

УДК: 519.633.2

Идентификация нестационарного коэффициента младшей производной в параболическом уравнении

В. И. Васильев^a, А. М. Кардашевский^b, Д. Х. Иванов^c,
К. С. Кардашевская^d

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Россия, 677000, г. Якутск, ул. Белинского, д. 58

E-mail: ^a vasvasil@mail.ru, ^b kardam123@gmail.com, ^c ivanov.gx@s-vfu.ru, ^d kris.kardashevs@gmail.com

Получено 03.04.2026, после доработки — 10.04.2026.
Принято к публикации 21.04.2026.

Работа посвящена разработке безитерационного метода решения обратной задачи для уравнения параболического типа с неизвестным нестационарным коэффициентом при первой производной по пространственной переменной. Условие переопределения задается в виде определенного интеграла от искомой функции с весовым множителем по области определения пространственной переменной либо по ее части. Актуальность данного исследования обусловлена необходимостью диагностики динамических параметров в прикладных задачах, в частности, при моделировании процессов переноса в биологических жидкостях, где скорость потока может меняться во времени. В отличие от распространенных итерационных методов, требующих значительных вычислительных затрат и тщательного выбора параметров регуляризации, предлагается оригинальный метод, основанный на декомпозиции решения, суть которого состоит в том, что на каждом временном слое в представлении решения обратной задачи в виде линейной комбинации решений двух вспомогательных систем уравнений с одинаковой матрицей и различными правыми частями, с последующим определением неизвестного коэффициента из дискретного аналога заданного условия переопределения. Такой подход позволяет находить неизвестный коэффициент без организации итерационного процесса. При учете неточных условий переопределения наибольшая точность восстановления решения обратной задачи достигается на квазирешении прямой задачи. Представлены результаты численной реализации предложенного вычислительного алгоритма на тестовых примерах, подтвердившие высокую точность определения искомым функций при достаточно слабых возмущениях условия переопределения. Полученные результаты открывают перспективы применения метода в задачах медицинской диагностики и других областях, где требуется оперативная обработка экспериментальных данных.

Ключевые слова: уравнение конвективной диффузии, коэффициентная обратная задача, конечно-разностный метод, метод декомпозиции

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение Грант № FSRG-2026-0009.

UDC: 519.633.2

Identification of the non-stationary coefficient of the lowest derivative in a parabolic equation

V. I. Vasil'ev^a, A. M. Kardashevsky^b, D. Kh. Ivanov^c, K. S. Kardashevskai^a^d

North-Eastern Federal University,
58 Belinskogo st., Yakutsk, 677000, Russia

E-mail: ^a vasvasil@mail.ru, ^b kardam123@gmail.com, ^c ivanov.gx@s-vfu.ru, ^d kris.kardashevs@gmail.com

*Received 03.04.2026, after completion — 10.04.2026.
Accepted for publication 21.04.2026.*

This paper presents a non-iterative method for solving an inverse problem for a parabolic-type equation with an unknown time-dependent coefficient at the first spatial derivative. The overdetermination condition is specified as a definite integral of the unknown function with a weighting factor over the spatial domain or its subdomain. The study is motivated by the need to identify dynamic parameters in applied problems, particularly in modeling transport processes in biological fluids, where the flow velocity may vary over time. In contrast to conventional iterative methods that require substantial computational effort and careful selection of regularization parameters, an original approach based on solution decomposition is proposed. At each time layer, the solution is represented as a linear combination of solutions to two auxiliary systems with the same matrix and different right-hand sides, followed by the determination of the unknown coefficient from a discrete analogue of the overdetermination condition. This approach eliminates the need for an iterative procedure. In the presence of inexact overdetermination data, the highest reconstruction accuracy is achieved using a quasi-solution. Numerical experiments on test problems demonstrate high accuracy in reconstructing the unknown functions under small perturbations of the overdetermination condition. The results indicate strong potential for applications in medical diagnostics and other fields requiring rapid processing of experimental data.

Keywords: convective diffusion equation, coefficient inverse problem, finite difference method, decomposition method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 3, pp. 607–620 (Russian).

The work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation Grant No. FSRG-2026-0009.

Введение

Обратные коэффициентные задачи для уравнений параболического типа представляют собой важный класс некорректных задач математической физики, имеющих многочисленные приложения в различных областях науки и техники. Особый интерес вызывает идентификация коэффициента конвективного переноса, который может зависеть от времени. Такие задачи возникают при моделировании процессов переноса в биологических жидкостях [Hazanee, Lesnic, 2014; Franchetti et al., 2020], в задачах медицинской диагностики [Reips et al., 2018], при исследовании течений в магнитогидродинамике [Koleva, Vulkov, 2024; Kandilarov, Vulkov, 2024; Kandilarov, Vulkov, 2025], а также в широком классе задач идентификации параметров технических систем.

Классические результаты по обратным задачам для параболических уравнений были заложены в работах [Cannon, 1963; Veznoshchenko, 1974; Исаков, 1982]. В них исследовались вопросы единственности и существования решений при различных типах дополнительной информации. Фундаментальные аспекты теории некорректных задач детально изложены в монографиях [Tikhonov, Arsenin, 1977; Lavrentiev et al., 1986; Ivanov et al., 2002; Kabanikhin, 2011]. В последние десятилетия наблюдается устойчивый рост интереса к обратным задачам параболического типа, о чем свидетельствуют многочисленные современные публикации, посвященные как теоретическому анализу [Kamynin, 2012; Kamynin, 2023a; Kamynin, 2023b; Камынин, Нагорнов, 2025; Choulli, 2025; Nouar et al., 2025], так и разработке вычислительных методов [Vabishchevich, Vasil'ev, 2014a; Vabishchevich, Vasil'ev, 2014b; Vabishchevich, Vasil'ev, 2015; Vasil'ev et al., 2016; Vasil'ev et al., 2018; Lesnic, 2021; Дурдиев, 2023; Azizbayov, Safarova, 2025; Huntul, Tekin, 2025].

