

УДК: 519.6

Моделирование разлета газовзвеси с большим отношением давлений и плотностей

Д. В. Садин^a, Е. Н. Широкова^b

Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского,
Россия, 197198, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, д. 13

E-mail: ^a sadin@yandex.ru, ^b shirokhelen-78@mail.ru

Получено 21.09.2025.

Принято к публикации 21.05.2026.

Моделирование газовзвеси с большим перепадом давления и плотности представляет практический интерес при изучении вулканических явлений, взрывах на различных высотах, а также техногенных проблем эксплуатации космической техники и образования космического мусора.

В работе выполнено численное и аналитическое исследование разлета газовзвеси с большим отношением (до шести порядков) давлений и плотностей. Для численного моделирования использован гибридный метод крупных частиц высокой разрешающей способности. Для рассматриваемых условий задачи точность метода подтверждена сопоставлением с асимптотически точными решениями.

В ходе исследования были изучены волновые и структурные характеристики разлета концентрированных газовых взвесей в зависимости от объемной доли частиц, их размеров и начального отношения давлений. Было установлено, что показатель политропы и скорость звука в газовой взвеси зависят не только от температуры, но и от давления и концентрации частиц. С увеличением давления значения показателя политропы и скорости звука возрастают, а с увеличением объемной доли дисперсной фазы — уменьшаются. При распаде произвольного разрыва с увеличением начального давления наблюдается необычное, по сравнению с «чистой» газодинамикой, уменьшение относительной скорости смеси в зоне постоянного течения. Это объясняется нелинейной зависимостью скорости звука в газодисперсной смеси от давления.

С увеличением размеров частиц (числа Стокса) происходит разделение течения смеси на газовую и дисперсную составляющие. В начальный момент времени контактный разрыв, разделяющий смесь и область разреженного газа, расщепляется на две контактные границы: газовую и дисперсную. Практический вывод заключается в том, что при изменении размера частиц на два порядка газодинамические параметры смеси в области волны разрежения и до границы раздела сред близки между собой.

В процессе пространственного разлета происходит последовательное изменение начальной цилиндрической формы дисперсной среды в форму с сечением в виде шестигранника. На следующем этапе расширения частицы распределяются, образуя двустороннюю коническую форму. В дальнейшем формируется дисперсное образование, близкое к форме шара.

Ключевые слова: моделирование, газовзвесь, разлет, большое отношение давлений и плотностей

© 2026 Дмитрий Викторович Садин, Елена Николаевна Широкова

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License. Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/> или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 519.6

Modeling of the gas suspension expansion with a large pressure-density ratio

D. V. Sadin^a, E. N. Shirokova^b

Mozhaisky Military Aerospace Academy,
13 Zhdanovskaya st., Saint Petersburg, 197198, Russia

E-mail: ^a sadin@yandex.ru, ^b shirokhelen-78@mail.ru

Received 21.09.2025.

Accepted for publication 21.05.2026.

Modeling of gas-particle suspensions with large pressure and density gradients is of practical interest in the study of volcanic phenomena, explosions at different altitudes, as well as in technogenic problems related to the operation of space technology and the formation of space debris.

This work presents numerical and analytical investigations of the expansion of gas suspensions with a high ratio (up to six orders of magnitude) of pressures and densities. For numerical modeling, a high-resolution hybrid large-particle method was employed. Under the conditions considered, the accuracy of the method was confirmed by comparison with asymptotically exact solutions.

The study examined the wave and structural characteristics of concentrated gas suspension expansion depending on particle volume fraction, particle size, and initial pressure ratio. It was found that the polytropic index and sound speed in the gas suspension depend not only on temperature but also on pressure and particle concentration. With increasing pressure, both the polytropic index and sound speed rise, while with increasing particle volume fraction they decrease. In the case of an arbitrary discontinuity decay, an unusual effect is observed compared with “pure” gas dynamics: the relative velocity of the mixture in the uniform flow region decreases as the initial pressure increases. This is explained by the nonlinear dependence of the sound speed in a gas-dispersed mixture on pressure.

With increasing particle size (Stokes number), the mixture flow splits into gaseous and dispersed components. At the initial moment, the contact discontinuity separating the mixture from the rarefied gas region splits into two contact boundaries: gaseous and dispersed. A practical conclusion is that when the particle size changes by two orders of magnitude, the gas-dynamic parameters of the mixture in the rarefaction wave region and up to the medium interface remain close to each other.

During spatial expansion, the initial cylindrical shape of the dispersed medium successively transforms into a cross-section resembling a hexagon. At the next stage of expansion, the particles redistribute to form a bilateral conical structure. Eventually, a dispersed formation close to a spherical shape emerges.

Keywords: modeling, gas suspension, expansion, high pressure-density ratio

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 4, pp. 809–821 (Russian).

© 2026 **Dmitry V. Sadin**, Elena N. Shirokova

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Введение

Моделирование газозвесей при наличии значительных перепадов давления и плотности представляет собой важную задачу, особенно в контексте взрывных явлений, таких как извержения вулканов [Ступицкий, Андрущенко, 2020; Cigala et al., 2021], а также при изучении структуры возмущенных облаков, образующихся вследствие мощных взрывов на различных высотах [Андрущенко, Ступицкий, 2020]. Актуальность моделирования газодисперсных сред подчеркивается также при исследовании газопылевых околозвездных дисков [Johansen, Klahr, 2005; Akimkin et al., 2017; Стояновская и др., 2020]. Особый интерес представляет истечение струй, содержащих частицы конденсированной фазы, в разреженную среду — такие процессы характерны для функционирования различных систем космической техники. Это включает в себя задачи моделирования работы корректирующих двигателей ориентации [Ярыгин и др., 2011; Богданюк и др., 2023] и высокоскоростных потоков газа и частиц, возникающих при посадке космических аппаратов [Caraculacu, 2022]. В последние годы усиливается внимание к проблеме негативных последствий, связанных с образованием космического мусора [Назаренко, 2013].

В задачах динамики газодисперсных сред применяются различные подходы, изложенные в монографиях [Нигматулин, 1987; Crowe et al., 2011] и обзорных статьях, например [Вараксин, 2020]. Особое место занимают аналитические решения, которые могут служить эталонами для верификации различных численных схем [Садин, Варварский, 2016; Меньшов, 2016; Садин, 2022a; Stoyanovskaya et al., 2022].

Точность моделирования начальной стадии разлета существенно влияет на дальнейшую эволюцию системы. В условиях высоких градиентов плотности и давления возникают сложности при численном решении уравнений гидродинамики, особенно вблизи фронтов ударных волн. Даже при использовании мелких расчетных сеток методы, основанные на конечных разностях или конечных элементах, могут давать существенные погрешности из-за высокой нелинейности системы.

