

УДК: 519.8

Физически информированная нейросеть для оценки перепада давления при артериальных стенозах на основе данных моделирования

Т. М. Гамилов^{1,a}, А. Ланге^{1,b}, А. А. Осипова^{1,c}, Ф. Лян^{1,2,d},
С. С. Симаков^{1,3,e}

¹Первый МГМУ им. И. М. Сеченова Минздрава России (Сеченовский университет),
Россия, 119048, г. Москва, ул. Трубецкая, д. 8, стр. 2

²Шанхайский университет Цзяотун,
Китай, 200240, г. Шанхай, район Миньхан, ул. Дунчуань, 800

³Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет, МФТИ, Физтех),
Россия, 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: ^a gamilov_t_m@staff.sechenov.ru, ^b lange_a@student.sechenov.ru, ^c anastasiia.osipova@mail.ru,
^d fuyouliang@sjtu.edu.cn, ^e simakov.ss@phystech.edu

Получено 20.03.2026, после доработки — 23.04.2026.

Принято к публикации 27.04.2026.

В данной работе описана методика генерации синтетической базы данных стенозов, состоящей из 1620 записей. Каждая запись представляет собой результаты численного эксперимента по моделированию трехмерного течения вязкой несжимаемой жидкости через трубку с переменным сечением: перепад давлений, средний поток, усредненная по сечению скорость кровотока на входе в трубку, максимальная степень сужения стеноза, длина стеноза, асимметрия стеноза, радиус трубки, число Рейнольдса. База данных валидировалась путем сравнения с другими моделями (с эластичными стенками) и стендовыми экспериментами и показала отклонение перепадов давлений не выше 4%. База данных синтетических стенозов использовалась для обучения физически информированной нейронной сети для быстрой оценки перепада давления по четырем ключевым входным показателям: число Рейнольдса, длина стеноза, степень стеноза, степень асимметрии стеноза. Физическая информированность достигалась за счет введения штрафов в функцию потерь за отсутствие положительного перепада давления и за отсутствие монотонности перепада давления по входным параметрам. Физически информированная нейронная сеть показала более высокую точность на гемодинамических значимых стенозах при тестировании на валидационной выборке и на новых стенозах, не представленных в базе данных. Средняя относительная ошибка на стенозах длиной в 8 радиусов здорового сосуда составила 6% для физически информированной сети и 13% для классической нейронной сети. Ошибки на коротких стенозах длиной в 4 радиуса оказались почти одинаковы: 9,5% для физически информированной сети и 10% для классической нейронной сети. Разработанный метод функциональной оценки гемодинамической значимости стенозов может использоваться как самостоятельный инструмент для клинической оценки стенозов и как компонент сетевых моделей кровотока. Наибольшую актуальность подход приобретает при моделировании многососудистых поражений, которые доминируют в клинической практике. Ключевое преимущество метода заключается в физической корректности результатов и точности, сопоставимой с классическим моделированием, при значительно меньших вычислительных затратах.

Ключевые слова: физически информированная нейронная сеть, синтетическая база данных, стеноз, гемодинамика

UDC: 519.8

Physics-informed neural network for evaluating pressure drop in arterial stenoses based on simulation data

T. M. Gamilov^{1,a}, A. Lange^{1,b}, A. A. Osipova^{1,c}, F. Liang^{1,2,d},
S. S. Simakov^{1,3,e}

¹Sechenov First Moscow State Medical University,
8/2 Trubetskaya st., Moscow, 119048, Russia

²Shanghai Jiao Tong University,
800 Dongchuan st., Minhang District, Shanghai, 200240, China

³Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskii lane, Dolgoprudny, Moscow reg., 141701, Russia

E-mail: ^a gamilov_t_m@staff.sechenov.ru, ^b lange_a@student.sechenov.ru, ^c anastasiia.osipova@mail.ru,
^d fuyouliang@sjtu.edu.cn, ^e simakov.ss@phystech.edu

Received 20.03.2026, after completion – 23.04.2026.

Accepted for publication 27.04.2026.

This paper describes a method for generating a synthetic database of stenoses, consisting of 1620 entries. Each entry represents the results of a numerical experiment simulating the three-dimensional flow of a viscous incompressible fluid through a tube with a variable cross-section: pressure drop, mean flow rate, cross-sectionally averaged inlet blood flow velocity, maximum stenosis severity, stenosis length, stenosis asymmetry, tube radius, and Reynolds number. The database was validated by comparison with other models (with elastic walls) and bench experiments, showing a deviation in pressure drops of no more than 4%. The synthetic stenosis database was used to train a physics-informed neural network for the rapid estimation of pressure drop based on four key input parameters: Reynolds number, stenosis length, stenosis severity, and stenosis asymmetry coefficient. The physics-informed aspect was achieved by introducing penalties into the loss function for the absence of a positive pressure drop and for the lack of monotonicity of the pressure drop with respect to the input parameters. The physics-informed neural network demonstrated higher accuracy on hemodynamically significant stenoses when tested on a validation set and on new stenoses not represented in the database. The mean relative error for stenoses with a length of 8 healthy vessel radii was 6% for the physics-informed network and 13% for a classical neural network. The errors for short stenoses with a length of 4 radii were nearly identical: 9.5% for the physics-informed network and 10% for the classical neural network. The developed method for the functional assessment of the hemodynamic significance of stenoses can be used both as a standalone tool for clinical stenosis evaluation and as a component of network blood flow models. The approach becomes most relevant when modeling multi-vessel disease, which is predominant in clinical practice. The key advantage of the method lies in the physical correctness of the results and accuracy comparable to classical modeling, but with significantly lower computational costs.

Keywords: physics-informed neural network, synthetic database, stenosis, hemodynamics

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 3, pp. 621–641 (Russian).

Введение

Стеноз — патологическое сужение артерии, затрудняющее кровоток и препятствующее транспорту кислорода и питательных веществ к тканям. Стенозы встречаются в различных участках сосудистого русла. Для их диагностики и лечения разработано огромное количество методик и инструментов [Kasapis, Gurm, 2009; Tu et al., 2020; Чернявский и др., 2024]. При разработке этих методик в последние годы широко применяются математические модели кровотока [El Khatib et al., 2019; Simakov et al., 2021; Gamilov et al., 2024; Xia et al., 2025]. Математические модели кровотока позволяют оценить функциональную значимость стеноза, оценить его влияние на различные участки сосудистого русла и предсказать последствия операции по его устранению [Hohri et al., 2024]. В настоящее время в клинической практике уже используется программное обеспечение (ПО), основанное на численном моделировании гемодинамики [Boussoussou et al., 2023; Andersen et al., 2024]. Наиболее распространенными математическими моделями, учитывающими подробную картину кровотока в области стенозов, являются трехмерные модели, основанные на уравнениях гидродинамики [Ma et al., 2014; Dobroserdova et al., 2016; Yan et al., 2025]. Они могут применяться как сами по себе, так и в качестве составных частей сложных моделей, комбинирующих компоненты различных размерностей. В подобном мультимодельном подходе [Dobroserdova et al., 2016; Amare et al., 2022; Kim et al., 2026] более простые одномерные [Gamilov et al., 2015; Буничева и др., 2024] и точечные (нольмерные) модели [El Khatib et al., 2019] используются для анализа большей части системы кровообращения, в то время как трехмерные модели нужны для описания наиболее важных и геометрически сложных областей, например стенозов. Это позволяет экономить вычислительные ресурсы и оценить вклад патологии на кровоток в отдаленной части сосудистого русла.

Другим подходом к вычислительной диагностике стенозов является машинное обучение [Danilov et al., 2021; Zimmermann et al., 2021; Ben-Assa et al., 2023; Arefinia et al., 2024]. Методики машинного обучения внесли существенный вклад в изучение и диагностику сердечно-сосудистых заболеваний. За долгие годы клинической практики было собрано обширное количество данных для разработки предсказательных методик на основе истории болезни, образа жизни пациента, медицинских снимков. Классические модели машинного обучения могут применяться в широком спектре задач, однако они строятся на основе концепции «черный ящик» и не учитывают физических закономерностей систем, данные которых они анализируют.

Современные подходы комбинируют методики машинного обучения и математического описания процессов гемодинамики. Одним из примеров подобного синтеза являются физически информированные нейронные сети [Cai et al., 2021; Taebi, 2022; Alzhanov et al., 2024] (ФИНС). В структуру или процесс обучения ФИНС заложены физические принципы, описывающие моделируемый процесс. Физическая информированность может реализовываться различными путями. Первый вариант заключается в обучении нейронной сети на синтетических данных, сгенерированных с помощью математических моделей кровотока [Bunicheva et al., 2022; Gamilov et al., 2023; Петров, Зимина, 2025]. В этом случае обученная нейронная сеть воспроизводит результаты гемодинамических расчетов, позволяя экономить время и вычислительные ресурсы. Второй вариант заключается в модификации функции потерь, которая будет штрафовать нейронную сеть на этапе обучения за «нефизичные» решения [Iliadis et al., 2025], например за несоблюдение закона сохранения массы [Alzhanov et al., 2024; Isaev et al., 2024]. Таким образом, результаты, выдаваемые нейронной сетью, будут удовлетворять заданным физическим законам или уравнениям. Третий вариант предполагает использование специализированных функций активаций нейронов, например синусоидальных функций при описании периодических процессов [Aghaee, Khan, 2025] или функций, возникающих при аналитических решениях уравнений, описывающих исследуемые процессы [Abbasi, Andersen, 2024]. Другие способы реализации физической

информированности могут включать калибровку структуры нейронной сети: выделение отдельных скрытых слоев и сетей нейронов, группировку входных данных [Liu et al., 2025].

