

УДК: 681.5.015.4

LD-фильтр для оценки состояния парных марковских моделей

Ю. В. Цыганова^{1,2,3,a}, А. В. Цыганов^{2,b}

¹ Университет Иннополис,
Россия, 420500, г. Иннополис, ул. Университетская, д. 1

² Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова,
Россия, 432071, г. Ульяновск, пл. Ленина, д. 4/5

³ Ульяновский государственный университет,
Россия, 432017, Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42

E-mail: ^a y.tsyganova@innopolis.ru, ^b andrew.tsyganov@gmail.com

Получено 29.04.2026, после доработки — 17.07.2026.

Принято к публикации 20.07.2026.

В работе рассматривается задача оценивания состояния парных марковских моделей с гауссовыми шумами. Класс парных марковских моделей является обобщением класса классических скрытых марковских моделей. Ключевое отличие заключается в том, что марковским предполагается не скрытый процесс, а пара «состояние – наблюдение», что позволяет моделировать более сложные зависимости и, в частности, отказаться от требования марковости скрытого процесса. При этом для линейных гауссовских парных моделей сохраняется возможность применения методов калмановской фильтрации, что приводит к понятию парного фильтра Калмана.

Представлена новая модификация парного фильтра Калмана, основанная на применении модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта и LD-разложении ковариационных матриц. Основными результатами данной работы являются: новая LD-модификация парного фильтра Калмана (теорема 1); новый алгоритм LD-ПФК для оценки состояния парных марковских моделей на основе прямой процедуры модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта и LD-разложения ковариационных матриц (алгоритм 2); результаты сравнительного анализа вычислительных свойств алгоритмов парной фильтрации. Полученные теоретические результаты дополняют теорию парной фильтрации в классе линейных дискретных парных марковских моделей с гауссовыми шумами.

Разработанный алгоритм реализован на языке MATLAB. Проведены серии численных экспериментов, результаты которых демонстрируют его работоспособность и численные преимущества перед другими существующими модификациями парного фильтра Калмана.

Представленные результаты могут быть в дальнейшем использованы для построения новых методов параметрической идентификации парных марковских моделей.

Ключевые слова: парная марковская модель, парный фильтр Калмана, MWGS-ортогонализация, LD-разложение, алгоритм дискретной фильтрации

Работа выполнена в рамках Дополнительного соглашения № 073-03-2026-035/1 от 21.02.2026 г. к Соглашению о предоставлении субсидии федеральному бюджетному или автономному учреждению на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2026-035 от 23.01.2026 г., заключенного между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

UDC: 681.5.015.4

LD filter for the state estimation of pairwise Markov models

J. V. Tsyganova^{1,2,3,a}, A. V. Tsyganov^{2,b}

¹Innopolis University,

1 Universitetskaya st., Innopolis, 420500, Russia

²Ulyanovsk State University of Education,

4/5 Lenin Square, Ulyanovsk, 432071, Russia

³Ulyanovsk State University,

42 Leo Tolstoy st., Ulyanovsk, 432017, Russia

E-mail: ^a y.tsyganova@innopolis.ru, ^b andrew.tsyganov@gmail.com

Received 29.04.2026, after completion — 17.07.2026.

Accepted for publication 20.07.2026.

The paper addresses the state estimation problem for pairwise Markov models with Gaussian noises. The class of pairwise Markov models generalizes the classical hidden Markov models. The key difference lies in the assumption that the Markov property holds not for the hidden process alone, but for the pair consisting of the state and the observation. This allows modeling more complex dependencies and, in particular, eliminates the requirement of Markovianity for the hidden process. For linear Gaussian pairwise models, Kalman filtering methods remain applicable, leading to the concept of the pairwise Kalman filter.

This work proposes a new modification of the pairwise Kalman filter based on the application of modified weighted Gram–Schmidt orthogonalization and the LD decomposition of covariance matrices. The main results are as follows: a novel LD modification of the pairwise Kalman filter (Theorem 1); a new LD-PKF algorithm for state estimation of pairwise Markov models, based on a direct procedure of modified weighted Gram–Schmidt orthogonalization and LD decomposition of covariance matrices (algorithm 2); results of comparative analysis on the numerical properties of pairwise discrete filtering algorithms.

The obtained theoretical results complement the theory of pairwise filtering in the class of linear discrete pairwise Markov models with Gaussian noises.

The developed algorithm is implemented in MATLAB. A series of numerical experiments are conducted, and the results demonstrate its effectiveness and numerical advantages over other existing modifications of the pairwise Kalman filter.

The presented results can be further used to develop new methods for parameter identification of pairwise Markov models.

Keywords: pairwise Markov model, pairwise Kalman filter, MWGS orthogonalization, LD factorization, discrete-time filtering algorithm

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 4, pp. 747–764 (Russian).

This work was carried out under Additional Agreement No. 073-03-2026-035/1 dated February 21, 2026, to the Agreement on the provision of a subsidy to a federal budgetary or autonomous institution for the financial support of the fulfillment of a state assignment for the provision of public services (performance of work) No. 073-03-2026-035 dated January 23, 2026, concluded between Ulyanovsk State Pedagogical University and the Ministry of Education of the Russian Federation.

Введение

В теории статистической обработки сигналов ключевой проблемой выступает восстановление ненаблюдаемого случайного процесса $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ на основе имеющихся наблюдений $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Традиционным аппаратом для решения данной задачи служат скрытые марковские модели (СММ), строящиеся на предположении о марковской природе ненаблюдаемой последовательности. В частном случае линейной динамики и гауссовских возмущений задача оптимальной фильтрации имеет точное рекуррентное решение в виде фильтра Калмана (ФК) [Grewal, Andrews, 2015], получившего повсеместное распространение в инженерных и научных приложениях.

Подход, развитый в [Pieczynski, 2003], опирается на концепцию парных марковских цепей (ПМЦ), которая представляет собой естественное обобщение классических СММ. Основное ее отличие состоит в том, что свойство марковости приписывается не отдельному скрытому сигналу, а совместному процессу (x_n, y_n) , где $n \in \mathbb{N}$. Подобная формулировка позволяет учитывать более сложные стохастические взаимосвязи и снимает жесткое требование марковости скрытого состояния. Как показано в [Pieczynski, Desbouvries, 2003], для линейных гауссовских парных марковских моделей (ПММ) сохраняется возможность построения точных рекуррентных алгоритмов оценивания, что послужило основанием для разработки процедуры, известной как парный фильтр Калмана (ПФК).

Следует отметить, что концепция парных марковских моделей, а также соответствующая задача оптимальной фильтрации, поставленная для моделей данного типа, впервые изучались именно в отечественной литературе (см., например, [Liptser, Shiryaev, 1972]). Данный факт был также отмечен в [Pieczynski, Desbouvries, 2003].

Дальнейшее развитие парных марковских моделей привело к появлению триплетных марковских цепей (ТМЦ) [Pieczynski, 2007], где вводится дополнительный скрытый процесс, что расширяет возможности для моделирования случайных процессов. Важным направлением исследований стала разработка методов обработки сигналов и изображений на основе парных марковских моделей. В работе [Derrode, Pieczynski, 2004] показано, что применение ПММ позволяет уменьшить ошибку сегментации изображений по сравнению с классическими СММ. Парные марковские модели также нашли применение в задаче разделения изображений [Rafi et al., 2011] и многоканальной обработки информации с использованием теории свидетельств [Pieczynski, 2007].

Особое значение имеет задача идентификации параметров ПММ по наблюдаемым данным. Для этих целей применялись ЕМ-алгоритм [Ait El Fquih, Desbouvries, 2006] и итерационная условная оценка [Pieczynski, 2003]. Важным результатом является возможность построения точного фильтра Калмана для парных гауссовских систем с переключением [Benboudjema et al., 2011; Derrode, Pieczynski, 2013], а также обобщение на марковские деревья [Desbouvries et al., 2006].

При решении практических задач алгоритм ПФК, как и классический фильтр Калмана, может сталкиваться с проблемой численной неустойчивости, связанной с ошибками машинного округления. Для классического фильтра Калмана разработаны целые семейства факторизованных методов, повышающих устойчивость вычислений: квадратно-корневые алгоритмы на основе QR-преобразований, MWGS-ортогонализации и сингулярного разложения.