Применительно к задачам идентификации нестационарных коэффициентов можно выделить несколько основных подходов. Значительная часть работ посвящена определению коэффициента поглощения или младшего члена уравнения [Cannon, Duchateau, 1973; Prilepko, Solov'ev, 1987; Kamynin, 2012; Kamynin, 2023a; Камынин, Нагорнов, 2025]. Другое направление связано с восстановлением коэффициента диффузии [Favini et al., 2022]. Задачи с нелокальными условиями переопределения рассматривались в [Azizbayov, Safarova, 2025]. Востребованность определения нестационарного коэффициента конвективного переноса обусловлена, в частности, задачами медицинской диагностики: при обработке ангиографических данных требуется восстанавливать скорость кровотока по динамике распространения контраста, что сводится к коэффициентной обратной задаче для параболического уравнения [Реброва, Данилов, 2026]. Однако задачи определения коэффициента конвективного переноса, зависящего от времени, исследованы в меньшей степени, хотя они имеют важное прикладное значение, например, при описании потоков в биологических средах, где скорость движения жидкости или крови может существенно меняться во времени [Hazanee, Lesnic, 2014; Reips et al., 2018].

Традиционные подходы к решению обратных коэффициентных задач часто основываются на итерационных методах, таких как метод сопряженных градиентов [Vasil'ev et al., 2018] или методы на основе оптимизации. Эти подходы, несмотря на свою универсальность, обладают рядом существенных недостатков: они требуют значительных вычислительных затрат, особенно при решении эволюционных задач на больших временных промежутках, чувствительны к выбору начального приближения и параметров регуляризации. В работах [Vabishchevich, Vasil'ev, 2014a; Vabishchevich, Vasil'ev, 2014b] исследовались вычислительные алгоритмы для коэффициентных обратных задач, однако их применение для восстановления нестационарного конвективного коэффициента сопряжено с известными трудностями, связанными с необходимостью многократного решения прямой задачи на каждой итерации.

В последние годы активно развиваются подходы, использующие интегральные условия переопределения [Favini et al., 2022; Azizbayov, Safarova, 2025]. Интегральная дополнительная

информация обладает естественными сглаживающими свойствами и может быть более устойчивой к погрешностям измерений по сравнению с точечными данными. В частности, в [Favini et al., 2022] рассматривалось восстановление коэффициента диффузии по измерениям энергии, что, по сути, является интегральным условием. Однако для коэффициента конвективного переноса такие подходы ранее систематически не исследовались.

Настоящая работа восполняет указанный пробел, предлагая оригинальный безытерационный подход к решению обратной коэффициентной задачи для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом конвективного переноса, зависящим от времени. В отличие от распространенных итерационных методов, требующих тщательного подбора параметров регуляризации и значительных вычислительных ресурсов, разработанный подход основан на идее декомпозиции решения. Суть метода заключается в специальном представлении искомой функции, позволяющем понизить размерность исходной задачи на каждом временном шаге. Ключевой особенностью является использование интегрального условия переопределения: вместо традиционных точечных измерений концентрации, например на границе области, задается интеграл от произведения искомого решения и заданной весовой функции по всей пространственной области. Такой интегральный способ задания дополнительной информации обладает регуляризирующими свойствами, что повышает устойчивость вычислительного алгоритма к погрешностям входных данных и согласуется с современными тенденциями использования интегральных данных в обратных задачах [Favini et al., 2022; Azizbayov, Safarova, 2025].

Предлагаемая декомпозиция позволяет свести исходную эволюционную задачу к последовательности более простых задач на каждом временном слое. Это дает возможность определить неизвестный коэффициент без организации итерационного процесса, что принципиально отличает предлагаемый подход от большинства известных методов. Близкие по духу идеи декомпозиции использовались ранее для восстановления правой части [Васильев, 1981], однако для коэффициента конвективного переноса такая техника применяется впервые.

В работе представлены результаты численных экспериментов, подтверждающих эффективность и работоспособность метода. Проведено тестирование на модельных задачах с известным точным решением, а также в условиях зашумленных данных. Анализ результатов демонстрирует хорошую точность восстановления коэффициента и устойчивость алгоритма. Особое внимание уделено вопросам численной реализации, включая аппроксимацию задач на пространственно-временной сетке с использованием конечно-разностных схем [Samarskii, 2001] и обработку зашумленных данных [Savitzky, Golay, 1964].

Актуальность исследования дополнительно подтверждается наличием современных публикаций по смежной тематике в международных журналах [Kandilarov, Vulkov, 2024; Koleva, Vulkov, 2024; Choulli, 2025; Nouar et al., 2025; Huntul, Tekin, 2025], что свидетельствует о востребованности данного направления. При этом в существующей литературе отсутствуют работы, в которых бы предлагался безытерационный подход к восстановлению нестационарного коэффициента конвективного переноса с использованием интегрального условия переопределения, что определяет новизну и значимость представленного исследования.