Применительно к задаче распада произвольного разрыва с отношением давлений и плотностей три порядка проведено тестирование популярных схем высокого разрешения, таких как WENO (weighted essentially non-oscillatory), типа Годунова HLL (Harten, Lax, and van Leer), RKGD (Runge – Kutta discontinuous Galerkin) [Tang, Liu, 2006] и MP (accurate monotonicity-preserving) scheme [He et al., 2016]. Перечисленные тестируемые методы имеют общий недостаток — ошибку в расчете скорости распространения ударной волны даже на мелкой сетке. Хорошую точность решения данной демонстрирует схема Кабаре на компактном шаблоне [Карабасов, 2010]. В этой работе сделано предположение, что затронутая проблема медленной сеточной сходимости решения характерна для широкошаблонных схем и слабо зависит от конкретного выбора решателя задачи о распаде разрыва.

Следует отметить, что ошибка вычисления скорости ударной волны для больших начальных отношений давлений и плотностей кроется в существенно нелинейном численном воспроизведении начальной стадии распада произвольного разрыва. Как показано в работе [Садин, 2022b], определяющим фактором точности является не ширина шаблона, а схемная вязкость численного метода на начальных временных шагах расчета. Предложенный подход в рамках гибридного метода крупных частиц на широком пятиточечном шаблоне обеспечил точность, сопоставимую со схемой Кабаре на компактном шаблоне.

Рассматриваемая в настоящей работе задача относится к сложным проблемам вычислительной гидродинамики. Для исследуемой задачи характерно явление жесткости — существенное различие времен релаксации фаз. Действительно, численное решение задачи характеризуется газодинамическим сеточным масштабом Куранта – Фридрихса – Леви $O\left(\frac{h}{a}\right)$ (h — размер сеточного

элемента, a — локальная скорость звука в газе) и релаксационными масштабами несущего газа $O\left(\frac{1}{t_1^{(r)}}\right)$ и дисперсной фазы $O\left(\frac{1}{t_2^{(r)}}\right)$. Здесь $t_1^{(r)}, t_2^{(r)}$ — времена релаксации газовой и дисперсной фазы соответственно. Для жестких режимов течения газозвеси характерно $t_1^{(r)} \ll t_2^{(r)} \ll \frac{h}{a}$, как следствие, наблюдается катастрофическое снижение допустимого из условий устойчивости шага по времени. Для решения этой проблемы применительно к динамике газодисперсных сред на модельных одно- и двухскоростных уравнениях переноса с источниками выполнено теоретическое обоснование устойчивости [Садин, 1998b], сходимости [Садин, 1998a], доказана выполнимость TVD-условия (невозрастания общей вариации решения) и предложены принципы построения К-устойчивых схем [Садин, 2016]. Под К-устойчивостью понимается независимость условий устойчивости от интенсивности межфазных взаимодействий и размеров ячеек сетки. Проблема жесткости в динамике двухфазных сред нашла отражение в работах [Xing, Shu, 2006; Saurel et al., 2007; Карпаев, Алиев, 2020; Стояновская, 2025].

Цель данной работы — разработка и валидация модели и метода расчета разлета газозвеси с большим отношением давлений и плотностей, а также анализ ключевых факторов, определяющих динамику процесса. Основное внимание уделено описанию особенностей взаимодействия фаз, влияния начальных условий и механизма формирования структур разлета.

1. Основные уравнения и метод расчета

Законы сохранения неравновесной газозвеси опишем в формулировке взаимопроникающих континуумов [Нигматулин, 1987]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla_d \mathbf{G} + \mathbf{B}(\nabla_d \mathbf{F}) &= \mathbf{H}(\mathbf{q}), \\ \mathbf{q} &= [\rho_1, \rho_2, \rho_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2, \rho_2 e_2, \rho_1 E_1 + \rho_2 K_2]^T, \\ \mathbf{G} &= [\rho_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2, \rho_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1, \rho_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2, \rho_2 e_2 \mathbf{v}_2, \rho_1 E_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 K_2 \mathbf{v}_2]^T, \\ \mathbf{F} &= [0, 0, p, p, 0, p(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2)]^T, \quad \mathbf{H} = [0, 0, -\mathbf{F}_\mu, \mathbf{F}_\mu, Q_T, -Q_T]^T, \\ \nabla_d &= \text{diag}(\nabla \cdot, \nabla \cdot, \nabla, \nabla, \nabla \cdot, \nabla \cdot), \quad \mathbf{B} = \text{diag}[1, 1, \alpha_1, \alpha_2, 1, 1], \\ \rho_i &= \rho_i^\circ \alpha_i \quad (i = 1, 2), \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad E_1 = e_1 + \frac{\mathbf{v}_1^2}{2}, \quad K_2 = \frac{\mathbf{v}_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Составляющие смеси помечены нижним индексом 1 и 2 — соответственно газовая и дисперсная фазы; ∇ — оператор набла (Гамильтона). $\alpha_i, \rho_i^\circ, \rho_i, \mathbf{v}_i, E_i, e_i, p$ — объемная доля, истинная и приведенная плотности, вектор скорости с проекциями u_i и v_i , полная и внутренняя энергии единицы массы i -й фазы, давление газа; $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — плотность смеси; $\mathbf{F}_\mu, Q_T$ — вектор силы вязкого межфазного взаимодействия и мощность теплообмена между частицами и несущим газом в единице объема; t — время.

Для замыкания системы уравнений (1) использованы допущения об идеальности и калорическом совершенстве газа и несжимаемости твердых частиц:

$$p = (\gamma_1 - 1)\rho_1^\circ e_1, \quad e_1 = c_v T_1, \quad e_2 = c_2 T_2, \quad \{\gamma_1, c_v, c_2, \rho_2^\circ\} \equiv \text{const},$$

где T_1, T_2 — температура несущей фазы и частиц; γ_1, c_v — показатель адиабаты и удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; c_2 — удельная теплоемкость частиц.

Силовое взаимодействие в единице объема $\mathbf{F}_\mu$ между газом и дисперсной средой рассчитано по формуле

$$\mathbf{F}_\mu = \frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{d} C_D(\text{Re}_{12}, \text{M}_{12}, \Theta_{21}) \rho_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|.$$

Здесь коэффициент сопротивления C_D частицы диаметром d определен по корреляционным соотношениям Хендерсона [Henderson, 1976], которые с хорошей точностью (примерно 16 %) в широком диапазоне обобщают экспериментальные данные режимов течения от свободномолекулярного до континуального. Коэффициент сопротивления C_D является функцией чисел Рейнольдса Re_{12} и Маха M_{12} , вычисленных по относительной скорости газа и частицы $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, с поправкой на отношение температур фаз $\Theta_{21} = \frac{T_2}{T_1}$.