В последние годы факторизованные и квадратно-корневые методы фильтрации Калмана продолжают активно развиваться. Так, в работе [Kulikova, Kulikov, 2020] представлена SVD-реализация кубатурного фильтра Калмана, а в [Kulikova, Kulikov, 2024] предложен непрерывно-дискретный свободный от производных расширенный фильтр Калмана. В области робастной фильтрации можно отметить работу [Han, 2025], посвященную робастному фильтру Калмана. Среди современных практических применений факторизованных алгоритмов выделяется задача

трехмерного позиционирования в помещении, решенная с использованием UDU-факторизации расширенного фильтра Калмана [Bodrumlu, Caliskan, 2024]. В [Цыганов, Цыганова, 2025] разработан общий подход к построению градиентных методов параметрической идентификации на основе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта и алгоритмов дискретной фильтрации информационного типа.

Применение этих идей к парному фильтру Калмана впервые было предложено в работе [Nemesin, Derrode, 2012], где разработаны численно устойчивые версии алгоритмов фильтрации, сглаживания и ЕМ-оценивания параметров на основе ортогонального разложения. Вопросы численно устойчивой реализации ПФК также были исследованы в [Куликова, Цыганова, 2017; Kulikova, Tsyganova, 2017], где впервые предложена UD-модификация парного фильтра. В [Kulikova, 2017] разработан градиентный метод оценивания параметров ПММ, в котором уравнения чувствительности выводятся в терминах квадратных корней ковариационных матриц. Дальнейшее развитие предложенный метод получил в работе [Kulikova et al., 2020], где рассмотрены градиентные адаптивные алгоритмы для одновременного оценивания состояния и параметров в ПММ и ММО-системах. Недавние исследования [Kulikova et al., 2021] посвящены применению SVD-разложения для повышения устойчивости адаптивных фильтров в задачах эконометрического моделирования. В [Lehmann, Pieczynski, 2020] предложен робастный метод оценивания состояния для линейных парных марковских моделей на основе несмещенного фильтра с конечной импульсной характеристикой, устойчивый к параметрической неопределенности.

В настоящее время парные марковские модели продолжают находить новые области применения. Так, в [Gorynin et al., 2016] проведено численное сравнение СММ, ПММ и триплетных марковских моделей (ТММ) по точности восстановления скрытых состояний, показавшее, что использование обобщенных моделей позволяет почти вдвое снизить частоту ошибок по сравнению с классическими СММ. В [Gorynin et al., 2018] на основе обширных экспериментов Монте-Карло показано, что ПММ и ТММ могут улучшить качество сегментации временных рядов до 50 % по сравнению с СММ, что подтверждает целесообразность их применения в реальных задачах.

Эффективность ПММ для прогнозирования фондовых индексов показана в [Gorynin et al., 2017], где они демонстрируют преимущества перед классическими СММ благодаря более гибкой структуре, позволяющей моделировать такие эффекты, как кластеризация волатильности и асимметричная волатильность. В [Fernandes et al., 2026] представлены две нелинейные модификации парного фильтра Калмана — ЕРKF и UРKF, — которые демонстрируют точность, сравнимую с парным фильтром частиц, и успешно применяются к реальным финансовым данным. Также новые методы прогнозирования волатильности представлены в [Azeraf, 2024].

Алгоритмы многоцелевого сопровождения на основе множественных парных марковских цепей разработаны в [Zhou et al., 2024]. Преимущества парных гауссовских марковских моделей над скрытыми марковскими моделями при байесовском прогнозировании показаны в [Escudier et al., 2023].

Целью данной работы является построение новой численно устойчивой модификации парного фильтра Калмана на основе блочно-матричного LD-разложения. Предлагаемый алгоритм дополняет класс существующих численно устойчивых модификаций ПФК. В работе приводятся математическое обоснование эквивалентности предложенного подхода стандартному методу парной фильтрации, а также результаты численных экспериментов, демонстрирующие устойчивость разработанного алгоритма к ошибкам машинного округления в условиях плохой обусловленности задачи дискретной фильтрации. Показано численное преимущество новой LD-модификации ПФК в сравнении со стандартной, квадратно-корневой и UD-модификацией.

Постановка задачи

Рассмотрим модель гауссовского марковского процесса $\{t_k\}_{k=0}^N$ в виде линейной парной марковской стохастической системы [Nemesin, Derrode, 2012]:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{bmatrix}}_{t_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_{x,x} & F_{x,y} \\ F_{y,x} & F_{y,y} \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_k \\ y_{k-1} \end{bmatrix}}_{t_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} w_k^x \\ w_k^y \end{bmatrix}}_{w_k}, \quad (1)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ — скрытый (ненаблюдаемый) вектор состояния, $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ — доступные наблюдения, $\{w_k\}$ — последовательность нормально распределенных случайных векторов размера $n_x + n_y$ с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационной матрицей

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{x,x} & Q_{x,y} \\ Q_{x,y}^T & Q_{y,y} \end{bmatrix} > 0. \quad (2)$$

Начальное состояние $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0 > 0)$ не зависит от w_k .

Стандартный алгоритм парного фильтра Калмана [Куликова, Цыганова, 2017] на этапе инициализации вычисляет вспомогательные матрицы:

$$\widehat{F}_{x,x} = F_{x,x} - Q_{x,y} Q_{y,y}^{-1} F_{y,x}, \quad (3)$$

$$\widehat{F}_{x,y} = F_{x,y} - Q_{x,y} Q_{y,y}^{-1} F_{y,y}, \quad (4)$$

$$\widehat{Q}_{x,x} = Q_{x,x} - Q_{x,y} Q_{y,y}^{-1} Q_{y,x}. \quad (5)$$

Далее для $k = 0, \dots, N - 1$ рекуррентно выполняются два этапа.

Этап экстраполяции

$$\widehat{x}_{k+1|k} = \widehat{F}_{x,x} \widehat{x}_{k|k} + Q_{x,y} Q_{y,y}^{-1} y_k + \widehat{F}_{x,y} y_{k-1}, \quad (6)$$

$$P_{k+1|k} = \widehat{Q}_{x,x} + \widehat{F}_{x,x} P_{k|k} \widehat{F}_{x,x}^T. \quad (7)$$

Этап фильтрации

$$R_{e,k+1} = Q_{y,y} + F_{y,x} P_{k+1|k} F_{y,x}^T, \quad (8)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} F_{y,x}^T R_{e,k+1}^{-1}, \quad (9)$$

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - K_{k+1} R_{e,k+1} K_{k+1}^T, \quad (10)$$

$$e_{k+1} = y_{k+1} - F_{y,x} \widehat{x}_{k+1|k} - F_{y,y} y_k, \quad (11)$$

$$\widehat{x}_{k+1|k+1} = \widehat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} e_{k+1}. \quad (12)$$

Начальные значения для запуска алгоритма — $\widehat{x}_{0|0} = \bar{x}_0$ и $P_{0|0} = P_0$.

В результате для каждого дискретного момента времени $k = 1, \dots, N$ алгоритм ПФК позволяет вычислить оценки скрытого вектора состояния $\widehat{x}_{k|k}$ и ковариационные матрицы ошибок оценивания $P_{k|k}$ по доступным наблюдениям $\{y_0, y_1, \dots, y_N\}$.

Поставим задачу разработать новую численно эффективную LD-модификацию парного фильтра Калмана, основанную на применении модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта (MWGS-ортогонализации). Для получения основного результата применяется подход, аналогичный предложенному в [Цыганов и др., 2023].

Метод MWGS-LD-ортогонализации

Решение поставленной задачи основано на прямой процедуре модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта (MWGS-LD), реализующей матричное LD-разложение. Для прямоугольной (в общем случае) матрицы $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$, $\text{rank } \mathcal{A} = n$) и диагональной весовой матрицы $\mathcal{D}_w > 0$ алгоритм обеспечивает разложение вида

$$\mathcal{A}^T \mathcal{D}_w \mathcal{A} = \mathcal{L} \mathcal{D} \mathcal{L}^T, \quad (13)$$

где $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — диагональная матрица. LD-разложение (13) получается в результате матричного ортогонального преобразования, определяемого матрицей $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ такой, что

$$\mathcal{A}^T = \mathcal{L} B^T, \quad (14)$$

$$B^T \mathcal{D}_w B = \mathcal{D}. \quad (15)$$

Теоретическое обоснование MWGS-алгоритма в случае LD-разложения можно найти в [Семушин и др., 2011, лемма 3.2, с. 159].