В данной работе представлена ФИНС с модифицированной функцией потерь для определения перепада давлений на стенозе по четырем входным параметрам: скорость кровотока, длина стеноза, степень перекрытия и степень асимметрии (смещение центральной линии сосуда). На перепад давлений оказывают влияние и другие характеристики: форма сечения сосуда, кривизна сосуда, жесткость стенок, позиция датчика давления [Ahamad et al., 2018]. Выбор рассматриваемых параметров обусловлен степенью их вклада [Rasooli et al., 2025], а также возможностью реализации с точки зрения постановки задачи и доступности вычислительных ресурсов. Для обучения нейронной сети используется синтетическая база данных стенозов, сгенерированная с помощью модели трехмерного течения несжимаемой жидкости в трубке переменного сечения с жесткими стенками. В разделе «Методы» приведено описание математической модели, использованной для генерации синтетической базы данных, самого процесса генерации, структуры нейронной сети и модификации функции потерь. В разделе «Результаты» приведены валидация базы данных и сравнение точности предложенной физически информированной нейронной сети и классической нейронной сети без модифицированной функции потерь.

Разработанная ФИНС может использоваться как сама по себе для оценки гемодинамической значимости стенозов в клинической практике, так и в качестве составной части более сложных моделей кровотока. Особенно актуальным является использование данного подхода для моделирования кровотока при многососудистом поражении артерий, поскольку именно гемодинамически значимое атеросклеротическое поражение сразу нескольких сосудистых бассейнов в одном или нескольких органах является наиболее типичным в реальных случаях. Преимущество использования ФИНС для таких задач состоит в том, что результат физически корректен, имеет точность, сравнимую с точностью классического моделирования, при этом требования к вычислительным ресурсам существенно ниже.

Методы

Синтетическая база данных перепадов давления на стенозах

Для обучения и тестирования разрабатываемой ФИНС была сгенерирована синтетическая база данных, содержащая результаты численного моделирования кровотока в стенозированных сосудах. Численное моделирование выполнялось с использованием открытого программного пакета SimVascular [Updegrave et al., 2017; Lan et al., 2018]. Выбор данного ПО обусловлен его специализацией на задачах вычислительной гемодинамики и доступностью исходного кода, что обеспечивает воспроизводимость результатов.

В основе математической модели лежит система уравнений Навье – Стокса для трехмерного потока вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости через цилиндрический сосуд с круглым сечением и наличием стеноза (локального сужения). На входе в трубку задан стационарный параболический профиль скорости. При моделировании решалась нестационарная задача до выхода течения на стационарный режим. На выходе задано нулевое давление. На стенках задано условие прилипания, стенки сосуда считаются жесткими. Уравнения записаны в декартовых координатах, при этом ось x направлена вдоль оси сосуда и соединяет центры входного и выходного сечений, ось y направлена вдоль линии смещения центра сечения в самом узком месте:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{in} \text{ на } \Gamma_{in}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \text{ на } \Gamma_w, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{u} — вектор скорости, \mathbf{u}_{in} — вектор скорости на входе, t — время, ρ — плотность жидкости ($\rho = 1,06 \text{ г/см}^3$), p — давление, μ — динамическая вязкость жидкости ($\mu = 0,035 \text{ Пуаз}$). Границы Γ_{in} , Γ_w — вход и стенка сосуда соответственно, обозначены на рис. 1. Вектор скорости на входе \mathbf{u}_{in} направлен по нормали к границе Γ_{in} , его модуль задается параболическим (пуазейлевским) профилем $u(y, z) = 2\bar{u}\left(1 - \frac{y^2+z^2}{R_0^2}\right)$, где R_0 — радиус здорового сосуда, \bar{u} — средняя по Γ_{in} скорость. На выходе сосуда Γ_{out} используется условие GenBC программного пакета SimVascular, которое обеспечивает сопряжение трехмерной численной области с аналитически заданным условием на давление [Vignon-Clementel et al., 2006]. Давление на выходе из сосуда задавалось постоянным и равным нулю. С точки зрения физиологической корректности на выходе из сосуда можно задать характерное давление в венах или в области артериол (небольших артерий перед областью микроциркуляции). Однако численные эксперименты показали, что изменение величины давления на выходе не оказывает влияния на перепад давления на стенозе. Поэтому для упрощения постановки задачи и сравнения с результатами других работ давление на выходе из сосуда полагалась равным нулю. Для численного решения уравнений Навье – Стокса используются встроенные функции SimVascular, основанные на библиотеке PHASTA (Parallel, Hierarchical, Adaptive, Stabilized, Transient Analysis — параллельный, иерархический, адаптивный, стабилизированный, нестационарный анализ) [Sahni et al., 2009].

Для характеристики режима течения используется число Рейнольдса Re , которое в данной работе определяется через среднюю скорость на входе \bar{u} :

$$Re = \frac{\rho \bar{u} D_0}{\mu},$$

где D_0 — диаметр нестенозированного участка сосуда (рис. 1).

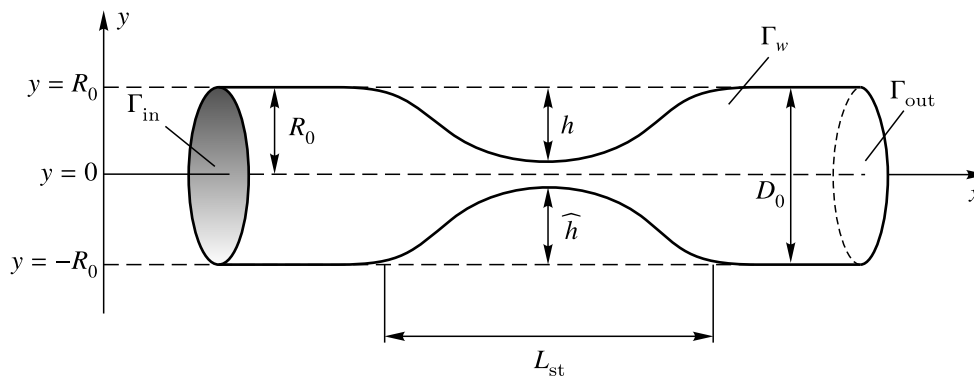


Рис. 1. Схема расчетной области и параметры стеноза

Расчетная область представляет собой трехмерную модель прямого сосуда с локальным сужением — стенозом (рис. 1). В области стеноза сосуд имеет круглое сечение меньшего диаметра. Диаметр и радиус стеноза D_{st} , R_{st} определяются как минимальные диаметр и радиус поперечного сечения на стенозе соответственно. D_0 , R_0 — диаметр и радиус здорового сосуда соответственно, L_{st} — длина стеноза. Степень стеноза λ :

$$\lambda = 1 - \frac{R_{st}}{R_0}. \quad (2)$$

Асимметрия стеноза оказывает значительное влияние на перепад давлений [Vassilevski et al., 2011]. Степень асимметрии стеноза $\alpha \in [0, 1]$ определяется через смещение центра круглого

поперечного сечения вдоль оси y относительно центральной оси сосуда x . Значение α определяется как

$$\alpha = 1 - \frac{h}{R_0 - R_{st}} = \frac{\widehat{h}}{R_0 - R_{st}} - 1, \quad (3)$$

где \widehat{h} — расстояние от нижней границы сосуда в самой узкой части до уровня $y = -R_0$ (см. рис. 1). При $\alpha = 0$ стеноз полностью симметричен, при $\alpha = 1$ верхняя стенка сосуда в области стеноза полностью смещена к уровню $y = R_0$ (рис. 2).

Геометрия сосуда включает три области: проксимальный здоровый сегмент (входная часть), область стеноза длиной L_{st} , дистальный здоровый сегмент (выходная). Длина проксимального и дистального сегментов считается фиксированной и равной $20R_0$. Во всех поперечных сечениях, перпендикулярных оси x , сосуд считается идеально круглым, поэтому для задания геометрии сосуда достаточно определить зависимость $R(x)$ и (при наличии асимметрии) смещение центра поперечного сечения в области стеноза. Смещение всех сечений в области стеноза происходит в одном и том же направлении оси y , перпендикулярной оси x (см. рис. 1).

Радиус сосуда в области стеноза меняется по закону

$$R(x) = R_{st} + 4(R_0 - R_{st}) \frac{(x - x_c)^2}{L_{st}^2},$$

где $x \in [20R_0, 20R_0 + L_{st}]$, $x_c = 20R_0 + \frac{L_{st}}{2}$. Координата $y_c(x)$ центра сосуда в асимметричной геометрии задается как

$$y_c(x) = \alpha(R_0 - R(x)). \quad (4)$$

При генерации синтетической базы данных фиксировался радиус сосуда $R_0 = 1,5$ мм, что соответствует типичному радиусу магистральных коронарных артерий. Это значение было выбрано в связи с тем, что частота атеросклеротического поражения коронарных артерий является одной из самых высоких по сравнению с другими зонами организма [Boussoussou et al., 2023; Andersen et al., 2024]. После фиксирования радиуса сосуда варьировались следующие параметры.

