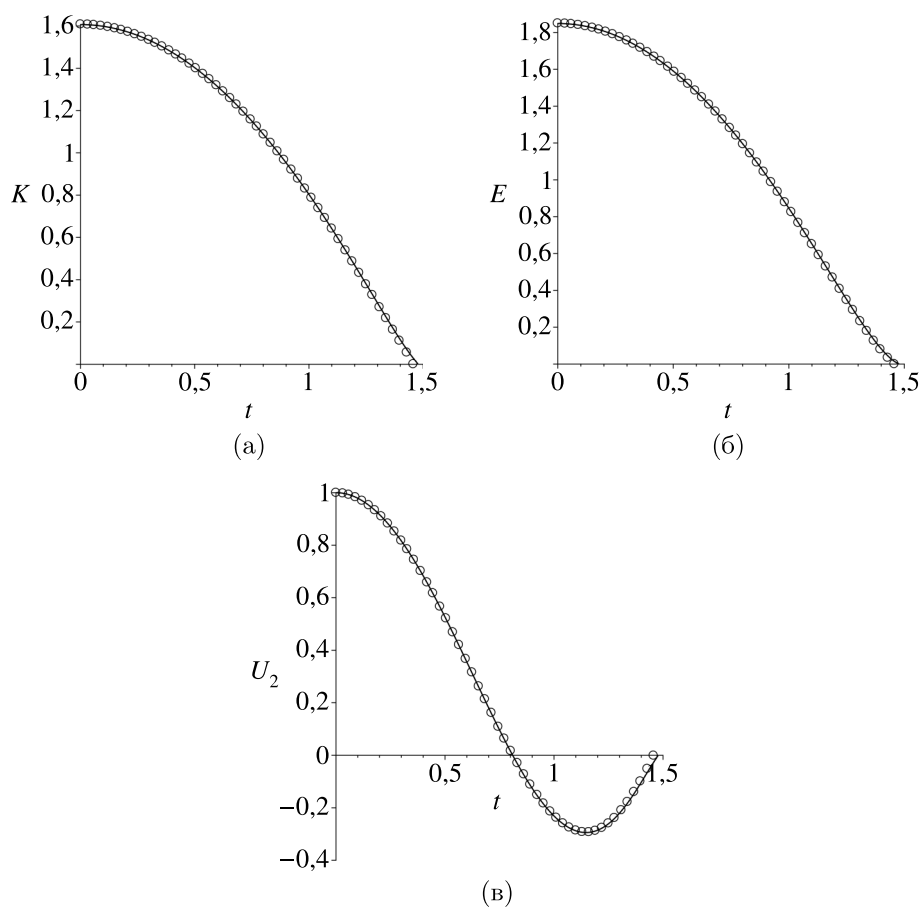


Рис. 2. Сопоставление автомодельных профилей приближенного и численного решения для кинетической энергии турбулентности K (а), скорости ее диссипации E (б) и дефекта продольной осредненной компоненты скорости U_2 (в)

Коэффициенты u_i , k_i , e_i ($i = 2, \dots, 7$) усечений асимптотических разложений (12)–(14) для случая $\alpha = \frac{21}{92}$ принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} u_2 &= -0,8297, & u_3 &= -1,7754, & u_4 &= 0,5883, & u_5 &= 6,5210, & u_6 &= 4,5997, & u_7 &= -0,0699, \\ k_2 &= 0,9232, & k_3 &= 1,9754, & k_4 &= 0,1131, & k_5 &= -4,2821, & k_6 &= -0,6508, & k_7 &= 12,5209, \\ e_2 &= 0,6398, & e_3 &= 2,1654, & e_4 &= 2,4236, & e_5 &= -3,4804, & e_6 &= -9,7346, & e_7 &= 9,0012. \end{aligned}$$

Численные расчеты методом стрельбы позволили получить $K_0 = 1,6335$, $E_0 = 1,8823$ и $\beta = -1,6756$. Сопоставление результатов численных расчетов с приближенным решением (12)–(14) при фиксированном значении показателя автомодельности $\alpha = \frac{21}{92}$ представлены на рис. 3 (обозначения те же, что и на рис. 2). В данном случае относительная погрешность приближенного и численного решения также не превосходит 2%. Проведено сопоставление приближенного решения (12)–(14), (20)–(22) с доступными экспериментальными данными [Алексенко, Костомаха, 1987] по кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации в сечении плоскостью $x = 70D$ за телом, где D — диаметр тела. Как видно из рис. 4, получено удовлетворительное согласие.