Приведем формулировку алгоритма MWGS_LD в виде псевдокода (алгоритм 1). Алгоритм 1 позволяет получить LD-разложение для пары матриц $[\mathcal{A}, \mathcal{D}_w]$. Результатом является пара матриц $[\mathcal{L}, \mathcal{D}]$.

Алгоритм 1. MWGS_LD

Вход: Матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, диагональная матрица весов $D_w \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Выход: Матрицы L, D, B такие, что $A^T = LB^T$, $A^T D_w A = LDL^T$, $B^T D_w B = D$

```

1  B = A
2  L = I_n
3  for k = 1 to n - 1 do
4      D(k, k) =  $\sum_{i=1}^m B(i, k)^2 D_w(i, i)$ 
5      for j = k + 1 to n do
6           $L(j, k) = \frac{\sum_{i=1}^m B(i, j) D_w(i, i) B(i, k)}{D(k, k)}$ 
7          for i = 1 to m do
8              B(i, j) = B(i, j) - L(j, k) · B(i, k)
9          end for
10     end for
11 end for
12 D(n, n) =  $\sum_{i=1}^m B(i, n)^2 D_w(i, i)$ 
```

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В алгоритме 1 величины $D(k, k)$, на которые происходит деление, являются положительными по построению в силу строки 4 алгоритма и положительной весовой матрицы D_w .

Математическое обоснование новой модификации LD-ПФК

Перейдем к построению новой LD-модификации парного фильтра Калмана. Рассмотрим представление ковариационных матриц ошибок оценивания на этапах экстраполяции и фильтрации в виде $P_{k+1|k} = L_{k+1|k} D_{k+1|k} L_{k+1|k}^T$ и $P_{k+1|k+1} = L_{k+1|k+1} D_{k+1|k+1} L_{k+1|k+1}^T$, где $L_{k+1|k}$ и $L_{k+1|k+1}$ —

нижние треугольные матрицы с единицами на диагонали, $D_{k+1|k}$ и $D_{k+1|k+1}$ — диагональные матрицы. LD-разложение существует для положительно определенной матрицы и может быть получено с помощью метода Холецкого [Grewal, Andrews, 2015].

Предположим, что на этапе инициализации алгоритма вычислены LD-разложения ковариационных матриц $P_0 = L_{P_0} D_{P_0} L_{P_0}^T$, $\widehat{Q}_{x,x} = L_Q D_Q L_Q^T$, $Q_{y,y} = L_R D_R L_R^T$. Поставим задачу разработать метод обновления LD-факторов ковариационных матриц $P_{k+1|k}$ и $P_{k+1|k+1}$, а также оценок вектора состояния $\widehat{x}_{k+1|k}$ и $\widehat{x}_{k+1|k+1}$ на этапах экстраполяции и фильтрации парного фильтра Калмана на основе алгоритма MWGS_LD.

Эквивалентность этапа экстраполяции алгоритмов ПФК и LD-ПФК

Лемма 1. Предположим, что уже вычислены LD-факторы $L_{k|k}$ и $D_{k|k}$ ковариационной матрицы $P_{k|k}$. Сформируем прямоугольную блочную матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} L_{k|k}^T \widehat{F}_{x,x}^T & L_Q^T \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

и весовую диагональную матрицу

$$\mathcal{D}_w = \begin{bmatrix} D_{k|k} & 0 \\ 0 & D_Q \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где L_Q и D_Q — LD-факторы ковариационной матрицы $\widehat{Q}_{x,x}$.

Тогда результатом применения алгоритма MWGS_LD к паре блочных матриц $[\mathcal{A}, \mathcal{D}_w]$ является другая пара блочных матриц $[\mathcal{L}, \mathcal{D}]$, где $\mathcal{L} = L_{k+1|k}$ и $\mathcal{D} = D_{k+1|k}$ — LD-факторы ковариационной матрицы $P_{k+1|k}$.

Доказательство. Применение алгоритма MWGS_LD к паре блочных матриц (16) и (17) влечет выполнение равенства (13) с учетом (7), а именно:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^T \mathcal{D} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} \widehat{F}_{x,x}^T L_{k|k} & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{k|k} & 0 \\ 0 & D_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{k|k}^T \widehat{F}_{x,x}^T \\ L_Q^T \end{bmatrix} = \widehat{F}_{x,x}^T L_{k|k} D_{k|k} L_{k|k}^T \widehat{F}_{x,x}^T + L_Q D_Q L_Q^T = \\ &= \widehat{F}_{x,x}^T P_{k|k} \widehat{F}_{x,x}^T + \widehat{Q}_{x,x} = P_{k+1|k}. \end{aligned} \quad (18)$$

С другой стороны,

$$\mathcal{L} \mathcal{D} \mathcal{L}^T = L_{k+1|k} D_{k+1|k} L_{k+1|k}^T. \quad (19)$$

В силу равенств (18) и (19) приходим к верному соотношению $P_{k+1|k} = L_{k+1|k} D_{k+1|k} L_{k+1|k}^T$. $\square$

Эквивалентность этапа фильтрации алгоритмов ПФК и LD-ПФК

Лемма 2. Предположим, что уже вычислены LD-факторы $L_{k+1|k}$ и $D_{k+1|k}$ ковариационной матрицы $P_{k+1|k}$. Сформируем блочную матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} L_R & F_{y,x} L_{k+1|k} \\ 0 & L_{k+1|k} \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

и весовую диагональную матрицу

$$\mathcal{D}_w = \begin{bmatrix} D_R & 0 \\ 0 & D_{k+1|k} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где L_R и D_R — LD-факторы ковариационной матрицы $\widehat{Q}_{y,y}$.

Тогда результатом применения алгоритма MWGS_LD к паре блочных матриц $[\mathcal{A}, \mathcal{D}_w]$ является другая пара блочных матриц $[\mathcal{L}, \mathcal{D}]$, где

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} L_{R_{e,k+1}} & 0 \\ K_{k+1} L_{R_{e,k+1}} & L_{k+1|k+1} \end{bmatrix} \quad u \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} D_{R_{e,k+1}} & 0 \\ 0 & D_{k+1|k+1} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

в которых матричные блоки $L_{k+1|k+1}$ и $D_{k+1|k+1}$ являются LD-факторами ковариационной матрицы $P_{k+1|k+1}$.

Доказательство. Применение алгоритма MWGS_LD к паре блочных матриц (20) и (21) влечет выполнение равенства (13). С одной стороны,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^T \mathcal{D}_w \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} L_R & F_{y,x} L_{k+1|k} \\ 0 & L_{k+1|k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_R & 0 \\ 0 & D_{k+1|k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_R^T & 0 \\ (F_{y,x} L_{k+1|k})^T & L_{k+1|k}^T \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} L_R D_R L_R^T + F_{y,x} L_{k+1|k} D_{k+1|k} (F_{y,x} L_{k+1|k})^T & F_{y,x} L_{k+1|k} D_{k+1|k} L_{k+1|k}^T \\ L_{k+1|k} D_{k+1|k} (F_{y,x} L_{k+1|k})^T & L_{k+1|k} D_{k+1|k} L_{k+1|k}^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $L_R^T D_R L_R = Q_{y,y}$, $L_{k+1|k}^T D_{k+1|k} L_{k+1|k} = P_{k+1|k}$, а $F_{y,x} L_{k+1|k} D_{k+1|k} L_{k+1|k}^T = F_{y,x} P_{k+1|k}$, получим

$$\mathcal{A}^T \mathcal{D}_w \mathcal{A} = \begin{bmatrix} Q_{y,y} + F_{y,x} P_{k+1|k} F_{y,x}^T & F_{y,x} P_{k+1|k} \\ P_{k+1|k} F_{y,x}^T & P_{k+1|k} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \mathcal{D} \mathcal{L}^T &= \begin{bmatrix} L_{R_{e,k+1}} & 0 \\ K_{k+1} L_{R_{e,k+1}} & L_{k+1|k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{R_{e,k+1}} & 0 \\ 0 & D_{k+1|k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{R_{e,k+1}}^T & L_{R_{e,k+1}}^T K_{k+1}^T \\ 0 & L_{k+1|k+1}^T \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} L_{R_{e,k+1}} D_{R_{e,k+1}} L_{R_{e,k+1}}^T & L_{R_{e,k+1}} D_{R_{e,k+1}} L_{R_{e,k+1}}^T K_{k+1}^T \\ K_{k+1} L_{R_{e,k+1}} D_{R_{e,k+1}} L_{R_{e,k+1}}^T & K_{k+1} L_{R_{e,k+1}} D_{R_{e,k+1}} L_{R_{e,k+1}}^T K_{k+1}^T + L_{k+1|k+1}^T D_{k+1|k+1} L_{k+1|k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим поэлементные равенства в блочных матрицах (23) и (24).