Межфазный теплообмен определен по формуле

$$Q_T = \frac{6\alpha_2}{d^2} \lambda_1 \text{Nu}_1 (T_1 - T_2),$$

где число Нуссельта определено из эмпирического соотношения [Чудновский, 1954].

Для численного моделирования использована К-устойчивая схема с двухэтапным управлением численной диссипацией (Controlled Dissipative Properties by two stages, CDP2) [Садин, 2016]. Компьютерная реализация выполнена на языке программирования Free Pascal в интегрированной среде Lazarus с компиляцией в производительный многопоточный машинный код солвера с асинхронной обработкой графики.

2. Одномерный разлет газозвеси с большим отношением давлений и плотностей

Рассмотрим задачу плоского одномерного разлета газозвеси с большим отношением давлений $\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} = 10^6$ и плотностей $\frac{\rho_2^{(1)}}{\rho_2^{(0)}} = 10^4$ газовой составляющей. В начальный момент времени в области $0 \leq x \leq x_0$ находится неподвижная ($u_i = 0$) смесь газа и сферических частиц (диаметром $d = 0,1 \dots 10$ мкм, истинной плотностью $\rho_2^\circ = 2700$ кг/м³ и объемной долей $\alpha_2 = 0,5$) под повышенным давлением $p^{(1)} = 10^5 \dots 10^7$ Па и при температуре $T_i^{(1)} = 293$ К. Остальную часть расчетной области $x_0 \leq x \leq L$ занимает воздух с низким давлением $p^{(0)} = 10^{-1} \dots 10^1$ Па и температурой $T_1^{(0)} = 2,93$ К. Приняты следующие физические постоянные задачи: $\gamma_1 = 1,4$, $c_v = 717,5$ Дж/(кг · К), $c_2 = 710$ Дж/(кг · К).

Поставленная задача имеет точное решение [Садин, 2022a] при числах Стокса

$$\text{Stk} = \frac{1}{18} \frac{\rho_2^\circ d^2 u_1}{\mu_1 (1 - \alpha_2) L} \rightarrow 0,$$

где μ_1 — динамическая вязкость несущего газа; u_1 , α_2 — скорость газа и объемная доля частиц в сечении $x = x_0$.

В результате распада начального разрыва образуется конфигурация с левой волной разрежения, зоной постоянного течения с контактной границей и правой ударной волной. Давление P в области постоянного течения находится из решения трансцендентного уравнения

$$u^{(1)} - u^{(0)} + \frac{2a^{(1)}\alpha_1^{(1)}}{\gamma^{(1)} - 1} \left(1 - \left(\frac{P}{p^{(1)}} \right)^{\frac{\gamma^{(1)} - 1}{2\gamma^{(1)}}} \right) = (P - p^{(0)}) \sqrt{\frac{\chi^{(0)} - 1}{\rho^{(0)} (\kappa^{(0)} P + p^{(0)})}}.$$

Скорость U в зоне постоянного течения, плотность смеси слева (R_-) и справа (R_+) от контактного разрыва и скорость правой D_+ ударной волны рассчитываются по соотношениям

$$U = u^{(0)} + (P - p^{(0)}) \sqrt{\frac{\chi^{(0)} - 1}{\rho^{(0)} (\kappa^{(0)} P + p^{(0)})}},$$

$$R_+ = \rho^{(0)} \frac{\kappa^{(0)} P + p^{(0)}}{\chi^{(0)} p^{(0)} + \frac{\gamma^{(0)} - 2\alpha_1^{(0)} + 1}{\gamma^{(0)} - 1} P}, \quad \alpha_{1+} = 1 - \frac{R_+}{\rho^{(0)}} (1 - \alpha_1^{(0)}), \quad \alpha_{2+} = 1 - \alpha_{1+},$$

$$R_- = \rho^{(1)} \left[\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(1)} \left(1 - \frac{\gamma^{(1)} - 1}{2\alpha_1^{(1)}} \frac{U - u^{(1)}}{a^{(1)}} \right)^{-\frac{2}{\gamma^{(1)} - 1}} \right]^{-1}, \quad \alpha_{1-} = 1 - \frac{R_-}{\rho^{(1)}} (1 - \alpha_1^{(1)}), \quad \alpha_{2-} = 1 - \alpha_{1-},$$

$$D_+ = u^{(0)} + a^{(0)} \sqrt{\frac{\alpha_1^{(0)}}{\alpha_{1+}} \left(\frac{\gamma^{(0)} + 2\alpha_{1+} - 1}{2\gamma^{(0)}} \frac{P}{p^{(0)}} + \frac{\gamma^{(0)} - 2\alpha_{1+} + 1}{2\gamma^{(0)}} \right)}.$$

Решение в области $-\frac{1}{\alpha_1^{(1)}} < \xi < \frac{U - a^{(2)} - u^{(1)}}{a^{(1)} \alpha_1^{(1)}}$ центрированной волны разрежения зависит от автомодельной переменной $\xi = \frac{\frac{x-x_0}{t} - u^{(1)}}{a^{(1)} \alpha_1^{(1)}}$:

$$\left[\frac{(1 - \alpha_1^{(1)}) \alpha_1}{(1 - \alpha_1) \alpha_1^{(1)}} \right]^{\frac{\gamma^{(1)} - 1}{2}} = \frac{2\alpha_1 + \gamma^{(1)} - 1}{\alpha_1 (2 - (\gamma^{(1)} - 1) \xi)}, \quad u = \frac{2\alpha_1^{(1)} a^{(1)}}{\gamma^{(1)} + 2\alpha_1 - 1} (\alpha_1 \xi + 1) + u^{(1)},$$

$$p = p^{(1)} \left(1 - \frac{(\gamma^{(1)} - 1) (u - u^{(1)})}{2\alpha_1^{(1)} a^{(1)}} \right)^{\frac{2\gamma^{(1)}}{\gamma^{(1)} - 1}}, \quad \rho = \rho^{(1)} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^{(1)}} \left(\frac{p}{p^{(1)}} \right)^{\frac{1}{\gamma^{(1)}}}.$$

В приведенные соотношения входят вспомогательные функции для областей низкого ($j = 0$) и высокого ($j = 1$) давлений $\chi^{(j)} = \frac{\gamma^{(j)} + 2\alpha_1^{(j)} - 1}{\gamma^{(j)} - 1}$ и $\kappa^{(j)} = \frac{\gamma^{(j)} + 1}{\gamma^{(j)} - 1}$. Скорость звука в равновесной двухфазной среде определяется по формуле $a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho \alpha_1}}$, где термодинамически равновесный показатель политропы смеси — $\gamma = 1 + \frac{\zeta_1 R_1}{\zeta_1 c_v + \zeta_2 c_2}$. Он зависит от физических свойств фаз (теплоемкостей c_v , c_2 и газовой постоянной R_1), а также от их массовых концентраций $\zeta_i = \frac{\rho_i}{\rho}$.