Целью работы являются разработка и численное исследование безытерационного метода идентификации нестационарного коэффициента конвективного переноса в параболическом уравнении на основе декомпозиции решения и интегрального условия переопределения. Работа организована следующим образом. В первом разделе приводится постановка прямой и обратной задач, формулируются основные предположения. Во втором разделе излагается метод декомпозиции и описывается алгоритм определения неизвестного коэффициента. Третий раздел содержит результаты численных экспериментов, включая анализ точности и устойчивости метода. В заключении сформулированы основные выводы и перспективы дальнейших исследований.

Постановка задачи

В области определения независимых переменных $(x, t) \in \overline{\Omega}_T = [0, X] \times [0, T]$ рассмотрим следующую обратную начально-краевую задачу для параболического уравнения по определению пары функций $u(x, t)$, $(x, t) \in [0, X] \times [0, T]$, и $V(t)$, $t \in [0, T]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V(t) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in (0, X), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

удовлетворяющих нестационарным граничным условиям Дирихле:

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(X, t) = \mu_2(t), \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

неоднородному начальному условию:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, X], \quad (3)$$

и нестационарному интегральному условию переопределения:

$$\int_0^x \eta(x) u(x, t) dx = \Phi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Здесь x, t — пространственная переменная и время соответственно; $V(t)$ — искомый коэффициент при первой производной по пространственной переменной, неотрицательная и ограниченная функция; $\eta(x)$ — заданная весовая неотрицательная финитная функция в условии переопределения. Достаточные условия существования и единственности обобщенного решения данной обратной задачи доказаны А. П. Прилепко, В. В. Соловьевым [Prilepko, Solovev, 1987] и В. Л. Камыниным в статье [Kamunin, 2012], в ней также приведен пример обратной задачи с аналитическим точным решением.

Восстановление решения обратной задачи из точного решения прямой задачи

Предположим, что поставленная прямая задача (1)–(3) имеет точное решение, т. е. ее исходные данные такие, что $u(x, t)$, $x \in (0, X)$, $t \in (0, T]$, а также $V(t)$, $t \in [0, T]$, — известные аналитические функции.

В области определения $\overline{\Omega}_T$ введем прямоугольную сетку с шагами $h = \frac{X}{N}$, $\tau = \frac{T}{M}$: $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$; $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, \dots, M$. Тогда на построенной пространственно-временной сетке имеем

$$u_i^j = u(x_i, t^j), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (5)$$

$$\Phi^j = \Phi(t^j), \quad V^j = V(t^j), \quad j = 0, 1, \dots, M. \quad (6)$$

Теперь приступим к численному решению обратной задачи по идентификации нестационарного коэффициента при первой производной по пространственной переменной, т. е. с помощью заданного условия переопределения $\Phi(t)$ идентифицируем коэффициент $V(t)$. В этом случае мы обязаны переходить к дискретному аналогу поставленной обратной задачи, используя обозначения $y_i^j \approx u(x_i, t^j)$, $\phi^j \approx \Phi(t^j)$, $v^j \approx V(t^j)$. Это мы сделаем с помощью метода конечных

разностей, построим полунявную разностную схему — дискретный аналог поставленной коэффициентной обратной задачи (1)–(4) с порядком аппроксимации $O(\tau + h)$:

$$\begin{cases} \frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} - v^j \frac{y_i^{j-1} - y_{i-1}^{j-1}}{h}, \\ i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, M, \end{cases} \quad (7)$$

$$y_0^j = \mu_1(t^j), \quad y_N^j = \mu_2(t^j), \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (8)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (9)$$

Для приближенного вычисления интеграла использовали квадратурную формулу «трапеций»:

$$\frac{h}{2} \sum_{i=1}^N (\eta_{i-1} y_{i-1}^j + \eta_i y_i^j) = \phi(t), \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (10)$$

Введем обозначения $r = \frac{h^2}{\tau}$, $c = r + 2$ и используем полуиндексную систему обозначений А. А. Самарского [Samarskii, 2001]: $y_i = y_i^j$, $\check{y}_i = y_i^{j-1}$, $v = v^j$, $\Phi = \Phi^j$. Тогда при переходе с $(j-1)$ -го временного слоя на j -й временной слой имеем нелинейную систему алгебраических уравнений записанных в счетном виде:

$$\begin{cases} y_{i+1} - cy_i + y_{i-1} + r\check{y}_i - v h(\check{y}_i - \check{y}_{i-1}) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2. \end{cases} \quad (11)$$

Применяя метод декомпозиции, решение системы алгебраических уравнений (11) ищем в виде линейной формы:

$$y_i = z_i + v w_i, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (12)$$

Таким образом, система нелинейных уравнений (11) приводится к виду

$$\{z_{i+1} - cz_i + z_{i-1} + r\check{z}_i\} + v\{w_{i+1} - cw_i + w_{i-1} - h(\check{z}_i - \check{z}_{i-1})\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (13)$$

Поскольку достаточным условием равенства нулю суммы выражений, стоящих внутри фигурных скобок, является равенство нулю каждого выражения, получаем для сеточных функций z , w две системы линейных алгебраических уравнений с одной и той же трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} z_{i+1} - cz_i + z_{i-1} + r\check{z}_i = 0, & i = 1, 2, \dots, N-1, \quad z_0 = \mu_1, \quad z_N = \mu_2, \\ w_{i+1} - cw_i + w_{i-1} - h(\check{z}_i - \check{z}_{i-1}) = 0, & i = 1, 2, \dots, N-1, \quad w_0 = w_N = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Вспомогательные сеточные функции z и w определяются из систем (14). Для вычисления сеточной функции v воспользуемся дискретным аналогом условия переопределения (10). Данное уравнение с учетом линейной формы (12) записывается в виде

$$\frac{h}{2} \sum_{i=1}^N (\eta_{i-1} z_{i-1} + \eta_i z_i) + v \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N (\eta_{i-1} w_{i-1} + \eta_i w_i) = \phi(t). \quad (15)$$

Вследствие декомпозиции искомого решения задачи в виде линейной формы (12) получаем формулу для определения значения искомой функции на j -м временном слое:

$$v = \frac{\frac{2}{h}\phi - \sum_{i=1}^N (\eta_{i-1} z_{i-1} + \eta_i z_i)}{\sum_{i=1}^N (\eta_{i-1} w_{i-1} + \eta_i w_i)}. \quad (16)$$

Теперь мы можем по формуле (12) вычислить значения искомой сеточной функции на j -м временном слое.