1. Число Рейнольдса Re : 10 значений в диапазоне от 30 до 800, что, например, соответствует средней скорости \bar{v} от 3 до 89 см/с в сосуде диаметром 3 мм (физиологический диапазон).
2. Отношение длины стеноза к радиусу сосуда $\frac{L_{st}}{R_0}$: 6 значений (2,5, 5, 10, 15, 20, 30), что при $R_0 = 0,15$ см соответствует длине стеноза от 0,375 см до 4,5 см.
3. Степень стеноза λ : 9 значений от 0 (здоровый сосуд) до 0,8 с шагом 0,1.
4. Степень асимметрии α : $\alpha \in \{0; 0,5; 1\}$. Значение $\alpha = 0$ соответствует полностью симметричному стенозу, $\alpha = 1$ соответствует максимальному смещению просвета стеноза к стенке сосуда (рис. 2).

Для каждой комбинации параметров производился расчет перепада давлений между началом и концом стеноза. С учетом всех комбинаций параметров сгенерированная база данных насчитывает 1620 расчетных случаев.

Расчетная область была дискретизирована с использованием неструктурированной тетраэдральной сетки. Плотность расчетной сетки в области здорового сосуда была одинаковой для всех случаев и определялась с помощью исследования сеточной сходимости при расчетах на здоровом сосуде, в процессе которого количество элементов сетки удваивалось, пока максимальное отклонение при расчете давления не стало меньше 1%. Плотность сетки в сечении стеноза

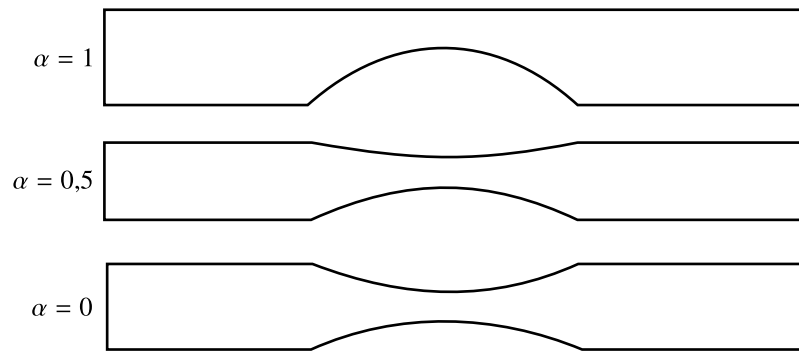


Рис. 2. Профили сосуда (срез в плоскости Oxy) для различных степеней асимметрии α

умножалась на $\frac{R_0}{R(x)}$, где $R(x)$ — радиус сосуда в данном сечении. Сеточная сходимость также выборочно проверялась на сосудах со стенозами 80 % путем сравнения рассчитанных давлений на последовательно удваиваемых сетках. Было обнаружено, что предложенный алгоритм сгущения сетки обеспечивает нужную точность в 1 % при расчете давления. Полученное таким образом количество элементов варьировалось от $2,8 \cdot 10^5$ (отсутствие стеноза) до $7,6 \cdot 10^5$ ($L_{st} = 30R$, степень стеноза $\lambda = 0,8$).

Архитектура нейронной сети

В рамках исследования разработана односвязная нейронная сеть (Feed Forward Neural Network, FFNN), которая затем была модифицирована с использованием методологии ФИНС. Нейронная сеть предназначена для предсказания перепада давления ΔP по заданным геометрическим и гемодинамическим параметрам стеноза.

Под FFNN понимается полносвязная нейронная сеть прямого распространения, в которой данные последовательно проходят от входного слоя к выходному без обратных связей. При инициализации FFNN требуется определить конфигурацию сети (число слоев и нейронов), выбрать функции активации, задать функцию потерь и выбрать оптимизационный алгоритм.

На вход в нейронную сеть подается четыре значения: число Рейнольдса Re , длина стеноза L_{st} , степень стеноза λ и параметр асимметрии α . На выходе нейронная сеть выдает предсказанное значение ΔP .

Предлагается следующая структура нейронной сети:

- входной слой: 4 признака (Re , длина стеноза L_{st} , степень стеноза λ , асимметрия α);
- два скрытых слоя по 16 нейронов в каждом;
- функция активации скрытых слоев — гиперболический тангенс [Goodfellow et al., 2016] (такая функция обеспечивает гладкость выходной функции, что критично для вычисления производных в физической части функции потерь);
- выходной слой из одного нейрона: перепад давления на стенозе.

Целевая переменная в выходном слое ΔP предварительно преобразовывалась функцией $\log(1 + \Delta P)$, после чего также нормировалась относительно минимального и максимального значений (PyTorch MinMaxScaler). Логарифмическое преобразование перепада давлений использовалось для уменьшения диапазона разброса значений по абсолютной величине. Все признаки перед входом в нейронную сеть также нормировались относительно минимального и максимального значений. Обозначим как Y преобразованное и нормированное значение целевой переменной ΔP , а как X_{Re} , $X_{L_{st}}$, X_{λ} , X_{α} — нормированные значения признаков Re , L_{st} , λ , α .

Структура нейронной сети задавалась фиксированной, поскольку основной целью являлось сравнение стандартной нейронной сети FFNN с ее физически информированным расширением. Число слоев, ширина скрытых слоев, тип функции активации и скорость обучения подбирались на основе пробных предварительных экспериментов.

Для корректной работы в процессе оптимизации функция потерь должна быть неотрицательной, непрерывной и дифференцируемой, что гарантирует интерпретируемость ошибки и возможность применения градиентных методов. В рамках исследования используются классическая MSE и функция потерь с физической регуляризацией.

Среднеквадратичная ошибка (MSE) определяется как

$$\text{MSE} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (Y_i - \widehat{Y}_i)^2, \quad (5)$$

где N — число элементов обучающей выборки, Y_i — значения отнормированных перепадов давления из синтетической базы данных для стеноза с номером i , \widehat{Y}_i — предсказанные нейросетью отнормированные перепады давления для стеноза с номером i .

Для ФИНС-модификации FFNN мы в процессе обучения налагаем следующие ограничения, повышающие физическую корректность взаимосвязи между входом и выходом: штрафы за отклонение от монотонности перепада давления по входным параметрам и за отрицательный перепад давления вниз по потоку. Рассмотрим эти ограничения более подробно. Перепад давления на участке сосудистого русла, содержащем стеноз, интегрально характеризует энергетические потери потока крови. Его монотонная зависимость от входных геометрических и гидродинамических параметров обусловлена механизмами диссипации энергии.

Увеличение длины стеноза ведет к росту гидродинамического сопротивления, поскольку возрастает протяженность зоны, где вязкая кровь испытывает трение о неподвижную стенку сосуда. Чем длиннее суженный сегмент, тем больше работы совершается против сил внутреннего трения, что требует дополнительного градиента давления для поддержания постоянного расхода.

Степень сужения оказывает влияние на перепад давления вследствие закона неразрывности потока. При уменьшении сечения просвета скорость крови в стенозе возрастает. Это влечет за собой, во-первых, увеличение кинетической энергии, необходимой для разгона жидкости, а во-вторых, приводит к росту касательных напряжений и увеличению силы вязкого трения, что дополнительно повышает потери.

Роль числа Рейнольдса проявляется в изменении структуры потока и соотношения различных механизмов потерь. По мере роста Re повышаются потери энергии на вихреобразование в постстенотической области, что делает зависимость перепада давления от расхода крови более крутой, однако сам характер этой зависимости остается монотонно возрастающим.

Смещение центра просвета стеноза относительно продольной оси сосуда повышает гидродинамическое сопротивление вследствие нарушения симметрии потока. При асимметричном сужении происходит деформация профиля скоростей и возникает обширная зона отрыва потока со стороны, противоположной смещению центра просвета. Формирование вихревых структур перед стенозом требует дополнительных затрат механической энергии, что ведет к монотонному увеличению перепада давления на стенозе по мере нарастания степени смещения центра просвета от осевой линии.

Монотонно неубывающую зависимость прогнозируемого перепада давления от входных параметров предлагается представить в виде

$$\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X_{Re}} \geq 0, \quad \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X_{L_{st}}} \geq 0, \quad \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X_{\lambda}} \geq 0, \quad \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X_{\alpha}} \geq 0. \quad (6)$$

Это отражает следующие соображения: при увеличении числа Рейнольдса, длины стеноза, степени сужения просвета и его асимметрии потери энергии на сопротивление потоку возрастают, а значит, должен увеличиваться и перепад давления. Эти соображения соответствуют данным экспериментов и математического моделирования [Young, Tsai, 1973; Ma et al., 2014; El Khatib et al., 2019; Ventre et al., 2019; Alzhanov et al., 2024; Gamilov et al., 2024; Xia et al., 2025]. Производные по входным параметрам вычислялись методом автоматического дифференцирования, описанного, например, в [Baydin et al., 2018; Raissi et al., 2019; Конюхов и др., 2024].

Для включения ограничений (6) в функцию потерь вводится штраф за нарушение монотонности. Он вычисляется как среднее по обучающей выборке от суммы частных штрафов, где каждый частный штраф представляет собой квадрат отрицательной части соответствующей частной производной:

$$\text{Loss}_{\text{mono}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E_{\text{Re}}^i + E_{L_{\text{st}}}^i + E_{\lambda}^i + E_{\alpha}^i), \quad (7)$$

где N — количество объектов в обучающей выборке, E_{Re}^i , $E_{L_{\text{st}}}^i$, E_{λ}^i , E_{α}^i — штрафы для i -го стеноза в обучающей выборке за нарушения монотонности по соответствующему параметру. Каждый из штрафов вычисляется как

$$E_{\phi}^i = \theta(\xi_{\phi}) \xi_{\phi}^2, \quad (8)$$

где $\theta(\xi)$ — функция Хевисайда, $\xi_{\phi} = -\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X_{\phi}}$, ϕ — символьная переменная, $\phi \in \{\text{Re}, L_{\text{st}}, \lambda, \alpha\}$.