На рис. 1 показаны зависимости показателя политропы γ и скорости звука смеси a от начальной объемной доли частиц $\alpha_2^{(1)}$ и давления $p^{(1)}$. Взаимосвязь объемных и массовых концентраций фаз определяются из соотношений

$$\zeta_2 = \frac{\alpha_2}{1 + (1 - \alpha_2)(\lambda - 1)}, \quad \lambda = \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}, \quad \zeta_1 + \zeta_2 = 1.$$

С ростом объемной доли $\alpha_2^{(1)}$ дисперсной фазы от 0 до 0,5 показатель политропы γ уменьшается от $\gamma = \gamma_1 = 1,4$ до значения, зависящего от давления $p^{(1)}$ (рис. 1, а, кривые 1–3). Причем для небольших начальных давлений его величина близка к единице, например $\gamma = 1,00018$ при $p^{(1)} = 10^5$ Па и $\alpha_2^{(1)} = 0,5$. Скорость звука также убывает с увеличением содержания взвешенных частиц (рис. 1, б, кривые 1–3) и может принимать достаточно малые значения порядка метров в секунду. Это является причиной изученных ранее аномальных ударно-волновых структур в потоках газозвесей. Скорость звука в двухфазной среде зависит не только от температуры, но и от давления. При этом чем больше концентрация дисперсной фазы, тем ниже скорость звука (рис. 1, в, кривые 1–3).

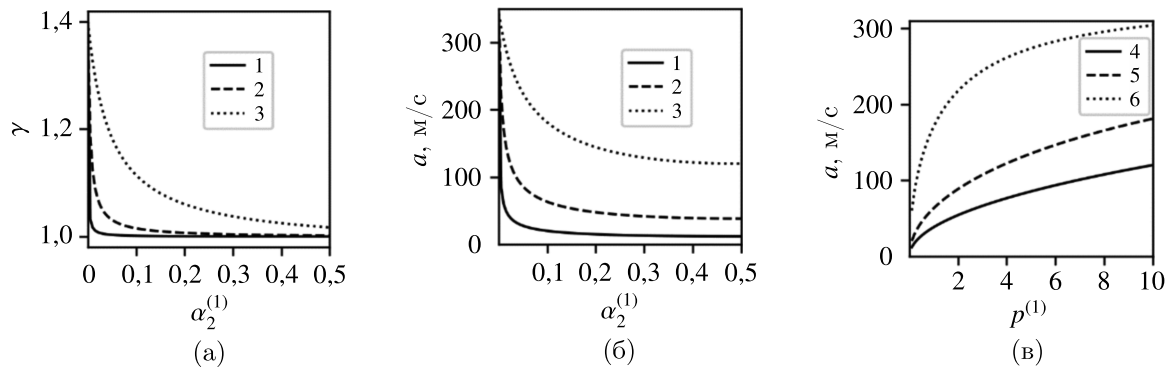


Рис. 1. Зависимости показателя политропы γ от объемной доли частиц $\alpha_2^{(1)}$ (а), равновесной скорости звука газозвеси a от объемной доли частиц $\alpha_2^{(1)}$ (б) и от начального давления $p^{(1)}$ (в). Кривые при постоянных значениях $p^{(1)}$ (1 — 0,1; 2 — 1; 3 — 10 МПа) и $\alpha_2^{(1)}$ (4 — 0,5; 5 — 0,1; 6 — 0,01)

Поставленная задача решалась в неравновесной формулировке законов сохранения (1) на равномерной сетке, содержащей 1600 ячеек с шагом $h = 0,01$ м. Камера высокого давления занимала в начальный момент времени область $0 \leq x \leq x_0 = 0,32$ м. Заданы граничные условия непротекания слева и свободного стока справа. Большой начальный перепад давления и плотности накладывает особенности численного решения задачи. Для обеспечения устойчивости и точности начало расчета выполнялось с увеличением числа Куранта и численной вязкости в соответствии с методикой работы [Садин, 2022b]. Для расчетов использовалась численная схема с ограничителями вязкости MINMOD. Функция ограничения численных потоков выбиралась для мелких частиц $d = 0,1$ мкм VANLEER или более диссипативная функция MINMOD для расчетов течений с крупной фракцией смеси $d = 10$ мкм.

На рис. 2 показаны расчетные профили относительных величин давления, плотности смеси и скорости частиц диаметром $d = 0,1$ мкм для различных начальных давлений в камере высокого давления при постоянном значении $\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} = 10^6$. Для сравнения на этом рисунке приведены соответствующие кривые асимптотически точных решений.

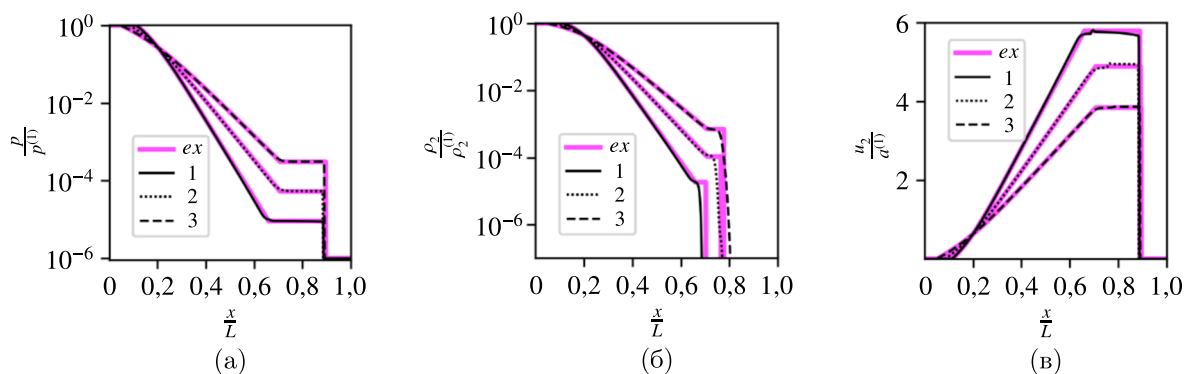


Рис. 2. Распределения относительных величин давления (а), плотности (б) и скорости (в) частиц $d = 0,1$ мкм в моменты времени $t_f = 114; 48,0; 20,0$ мс, соответствующие начальным давлениям $p^{(1)}$: 1 — 0,1; 2 — 1; 3 — 10 МПа; ex — асимптотически точные решения

Числа Стокса для указанных вариантов расчета (начальных давлений) следующие: $Stk \cdot 10^7 = 3,68; 9,80; 24,1$. Это указывает, что течение газозвеси близко к равновесному. Расчетные кривые согласуются с точными решениями. С ростом начального давления ожидаемо

возрастают значения давления $\frac{p^{(3)}}{p^{(1)}}$ и плотности $\frac{\rho_2^{(3)}}{\rho_2^{(1)}}$ в зоне постоянного течения (рис. 2, а, б). Однако относительные значения скорости $\frac{u_2^{(3)}}{a^{(1)}}$ при этом уменьшаются (рис. 2, в). Это объясняется нелинейной зависимостью скорости звука в газодисперсной смеси $a^{(1)}$ от давления $p^{(1)}$.