Восстановление решения обратной задачи из квазирешения

Квазирешением мы назовем решение неявно-явного конечно-разностного аналога прямой задачи (1)–(3) с заданным коэффициентом $V(t)$, $t \in [0, T]$, с порядком аппроксимации $O(\tau + h)$:

$$\begin{cases} \frac{y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} - v^j \frac{y_i^{j-1} - y_{i-1}^{j-1}}{h}, \\ i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, M, \end{cases} \quad (17)$$

$$y_0^j = \mu_1(t_j), \quad y_N^j = \mu_2(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (18)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (19)$$

Для приближенного вычисления интеграла использовали квадратурную формулу трапеций:

$$\phi^j = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N (\eta_{i-1} y_{i-1}^j + \eta_i y_i^j), \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (20)$$

Численную реализацию системы уравнений осуществляем с помощью вышеприведенного эффективного вычислительного алгоритма (7)–(16).

Вычислительный эксперимент

Пример 1. Приведем результаты вычислительного эксперимента по предлагаемому алгоритму на примере из статьи [Beznoshchenko, 1974] с точным аналитическим решением:

$$u(x, t) = -\frac{5t^2}{4} + t \left(A - \frac{x^2}{2} \right) + x \sqrt{A - 3t} \left(t - \frac{2A}{3} + \frac{x^2}{3} \right) + \frac{x^4}{12}, \quad (x, t) \in [0, X] \times [0, T],$$

обратной начально-краевой задачи для параболического уравнения (1) с известным нестационарным коэффициентом:

$$V(t) = \frac{3}{2\sqrt{A - 3t}}, \quad t \in [0, T].$$

При весовой функции $\eta(x) \equiv 1$ условие переопределения имеет следующее аналитическое выражение:

$$\Phi(t) = \frac{-75Xt^2 + \sqrt{A - 3t} (30X^2t + 5X^4 - 20AX^2) + (60AX - 10X^3)t + X^5}{60}.$$

Параметр A ограничивает конечный момент времени, $T < \frac{A}{3}$, в расчетах $A = 3,4$.

На рис. 1 слева показаны начальное условие $u_0(x)$, точное решение $u(x, T)$ в финальный момент времени, справа приведены графики точного условия переопределения $\Phi(t)$.

Рассмотрим численное восстановление неизвестного коэффициента v^j с помощью вычислительного алгоритма (7)–(16) при задании точного условия переопределения $\Phi(t)$. Вычислительный эксперимент проводится при следующих значениях размера расчетной области и параметров пространственно-временной сетки: $X = 5$, $T = 1$, $N = 200$, $M = 200$. Результаты решения обратной задачи представлены на рис. 2: слева приведен график разности $u(x, T) - y^M$ в конечный момент времени, справа показаны графики точного коэффициента $V(t)$ и восстановленного коэффициента v . Получили порядка 0,1 % точности определения $u(x, T)$ в финальный момент времени и порядка 0,6 % точности восстановления коэффициента v . При задании $v^0 = V(0)$ за счет того, что при решении обратной задачи использованы явно-неявная разностная схема и квадратурная формула трапеций с погрешностями аппроксимации, соответственно $O(\tau + h)$ и $O(h^2)$, значение v^1 восстановлено примерно 2 раза худшей точностью, чем в остальные моменты времени.

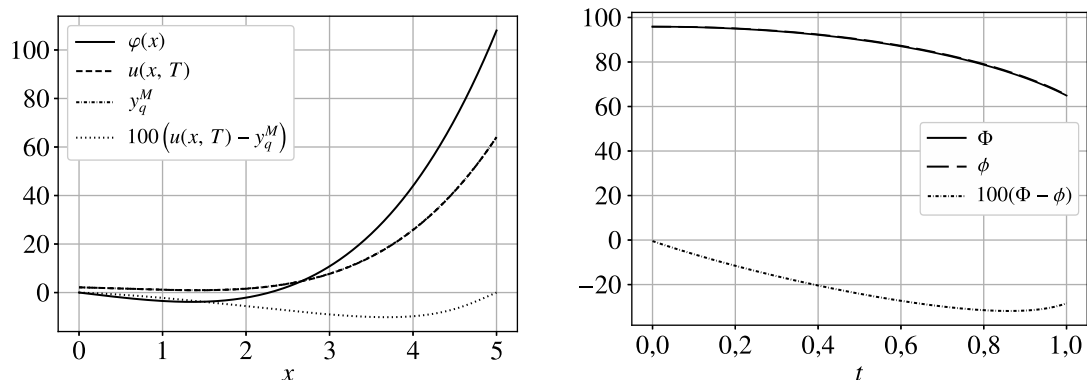


Рис. 1. Решение прямой задачи с заданным конвективным коэффициентом на примере 1: слева — начальное условие ($\varphi(x)$), точное ($u(x, T)$) и приближенное (y_q^M) решения в конечный момент времени и их увеличенная разность $100(u(x, T) - y_q^M)$; справа — точное ($\Phi(t)$) и вычисленное (ϕ) условия переопределения и их увеличенная разность $100(\Phi(t) - \phi)$