Заключение

В работе на основе процедуры сшивания асимптотических разложений проведено построение приближенного автомодельного решения второго рода, описывающего течение в дальних

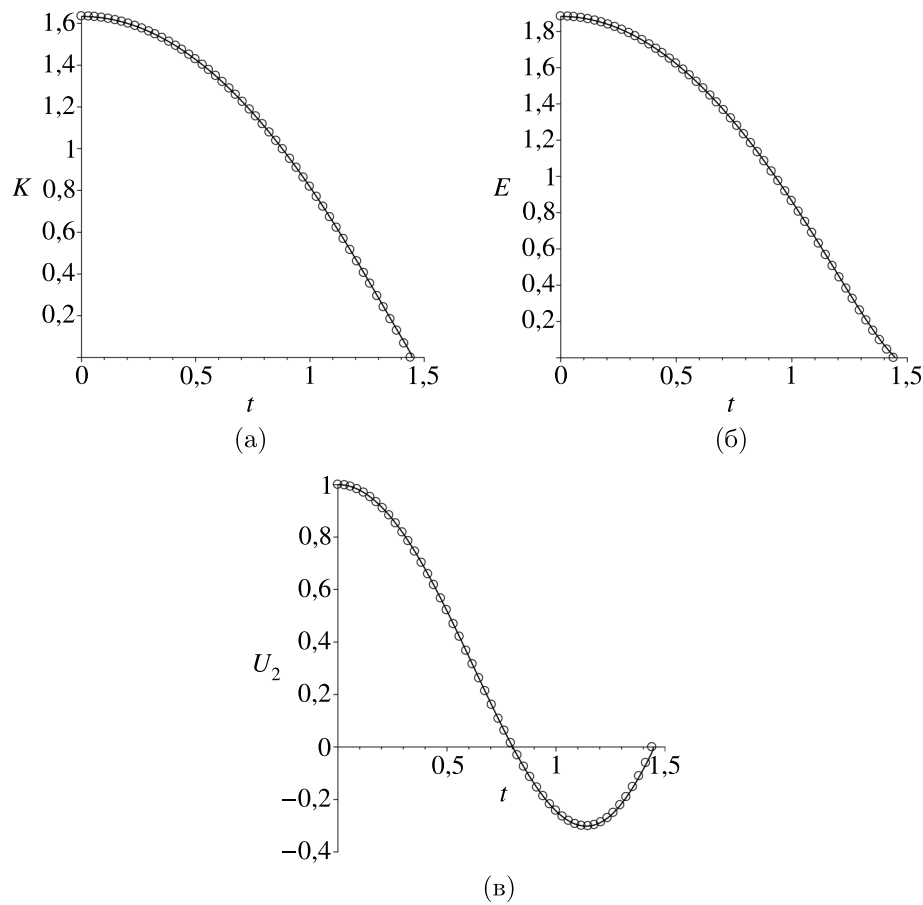


Рис. 3. Сопоставление автомодельных профилей приближенного и численного решения при $\alpha = \frac{21}{92}$ для кинетической энергии турбулентности K (а), скорости ее диссипации E (б) и дефекта продольной осредненной компоненты скорости U_2 (в)

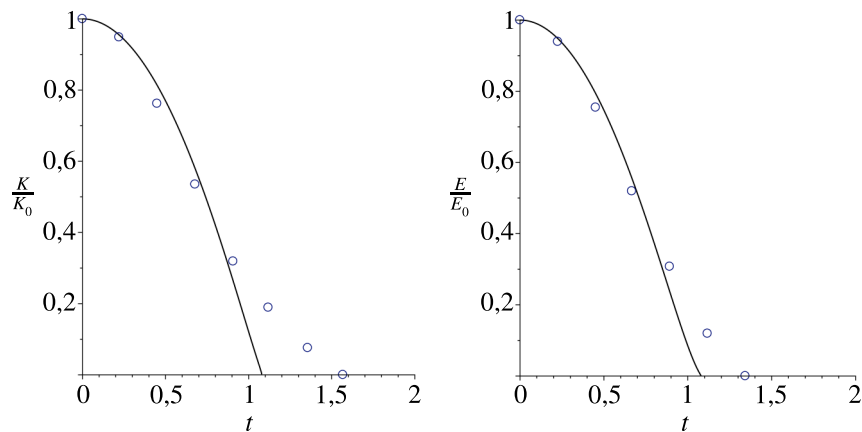


Рис. 4. Сопоставление нормированных профилей приближенного решения с экспериментальными данными по кинетической энергии турбулентности $\frac{K}{K_0}$ и скорости ее диссипации $\frac{E}{E_0}$