Результаты расчетов разлета газозвеси с частицами диаметром $d = 10$ мкм из камеры высокого давления $p^{(1)} = 1$ МПа в область разреженного газа при числе Стокса $\text{Stk} \cdot 10^3 = 9,80$ представлено на рис. 3. Для больших чисел Стокса происходит расслоение течения смеси на газовую и дисперсную составляющие. Общий в начальный момент времени контактный разрыв, разделяющий смесь и область разреженного газа, расщепляется на газовую (c_1) и дисперсную (c_2) контактные границы вслед за ударной волной s . Отметим, что при изменении размера частиц на два порядка газодинамические параметры смеси в области волны разрежения и почти до теоретической равновесной границы раздела сред близки к асимптотически точным решениям.

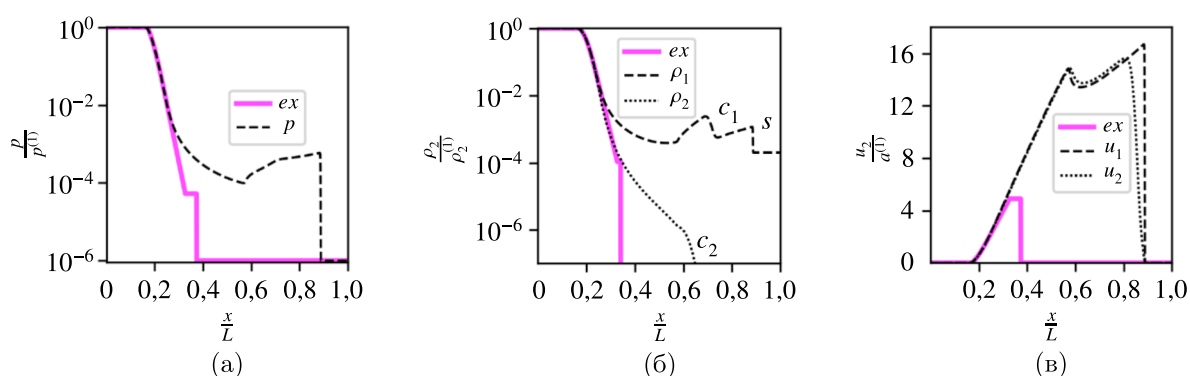


Рис. 3. Распределения относительных величин давления p (а), плотностей газа ρ_1 и частиц ρ_2 (б), скоростей газа u_1 и частиц u_2 (в) при $d = 10$ мкм в момент времени $t_f = 12,0$ мс, соответствующие начальному давлению $p^{(1)} = 1$ МПа; ex — асимптотически точные решения

3. Пространственный разлет газозвеси с осевой симметрией

В начальный момент времени цилиндрический объем, длина и радиус которого составляют $H = R = 0,32$ м, заполнен покоящейся ($\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0$) смесью газа повышенного давления $p^{(1)} = 1$ МПа и монодисперсных частиц. За пределами цилиндра находится разреженная ($p^{(0)} = 1$ Па) газовая среда. Термодинамические параметры и физические константы соответствуют указанным выше значениям. Система координат связана с центром цилиндра. Ось x направлена вдоль его оси, а ось y — по радиусу.

В момент $t = 0$ цилиндрическая оболочка мгновенно удаляется и начинается процесс нестационарного разлета газозвеси. Ввиду симметрии задача решалась численно в первом квадранте (в положительном направлении осей координат) со свободными внешними граничными условиями. В расчетах использовалась равномерная сетка 400×400 с размерами ячейки $h = h_x = h_y = 0,01$ м.

На рис. 4 представлены результаты моделирования расширения газодисперсной смеси с частицами $d = 0,1$ мкм в виде теневых изображений функции десятичного логарифма с обратным знаком относительной плотности дисперсной составляющей смеси $-\lg\left(\frac{\rho_2}{\rho_2^{(1)}}\right)$. Интересно отметить, что в процессе разлета происходит последовательное изменение начальной цилиндрической формы дисперсной среды (рис. 4, а — выноска А). В следующий момент времени образуется форма в сечении шестигранника (рис. 4, а — выноска В). На следующем этапе расширения

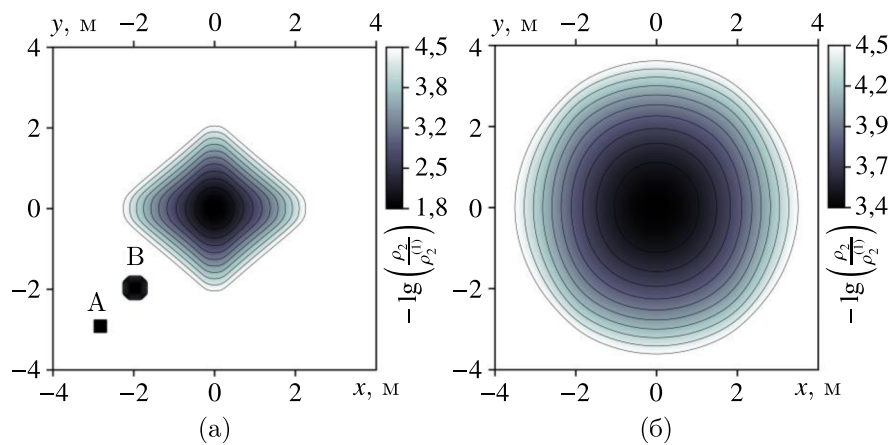


Рис. 4. Теневые изображения функции $-\lg\left(\frac{\rho_2}{\rho_2^{(1)}}\right)$ относительной плотности частиц $d = 0,1$ мкм в последовательные моменты времени: А — начальное состояние, В — 1 мс; (а) 15 мс; (б) 40 мс

частицы распределяются, образуя двухстороннюю коническую форму (рис. 4, а — основной рисунок). В дальнейшем формируется дисперсное образование практически идеального шара.