Второе физическое ограничение состоит в том, что предсказанный перепад давления (переменная \widehat{Y}) должен принимать положительные значения:

$$\widehat{Y} \geq 0. \quad (9)$$

Соответствующий штраф:

$$\text{Loss}_{\text{neg}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{\text{neg}}^i, \quad (10)$$

$$E_{\text{neg}}^i = \theta(-\widehat{Y}_i) \widehat{Y}_i^2. \quad (11)$$

Физически информированная функция потерь принимает вид

$$\text{PhysLoss} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E_{\text{Re}}^i + E_{L_{\text{st}}}^i + E_{\lambda}^i + E_{\alpha}^i + E_{\text{neg}}^i). \quad (12)$$

Таким образом, полная функция потерь имеет вид

$$\text{TotalLoss} = \text{MSE} + \omega \text{PhysLoss}, \quad (13)$$

где ω — весовой коэффициент. В данной работе полагалось $\omega = 10^{-3}$, поскольку при таком значении вклады физически обусловленной и основной части функции потерь оказываются сравнимыми по величине.

Обучение нейронной сети выполнялось с использованием оптимизатора Adam со скоростью обучения 10^{-4} в течение $3 \cdot 10^4$ эпох. Для ФИНС используется обучение по всей обучающей выборке, физическая часть функции потерь вычисляется по всем точкам одновременно. Это обеспечивает корректное вычисление производных и стабильность физического штрафа. Этот подход соответствует классической реализации ФИНС [Raissi et al., 2019].

Исходный набор данных был разделен на обучающую и валидационную выборки в соотношении 80 % и 20 % соответственно. Разбиение выполнялось случайным образом с равномерным распределением. Валидационная выборка использовалась для анализа степени переобучения и оптимизации нейронных сетей (подбор гиперпараметров, изменение структуры сети).

Для сравнения FFNN и ФИНС использовалась тестовая выборка, которая включала набор из отдельно сгенерированных моделей стенозов, не входящих в синтетическую базу данных. Тестовая выборка позволяет проверить способность нейронной сети обобщать результаты на новые, ранее не встречавшиеся в обучающей выборке случаи. В тестовую выборку вошли стенозы с соотношением длины и радиуса $\frac{L_{st}}{R_0}$, равным 8 и 4, и степенями стеноза 33 % и 66 %. Для каждой комбинации длины и степени стеноза тестовой выборки генерировались стенозы для всех чисел Рейнольдса (10 значений) и степеней асимметрии (3 значения), входивших в изначальную базу данных. Таким образом, в тестовую выборку вошло $2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 3 = 120$ вариантов стенозов.

Производные в (7), (8) вычислялись на тех же масштабированных входных данных, что использовались нейронной сетью, поскольку физический штраф основан на нормированных градиентах, масштабирование не влияет на корректность вычислений.

Для оценки и сравнения стандартной FFNN с ФИНС использовались следующие метрики.

1. R^2 — коэффициент детерминации, т. е. доля дисперсии истинных значений, которая объясняется моделью предсказания:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta P_i - \widehat{\Delta P}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (\Delta P_i - \overline{\Delta P})^2}, \quad (14)$$

где $\overline{\Delta P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta P_i$ — среднее значение перепада давления.

2. WAPE — средняя абсолютная ошибка, нормированная на среднее по модулю истинных значений (Weighted Absolute Percentage Error). Этот параметр показывает среднюю относительную погрешность модели предсказания, выраженную в процентах:

$$\text{WAPE} = \frac{\sum_{i=1}^N |\Delta P_i - \widehat{\Delta P}_i|}{\sum_{i=1}^N |\Delta P_i|} 100\%. \quad (15)$$

3. sMAPE — симметричная средняя абсолютная процентная погрешность (Symmetric Mean Absolute Percentage Error), т. е. погрешность, нормированная на сумму модулей истинного и предсказанного значений. Данный параметр менее чувствителен к малым значениям целевой переменной:

$$\text{sMAPE} = \frac{100\%}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2|\Delta P_i - \widehat{\Delta P}_i|}{|\Delta P_i| + |\widehat{\Delta P}_i|}. \quad (16)$$

4. $\frac{\text{MAE}}{\sigma}$ — средняя абсолютная ошибка, деленная на стандартное отклонение истинных значений. Этот параметр показывает отношение типичной ошибки модели к ошибке, связанной

с естественной вариабельностью данных:

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\Delta P_i - \widehat{\Delta P}_i|, \quad (17)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta P_i - \widehat{\Delta P}_i)^2}. \quad (18)$$

Результаты

Валидация синтетической базы данных

Валидация предложенной численной модели проводилась путем сравнения полученных результатов с двумя независимыми источниками: результатами, полученными с помощью расчетов кровотока на упрощенных симметричных моделях [Ventre et al., 2019], и экспериментальными данными *in vitro* [Young, Tsai, 1973].

Для первой серии численных экспериментов по валидации в качестве эталона выступала модель Multi-Ring [Ventre et al., 2019]. Модель Multi-Ring — это численный метод, разработанный для решения уравнений Навье–Стокса в осесимметричной постановке (двумерные уравнения в цилиндрических координатах), который учитывает эластичность и подвижность стенок за счет сопряжения численного решения с законом деформации стенок. Эта модель использовалась для оценки влияния гибкости стенок на перепад давления. В работе [Ventre et al., 2019] продемонстрирована высокая точность Multi-Ring-модели при расчете перепада давления на осесимметричных стенозах путем сравнения с другими моделями и измерениями *in vivo*.

В первой серии численных экспериментов рассчитывался перепад давления в сосуде с осесимметричным стенозом. Граничные условия аналогичны постановке (1). Геометрия сосуда бралась в соответствии с описанием в [Ventre et al., 2019]. Результаты расчетов в SimVascular на осесимметричных стенозах практически совпадают с результатами Multi-Ring в широком диапазоне степеней сужения (рис. 3). Среднее отклонение численного эксперимента в Simvascular от Multi-Ring составило 2,17%. Профиль нормализованного давления вдоль оси сосуда, полученный в SimVascular, также идентичен профилям, предсказанным Multi-Ring (рис. 4).

В осесимметричной постановке и при ламинарном течении модель Multi-Ring эквивалентна трехмерной модели течения жидкости [Ventre et al., 2019], но при этом Multi-Ring учитывает эластичность стенок сосуда. Поскольку результаты Multi-Ring практически совпадают с расчетами в SimVascular для жестких стенок, можно сделать вывод, что учет эластичности стенок не вносит существенного вклада в прогнозирование перепада давления для рассматриваемых стенозов. Таким образом, модель с жесткими стенками показывает достаточную точность при сравнении перепадов давления для стационарного течения.

Во второй серии валидационных экспериментов результаты расчетов сравнивались с классическими экспериментами *in vitro* для несимметричных стенозов, проведенными в [Young, Tsai, 1973].

Результаты из [Young, Tsai, 1973] получены в серии гидродинамических экспериментов, использующих в качестве рабочей жидкости дистиллированную воду (ньютоновская жидкость) в физических моделях артериальных стенозов. Главной отличительной особенностью является использование асимметричных стенозов. Для валидации использовался асимметричный стеноз (модель M-5 из [Young, Tsai, 1973]) со степенью стеноза $\lambda = 0,67$ и $L_{st} = 8R_0$. Геометрия сосуда была в точности воспроизведена при моделировании в SimVascular. В данном эксперименте рассчитывался перепад давления между началом сосуда и точками, лежащими на оси сосуда.

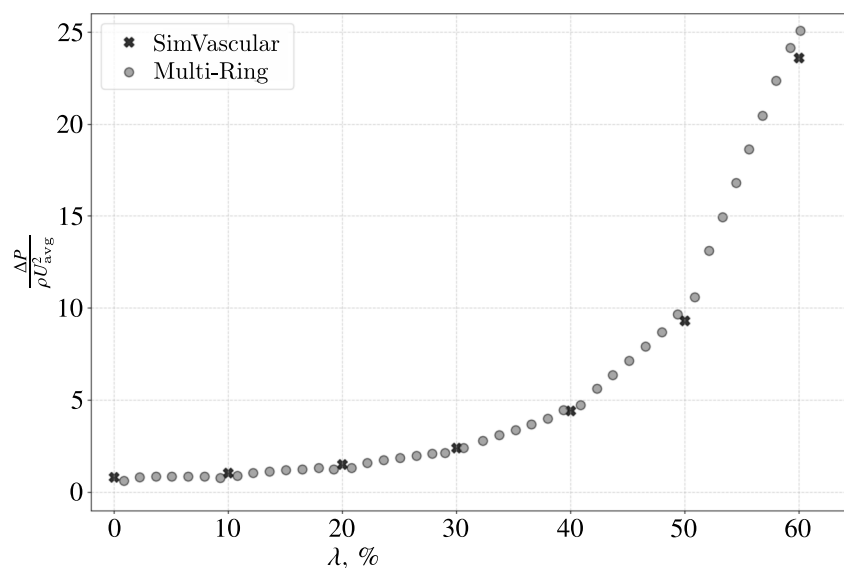


Рис. 3. Безразмерный перепад давления на сосуде в зависимости от степени стеноза для модели Multi-Ring [Ventre et al., 2019] и (1), реализованной в SimVascular