областях осесимметричного безымпурсного турбулентного следа за телом. Получено хорошее согласие приближенного решения с результатами численных расчетов методом стрельбы. Проведено сопоставление приближенного решения с доступными экспериментальными данными, имеет место удовлетворительное соответствие. Предлагаемый метод построения приближенных

решений краевых задач свободной турбулентности может найти применение и в других прикладных областях.

Благодарности

Автор выражает благодарность проф. О.В.Капцову и проф. Г.Г.Черных за внимание к работе.

Список литературы (References)

- Алексенко Н. В., Костомаха В. А.* Экспериментальное исследование осесимметричного безымпурсного турбулентного струйного течения // Прикладная механика и техническая физика. — 1997. — Т. 28, № 1. — С. 65–69.
- Aleksenko N. V., Kostomakha V. A.* Experimental study of an axisymmetric nonimpulsive turbulent jet // J. Appl. Mech. Tech. Phys. — 1987. — Vol. 28, No. 1. — P. 60–64. (Original Russian paper: *Aleksenko N. V., Kostomakha V. A.* Eksperimentalnoe issledovanie osesimmetrichnogo bezypulsnogo turbulentnogo strujnogo techeniya // Prikl. Meh. Teh. Fiz. — 1987. — Vol. 28, No. 1. — P. 65–69.)
- Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. — Л.: Гидрометеиздат, 1982. — 256 с.
- Barenblatt G. I.* Similarity, self-similarity, and intermediate asymptotics. — New York: Springer, 1979. — 218 p. (Russ. ed.: *Barenblatt G. I.* Podobie, avtomodelnost, promezhutochnaya asimptotika. Teoriya i prilozheniya k geofizicheskoy gidrodinamike. — Leningrad: Gidrometeizdat, 1982. — 256 p.)
- Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967. — 308 с.
- Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid mechanics. — New York: Academic Press, 1964. — 229 p. (Russ. ed.: *Van-Dajk M.* Metody vozmuschenij v mekhanike zhidkosti. — Moscow: Mir, 1967. — 308 p.)
- Воропаева О. Ф.* Численное исследование безымпурсных турбулентных следов за сферой на основе полуэмпирических моделей турбулентности второго порядка // Вычислительные технологии. — 2002. — Т. 7, № 2. — С. 11–23.
- Voropaeva O. F.* Chislennoe issledovanie bezypulsnyh turbulentnyh sledov za sferoj na osnove poluempiricheskikh modelej turbulentnosti vtorogo poryadka [The numerical investigation of momentumless turbulent wakes behind sphere based on semi-empirical turbulence models of second order] // Vychislitelnye tehnologii. — 2002. — Vol. 7, No. 2. — P. 11–23 (in Russian).
- Воропаева О. Ф.* Численное моделирование дальнего безымпурсного осесимметричного турбулентного следа // Вычислительные технологии. — 2003. — Т. 8, № 2. — С. 36–52.
- Voropaeva O. F.* Chislennoe modelirovanie dalnego bezypulsnogo osesimmetrichnogo turbulentnogo sleda [The numerical modelling of the far momentumless axisymmetric turbulent wake] // Vychislitelnye tehnologii. — 2003. — Vol. 8, No. 2. — P. 36–52 (in Russian).
- Воропаева О. Ф.* Иерархия полуэмпирических моделей турбулентности второго и третьего порядка в расчетах безымпурсных следов за телами вращения // Математическое моделирование. — 2007. — Т. 19, № 3. — С. 29–51.
- Voropaeva O. F.* Ierarhiya poluempiricheskikh modelej turbulentnosti vtorogo i tret'ego poryadka v raschetah bezypulsnyh sledov za telami vraschcheniya [A hierarchy of second- and third-order turbulence models for momentumless wakes behind axisymmetric bodies] // Matematicheskoe modelirovanie. — 2007. — Vol. 19, No. 3. — P. 29–51 (in Russian).
- Городцов В. А.* Автомодельность и слабые замыкающие соотношения для симметричной свободной турбулентности // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1979. — № 1. — С. 43–50.
- Gorodtsov V. A.* Similarity and weak closing relations for symmetric free turbulence // Fluid Dyn. — 1979. — Vol. 14, No. 1. — P. 31–37. (Original Russian paper: *Gorodtsov V. A.* Avtomodelnost i slabye zamykayushchie sootnosheniya dlya simmetrichnoj svobodnoj turbulentnosti // Izvestiya AN SSSR. Mehanika zhidkosti i gaza. — 1979. — No. 1. — P. 43–50.)
- Гребнев В. Н.* О разрешимости задачи развития области турбулизованной однородной жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1990. — Т. 30, № 4. — С. 616–619.
- Grebenev V. N.* On the solvability of the problem of the development of a domain of turbulent homogeneous fluid // USSR Computat. Math. Math. Phys. — 1990. — Vol. 30, No. 2. — P. 187–190. (Original Russian paper: *Grebenev V. N.* O razreshimosti zadachi razvitiya oblasti turbulizovannoj odnorodnoj zhidkosti // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 1990. — Vol. 30, No. 2. — P. 616–619.)