Для матричного блока (1, 1) запишем верное равенство:

$$Q_{y,y} + F_{y,x} P_{k+1|k} F_{y,x}^T = L_{R_{e,k+1}} D_{R_{e,k+1}} L_{R_{e,k+1}}^T. \quad (25)$$

С учетом (8) матрицы $L_{R_{e,k+1}}$ и $D_{R_{e,k+1}}$ являются LD-факторами $R_{e,k+1}$, то есть $L_{R_{e,k+1}} D_{R_{e,k+1}} L_{R_{e,k+1}}^T = R_{e,k+1}$.

Для матричного блока (2, 1) (и также для матричного блока (1, 2) с учетом симметричности блочных матриц (23) и (24)) запишем верное равенство:

$$P_{k+1|k} F_{y,x}^T = K_{k+1} L_{R_{e,k+1}} D_{R_{e,k+1}} L_{R_{e,k+1}}^T = K_{k+1} R_{e,k+1}. \quad (26)$$

Отсюда

$$P_{k+1|k} F_{y,x}^T R_{e,k+1}^{-1} = K_{k+1}. \quad (27)$$

Равенство (27) в точности совпадает с (9), откуда следует, что в результате применения алгоритма MWGS_LD блоки с номерами (1, 2) и (2, 1) содержат матрицу K_{k+1} , равную соответствующей матрице в стандартном ПФК.

И наконец, запишем верное равенство для матричного блока (3, 3):

$$P_{k+1|k} = K_{k+1} L_{R_{e,k+1}} D_{R_{e,k+1}} L_{R_{e,k+1}}^T K_{k+1}^T + L_{k+1|k+1}^T D_{k+1|k+1} L_{k+1|k+1}. \quad (28)$$

Откуда

$$P_{k+1|k} - K_{k+1} R_{e,k+1} K_{k+1}^T = L_{k+1|k+1}^T D_{k+1|k+1} L_{k+1|k+1}. \quad (29)$$

Левая часть (29) в точности совпадает с правой частью (10), следовательно, $L_{k+1|k+1}^T D_{k+1|k+1} L_{k+1|k+1} = P_{k+1|k+1}$, то есть матрицы $L_{k+1|k+1}$ и $D_{k+1|k+1}$ являются LD-факторами ковариационной матрицы $P_{k+1|k}$. $\square$

Следствие 1. Из разложения (22) непосредственно следуют соотношения

$$R_{e,k+1} = L_{R_{e,k+1}} D_{R_{e,k+1}} L_{R_{e,k+1}}^T, \quad (30)$$

$$P_{k+1|k+1} = L_{k+1|k+1} D_{k+1|k+1} L_{k+1|k+1}^T, \quad (31)$$

$$P_{k+1|k} F_{y,x}^T = K_{k+1} R_{e,k+1}, \quad (32)$$

что полностью эквивалентно уравнениям (8)–(10) стандартного ПФК.

Эквивалентность обновления оценки вектора состояния на этапах экстраполяции и фильтрации

Уравнение обновления оценки вектора состояния $\widehat{x}_{k+1|k}$ на этапе экстраполяции для LD-модификации парного фильтра Калмана в точности совпадает с уравнением (6) в алгоритме ПФК.

Лемма 3. Обновление вектора состояния $\widehat{x}_{k+1|k}$ на этапе фильтрации для LD-модификации ПФК:

$$\widehat{x}_{k+1|k+1} = \widehat{x}_{k+1|k} + (K_{k+1} L_{R_e}) \bar{e}_{k+1}, \quad (33)$$

где

$$\bar{e}_{k+1} = L_{R_e}^{-1} (y_{k+1} - F_{y,x} \widehat{x}_{k+1|k} - F_{y,y} y_k), \quad (34)$$

эквивалентно обновлению (12) в стандартном алгоритме ПФК.

Доказательство. Подставляя (34) для $\bar{e}_{k+1}$ в (33), получим

$$\begin{aligned} \widehat{x}_{k+1|k+1} &= \widehat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} L_{R_e} \cdot L_{R_e}^{-1} (y_{k+1} - F_{y,x} \widehat{x}_{k+1|k} - F_{y,y} y_k) = \\ &= \widehat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} (y_{k+1} - F_{y,x} \widehat{x}_{k+1|k} - F_{y,y} y_k), \end{aligned}$$

что в точности совпадает с (12). $\square$

Полная формулировка алгоритма LD-ПФК

На основе доказанных лемм 1–3 сформулируем полный алгоритм LD-модификации парного фильтра Калмана.

Теорема 1. Алгоритм LD-ПФК алгебраически эквивалентен стандартному ПФК.

Доказательство. Эквивалентность этапа экстраполяции следует из леммы 1. Эквивалентность этапа фильтрации следует из леммы 2 и следствия из нее. Эквивалентность обновления оценки вектора состояния доказана в лемме 3. Таким образом, все шаги алгоритма LD-ПФК теоретически дают те же результаты, что и стандартный ПФК. $\square$

Алгоритм 2. LD-ПФК (LD-модификация парного фильтра Калмана)

Вход: $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_y) \times (n_x+n_y)}$, $Q \in \mathbb{R}^{(n_x+n_y) \times (n_x+n_y)}$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$, $P_0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P_0 > 0$, измерения $\{y_0, \dots, y_{N-1}\}$

Выход: Оценки $\{\hat{x}_{k|k}\}_{k=1}^N$, ковариационные матрицы $\{P_{k|k}\}_{k=1}^N$

Инициализация

- 1 Вычислить вспомогательные матрицы по формулам (3)–(5)
- 2 Выполнить LD-разложение: $P_0 = L_{P_0} D_{P_0} L_{P_0}^T$, $\widehat{Q}_{x,x} = L_Q D_Q L_Q^T$, $Q_{y,y} = L_R D_R L_R^T$
- 3 Начальные условия: $\widehat{x}_{0|0} = \bar{x}_0$, $L_{0|0} = L_{P_0}$, $D_{0|0} = D_{P_0}$
- 4 **for** $k = 0$ **to** $N - 1$ **do**

Этап экстраполяции

- 5 $\widehat{x}_{k+1|k} = \widehat{F}_{x,x} \widehat{x}_{k|k} + Q_{x,y} Q_{y,y}^{-1} y_k + \widehat{F}_{x,y} y_{k-1}$ (при $k = 0$ слагаемое с y_{-1} опускается)

- 6 Сформировать $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} L_{k|k}^T \widehat{F}_{x,x}^T & L_Q^T \\ 0 & D_Q \end{bmatrix}$, $\mathcal{D}_w = \begin{bmatrix} D_{k|k} & 0 \\ 0 & D_Q \end{bmatrix}$

- 7 $[L_{k+1|k}, D_{k+1|k}] = \text{MWGS-LD}(\mathcal{A}, \mathcal{D}_w)$

Этап фильтрации

- 8 Сформировать $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} L_R & F_{y,x} L_{k+1|k} \\ 0 & L_{k+1|k} \end{bmatrix}^T$, $\mathcal{D}_w = \begin{bmatrix} D_R & 0 \\ 0 & D_{k+1|k} \end{bmatrix}$