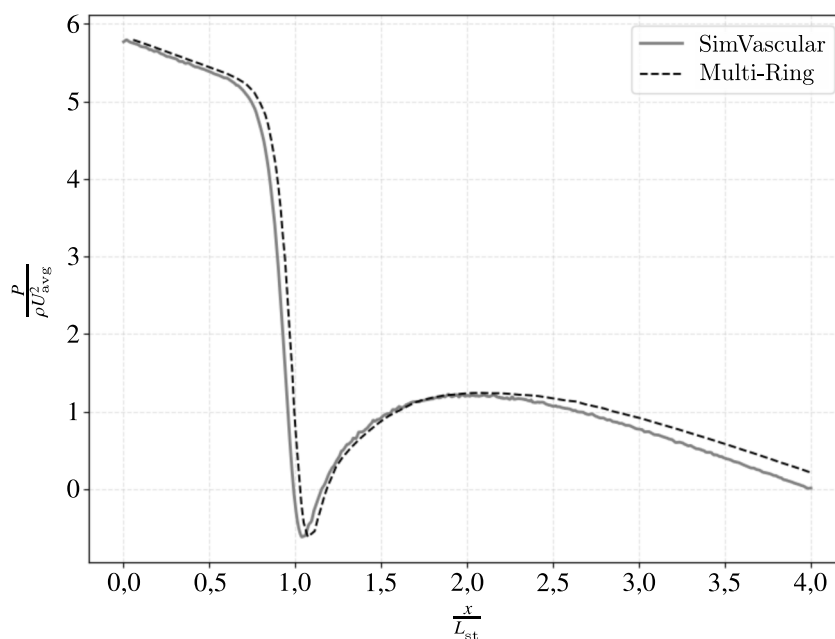


Рис. 4. Безразмерное давление вдоль сосуда на стенозе $\lambda = 0,4$ для модели Multi-Ring [Ventre et al., 2019] и (1), реализованной в SimVascular

Сравнение показало хорошее количественное совпадение результатов SimVascular с экспериментальными данными [Young, Tsai, 1973] как для расчета перепада давления вдоль оси сосуда (рис. 5), так и для зависимости общего перепада давления от числа Рейнольдса (рис. 6). Среднее отклонение численного эксперимента в SimVascular от эксперимента *in vitro* составило 3,55 %.

Полученные результаты подтверждают, что постановка задачи и численный эксперимент, используемые в SimVascular, являются корректными и применимы для расчета перепада давления как для осесимметричных, так и для сложных асимметричных геометрий.

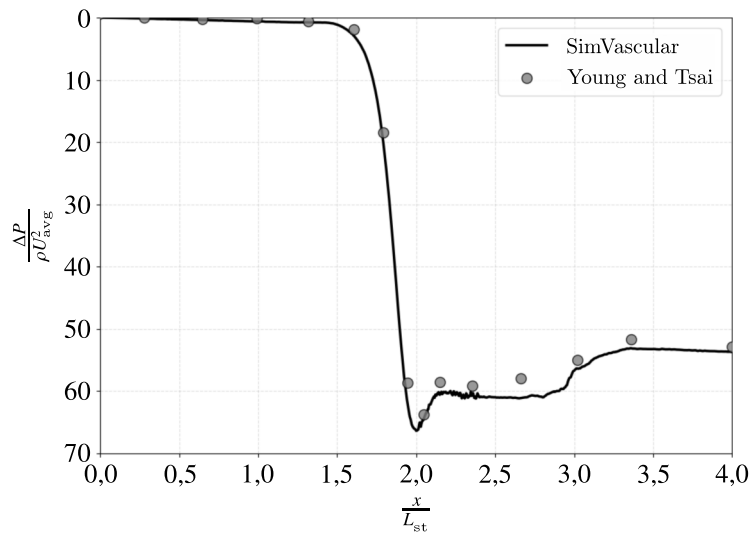


Рис. 5. Безразмерный перепад давления вдоль сосуда на асимметричном стенозе при $Re = 900$. SimVascular — результаты расчетов с помощью (1); Young and Tsai — результаты лабораторного эксперимента [Young, Tsai, 1973]

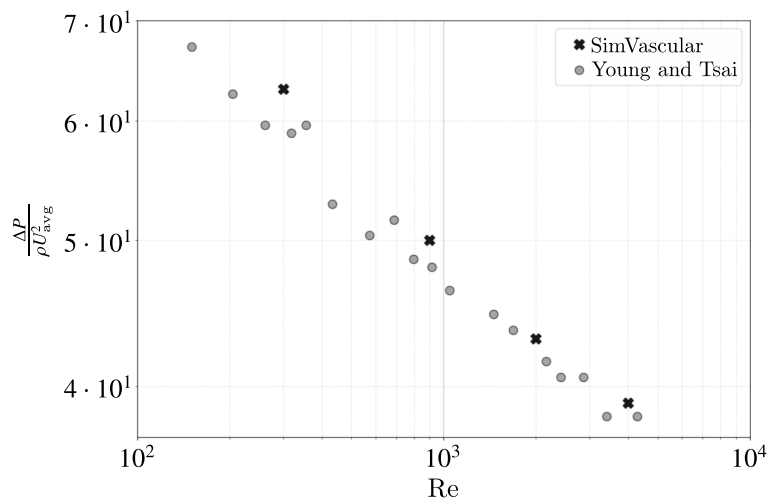


Рис. 6. Безразмерный перепад давления на асимметричном ($\alpha = 0,5$) стенозе при различных числах Рейнольдса. SimVascular — результаты расчетов с помощью (1); Young and Tsai — результаты лабораторного эксперимента [Young, Tsai, 1973]. По осям используется логарифмическая шкала

Для генерации синтетической базы данных, охватывающей описанный в данной работе диапазон параметров, было проведено 1620 расчетов. Для выполнения расчетов был задействован высокопроизводительный вычислительный кластер Института компьютерных наук и математического моделирования Сеченовского университета.

Оценка перепадов давления с помощью нейронной сети

В данном разделе приводится сравнительный анализ качества определения перепадов давления с использованием FFNN и ФИНС. Прежде всего оценим, как введение физически обоснованных регуляризирующих членов влияет на устойчивость нейросетевого моделирования, и оценим разницу между FFNN и ФИНС на валидационной выборке.

Обе нейронные сети были обучены на основе одинаковых начальных весов с одинаковыми гиперпараметрами в течение $3 \cdot 10^4$ эпох. На рис. 7 показаны кривые обучения FFNN и ФИНС

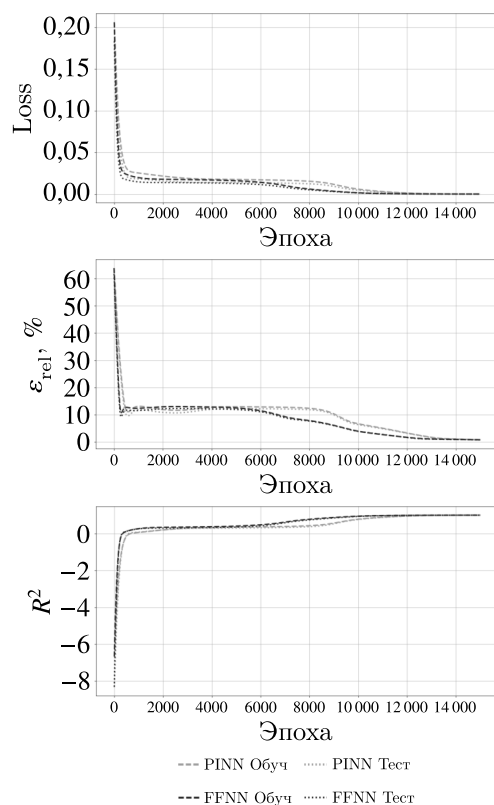


Рис. 7. Сравнение кривых обучения FFNN и ФИНС

для $1,4 \cdot 10^4$ эпох. После $1,4 \cdot 10^4$ погрешность обучения обеих нейронных сетей заведомо ниже 1%. Поэтому данный интервал считается достаточно большим для корректного сравнения. Из рис. 7 также следует, что погрешность FFNN убывает быстрее, и она демонстрирует более гладкие кривые ошибок. ФИНС обучается медленнее и имеет менее гладкие переходные участки, поскольку физические ограничения усложняют оптимизацию. Однако именно из-за этого ФИНС обнаруживает более устойчивые и физически корректные решения вне обучающей выборки. По полученным кривым переобучения не наблюдается, значения на обучающей и валидационной выборках практически совпадают для обеих нейронных сетей на всех метриках. Это означает, что после каждого обновления весов качество проверялось на данных, не участвовавших в обучении, и нейронная сеть показывала сопоставимые результаты.

Из рис. 8 видно, что обе нейронные сети демонстрируют высокую точность на валидационной выборке, однако в области крупных перепадов давления точки ФИНС лежат ближе к прямой, характеризующей идеальное совпадение.

В следующей серии численных экспериментов исследовалась точность предсказания перепадов давлений на тестовой выборке, состоящей из стенозов, не представленных в синтетической базе данных (рис. 9). Для ФИНС медианные ошибки на тестовой выборке составляют 2–9%, тогда как для FFNN этот диапазон составил 8–30%, что показывает более высокую устойчивость и точность ФИНС.