Эволюция дисперсной среды для частиц диаметром $d = 10$ мкм, показанная на рис. 5, проходит аналогичные этапы от начальной цилиндрической формы до образования, близкого к шару. Как в случае одномерного разлета газозвеси (см. рис. 2, б и 3, б), так и при пространственном расширении (см. рис. 4 и 5) распределения относительной плотности близки для частиц различных размеров.

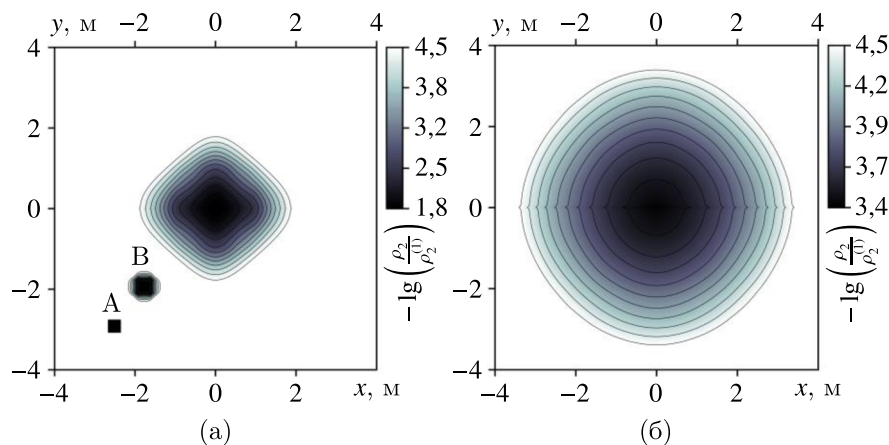


Рис. 5. Теневые изображения функции $-\lg\left(\frac{\rho_2}{\rho_2^{(1)}}\right)$ относительной плотности частиц $d = 10$ мкм в последовательные моменты времени: А — начальное состояние, В — 1 мс; (а) 15 мс; (б) 40 мс

Действительно, установим в расчетной области виртуальные датчики плотности частиц в точках $(x, y) = (0, 1)$ и $(0, 2)$ м. На рис. 6 показаны изменения плотности дисперсной фазы в указанных точках во времени для случаев разлета газозвеси с частицами $d = 0,1$ мкм (кривые 1 и 2) и 10 мкм (кривые 3 и 4).

В первом случае с приходом контактной границы происходит скачкообразное увеличение плотности. Для крупных частиц наблюдается дисперсия фронта концентрации частиц. В определенные моменты времени кривые изменения плотности достигают максимального значения, после чего происходит их постепенное уменьшение.

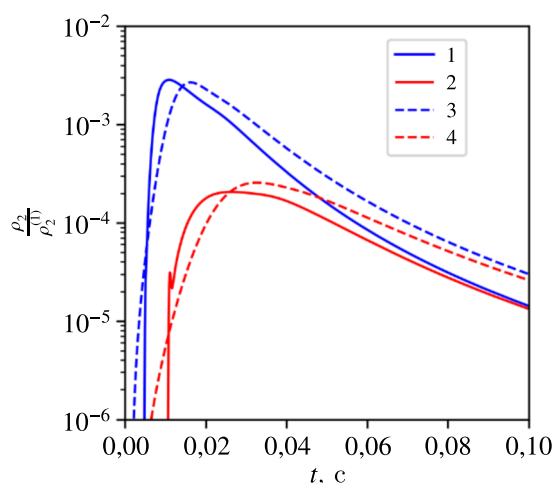


Рис. 6. Изменения относительной плотности дисперсной фазы в точках $(x, y) = (0, 1)$ и $(0, 2)$ м во времени для частиц $d = 0,1$ мкм (кривые 1 и 2) и 10 мкм (кривые 3 и 4)

Заключение

Моделирование течений газа и газозвесей с большим начальным отношением давлений традиционно относится к трудным проблемам вычислительной гидродинамики. В работе использован гибридный метод крупных частиц высокой разрешающей способности. Преимуществами метода являются высокая устойчивость и монотонность получаемых численных решений за счет двухэтапной регуляризации. Для рассматриваемых условий задачи точность метода подтверждена сопоставлением с асимптотически точными решениями.

Наличие взвешенных частиц наделяет смесь необычными свойствами. Показатель политропы и скорость звука в газозвеси зависят не только от температуры, но и от давления и концентрации частиц. С ростом давления значения показателя политропы и скорости звука увеличиваются, а с ростом объемной доли дисперсной фазы — уменьшаются. При распаде произвольного разрыва с ростом начального давления наблюдается неожиданное в сравнении с «чистой» газодинамикой уменьшение относительной скорости смеси в зоне постоянного течения. Этот факт объясняется нелинейной зависимостью скорости звука в газодисперсной смеси от давления.

С увеличением числа Стокса происходит расслоение течения смеси на газовую и дисперсную составляющие. Общий в начальный момент времени контактный разрыв, разделяющий смесь и область разреженного газа, расщепляется на газовую и дисперсную контактные границы. Практически важный вывод заключается в том, что при изменении размера частиц на два порядка газодинамические параметры смеси в области волны разрежения и до границы раздела сред близки между собой.

В процессе пространственного разлета происходит последовательное изменение начальной цилиндрической формы дисперсной среды в форму с сечением шестигранника. На следующем этапе расширения частицы распределяются, образуя двухстороннюю коническую форму. В дальнейшем формируется дисперсное образование практически идеального шара для мелких частиц или близкого к нему для более крупных частиц.

Предложенные в работе математическая модель и методика расчета могут служить теоретической основой изучения природных и антропогенных явлений разлета и эволюции дисперсных образований в верхних слоях атмосферы.