- 9 $[\mathcal{L}, \mathcal{D}] = \text{MWGS-LD}(\mathcal{A}, \mathcal{D}_w)$

- 10 Извлечь результаты из блочных массивов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{D}$:

$$L_{R_{e,k+1}} = \mathcal{L}(1 : n_y, 1 : n_y),$$

$$D_{R_{e,k+1}} = \mathcal{D}(1 : n_y, 1 : n_y),$$

$$L_{k+1|k+1} = \mathcal{L}(n_y + 1 : \text{end}, n_y + 1 : \text{end}),$$

$$D_{k+1|k+1} = \mathcal{D}(n_y + 1 : \text{end}, n_y + 1 : \text{end}),$$

$$K_{k+1} L_{R_{e,k+1}} = \mathcal{L}(n_y + 1 : \text{end}, 1 : n_y)$$

- 11 $e_{k+1} = y_{k+1} - F_{y,x} \widehat{x}_{k+1|k} - F_{y,y} y_k$

- 12 $\bar{e}_{k+1} = L_{R_{e,k+1}}^{-1} e_{k+1}$

- 13 $\widehat{x}_{k+1|k+1} = \widehat{x}_{k+1|k} + (K_{k+1} L_{R_{e,k+1}}) \bar{e}_{k+1}$

- 14 Сохранить $\widehat{x}_{k+1|k+1}$ и $P_{k+1|k+1} = L_{k+1|k+1} D_{k+1|k+1} L_{k+1|k+1}^T$

- 15 **end for**

Результаты численных экспериментов

Для подтверждения теоретических результатов и демонстрации численной устойчивости разработанного алгоритма парной фильтрации проведены две серии вычислительных экспериментов. В первой серии исследуются алгебраическая эквивалентность и вычислительная сложность различных модификаций ПФК (пример 1). Во второй серии анализируется численная устойчивость алгоритмов на примере плохо обусловленной задачи (пример 2). Все тесты проведены в программной среде MATLAB 2017a на программно-аппаратной платформе: операционная система — Windows 11, процессор — 11th Gen Intel Core i3-1115G4 @ 3,00 ГГц, 8 ГБ оперативной памяти.

Для проведения экспериментов разработан программный комплекс на языке MATLAB, реализующий стандартный парный фильтр Калмана, а также его численно устойчивые модификации: LD-, UD- и SR-версии. Комплекс включает набор вспомогательных функций для ге-

нерации тестовых данных, выполнения факторизации ковариационных матриц и визуализации результатов. Программная реализация одного шага LD-модификации парного фильтра Калмана приведена в листинге 1. Полный программный код всех реализованных алгоритмов может быть предоставлен авторами по запросу.

Листинг 1. pkf_step_ld.m

```
function [X_new, L_P_new, D_P_new, innov, L_Re, D_Re, X_pred, L_P_pred, ...
        D_P_pred, K] = pkf_step_ld(X, L_P, D_P, y_curr, y_prev, y_next, ...
        F, Fxy, H, Fyy, SdivR, L_Q, D_Q, L_R, D_R, u)
%PKF_STEP_LD One step of the LD-based Pairwise Kalman Filter.
% Inputs:
%   X, L_P, D_P - current state and LD factors of P_{k|k}
%   y_curr, y_prev, y_next - measurements
%   F, Fxy, H, Fyy, SdivR - transformed matrices
%   L_Q, D_Q, L_R, D_R - LD factors of Q and R
%   u - control input vector (optional)
% Outputs:
%   X_new, L_P_new, D_P_new - updated state and LD factors of P_{k+1|k+1}
%   innov - innovation epsilon_{k+1}
%   L_Re, D_Re - LD factors of innovation covariance R_{e,k+1}
%   X_pred - predicted state x_{k+1|k}
%   L_P_pred, D_P_pred - LD factors of predicted covariance P_{k+1|k}
%   K - Kalman gain (full matrix)

if nargin < 16 || isempty(u)
    u = zeros(size(X));
end

Bu = SdivR * y_curr;
if isempty(y_prev)
    X_pred = F * X + Bu + u;
else
    X_pred = F * X + Bu + Fxy * y_prev + u;
end

A_pred = [L_P' * F'; L_Q'];
Dw_pred = diag([diag(D_P); diag(D_Q)]);
[L_P_pred, D_P_pred, ~] = mwgs_ld(A_pred, Dw_pred);

innov = y_next - H * X_pred - Fyy * y_curr;

A_upd = [L_R, H * L_P_pred;
        zeros(size(L_P_pred,1), size(H,1)), L_P_pred]';
Dw_upd = diag([diag(D_R); diag(D_P_pred)]);
[L_joint, D_joint, ~] = mwgs_ld(A_upd, Dw_upd);

nx = size(L_P_pred, 1);
ny = size(H, 1);
L_P_new = L_joint(ny+1:end, ny+1:end);
D_P_new = D_joint(ny+1:end, ny+1:end);
L_Re = L_joint(1:ny, 1:ny);
D_Re = D_joint(1:ny, 1:ny);
K_L_Re = L_joint(ny+1:end, 1:ny);

norm_innov = L_Re \ innov;
X_new = X_pred + K_L_Re * norm_innov;

if narginout > 9
```

```

P_pred = L_P_pred * D_P_pred * L_P_pred';
Re = L_Re * D_Re * L_Re';
K = (P_pred * H') / Re;
end
end

```

Пример 1. Проверка алгебраической эквивалентности и вычислительной сложности алгоритмов

Рассмотрим линейную паруную стохастическую систему вида (1) с матрицами

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0,12 & 0,10 & 0,11 \\ 0,11 & 0,10 & 0,12 \\ 0,10 & 0,11 & 0,12 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0,18 & 0,15 & 0,16 \\ 0,15 & 0,18 & 0,14 \\ 0,16 & 0,14 & 0,18 \end{bmatrix},$$

с начальными условиями $\bar{x}_0 = [0,5, 0,5]^T$, $P_0 = 2,5I_2$ [Pieczynski, Desbouvries, 2003].

Эксперимент проводился для $L = 1000$ независимых запусков на интервале из $N = 100$ шагов. Для каждого запуска генерировались новая реализация случайного процесса и соответствующие измерения. Сравнивались четыре модификации парного фильтра Калмана:

- 1) стандартный ПФК (Conventional);
- 2) квадратно-корневой ПФК (SR);
- 3) UD-модификация ПФК (UD);
- 4) предложенная LD-модификация ПФК (LD).

На рис. 1 и 2 представлены графики оценок состояния для одного из экспериментов. Визуально траектории неразличимы, что также подтверждает эквивалентность рассмотренных модификаций парного фильтра.