В таблице 1 представлены итоговые результаты сравнения ФИНС и FFNN. В первых четырех строках указаны результаты проверки на валидационной выборке. Валидационная выборка состоит из 20% записей (стенозов) базы данных и состоит из 324 случаев со степенями стенозов от 0% до 80%, числами Рейнольдса от 30 до 800, длинами стенозов от 2,5 до 30 радиусов сосуда, тремя степенями асимметрии (0, 0,5 и 1). В последних двух строках указаны средние относительные ошибки (MRE) на тестовой выборке. Тестовая выборка состоит из записей (стенозов),

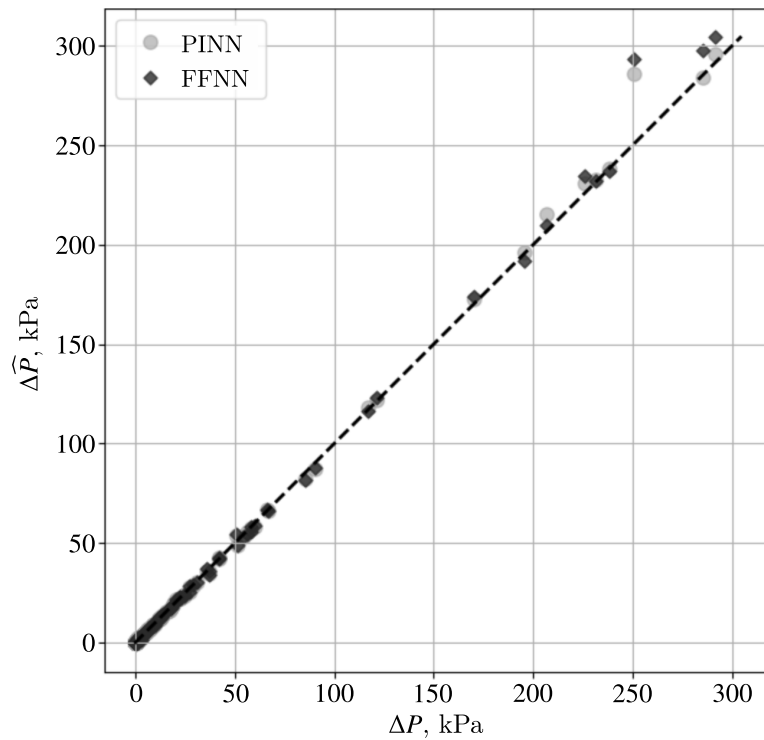


Рис. 8. Сравнение истинных (вычисленных на основе моделирования) и предсказанных значений перепада давления ΔP для FFNN и ФИНС на валидационной выборке, состоящей из случаев из синтетической базы данных со степенями стеноза от 0 % до 80 %

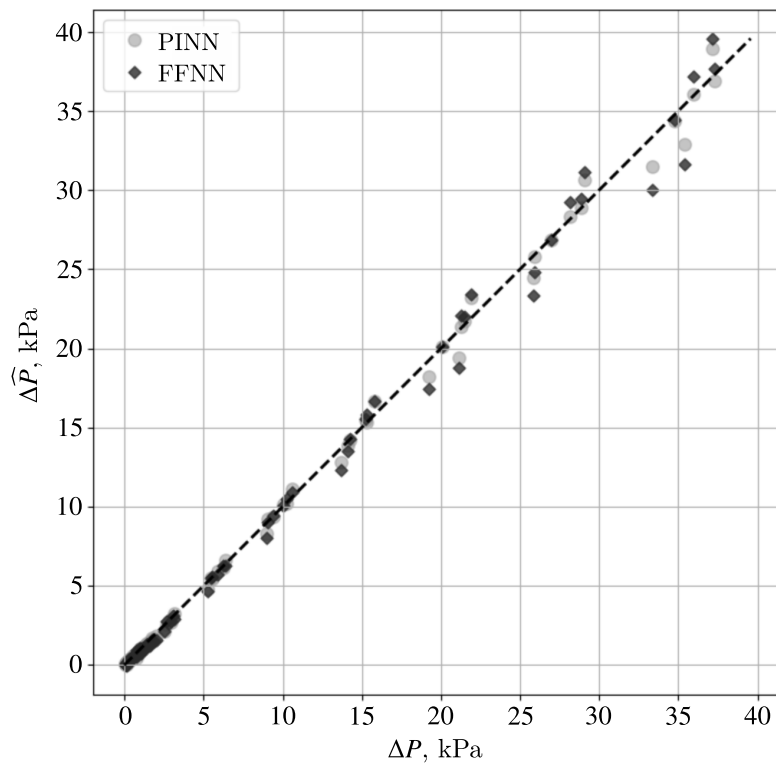


Рис. 9. Сравнение истинных и предсказанных значений перепада давления ΔP для ФИНС и FFNN на тестовой выборке, не содержащей моделей стенозов из синтетической базы данных, состоящей из 120 отдельно сгенерированных стенозов со степенями стеноза 33 % и 66 %

не представленных в базе данных, и состоит 120 случаев со степенями стенозов от 33 % и 66 %, числами Рейнольдса от 30 до 800, длинами стенозов 4 и 8 радиусов сосуда, тремя степенями асимметрии (0, 0,5 и 1).

На основе представленных в таблице 1 данных следует, что ФИНС систематически превосходит FFNN по всем показателям. R^2 у ФИНС выше, а WAPE, sMAPE и нормированная ошибка $\frac{MAE}{\sigma}$ — ниже. Особенно заметно преимущество на тестовой выборке: MRE для новых конфигураций стенозов у ФИНС лежат в диапазоне 2,3–12,9 %, тогда как у FFNN этот диапазон составляет 6–30 %.

Таблица 1. Сравнение точности ФИНС и FFNN

Метрика	ФИНС	FFNN
R^2	0,9973	0,9956
WAPE	2,97 %	4,36 %
sMAPE	33,76 %	44,52 %
$\frac{MAE}{\sigma}$	0,91 %	1,34 %
MRE ($L_{st} = 4R_0$)	6,22 %	13,31 %
MRE ($L_{st} = 8R_0$)	9,45 %	9,90 %

В итоге ФИНС показала себя лучше нейросети с классической архитектурой. Она дает более низкие ошибки и стабильнее работает на стенозах с новыми наборами входных значений.

Обсуждение

Существует два основных подхода к прогнозированию перепада давления на стенозах: численное гидродинамическое моделирование (CFD) и методы машинного обучения (ML). Классический CFD обладает высокой точностью, но требует больших вычислительных ресурсов и времени. Чтобы сократить время симуляций, используют редуцированные модели, однако они обладают низкой точностью при сложных пространственных конфигурациях и больших Re. Классические методы машинного обучения не учитывают физические законы и требуют обширных обучающих баз данных. Сбор подобных баз данных является длительным и ресурсоемким и требует привлечения большого количества высококвалифицированных экспертов.

В данной работе предложена методика оценки перепада давления на стенозе, комбинирующая подходы математического моделирования и машинного обучения. Для обучения нейронной сети была сгенерирована синтетическая база данных из 1620 стенозов. Для генерации базы данных использовалась модель течения вязкой несжимаемой жидкости через трубку с жесткими стенками переменного сечения. Корректность результатов моделирования обуславливается сравнением с результатами других численных экспериментов (рис. 3, 4), в том числе учитывающих эластичность стенок артерий, а также с результатами экспериментов *in vitro* (см. рис. 5, 6). Рассчитанные профили давления соответствуют экспериментальным при различных режимах течения, отклонение не превышает 3–4 %.

Сгенерированная база данных была использована для обучения ФИНС. Предсказанные нейронной сетью перепады давления соответствуют перепадам, рассчитанным с помощью математического моделирования (рис. 8, рис. 9, таблица 1). При этом ФИНС демонстрирует в 1,5–2 раза меньшую ошибку по сравнению с FFNN. Особенно сильно это различие видно при попытке предсказать давление на стенозах, не присутствовавших в базе данных длиной в 8 радиусов сосуда (таблица 1). Это говорит о способности ФИНС обобщать результаты на новые случаи и ее меньшей зависимости от размера и плотности обучающей выборки.

По сравнению с другими ФИНС, построенными для оценки гемодинамической значимости стенозов [Zhang et al., 2023; Alzhanov et al., 2024], в данной работе не используются данные реальных пациентов, а геометрии сосудов упрощены. На входе в нейронную сеть подается всего четыре параметра. С одной стороны, это делает сгенерированную базу данных более универсальной и простой в использовании. Разработанную нейронную сеть и базу данных можно использовать для оценки перепадов давлений стенозов в различных участках сосудистого русла: в коронарных сосудах, сонных и бедренных артериях. Кроме того, простота набора входных данных упрощает интеграцию нейронной сети в другие модели кровотока. С другой стороны, для дальнейшего развития предложенного подхода необходимы валидация на данных реальных пациентов и расширение набора параметров, описывающих геометрию и другие характеристики стеноза.

Одним из важных результатов является повышение точности ФИНС по сравнению со стандартной нейронной сетью, в особенности на новых стенозах, не представленных в обучающей выборке. Интересно отметить, что повышение точности незначительно на коротких стенозах (таблица 1, стенозы длиной $4R_0$), но более заметно на длинных стенозах (таблица 1, стенозы длиной $8R_0$).

Одним из ограничений данной работы является использование сосуда с фиксированным радиусом в 1,5 мм для генерации всей базы данных. Данное ограничение можно обойти, используя гидродинамическое подобие. При наличии сосуда другого диаметра можно рассчитать безразмерные отношения длины стеноза к диаметру, число Рейнольдса, степень стеноза и степень асимметрии, а затем привести задачу к задаче со стенозом в сосуде радиусом 1,5 мм. Для устранения этого недостатка планируется тестирование использования базы данных на стенозах различных диаметров, а также исследование возможности ее расширения без проведения дополнительных расчетов за счет обезразмеривания постановки задачи.