Список литературы (References)

- Андрущенко В. А., Ступицкий Е. Л. Численные исследования структуры возмущенных областей, образованных мощными взрывами на различных высотах. Обзор // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12, № 1. — С. 97–140.
- Andruschenko V. A., Stupitsky E. L. Chislennye issledovaniya struktury vozmushchennykh oblastei, obrazovannykh moshchnymi vzryvami na razlichnykh vysotakh. Obzor [Numerical studies of the structure of perturbed regions formed by powerful explosions at various heights. A review] // Computer Research and Modeling. — 2020. — Vol. 12, No. 1. — P. 97–140 (in Russian).
- Богданюк Д. О., Волков К. Н., Емельянов В. Н., Пустовалов А. В. Газовая динамика стационарных сверхзвуковых газовых струй с инертными частицами при их истечении в среду с низким давлением // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2023. — Т. 23, № 2. — С. 403–412.
- Bogdanyuk D. O., Volkov K. N., Emelyanov V. N., Pustovalov A. V. Gazovaya dinamika statsionarnykh sverkhzvukovykh gazovykh struy s inertnymi chastitsami pri ikh istechenii v sredu s nizkim davleniem [Gas dynamics of steady-state supersonic gas jets with inert particles flowing into a low-pressure environment] // Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics. — 2023. — Vol. 23, No. 2. — P. 403–412 (in Russian).
- Вараксин А. Ю. Двухфазные потоки с твердыми частицами, каплями и пузырями: проблемы и результаты исследований (обзор) // Теплофизика высоких температур. — 2020. — Т. 58, № 4. — С. 646–669.
- Varaksin A. Yu. Two-phase flows with solid particles, droplets, and bubbles: problems and research results (review) // High Temp. — 2020. — Vol. 58. — P. 595–614. (Original Russian paper: Varaksin A. Yu. Dvuhfaznye potoki s tverdymi chastitsami, kapljami i puzyrjami: problemy i rezul'taty issledovaniy (obzor) // Teplofizika vysokih temperatur. — 2020. — Vol. 58, No. 4. — P. 646–669.)
- Карабасов С. А. О возможностях методов второго порядка аппроксимации на примере модельных задач газо- и гидродинамики // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22, № 7. — С. 93–120.
- Karabasov S. A. On the power of second-order accurate numerical methods for model problems of gas- and hydrodynamics // Math. Models & Comput. Simul. — 2011. — Vol. 3, No. 1. — P. 92–112. (Original Russian paper: Karabasov S. A. O vozmozhnostyah metodov vtorogo porjadka approksimacii na primere model'nykh zadach gazo- i gidrodinamiki // Matematicheskoe modelirovanie. — 2010. — Vol. 22, No. 7. — P. 93–120.)
- Карпаев А. А., Алиев Р. Р. Применение упрощенного неявного метода Эйлера для решения задач электрофизиологии // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12, № 4. — С. 845–864.
- Karpaev A. A., Aliev R. R. Primenenie uproshtshennogo neyavnogo metoda Eilera dlya resheniya zadach elektrofiziologii [Application of simplified implicit Euler method for electrophysiological models] // Computer Research and Modeling. — 2020. — Vol. 12, No. 4. — P. 845–864 (in Russian).
- Меньшов И. С. Точные и приближенные решения задачи Римана для уравнений сжимаемых двухфазных течений // Матем. моделирование. — 2016. — Т. 28, № 12. — С. 33–55.
- Menshov I. S. Exact and approximate Riemann solvers for compressible two-phase flows // Math. Models Comput. Simul. — 2017. — Vol. 9. — P. 405–422. (Original Russian paper: Menshov I. S. Tochnye i priblizhennye resheniya zadachi Rimana dlja uravnenij szhimaemykh dvuhfaznykh techenij // Matem. modelirovanie. — 2016. — Vol. 28, No. 12. — P. 33–55.)
- Назаренко А. И. Моделирование космического мусора. — М.: ИКИ РАН, 2013. — 216 с.
- Nazarenko A. I. Modelirovanie kosmicheskogo musora [Modeling of space debris]. — Moscow: IKI RAS, 2013. — 216 p. (in Russian).
- Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. — М.: Наука, 1987. — 464 с.
- Nigmatulin R. I. Dinamika mnogofaznykh sred [Dynamics of multiphase media]. Part 1. — Moscow: Nauka, 1987. — 464 p. (in Russian).
- Садин Д. В. Метод расчета волновых гетерогенных течений с интенсивным межфазным взаимодействием // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1998а. — Т. 38, № 6. — С. 1033–1039.
- Sadin D. V. A method for computing heterogeneous wave flows with intense phase interaction // Comput. Math. and Math. Phys. — 1998. — Vol. 38, No. 6. — P. 987–993. (Original Russian article: Sadin D. V. Metod rascheta volnovykh geterogennykh techenij s intensivnym mezhfaznym vzaimodejstviem // Comput. Math. and Math. Phys. — 1998a. — Vol. 38, No. 6. — P. 1033–1039.)
- Садин Д. В. О сходимости одного класса разностных схем для уравнений нестационарного движения газа в дисперсной среде // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1998b. — Т. 38, № 9. — С. 1572–1577.