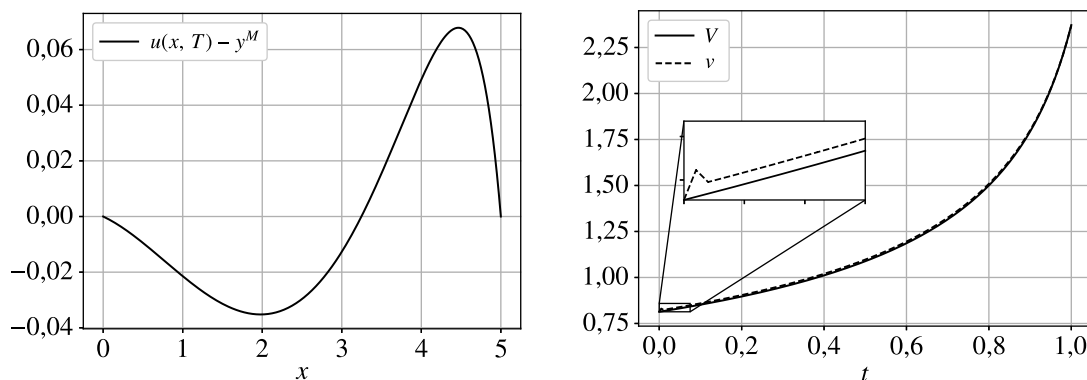


Рис. 2. Решение обратной задачи при задании точного условия переопределения на примере 1: слева — ошибка ($u(x, T) - y^M$) восстановления функции в конечный момент времени, справа — точный ($V(t)$) и восстановленный (v) коэффициент с увеличенным фрагментом для выделенной рамки

Для оценки точности предложенного алгоритма будем вычислять две относительные L_2 -нормы разности найденного и точного решений в конечный момент времени и разности вычисленного и точного коэффициентов, задаваемые следующими формулами:

$$\text{RMSE}_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left((y_{i-1}^M - u(x_{i-1}, T))^2 + (y_i^M - u(x_i, T))^2 \right)}{\sum_{i=1}^N \left(u(x_{i-1}, T)^2 + u(x_i, T)^2 \right)}},$$

$$\text{RMSE}_v = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M \left((v^{j-1} - V(t^{j-1}))^2 + (v^j - V(t^j))^2 \right)}{\sum_{j=1}^M \left(V(t^{j-1})^2 + V(t^j)^2 \right)}}.$$

Полученные результаты, представленные в таблице 1, показывают сходимость приближенного решения y^M и v к точным $u(x, T)$ и $V(t)$ соответственно, со скоростями порядка $O(\tau + h)$.

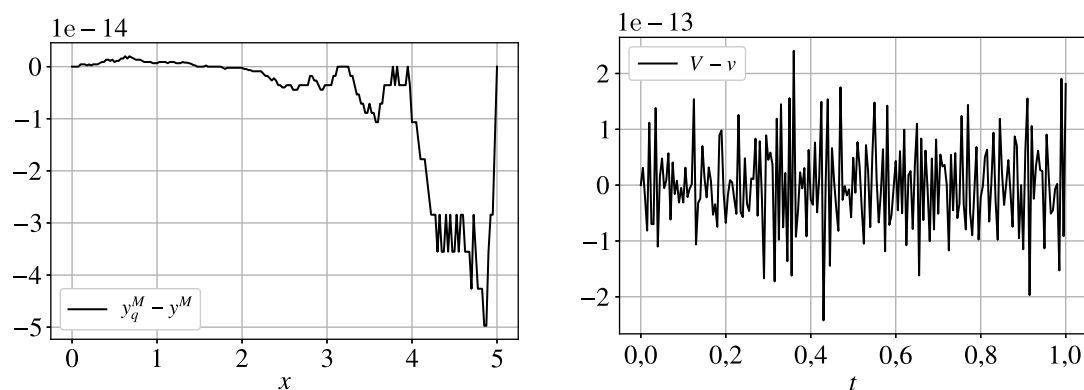
Квазирешение y_q^j , $j = 0, 1, \dots, M$, прямой начально-краевой задачи определяем с помощью разностной схемы (17)–(19) с заданным коэффициентом $V(t_j)$. При этом условие пере-

Таблица 1. Относительные нормы ошибок приближенного решения обратной задачи с аналитически заданными входными данными при различных параметрах сетки на примере 1

N	M	$RMSE_u$	$RMSE_v$
100	100	$3,202e-3$	$1,278e-2$
200	200	$1,592e-3$	$6,248e-3$
400	400	$7,943e-4$	$3,090e-3$
800	800	$3,967e-4$	$1,536e-3$
1600	1600	$1,982e-4$	$7,661e-4$

определения ϕ^j , $j = 0, 1, \dots, M$, вычисляем по квадратурной формуле (20) от квазирешения на каждом временном слое. Отметим, что выше на рис. 1 слева представлены квазирешение в финальный момент времени y_q^M и его разница от точного решения $100(u(x, T) - y_q^M)$. Последнее показывает погрешность определения аппроксимации разностной схемы, которая получилась большая, поскольку пространственно-временная сетка достаточно грубая. На рис. 1 справа представлены вычисленное ϕ с помощью квазирешения, а также разность $100(\Phi(t) - \phi)$.