Заключение

В данной работе описана методика генерации синтетической базы данных стенозов, состоящей из 1620 записей. База данных валидировалась путем сравнения с другими моделями (с эластичными стенками) и стендовыми экспериментами и показала отклонение перепадов давлений не выше 4 %.

База данных синтетических стенозов использовалась для обучения ФИНС для быстрой оценки перепада давления по четырем ключевым показателям: число Рейнольдса, длина стеноза, степень стеноза, степень асимметрии стеноза. ФИНС показала более высокую точность на гемодинамических значимых стенозах при тестировании на валидационной выборке и тестовой выборках. Средняя относительная ошибка на стенозах длиной в 8 радиусов здорового сосуда составила 6 % для физически информированной сети и 13 % для классической нейронной сети. Ошибки на коротких стенозах длиной в 4 радиуса почти одинаковы: 9,5 % для ФИНС и 10 % для FFNN.

В дальнейшем планируется расширение базы данных за счет включения критических стенозов со степенью сужения диаметра до 90 % и увеличения варьируемых характеристик стенозов, оказывающих влияние на перепад давления: форма профиля стеноза, кривизна сосуда, различные типы асимметрий стенозов [Rasooli et al., 2025]. Планируются валидация нейронной сети на данных реальных пациентов и ее интеграция в одномерную сетевую модель кровотока [Gamilov et al., 2024].

Разработанный в ходе данного исследования метод функциональной оценки гемодинамической значимости стенозов (ФИНС) представляет собой универсальный инструмент, который

может быть интегрирован в клиническую практику и научные исследования по нескольким направлениям. Прежде всего, метод может применяться автономно для неинвазивной оценки степени влияния стенозов на параметры кровотока, что само по себе имеет высокую диагностическую ценность. В то же время заложенные в основу ФИНС принципы позволяют использовать его в качестве базового компонента при построении более сложных гемодинамических моделей, расширяя возможности комплексного анализа сосудистой патологии.

Особого внимания заслуживает перспектива применения данного подхода для моделирования кровотока в условиях многососудистого поражения артерий. Как показывает клиническая практика, именно сочетание гемодинамически значимых стенозов в нескольких сосудистых бассейнах одного или различных органов является наиболее распространенным сценарием течения сердечно-сосудистых заболеваний. В этой связи разработанная методика приобретает ключевое значение, поскольку позволяет адекватно отражать сложные взаимодействия между множественными очагами поражения.

Принципиальным преимуществом предложенного подхода является оптимальный баланс между физической достоверностью результатов и вычислительной эффективностью. Получаемые с помощью ФИНС данные физически корректны и демонстрируют точность, сопоставимую с результатами классического моделирования гемодинамики. При этом достигается существенная экономия вычислительных ресурсов, что открывает возможности для широкого внедрения метода как в исследовательскую практику, так и в клинические приложения, где критически важны скорость получения результатов и возможность обработки большого объема данных.

Список литературы (References)

- Буничева А. Я., Мухин С. И., Соснин Н. В., Хруленко А. Б. Квазиодномерные модели гемодинамики // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2024. — № 4. — С. 44–59.
- Bunicheva A. Ya., Mukhin S. I., Sosnin N. V., Khrulenko A. B.* Kvaziodnomernye modeli gemodinamiki [Quasi-one-dimensional hemodynamic models] // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2024. — No. 4. — P. 44–59 (in Russian).
- Конюхов И. В., Конюхов В. М., Черница А. А., Дюсенова А. Особенности применения физически информированных нейронных сетей для решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Компьютерные исследования и моделирование. — 2024. — Т. 16, № 7. — С. 1621–1636.
- Konyukhov I. V., Konyukhov V. M., Chernitsa A. A., Dyussenova A.* Osobennosti primeneniya fizicheski informirovannykh neironnykh setey dlya resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Analysis of the physics-informed neural network approach to solving ordinary differential equations] // Computer Research and Modeling. — 2024. — Vol. 16, No. 7. — P. 1621–1636 (in Russian).
- Петров М. Н., Зимина С. В. Суррогатный нейросетевой метод восстановления поля течения из однородного поля итерациями в расчетах стационарных турбулентных течений // Компьютерные исследования и моделирование. — 2025. — Т. 17, № 2. — С. 179–197.
- Petrov M. N., Zimina S. V.* Surrogatnyy neyrosetevoy metod vosstanovleniya polya techeniya iz odnorodnogo polya iteratsiyami v raschetakh statsionarnykh turbulentykh techeniy [A surrogate neural network method for restoring the flow field from a homogeneous field by iterations in calculations of steady turbulent flows] // Computer Research and Modeling. — 2025. — Vol. 17, No. 2. — P. 179–197 (in Russian).
- Чернявский М. А., Иртыга О. Б., Янишевский С. Н., Алиева А. С., Самочерных К. А., Абрамов К. Б., Вавилова Т. В., Лукьянчиков В. А., Курапеев Д. И., Ванюркин А. Г., Чернова Д. В., Шелуханов Н. К., Козленок А. В., Кавтеладзе З. А., Малеванный М. В., Виноградов Р. А., Хафизов Т. Н., Иванова Г. Е., Жуковская Н. В., Фокин А. А., Игнатъев И. М., Карпенко А. А., Игнатов П. В., Астапов Д. А., Семенов В. Ю., Порханов В. А., Крылов В. В., Усачев Д. Ю., Светликов А. В., Алесян Б. Г., Акчурин Р. С., Чернявский А. М., Конради А. О., Шляхто Е. В. Российский консенсус по диагностике и лечению пациентов со стенозом сонных артерий // Российский кардиологический журнал. — 2024. — Т. 27, № 11. — 5284.
- Chernyavsky M. A., Irtyuga O. B., Yanishevsky S. N., Alieva A. S., Samochernykh K. A., Abramov K. B., Vavilova T. V., Lukyanchikov V. A., Kurapeev D. I., Vanyurkin A. G., Chernova D. V., Shelukhanov N. K., Kozlyonok A. V., Kavteladze Z. A., Malevanny M. V., Vinogradov R. A., Khafizov T. N., Ivanova G. E., Zhukovskaya N. V., Fokin A. A.,*

- Ignatiev I. M., Karpenko A. A., Ignatenko P. V., Astapov D. A., Semenov V. Yu., Porkhanov V. A., Krylov V. V., Usachev D. Yu., Svetlikov A. V., Alekhan B. G., Akchurin R. S., Chernyavsky A. M., Konradi A. O., Shlyakhto E. V.* Rossiiskii konsensus po diagnostike i lecheniyu patsientov so stenozom sonnykh arterii [Russian consensus statement on the diagnosis and treatment of patients with carotid stenosis] // *Russian Journal of Cardiology*. — 2024. — Vol. 27, No. 11. — 5284 (in Russian).
- Abbasi J., Andersen P. O.* Physical activation functions (PAFs): An approach for more efficient induction of physics into physics-informed neural networks (PINNs) // *Neurocomputing*. — 2024. — Vol. 608. — 128352.
- Aghaee A., Khan M. O.* Pinning down the accuracy of physics-informed neural networks under laminar and turbulent-like aortic blood flow conditions // *Comput. Biol. Med.* — 2025. — Vol. 185. — 109528.
- Ahamad N. A., Kamangar S., Badruddin I. A.* The influence of curvature wall on the blood flow in stenosed artery: A computational study // *Biomedical Materials Engineering*. — 2018. — Vol. 29, No. 3. — P. 319–332.
- Alzhanov N., Ng E. Y. K., Zhao Y.* Three-dimensional physics-informed neural network simulation in coronary artery trees // *Fluids*. — 2024. — Vol. 9, No. 7. — 153.
- Amare R., Hodneland E., Roberts J. A., Bahadori A. A., Eckels S.* Modeling a 3-D multiscale blood-flow and heat-transfer framework for realistic vascular systems // *Sci. Rep.* — 2022. — Vol. 12, No. 1. — 14610.
- Andersen B. K., Sejr-Hansen M., Maillard L., Campo G., Råmunddal T., Stähli B. E., Guiducci V., Serafino L. D., Escaned J., Santos I. A., López-Palop R., Landmesser U., Dieu R. S., Mejía-Rentería H., Koltowski L., Žiubrytė G., Cetran L., Adjedj J., Abdelwahed Y. S., Liu T., Mogensen L. J. H., Eftekhari A., Westra J., Lenk K., Casella G., Van Belle E., Biscaglia S., Olsen N. T., Knaapen P., Kochman J., Santos R. C., Scarsini R., Christiansen E. H., Holm N. R.* Quantitative flow ratio versus fractional flow reserve for coronary revascularisation guidance (FAVOR III Europe): a multicentre, randomised, non-inferiority trial // *The Lancet* — 2024. — Vol. 404, No. 10465. — P. 1835–1846.
- Arefinia F., Aria M., Rabiei R., Hosseini A., Ghaemian A., Roshanpoor A.* Non-invasive fractional flow reserve estimation using deep learning on intermediate left anterior descending coronary artery lesion angiography images // *Sci. Rep.* — 2024. — Vol. 14. — 1818.
- Baydin A. G., Pearlmutter B. A., Radul A. A., Siskind J.* Automatic differentiation in machine learning: A survey // *J. Mach. Learn. Res.* — 2018. — Vol. 18, No. 153. — P. 1–43.
- Ben-Assa E., Abu Salman A., Cafri C., Roguin A., Hellou E., Koifman E., Feld Y., Lev E., Sheinman G., Harari E., Abu Dogosh A., Beyar R., Garcia-Garcia H. M., Davies J., Ben-Yehuda O.* Performance of a novel artificial intelligence software developed to derive coronary fractional flow reserve values from diagnostic angiogram // *Coron. Artery Dis.* — 2023. — Vol. 34, No. 8. — P. 533–541.
- Boussoussou M., Édes I. F., Nowotta F., Vattay B., Vecsey-Nagy M., Drobni Z., Simon J., Kolossváry M., Németh B., Jermendy Á. L., Becker D., Leipsic J., Rogers C., Collinsworth A., Maurovich-Horvat P., Merkely B., Szilveszter B.* Coronary CT-based FFR in patients with acute myocardial infarction might predict follow-up invasive FFR: The XPECT-MI study // *J. Cardiovasc. Comput. Tomogr.* — 2023. — Vol. 17, No. 4. — P. 269–276.
- Bunicheva A. Y., Kochetov E. V., Mukhin S. I.* Mathematical model of building a neural network for diagnosing circulatory disorders // *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.* — 2022. — Vol. 46. — P. 125–132.
- Cai S., Mao Z., Wang Z., Yin M., Karniadakis G. E.* Physics-informed neural networks (PINNs) for fluid mechanics: a review // *Acta Mech. Sin.* — 2021. — Vol. 37. — P. 1727–1738.
- Danilov V. V., Klyshnikov K. Yu., Gerget O. M., Kutikhin A. G., Ganyukov V. I., Frangi A. F., Ovcharenko E. A.* Real-time coronary artery stenosis detection based on modern neural networks // *Sci. Rep.* — 2021. — Vol. 11, No. 1. — 7582.