- Sadin D. V.* On the convergence of a certain class of difference schemes for the equations of unsteady gas motion in a disperse medium // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 1998. — Vol. 38, No. 9. — P. 1508–1513. (Original Russian article: *Sadin D. V.* O skhodimosti odnogo klassa raznostnykh skhem dlya uravnenij nestacionarnogo dvizheniya gaza v dispersnoy srede // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 1998b. — Vol. 38, No. 9. — P. 1572–1577.)
- Садин Д. В.* Тестовые задачи динамики газовзвесей с использованием асимптотически точных решений // *Математическое моделирование.* — 2022a. — Т. 34, № 12. — С. 59–74.
- Sadin D. V.* Test problems of gas suspension dynamics using asymptotically exact solutions // *Math. Models Comput. Simul.* — 2023. — Vol. 15. — P. 564–573. (Original Russian paper: *Sadin D. V.* Testovye zadachi dinamiki gazovzvesej s ispol'zovaniem asimptoticheski tochnykh reshenij // *Matem. modelirovanie.* — 2022a. — Vol. 34, No. 12. — P. 59–74.)
- Садин Д. В.* Эффективная реализация гибридного метода крупных частиц // *Матем. моделирование.* — 2022b. — Т. 34, № 4. — С. 113–127.
- Sadin D. V.* Efficient implementation of the hybrid large particle method // *Math. Models Comput. Simul.* — 2022. — Vol. 14. — P. 946–954. (Original Russian paper: *Sadin D. V.* Effektivnaya realizaciya gibridnogo metoda krupnykh chastic // *Matem. modelirovanie.* — 2022b. — Vol. 34, No. 4. — P. 113–127.)
- Садин Д. В.* TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* — 2016. — Т. 56, № 12. — С. 2098–2109.
- Sadin D. V.* TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 2016. — Vol. 56. — P. 2068–2078. (Original Russian article: *Sadin D. V.* TVD-skhem dlya zhestkikh zadach volnovoj dinamiki geterogennykh sred negiperbolicheskogo nekonservativnogo tipa // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 2016. — Vol. 56, No. 12. — P. 2098–2109.)
- Садин Д. В., Варварский В. М.* Особенности нестационарного истечения газодисперсной среды в вакуум // *Прикладная механика и техническая физика.* — 2016. — Т. 57, № 3. — С. 39–48.
- Sadin D. V., Varvarskii V. M.* Specific features of unsteady exhaustion of a gas-particle medium into vacuum // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* — 2016. — Vol. 57, No. 3. — P. 422–431. (Original Russian paper: *Sadin D. V., Varvarskij V. M.* Osobennosti nestacionarnogo istecheniya gazodispersnoj sredy v vakuum // *Prikladnaja mehanika i tehniceskaja fizika.* — 2016. — Vol. 57, No. 3. — P. 39–48.)
- Стояновская О. П.* Лагранжев метод для жестких задач динамики двухфазной среды с релаксацией: частица–сетка или частица–частица // *Вычислительные методы и программирование.* — 2025. — Т. 26, № 2. — С. 208–227.
- Stoyanovskaya O. P.* Lagranzhev metod dlya zhestkikh zadach dinamiki dvuhfaznoj sredy s relaksaciej: chastica–setka ili chastica–chastica [Lagrangian method for stiff problems of two-phase dynamics with relaxation: particle–mesh vs particle–particle] // *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Numerical Methods and Programming]. — 2025. — Vol. 26, No. 2. — P. 208–227. — DOI: 10.26089/NumMet.v26r215 (in Russian).
- Стояновская О. П., Окладников Ф. А., Воробьев Э. И., Павлюченков Я. Н., Акимкин В. В.* Расчет динамики газопылевых околозвездных дисков: выход за пределы режима Эпштейна // *Астрономический журнал.* — 2020. — Т. 97, № 2. — С. 91–110.
- Stoyanovskaya O. P., Okladnikov F. A., Vorobyov E. I., Pavlyuchenkov Ya. N., Akimkin V. V.* Imulations of dynamical gas–dust circumstellar disks: going beyond the Epstein regime // *Astronomy Reports.* — 2020. — Vol. 64, No. 2. — P. 107–125. (Original Russian paper: *Stoyanovskaya O. P., Okladnikov F. A., Vorobyov E. I., Pavlyuchenkov Ya. N., Akimkin V. V.* Raschet dinamiki gazopylevykh okolozvezdnykh diskov: vyhod za predely rezhima Epsteina // *Astronomicheskii zhurnal.* — 2020. — Vol. 97, No. 2. — P. 91–110.)
- Ступицкий Е. Л., Андрущенко В. А.* Физические исследования, численное и аналитическое моделирование взрывных явлений. Обзор // *Компьютерные исследования и моделирование.* — 2020. — Т. 12, № 3. — С. 505–546.
- Stupitsky E. L., Andruschenko V. A.* Fizicheskie issledovaniya, chislennoye i analiticheskoye modelirovanie vzryvnykh yavleniy. Obzor [Physical studies, numerical and analytical modeling of explosive phenomena. A review] // *Computer Research and Modeling.* — 2020. — Vol. 12, No. 3. — P. 505–546 (in Russian).
- Чудновский А. Ф.* Теплообмен в дисперсных средах. — М.: Гостехиздат, 1954. — 444 с.
- Chudnovskij A. F.* Teploobmen v dispersnykh sredah. — Moscow: Gostehizdat, 1954. — 444 p. (in Russian).
- Ярыгин В. Н., Герасимов Ю. И., Крылов А. Н., Мишина Л. В., Приходько В. Г., Ярыгин И. В.* Газодинамика космических кораблей и орбитальных станций (обзор) // *Теплофизика и аэромеханика.* — 2011. — Т. 18, № 3. — С. 345–372.
- Yarygin V. N., Gerasimov Yu. I., Krylov A. N., Mishina L. V., Prihodko V. G., Yarygin I. V.* Gas dynamics of spacecraft and orbital stations (review) // *Thermophys. Aeromech.* — 2011. — Vol. 18, No. 3. — P. 333–358. (Original Russian paper: *Yarygin V. N., Gerasimov Yu. I., Krylov A. N., Mishina L. V., Prihodko V. G., Yarygin I. V.* Gazodinamika kosmicheskikh korabley i orbital'nykh stantsiy (obzor) // *Teplofizika i aeromekhanika.* — 2011. — Vol. 18, No. 3. — P. 345–372.)
- Akimkin V. V., Kirsanova M. S., Pavlyuchenkov Ya. N., Wiebe D. S.* Dust dynamics and evolution in H ii regions — II. Effects of dynamical coupling between dust and gas // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* — 2017. — Vol. 469, No. 1. — P. 630–638.

- Capecelatro J.* Modeling high-speed gas-particle flows relevant to spacecraft landings // *International Journal of Multiphase Flow*. — 2022. — Vol. 150. — Paper 104008.
- Cigala V., Kueppers U., Fernández J. J. P., Dingwell D. B.* Linking gas and particle ejection dynamics to boundary conditions in scaled shock-tube experiments // *Bull. Volcanol.* — 2021. — Vol. 83. — P. 53.
- Crowe C. T., Schwarzkopf J. D., Sommerfeld M., Tsuji Y.* Multiphase flows with droplets and particles. — 2nd ed. — Boca Raton: CRC Press, 2011. — 487 p.
- He Z., Zhang Y., Gao F., Li X., Tian B.* An improved accurate monotonicity-preserving scheme for the Euler equations // *Computers & Fluids*. — 2016. — Vol. 140. — P. 1–10.
- Henderson C. B.* Drag coefficients of spheres in continuum and rarefied flows // *AIAA Journal*. — 1976. — Vol. 14, No. 6. — P. 707–708.
- Johansen A., Klahr H.* Dust diffusion in protoplanetary disks by magnetorotational turbulence // *Astrophysical Journal*. — 2005. — Vol. 634. — P. 353–371.
- Saurel R., Le Métayer O., Massoni J., Gavriluk S.* Shock jump relations for multiphase mixtures with stiff mechanical relaxation // *Shock Waves*. — 2007. — Vol. 16, No. 3. — P. 209–232.
- Stoyanovskaya O. P., Grigoryev V. V., Suslenkova A. N., Davydov M. N., Snytnikov N. V.* Two-phase gas and dust free expansion: three-dimensional benchmark problem for CFD codes // *Fluids*. — 2022. — Vol. 7, No. 2. — P. 51. — <https://doi.org/10.3390/fluids7020051>
- Tang H., Liu T.* A note on the conservative schemes for the Euler equations // *J. Comp. Phys.* — 2006. — Vol. 218. — P. 451–459.
- Xing Y., Shu C.-W.* High-order well-balanced finite difference WENO schemes for a class of hyperbolic systems with source terms // *Journal of Scientific Computing*. — 2006. — Vol. 27, No. 1–3. — P. 477–494.