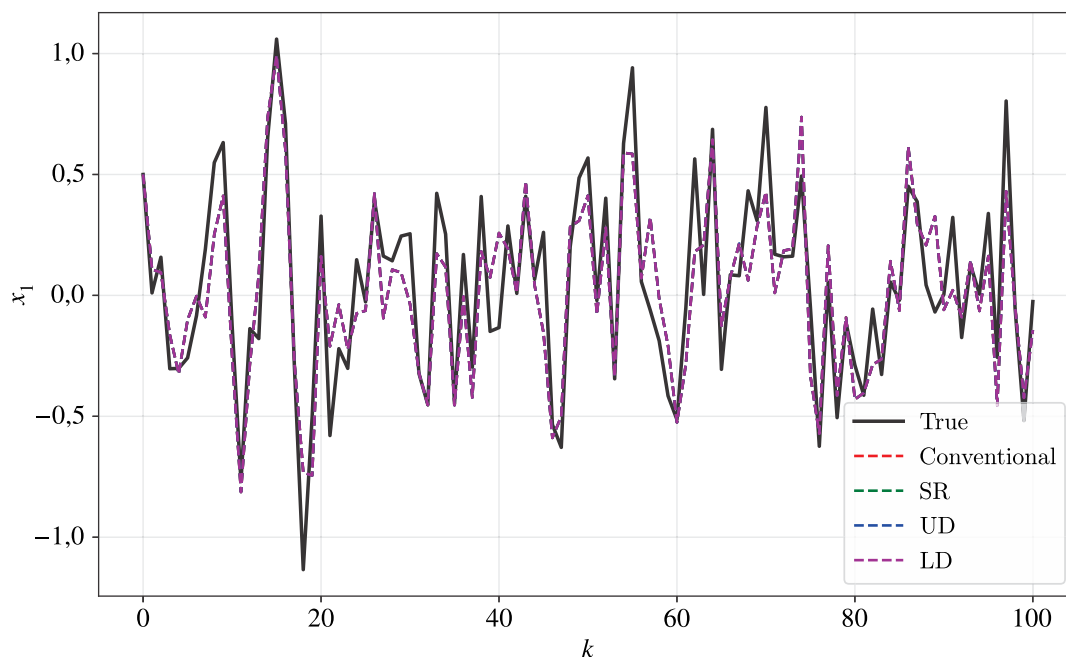


Рис. 1. Графики оценок первой компоненты вектора состояния

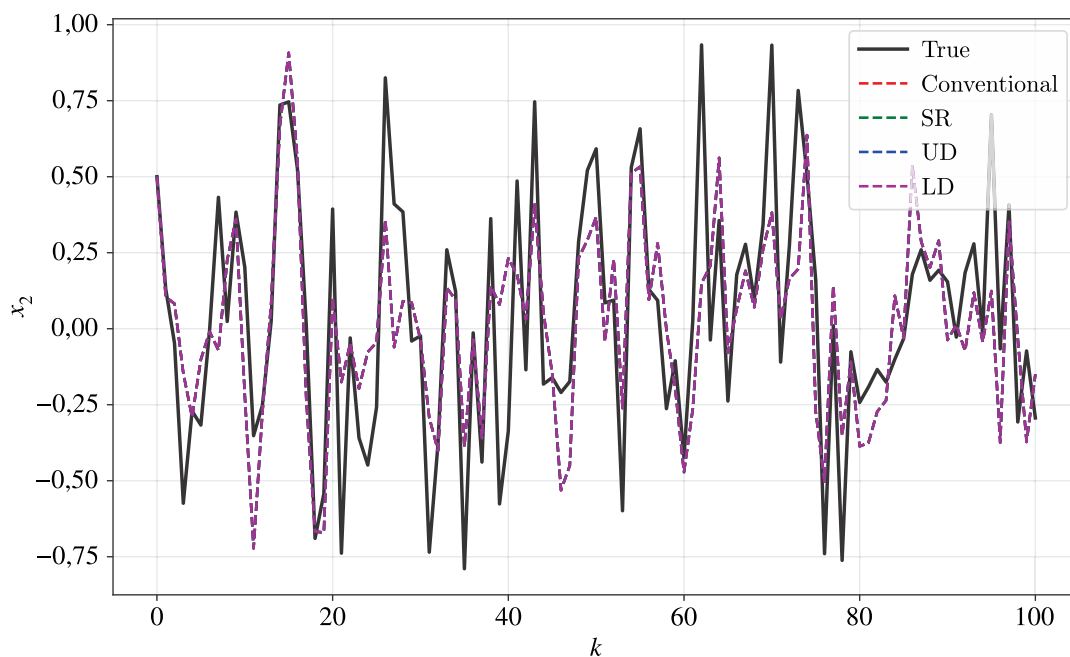


Рис. 2. Графики оценок второй компоненты вектора состояния

Оценка точности производилась по критериям среднеквадратичной ошибки (RMSE) и средней абсолютной ошибки (MAE) для каждой компоненты вектора состояния. В таблице 1 приведены метрики, усредненные по 1000 экспериментам.

Таблица 1. Сравнение реализаций ПФК на примере 1 (усреднено по 1000 экспериментам)

Метод	RMSE ₁	RMSE ₂	MAE ₁	MAE ₂
Conventional	0,198223	0,263853	0,155229	0,209272
SR	0,198223	0,263853	0,155229	0,209272
UD	0,198223	0,263853	0,155229	0,209272
LD	0,198223	0,263853	0,155229	0,209272

Как видно из таблицы 1, все четыре реализации дают идентичные оценки состояния с точностью до 6-го знака, что подтверждает алгебраическую эквивалентность рассмотренных модификаций ПФК.

Для оценки вычислительной эффективности разработанной LD-реализации парного фильтра Калмана проведено сравнение четырех рассмотренных модификаций ПФК. Эксперимент проводился на случайно сгенерированных задачах парной фильтрации вида (1) с размером вектора состояния $n_x = 2, 10, 20, 30, 50$ и размером вектора наблюдений $n_y = \frac{n_x}{2}$. Для каждой размерности выполнялось 50 независимых запусков на интервале из $N = 100$ шагов, измерялось среднее время выполнения одного запуска алгоритма. Результаты численных экспериментов представлены в таблице 2.

Из таблицы 2 видно, что классический ковариационный фильтр (Conventional) показывает наименьшее время для всех рассмотренных размерностей, что ожидаемо, так как он не требует дополнительных вычислительных затрат на факторизацию. Среди численно устойчивых методов LD-реализация стабильно превосходит UD во всем диапазоне размерностей: ускорение составляет от 2,43 раз при $n_x = 2$ до 1,04 раз при $n_x = 50$. При этом преимущество LD над UD уменьшается с ростом n_x . По сравнению с SR LD оказывается быстрее только для $n_x = 2$ (на 2 %); при $n_x \geq 10$ SR значительно опережает LD, причем разрыв увеличивается с ростом

Таблица 2. Сравнение времени выполнения (с) различных реализаций ПФК в зависимости от размерности вектора состояния ($n_y = \frac{n_x}{2}$)

n_x	Conventional	SR	UD	LD
2	0,002086	0,006479	0,015390	0,006327
10	0,006136	0,012754	0,038132	0,024721
20	0,007753	0,024077	0,142476	0,106782
30	0,013183	0,044714	0,384849	0,354636
50	0,021277	0,089955	1,227491	1,184111

размерности задачи. Это может быть объяснено высокой эффективностью встроенной функции `qr` в MATLAB, использующей оптимизированные библиотеки LAPACK/BLAS, в то время как MWGS-процедуры (как прямая, так и обратная) реализованы в интерпретируемом коде без столь же глубокой оптимизации. Можно предположить, что при реализации оптимизированной версии алгоритма MWGS он будет работать значительно быстрее.

Таким образом, предложенная LD-реализация является эффективным компромиссным решением для задач малой и средней размерности (до $n_x \approx 20$), что характерно для большинства практических задач, обеспечивая численную устойчивость при приемлемом времени счета. Для крупномасштабных задач с $n_x \geq 30$ предпочтительной может оказаться SR-реализация, если допустить использование встроенных функций линейной алгебры.

Далее на примере 2 покажем, что предложенный LD-фильтр имеет преимущество в плане численной устойчивости к ошибкам машинного округления по сравнению с другими модификациями алгоритмов парной фильтрации.

Пример 2. Исследование численной устойчивости алгоритмов

Рассмотрим систему с плохо обусловленной схемой измерений:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0,12 & 0,10 & 0,11 & 0,12 \\ 0,11 & 0,10 & 0,12 & 0,10 \\ 1,10 & 1,10 & 0,10 & 0,11 \\ 1,10 & 1,10 + \delta & 0,12 & 0,10 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0,18 & 0,15 & 0 & 0 \\ 0,15 & 0,18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^2 \end{bmatrix},$$

с начальными условиями $\bar{x}_0 = [0,5, 0,5]^T$, $P_0 = 2,5I_2$. Параметр δ регулирует степень обусловленности задачи: при $\delta \rightarrow 0$ матрица ковариации невязки измерений $R_{e,k+1}$ становится плохо обусловленной. Значения δ выбраны таким образом, чтобы проследить поведение фильтров вблизи машинного эпсилон $\epsilon_{\text{маш}} \approx 2,22 \cdot 10^{-16}$ (для чисел двойной точности в IEEE 754). Эксперимент проводился для значений параметра

$$\delta = 10^{-12}, 10^{-13}, 10^{-14}, 10^{-15}, 10^{-16}, 10^{-17}, 10^{-18}, 10^{-19}, 10^{-20}.$$

Для каждого значения выполнялось $L = 100$ независимых запусков на интервале из $N = 1000$ шагов. Оценка точности производилась по накопленной среднеквадратичной ошибке (ARMSE):

$$\text{ARMSE} = \sqrt{\frac{1}{LNn_x} \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_x} (x_k^{(i)} - \hat{x}_{k|k}^{(i)})^2}. \quad (35)$$

Результаты экспериментов представлены в таблице 3. Для каждого значения δ указаны ARMSE и количество запусков, завершившихся ошибкой (NaN).