Далее реализуем предложенный вычислительный алгоритм восстановления коэффициента обратной задачи с использованием вычисленного условия переопределения ϕ с помощью (20) на каждом временном слое. Решаем коэффициентную обратную задачу с помощью вычислительного алгоритма (11)–(16) и находим y^M с помощью уравнения (12). Результаты решения обратной задачи представлены на рис. 3: слева — разность между квазирешением и восстановленным решением, справа представлена ошибка нахождения коэффициента. Высокая точность получилась из-за того, что используется одна и та же разностная схема для квазирешения и решения обратной задачи. Сравнивая графики, представленные на рис. 2 и рис. 3, приходим к выводу, что использование дискретного аналога условия переопределения ϕ из квазирешения является более точным решением обратной задачи, нежели использование точной функции $\Phi(t)$.

Рис. 3. Решение обратной задачи при задании условия переопределения из квазирешения на примере 1: слева — ошибка $(y_q^M - y^M)$ восстановления функции в конечный момент времени, справа — ошибка $(V(t) - v)$ коэффициента

На практике значения функции ϕ определяются в результате обработки измерений, наблюдений, и, естественно, возникают неизбежные ошибки погрешностей сенсоров и других приборов. Таким образом, возникает необходимость исследовать влияние шума на условие переопределения. Добавим искусственный шум в функцию переопределения с помощью генератора псевдослучайных чисел σ , равномерно распределенных в интервале $[-0,5; 0,5]$:

$$\phi^j = \phi^j + \delta\sigma, \quad (21)$$

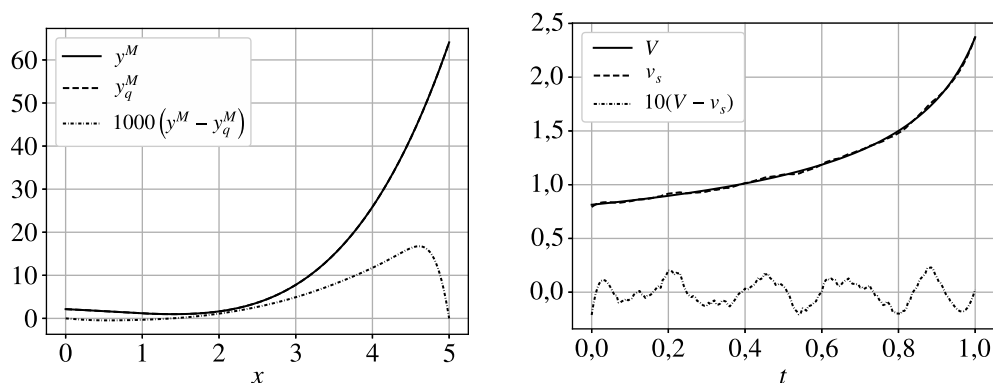


Рис. 4. Решение обратной задачи при наличии шума в условии переопределения, вычисленной из квази-решения, на примере 1: слева — восстановленная функция y^M , квази-решение y_q^M в конечный момент времени, их увеличенная разность $1000(y^M - y_q^M)$; справа — точный коэффициент $V(t)$, восстановленный коэффициент v_s после сглаживания и их увеличенная разность $10(V(t) - v_s)$

где δ — заданная амплитуда шума. Для сглаживания зашумленных данных используем фильтр Савицкого–Голя [Savitzky, Golay, 1964]. Результаты вычисления с использованием зашумленной функции переопределения, $\delta = 0,1$, приведены на рис. 4 и показывают хорошую точность: слева — графики y^M , y_q^M и их разность, умноженная на 1000; справа представлены точный коэффициент $V(t)$, вычисленный по формуле (13) коэффициент v после дополнительной обработки фильтром Савицкого–Голя, а также их разность, умноженная на 10. Численный эксперимент подтвердил приемлемую точность решения обратной задачи при наличии шума.

Пример 2. Проведем численный эксперимент в случае, когда искомым коэффициентом $V(t)$ представляет собой разрывную функцию. Решается начально-краевая задача для параболического уравнения с начальным условием

$$u(x, 0) = e^{-0,5(x-0,4X)^2} \sin\left(\frac{\pi x}{X}\right), \quad 0 < x < X,$$

и точным коэффициентом

$$V(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{T}{3} \text{ и } \frac{2T}{3} < t \leq T, \\ 2, & \frac{T}{3} \leq t \leq \frac{2T}{3}. \end{cases}$$

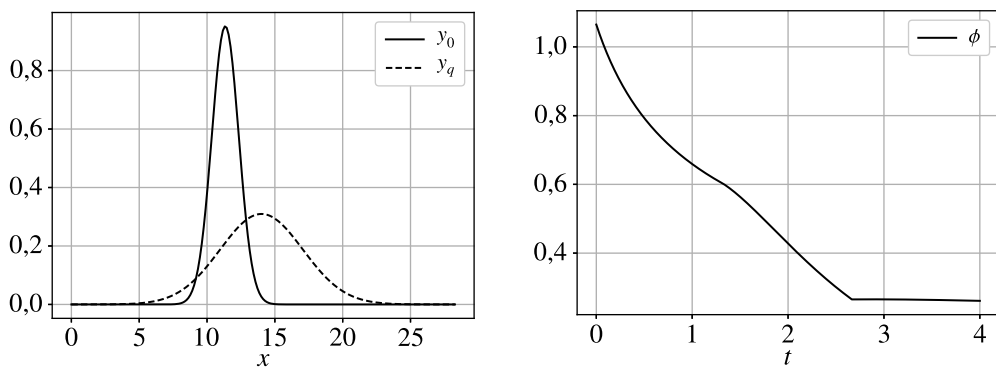


Рис. 5. Решение прямой задачи на примере 2: слева — начальное условие y_0 и решение y_q^M в конечный момент времени, справа — зашумленное условие переопределения