- Dobroserdova T., Olshanskii M., Simakov S.* Multiscale coupling of compliant and rigid walls blood flow models // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* — 2016. — Vol. 82, No. 12. — P. 799–817.
- El Khatib N., Kafi O., Sequeira A., Simakov S., Vassilevski Yu., Volpert V.* Mathematical modelling of atherosclerosis // *Math. Model. Nat. Phenom.* — 2019. — Vol. 14, No. 6. — 603.
- Gamilov T., Kopylov P., Simakov S.* Computational simulations of fractional flow reserve variability // *Numerical Mathematics and Advanced Applications ENUMATH 2015.* — 2016. — P. 499–507.
- Gamilov T., Liang F., Kopylov P., Kuznetsova N., Rogov A., Simakov S.* Computational analysis of hemodynamic indices based on personalized identification of aortic pulse wave velocity by a neural network // *Mathematics.* — 2023. — Vol. 11, No. 6. — 1358.
- Gamilov T., Danilov A., Chomakhidze P., Kopylov P., Simakov S.* Computational analysis of hemodynamic indices in multivessel coronary artery disease in the presence of myocardial perfusion dysfunction // *Computation.* — 2024. — Vol. 12, No. 6. — 110.
- Goodfellow I., Bengio Y., Courville A.* *Deep Learning.* — Cambridge, MA: MIT Press, 2016. — 800 p.
- Hohri Y., Chung M.M., Kandula V., Kim I., Leb J., Hayashi H., Elmously A., O'Donnell T.F., Patel V., Vedula V., Takayama H.* Blood flow assessment technology in aortic surgery: a narrative review // *J. Thorac. Dis.* — 2024. — Vol. 16, No. 4. — P. 2623–2636.
- Iliadis P., Petridis S., Skembris A., Rakopoulos D., Kosmatopoulos E.* Physics-informed neural networks for enhanced state estimation in unbalanced distribution power systems // *Appl. Sci.* — 2025. — Vol. 15. — 7507.
- Isaev A., Dobroserdova T., Danilov A., Simakov S.* Physically informed deep learning technique for estimating blood flow parameters in four-vessel junction after the fontan procedure // *Computation.* — 2024. — Vol. 12, No. 3. — 41.
- Kasapis C., Gurm H.S.* Current approach to the diagnosis and treatment of femoral-popliteal arterial disease. A systematic review // *Curr. Cardiol. Rev.* — 2009. — Vol. 5, No. 4. — P. 296–311.
- Kim H.J., Lee C.M., Choi Y., Chang H., Jung K.-H.* Multiscale modeling of posture-dependent cerebrovascular hemodynamics with autoregulatory coupling // *Comput. Biol. Med.* — 2026. — Vol. 203. — 111502.
- Lan H., Updegrove A., Wilson N.M., Maher G.D., Shadden S.C., Marsden A.L.* A re-engineered software interface and workflow for the open-source SimVascular cardiovascular modeling package // *J. Biomech. Eng.* — 2018. — Vol. 140, No. 2. — 0245011.
- Liu Z., Liu Y., Yan X., Liu W., Nie H., Guo S., Zhang C.* Automatic network structure discovery of physics informed neural networks via knowledge distillation // *Nat. Commun.* — 2025. — Vol. 16. — 9558.
- Ma L., Liu Y., Zhao X., Ren X., Bai F., Ding J., Zhang M., Wang W., Xie J., Zhang H., Zhao Z., Han H.* Hemodynamic influence of different pulmonary stenosis degree in Glenn procedure: a numerical study // *Adv. Mech. Eng.* — 2014. — Vol. 2014. — 72370.
- Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E.* Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // *J. Comput. Phys.* — 2019. — Vol. 378. — P. 686–707.
- Rasooli R., Pekkan K., Larsen A.I., Hiorth A.* Assessment of guidewire-induced deviation in fractional flow reserve: impact of lesion morphology and pressure guidewire malposition // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering.* — 2025. — Vol. 41, No. 11. — P. e70112.
- Sahni O., Carothers C., Shephard M., Jansen K.* Strong scaling analysis of a parallel, unstructured, implicit solver and the influence of the operating system interference // *Scientific Programming.* — 2009. — Vol. 17. — P. 261–274.

- Simakov S. S., Gamilov T. M., Liang F., Gognieva D. G., Gappoeva M. K., Kopylov P. Yu.* Numerical evaluation of the effectiveness of coronary revascularization // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. — 2021. — Vol. 36, No. 5. — P. 303–312.
- Taebi A.* Deep learning for computational hemodynamics: A brief review of recent advances // *Fluids*. — 2022. — Vol. 7, No. 6. — 197.
- Tu S., Westra J., Adedj J., Ding D., Liang F., Xu B., Holm N. R., Reiber J. H. C., Wijns W.* Fractional flow reserve in clinical practice: from wire-based invasive measurement to image-based computation // *Eur. Heart. J.* — 2020. — Vol. 41, No. 34. — P. 3271–3279.
- Updegrave A., Wilson N. M., Merkow J., Lan H., Marsden A. L., Shadden S. C.* SimVascular: an open source pipeline for cardiovascular simulation // *Ann. Biomed. Eng.* — 2017. — Vol. 45, No. 3. — P. 525–541.
- Vassilevski Yu., Simakov S., Salamatova V., Ivanov Yu., Dobroserdova T.* Blood flow simulation in atherosclerotic vascular network using fiber-spring representation of diseased wall // *Math. Model. Nat. Phenom.* — 2011. — Vol. 6. — P. 333–349.
- Ventre J., Fullana J.-M., Lagrée P.-Y., Raimondi F., Boddaert N.* Reduced models for computing pressure drop across stenosis // *Comput. Methods Biomech. Biomed. Engin.* — 2019. — Vol. 22, No. sup1. — P. S119–S120.
- Vignon-Clementel I. E., Figueroa C. A., Jansen K. E., Taylor C. A.* Outflow boundary conditions for three-dimensional finite element modeling of blood flow and pressure in arteries // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2006. — Vol. 195, No. 29–32. — P. 3776–3796.
- Xia Y., Wang C., Wang Y., Liang F.* A computational model-based study on trans-stenotic pressure ratio of carotid artery stenosis and its predictive value for cerebral ischemia // *Int. J. Numer. Method. Biomed. Eng.* — 2025. — Vol. 41, No. 5. — e70044.
- Yan Z., Shang D., Chen R., Liu J., Cai X. C.* A computational study of the connection between coronary revascularization and cardio-cerebral hemodynamics // *Comput. Methods Programs Biomed.* — 2025. — Vol. 263. — 108667.
- Young D. F., Tsai F. Y.* Flow characteristics in models of arterial stenoses. — I. Steady flow // *J. Biomech.* — 1973. — Vol. 6, No. 4. — P. 395–410.
- Zhang X., Mao B., Che Y., Kang J., Luo M., Qiao A., Liu Y., Anzai H., Ohta M., Guo Y., Li G.* Physics-informed neural networks (PINNs) for 4D hemodynamics prediction: An investigation of optimal framework based on vascular morphology // *Comput. Biol. Med.* — 2023. — Vol. 164. — 107287.
- Zimmermann F. M., Mast T. P., Johnson N. P., Everts I., Hennigan B., Berry C., Johnson D. T., De Bruyne B., Fearon W. F., Oldroyd K., Pijls N. H. J., Tonino P. A. L., van 't Veer M.* Deep learning for prediction of fractional flow reserve from resting coronary pressure curves // *EuroIntervention*. — 2021. — Vol. 17, No. 1. — P. 51–58.