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы.

Таблица 3. Результаты численных экспериментов для примера 2

δ	Conventional		SR		UD		LD	
	ARMSE	NaN	ARMSE	NaN	ARMSE	NaN	ARMSE	NaN
10^{-12}	0,122370	0	0,121904	0	0,121904	0	0,121904	0
10^{-13}	0,122242	0	0,121780	0	0,121780	0	0,121780	0
10^{-14}	0,122528	0	0,122058	0	0,122060	0	0,122058	0
10^{-15}	0,122661	0	0,122188	0	0,122137	0	0,122148	0
10^{-16}	—	100	0,126690	0	0,122796	0	0,122801	0
10^{-17}	—	100	0,254530	0	0,122439	0	0,122456	0
10^{-18}	—	100	0,429695	0	0,122139	0	0,122169	0
10^{-19}	—	100	0,452341	0	0,122286	0	0,122285	0
10^{-20}	—	100	0,434666	0	0,122696	0	0,122706	0

1. Стандартный ПФК работает при $\delta \geq 10^{-15}$, но при $\delta = 10^{-16}$ полностью теряет работоспособность — все 100 запусков завершаются ошибкой. Это объясняется вырождением матрицы $R_{e,k+1}$ в пределах машинной точности.
2. Квадратно-корневой ПФК сохраняет работоспособность при всех δ , однако при $\delta \leq 10^{-17}$ наблюдается резкий рост ошибки ($\text{ARMSE} \approx 0,25\text{--}0,45$). Метод является устойчивым к ошибкам машинного округления, но теряет точность при экстремально плохой численной обусловленности.
3. UD- и LD-модификации демонстрируют наилучшую численную устойчивость. Во всем диапазоне δ , вплоть до 10^{-20} , обе реализации сохраняют ARMSE на уровне $\approx 0,122$, соответствующем точности стандартного фильтра в случае хорошо обусловленной задачи.
4. Результаты сравнения UD- и LD-модификаций показывают их практически идентичную точность. Небольшие различия в ARMSE (порядка 10^{-6}) объясняются особенностями вычислительных схем и накоплением ошибок машинного округления.

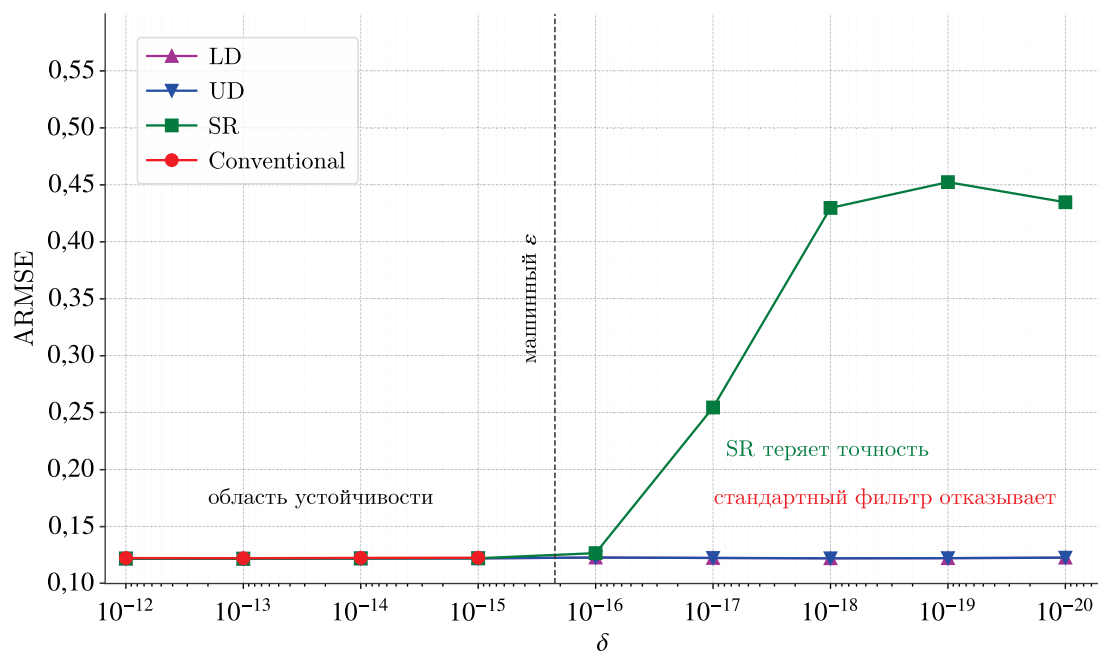
На рис. 3 представлена зависимость ARMSE от δ в логарифмическом масштабе. Хорошо видно, что стандартный ПФК теряет работоспособность при $\delta = 10^{-16}$, SR теряет точность при $\delta \leq 10^{-17}$, в то время как UD- и LD-модификации сохраняют стабильную точность на всем диапазоне изменения параметра δ .

Таким образом, проведенные численные эксперименты полностью подтверждают полученные теоретические результаты.

Заключение

В работе построена новая численно устойчивая модификация парного фильтра Калмана, основанная на применении модифицированной взвешенной ортогонализации Грама–Шмидта и LD-разложении ковариационных матриц.

Основным теоретическим результатом работы является математическое обоснование LD-модификации (теорема 1), практическим результатом — новый алгоритм 2 (LD-ПФК) для оценки состояния парных марковских моделей. Преимуществом построенного LD-фильтра по сравнению со стандартной версией ПФК является применение на каждом шаге численно устойчивой к ошибкам машинного округления прямой процедуры модифицированной взвешенной ортогонализации Грама–Шмидта, лежащей в основе разработанного алгоритма.

Рис. 3. Зависимость ARMSE от параметра δ

Результаты численных экспериментов показали, что предложенная LD-модификация парного фильтра Калмана обладает высокой численной устойчивостью и при этом превосходит по скорости выполнения предложенную ранее UD-модификацию. Таким образом, новый LD-фильтр может быть рекомендован для практического использования в задачах, требующих высокой точности вычислений при работе с плохо обусловленными данными.

Полученные теоретические результаты дополняют теорию парной фильтрации в классе линейных дискретных парных марковских моделей с гауссовыми шумами.

Представленные в работе результаты будут в дальнейшем использованы для построения новых методов численной идентификации парных марковских моделей в условиях априорной параметрической неопределенности.

Список литературы (References)

- Куликова М. В., Цыганова Ю. В. Численно устойчивые реализации фильтра Калмана для оценивания линейных парных марковских моделей с гауссовым шумом // Вычислительные технологии. — 2017. — Т. 22, № 3. — С. 45–60. — http://www.ict.nsc.ru/jct/content/t22n3/Kulikova_n.pdf
- Kulikova M. V., Tsyganova Yu. V. Chislenno ustojchivye realizacii fil'tra Kalmana dlya ocenivaniya linejnyh parnyh markovskih modelej s gaussovyim shumom [Numerically stable Kalman filter implementations for estimating linear pairwise Markov models in the presence of Gaussian noise] // Computational technologies. — 2017. — Vol. 22, No. 3. — P. 45–60. — http://www.ict.nsc.ru/jct/content/t22n3/Kulikova_n.pdf (in Russian).
- Семущин И. В., Цыганова Ю. В., Куликова М. В., Фатьянова О. А., Кондратьев А. Е. Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения: коллективная монография. — Ульяновск: УлГУ, 2011.
- Semushin I. V., Tsyganova J. V., Kulikova M. V., Fat'yanova O. A., Kondrat'ev A. E. Adaptivnye sistemy fil'tracii, upravleniya i obnaruzheniya: kollektivnaya monografiya [Adaptive systems of filtering, control and fault detection]. — Ulyanovsk: USU, 2011 (in Russian).
- Цыганов А. В., Цыганова Ю. В. Общий подход к построению градиентных методов параметрической идентификации на основе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама–Шмидта и алгоритмов дискретной фильтрации информационного типа // Компьютерные исследования и моделирование. — 2025. — Т. 17, № 5. — С. 761–782. — DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-5-761-782