- Гребенев В. Н. Об одной задаче динамики дальнего плоского турбулентного следа // Сибирский журнал индустриальной математики. — 1998. — Т. 1, № 1. — С. 97–103.
Grebenev V. N. Ob odnoj zadache dinamiki dalnego ploskogo turbulentnogo sleda [On a problem of far plane turbulent wake dynamics] // Sib. Zh. Industr. Matem. — 1998. — Vol. 1, No. 1. — P. 97–103 (in Russian).
- Деменков А. Г., Черных Г. Г. Математическое моделирование турбулентных следов с варьируемым суммарным избыточным импульсом // Вычислительные технологии. — 2015. — Т. 20, № 4. — С. 29–44.
Demenkov A. G., Chernykh G. G. Matematicheskoe modelirovanie turbulentnyh sledov s variruемым summarnym izbytochnym impulsom [Mathematical modelling of turbulent wakes with varied total excess momentum] // Vychislitelnye tehnologii. — 2015. — Vol. 20, No. 2. — P. 29–44 (in Russian).
- Ефремов И. А. Автомодельные решения иерархии моделей дальнего турбулентного следа: дисс. ... канд. физ.-матем. наук. — Красноярск: СФУ, 2010. — 97 с.
Efremov I. A. Avtomodelnye resheniya ierarhii modelej dalnego turbulentnogo sleda [Similarity solutions to a hierarchy of the far turbulent wake models]: diss. ... cand. fiz.-matem. nauk. — Krasnoyarsk: SFU, 2010. — 97 p. (in Russian).
- Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989. — 336 с.
Il'in A. M. Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems. — Providence, Rhode Island: AMS, 1992. — 296 p. (Russ. ed.: *Il'in A. M. Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenij reshenij kraevykh zadach.* — Moscow: Nauka, 1989. — 336 p.)
- Капцов О. В., Шанько Ю. В. Семейство автомодельных решений одной модели дальнего турбулентного следа // Труды междунар. конф. «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании». — 2006. — Т. 1. — С. 576–579.
Kaptsov O. V. Semejstvo avtomodelnykh reshenij odnoj modeli dalnego turbulentnogo sleda [A family of self-similar solutions for one model of a far turbulent wake] // Trudy mezhdunarodnoj konferencii “Vychislitelnye i informacionnye tehnologii v nauke, tehnikе i obrazovanii”. — 2006. — Vol. 1. — P. 576–579 (in Russian).
- Мошкин Н. П., Фомина А. В., Черных Г. Г. Численное моделирование динамики турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде // Математическое моделирование. — 2007. — Т. 19, № 1. — С. 29–56.
Moshkin N. P., Fomina A. V., Chernykh G. G. Chislennoe modelirovanie dinamiki turbulentnogo sleda za buksiruемым telom v linejno stratificirovannoj srede [Numerical modelling of dynamics of turbulent wake behind towed body in the linearly stratified medium] // Matematicheskoe modelirovanie. — 2007. — Vol. 19, No. 1. — P. 29–56 (in Russian).
- Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 399 с.
Ovsyannikov L. V. Group analysis of differential equations. — New York: Academic Press, 1982. — 432 p. (Russ. ed.: *Ovsyannikov L. V. Gruppovoj analiz differencialnykh uravnenij.* — Moscow: Nauka, 1978. — 399 p.)
- Шмидт А. В. Автомодельное решение задачи о турбулентном течении круглой затопленной струи // Прикладная механика и техническая физика. — 2015. — Т. 56, № 3. — С. 82–88.
Shmidt A. V. Self-similar solution of the problem of a turbulent flow in a round submerged jet // J. Appl. Mech. Tech. Phys. — 2015. — Vol. 56. — P. 987–992. (Original Russian paper: *Shmidt A. V. Avtomodel'noe reshenie zadachi o turbulentnom techenii krugloj zatoplennoj strui* // Prikl. Meh. Teh. Fiz. — 2015. — Vol. 56, No. 3. — P. 82–88.)
- Шмидт А. В. Приближенное решение задачи о течении в дальнем плоском безимпульсном турбулентном следе // Прикладная механика и техническая физика. — 2023. — Т. 64, № 6. — С. 53–59.
Shmidt A. V. Approximate solution of the problem of flow in a far plane momentumless turbulent wake // J. Appl. Mech. Tech. Phys. — 2023. — Vol. 64. — P. 987–992. (Original Russian paper: *Shmidt A. V. Priblizhennoe reshenie zadachi o techenii v dalnem ploskom bezimpulsnom turbulentnom slede* // Prikl. Meh. Teh. Fiz. — 2023. — Vol. 64, No. 6. — P. 53–59.)
- Шмидт А. В. Приближенное решение краевой задачи для модели дальнего закрученного турбулентного следа за самодвижущимся телом // Материалы докладов V конф. математических центров России. — 2025. — С. 155–161.
Shmidt A. V. Priblizhennoe reshenie kraevoy zadachi dlya modeli dalnego zakruchennogo turbulentnogo sleda za samodvizhushchimsya telom [Approximate solution of the boundary value problem for a model of the far swirling turbulent wake behind the self-propelled body] // Materialy dokladov V konferencii matematicheskikh centrov Rossii. — 2025. — P. 155–161 (in Russian).
- Chernykh G. G., Fedorova N. N., Kostomakha V. A., Lesnova N. V. Experimental and numerical simulation of turbulent axisymmetric momentumless wake behind sphere // Proceedings of International Conference on the Methods of Aerophysical Research. — 1992. — Pt. 1. — P. 30–33.
- Finson M. L. Similarity behaviour of momentumless turbulent wakes // J. Fluid Mech. — 1975. — Vol. 71, No. 3. — P. 465–479.