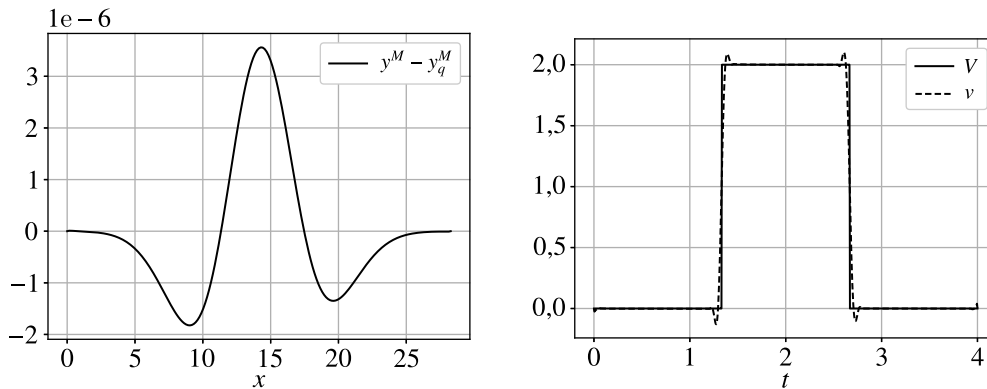


Рис. 6. Решение обратной задачи при наличии шума на примере 2: слева — ошибка $(y^M - y_q^M)$ приближенного решения в конечный момент времени, справа — точный разрывный коэффициент $V(t)$ и восстановленный коэффициент v

Численное решение прямой задачи осуществляем с помощью разностной схемы (17)–(19), при этом вместо v^j берем $V(t^j)$. С помощью полученного квазирешения прямой задачи и уравнения (20) с весовой функцией $\eta(x) = e^{-2(x-0,4X)^2}$ находим условие переопределения на каждом временном слое. Далее решаем коэффициентную обратную задачу с помощью вычислительного алгоритма (11)–(16). Расчеты проведены при $T = 4$, $X = 9\pi$, $N = 200$, $M = 800$. Графические результаты решения обратной задачи изображены на рис. 5 и 6 при амплитуде шума $\delta = 0,0001$. На рис. 5 слева показаны начальное условие $u_0(x)$ и решение в финальный момент времени y_q^M , на рис. 5 справа — график зашумленного условия переопределения ϕ . На рис. 6 слева показана ошибка восстановления функции $y_q^M - y^M$, справа — графики точного ($V(t)$) и восстановленного (v^j) коэффициентов.

В таблице 2 показаны результаты относительной погрешности при различных параметрах пространственно-временной сетки и амплитудах шума.

Таблица 2. Относительные нормы ошибок приближенного решения обратной задачи при различных параметрах сетки и уровнях шума на примере 2

	$N = 200, M = 800$		$N = 800, M = 1600$	
	RMSE $_u$	RMSE $_v$	RMSE $_u$	RMSE $_v$
$\delta = 0,0001$	$1,001e-5$	$8,835e-2$	$4,851e-7$	$6,285e-2$
$\delta = 0,0002$	$7,722e-6$	$8,841e-2$	$2,752e-6$	$6,516e-2$

Отметим, что при малых амплитудах шума вычислительный алгоритм показал достаточно высокую точность восстановления решения с разрывным коэффициентом при первой производной пространственной переменной.

Заключение

В работе предложен вычислительный алгоритм декомпозиции для численной реализации на каждом временном слое конечно-разностного аналога обратной задачи определения нестационарного коэффициента конвективного члена параболического уравнения. В отличие от широко используемых итерационных методов, основанных на процедурах оптимизации и методе сопряженных градиентов, предложенный подход для нахождения решения не требует выполнения последовательных итераций, что существенно снижает вычислительные затраты.

Результаты вычислительного эксперимента на модельной задаче с известным аналитическим решением показали, что разработанный метод обеспечивает достаточно высокую точность

восстановления искомой функции и идентификацию искомого коэффициента. Анализ результатов показал, что использование дискретного аналога условия переопределения, вычисленного из квазирешения, обеспечивает более высокую точность восстановления, чем применение точных значений условия переопределения. Данный эффект указывает на существенную роль согласованности дискретного аналога прямой задачи в решении обратных задач. При наличии шума в условии переопределения после дополнительной обработки с помощью фильтра Савицкого – Голея предложенный нами метод сохраняет приемлемую точность восстановления. Тем самым подтверждается, что предложенный метод обладает удовлетворительной точностью к умеренным возмущениям входной информации, что особенно важно с точки зрения приложений. В случае разрывного коэффициента предложенный вычислительный алгоритм обеспечивает достаточно высокую точность восстановления при малых амплитудах шума.

Практическая значимость полученных результатов обусловлена возможностью применения разработанного подхода в актуальных прикладных задачах; в частности, в ангиографии требуется восстановление временного профиля скорости кровотока по данным о распространении контрастного вещества, что позволяет провести количественную оценку перфузии и диагностировать сосудистые патологии. Использование интегральных условий переопределения делает предложенный метод особенно перспективным для обработки экспериментальных данных, характеризующихся наличием шума.