- Tsyganov A. V., Tsyganova J. V.* Obshchij podhod k postroeniyu gradientnyh metodov parametricheskoj identifikacii na osnove modificirovannoj vzveshennoj ortogonalizacii Grama–Shmidta i algoritmov diskretnoj fil'tracii informacionnogo tipa [A general approach to constructing gradient methods for parameter identification based on modified weighted Gram–Schmidt orthogonalization and information-type discrete filtering algorithms] // *Computer Research and Modeling*. — 2025. — Vol. 17, No. 5. — P. 761–782. — DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-5-761-782 (in Russian).
- Цыганов А. В., Цыганова Ю. В., Кувшинова А. Н., Голубков А. В.* Алгоритмы дискретной фильтрации на основе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама–Шмидта для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами // *Вычислительные технологии*. — 2023. — Т. 28, № 5. — С. 70–86. — DOI: 10.25743/ICT.2023.28.5.007
- Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Kuvshinova A. N., Golubkov A. V.* Algoritmy diskretnoj filtracii na osnove modifitsirovannoj veshchennoj ortogonalizatsii Grama–Shmidta dlya diskretnykh stokhasticheskikh sistem s mul'tiplikativnymi i additivnymi shumami [Algorithms of discrete filtration based on modified weighted Gram–Schmidt orthogonalization for discrete stochastic systems with multiplicative and additive noises] // *Vychislitel'nye tekhnologii*. — 2023. — Vol. 28, No. 5. — P. 70–86. — DOI: 10.25743/ICT.2023.28.5.007 (in Russian).
- Ait El Fquih B., Desbouvries F.* Unsupervised signal restoration in partially observed Markov chains // *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'06)*. Toulouse, France. — 2006. — Vol. 3. — P. 13–16. — DOI: 10.1109/ICASSP.2006.1660578
- Azeraf E.* Pairwise Markov chains for volatility forecasting // *Preprint arXiv*. — 2024. — arXiv:2411.11838
- Benboudjema D., El Bouchraya Malainin M., Pieczynski W.* Exact Kalman filtering in pairwise Gaussian switching systems // *Proc. ASMDA 2011: Applied Stochastic Models and Data Analysis*. Rome, Italy. — 2011.
- Bodrumlu T., Caliskan F.* 3D indoor position estimation based on a UDU factorization extended Kalman filter structure using beacon distance and inertial measurement unit data // *Sensors*. — 2024. — Vol. 24, No. 10. — P. 3048. — DOI: 10.3390/s24103048
- Derrode S., Pieczynski W.* Exact fast computation of optimal filter in Gaussian switching linear systems // *IEEE Signal Processing Letters*. — 2013. — Vol. 20, No. 7. — P. 701–704. — DOI: 10.1109/LSP.2013.2261494
- Derrode S., Pieczynski W.* Signal and image segmentation using pairwise Markov chains // *IEEE Transactions on Signal Processing*. — 2004. — Vol. 52, No. 9. — P. 2477–2489. — DOI: 10.1109/TSP.2004.832015
- Desbouvries F., Lecomte J., Pieczynski W.* Kalman filtering in pairwise Markov trees // *Signal Processing*. — 2006. — Vol. 86. — P. 1049–1054. — DOI: 10.1016/j.sigpro.2005.07.026
- Escudier M., Abdelkefi I., Fernandes C., Pieczynski W.* Forecasting with pairwise Gaussian Markov models // *2023 8th International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and Industry (MCSI)*. Athens, Greece. — 2023. — P. 1–8. — DOI: 10.1109/MCSI60294.2023.00009
- Fernandes C., Bouyahia Z., Derrode S.* Nonlinear extensions of the Gaussian pairwise Kalman filter // *Preprint HAL*. — 2026. — hal-05645741.
- Gorynin I., Crelrier L., Gangloff H., Monfrini E., Pieczynski W.* Performance comparison across hidden, pairwise and triplet Markov model's estimators // *International journal of mathematical and computational methods (IJMCM)*. — 2016. — Vol. 1. — P. 253–258.
- Gorynin I., Gangloff H., Monfrini E., Pieczynski W.* Assessing the segmentation performance of pairwise and triplet Markov models // *Signal Processing*. — 2018. — Vol. 145. — P. 183–192. — DOI: 10.1016/j.sigpro.2017.12.006
- Gorynin I., Monfrini E., Pieczynski W.* Pairwise Markov models for stock index forecasting // *Proc. 25th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2017)*, August 28 – September 2, Kos Island, Greece. — 2017. — P. 2095–2099.
- Grewal M. S., Andrews A. P.* Kalman filtering: theory and practice using MATLAB. — 4th ed. — New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2015.

- Han B.* Distributionally robust Kalman filtering with volatility uncertainty // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2025. — Early access. — DOI: 10.1109/TAC.2024.3522192
- Kulikova M. V.* Gradient-based parameter estimation in pairwise linear Gaussian systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2017. — Vol. 62, No. 3. — P. 1511–1517. — DOI: 10.1109/TAC.2016.2579745
- Kulikova M. V., Kulikov G. Yu.* SVD-based factored-form Cubature Kalman Filtering for continuous-time stochastic systems with discrete measurements // *Automatica*. — 2020. — Vol. 120. — P. 109110. — DOI: 10.1016/j.automatica.2020.109110
- Kulikova M. V., Kulikov G. Yu.* Continuous-discrete derivative-free extended Kalman filter based on Euler–Maruyama and Itô–Taylor discretizations: Conventional and square-root implementations // *European Journal of Control*. — 2024. — Vol. 76. — P. 100960. — DOI: 10.1016/j.ejcon.2024.100960
- Kulikova M. V., Tsyganova J. V.* The UD-based approach for designing pairwise Kalman filtering algorithms // *IFAC-PapersOnLine*. — 2017. — Vol. 50, No. 1. — P. 1619–1624. — DOI: 10.1016/j.ifacol.2017.08.325
- Kulikova M. V., Tsyganova J. V., Kulikov G. Yu.* SVD-based state and parameter estimation approach for generalized Kalman filtering with application to GARCH-in-Mean estimation // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2021. — Vol. 387. — P. 112487. — DOI: 10.1016/j.cam.2019.112487
- Kulikova M. V., Tsyganova J. V., Kulikov G. Yu.* UD-based pairwise and MIMO Kalman-like filtering for estimation of econometric model structures // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2020. — Vol. 65, No. 10. — P. 4472–4479. — DOI: 10.1109/TAC.2020.3004737
- Lehmann F., Pieczynski W.* State estimation in pairwise Markov models with improved robustness using unbiased FIR filtering // *Signal Processing*. — 2020. — Vol. 172. — P. 107568.
- Liptser R. S., Shiryaev A. N.* Statistics of conditionally Gaussian random sequences // *Proc. of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley, Calif.: University of California Press. — 1972. — Vol. 2. — P. 389–422. — <https://mathscinet.ams.org/mathscinet/relay-station?mr=400377>
- Nemesin V., Derrode S.* Robust blind pairwise Kalman algorithms using QR decompositions // *IEEE Transactions on Signal Processing*. — 2012. — Vol. 61, No. 1. — P. 5–9. — DOI: 10.1109/TSP.2012.2222383
- Pieczynski W.* Multisensor triplet Markov chains and theory of evidence // *International Journal of Approximate Reasoning*. — 2007. — Vol. 45. — P. 1–16. — DOI: 10.1016/j.ijar.2006.05.001
- Pieczynski W.* Pairwise Markov chains // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. — 2003. — Vol. 25, No. 5. — P. 634–639. — DOI: 10.1109/TPAMI.2003.1195998
- Pieczynski W., Desbouvries F.* Kalman filtering using pairwise Gaussian models // *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'03)*. Hong Kong. — 2003. — Vol. 6. — P. 57–60. — DOI: 10.1109/ICASSP.2003.1201617
- Rafi S., Castella M., Pieczynski W.* Pairwise Markov model applied to unsupervised image separation // *Proceedings of the IASTED International Conference “Signal Processing, Pattern Recognition, and Applications” (SPPRA 2011)*, February 16–18, Innsbruck, Austria. — 2011. — DOI: 10.2316/P.2011.721-044
- Zhou Y., Yan L., Li H., Xia Y.* The multiple pairwise Markov chain model-based labeled multi-Bernoulli filter // *Journal of the Franklin Institute*. — 2024. — Vol. 361, No. 10. — P. 106939. — DOI: 10.1016/j.jfranklin.2024.106939