- Hassid S.* Similarity behaviour of momentumless turbulent wakes // *Phys. Fluids*. — 1980. — Vol. 23, No. 2. — P. 404–405.
- Higuchi H., Kubota T.* Axisymmetric wakes behind a slender body including zero-momentum configurations // *Phys. Fluids*. — 1990. — Vol. 2, No. 9. — P. 1615–1623.
- Maderich V., Konstantinov S.* Similarity behaviour of momentumless turbulent wakes // *Fluid Dyn. Res.* — 2010. — Vol. 42, No. 4. — P. 045503.
- Naudascher E.* Flow in the wake of self-propelled bodies and related sources of turbulence // *J. Fluid Mech.* — 1965. — Vol. 22, No. 4. — P. 625–656.
- Rodi W.* Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids // *J. Geophys. Res.* — 1987. — Vol. 92, No. C5. — P. 5305–5328.
- Rubel A., Melnik R.* Jet, wake and wall jet similarity solutions using a $k - \varepsilon$ turbulence model // *Proceedings of AIAA 17th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics, and Lasers Conference*. — 1984. — p. 1523.
- Shmidt A. V.* Approximate solution to a model of the far momentumless axisymmetric turbulent wake // *J. SFU. Math. Phys.* — 2024. — Vol. 17, No. 2. — P. 229–237.
- Sirviente A. I., Patel V. C.* Wake of a self-propelled body. Pt. 1: Momentumless wake // *AIAA J.* — 2000. — Vol. 38, No. 4. — P. 613–619.