Следует также отметить, что данная работа расширяет класс безытерационных методов решения обратных коэффициентных задач для параболических уравнений и демонстрирует эффективность применения метода декомпозиции в задачах идентификации нестационарных параметров. Перспективы дальнейших исследований связаны с обобщением предложенного метода на численные решения многомерных коэффициентных обратных задач конвекции-диффузии и их приложения.

Авторы выражают признательность Ю. В. Василевскому и А. А. Данилову за проявленный интерес к нашей работе и инициирование подготовки настоящей статьи.

Список литературы (References)

- Васильев В. И.* О двуточечных краевых задачах общего вида // Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981. — С. 42–44.
- Vasil'ev V. I.* O dvutochechnykh kraevykh zadachakh obshchego vida [On two-point boundary value problems of general type] // Teoreticheskie i prikladnye problemy vychislitel'noi matematiki. — Moscow: IPM im. M. V. Keldysha AN SSSR, 1981. — P. 42–44 (in Russian).
- Дурдиев Д. К.* Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с характеристической линией изменения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2023. — № 4. — С. 607–620.
- Durdiev D. K.* Obratnaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo tipa s kharakteristicheskoy liniyey izmeneniya [Inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a characteristic line of change] // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki. — 2023. — Vol. 27, No. 4. — P. 607–620 (in Russian).
- Исаков В. М.* Об одном классе обратных задач для параболических уравнений // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 263, № 6. — С. 1296–1299
- Isakov V. M.* Ob odnom klasse obratnykh zadach dlya parabolicheskikh uravnenii [On a class of inverse problems for parabolic equations] // Doklady Akademii Nauk SSSR. — 1982. — Vol. 263, No. 6. — P. 1296–1299 (in Russian).
- Камынин В. Л., Нагорнов О. В.* Обратная задача определения коэффициента поглощения в вырождающемся параболическом уравнении дивергентного вида с одной пространственной переменной // Вестник НИЯУ МИФИ. — 2025. — Т. 14, № 6. — С. 516–524.
- Kamynin V. L., Nagornov O. V.* Obratnaya zadacha opredeleniya koeffitsienta pogloshcheniya v vyrozhdayushchemsya parabolicheskom uravnenii divergentnogo vida s odnoy prostranstvennoy peremennoy [Inverse problem of determining the absorption coefficient in a degenerate parabolic equation of divergent type with one spatial variable] // Vestnik NIYAU MIFI. — 2025. — Vol. 14, No. 6. — P. 516–524 (in Russian).

- Реброва А. А., Данилов А. А.* Метод оценки скорости коронарного кровотока по ангиографическим изображениям // Компьютерные исследования и моделирование. — 2026. — Т. 18, № 3. — С. 715–735.
- Rebrova A. A., Danilov A. A.* Metod otsenki skorosti koronarnogo krovotoka po angiograficheskim izobrazheniyam [Method for coronary blood flow velocity estimation based on angiographic images] // Computer Research and Modeling. — 2026. — Vol. 18, No. 3. — P. 715–735 (in Russian).
- Azizbayov E. I., Safarova A. N.* An inverse problem for a parabolic equation with nonlocal boundary conditions and two-point overdetermination // European Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2025. — Vol. 18, No. 4. — Art. 6796.
- Beznoshchenko N. Y.* Determining the coefficient in a parabolic equation // Differential Equations. — 1974. — Vol. 10. — P. 24–35.
- Cannon J., Duchateau P.* Determining unknown coefficients in a nonlinear heat conduction problem // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1973. — Vol. 24, No. 3. — P. 298–314.
- Cannon J. R.* Determination of an unknown coefficient in a parabolic differential equation // Duke Mathematical Journal. — 1963. — Vol. 30. — P. 313–323.
- Choulli M.* Two parabolic inverse problems for an equation with unbounded zero-order coefficient // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2025. — Vol. 20. — P. 236–260.
- Favini A., Mola G., Romanelli S.* Recovering time-dependent diffusion coefficients in a nonautonomous parabolic equation from energy measurements // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S. — 2022. — Vol. 15, No. 6. — P. 1439–1454.
- Franchetti Y., Nolin T. D., Franchetti F.* Indirect measurement of hepatic drug clearance by fitting dynamical models // arXiv preprint. — 2020. — arXiv:2012.15647
- Hazanee A., Lesnic D.* Determination of a time-dependent coefficient in the bioheat equation // International Journal of Mechanical Sciences. — 2014. — Vol. 88. — P. 259–266.
- Huntul M. J., Tekin I.* Inverse problem for time-dependent coefficients in the higher order pseudo-parabolic equation // Mathematical Modelling and Control. — 2025. — Vol. 5, No. 3. — P. 236–257.
- Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P.* Theory of linear ill-posed problems and its applications. — Berlin; Boston: De Gruyter, 2002.
- Kabanikhin S. I.* Inverse and ill-posed problems: theory and applications. — Berlin; Boston: De Gruyter. — 2011.
- Kamynin V. L.* Inverse problem of finding the coefficient of a lower derivative in a parabolic equation on the plane // Differential Equations. — 2012. — Vol. 48, No. 2. — P. 214–223.
- Kamynin V. L.* Inverse problems of finding the lower term in a multidimensional degenerate parabolic equation // Journal of Mathematical Sciences. — 2023a. — Vol. 274. — P. 493–510.
- Kamynin V. L.* Unique solvability of direct and inverse problems for degenerate parabolic equations in the multidimensional case // Journal of Mathematical Sciences. — 2023b. — Vol. 269. — P. 36–52.
- Kandilarov J. D., Vulkov L. G.* Numerical algorithms for identification of convection coefficient and source in a magnetohydrodynamics flow // Algorithms. — 2024. — Vol. 17, No. 9. — P. 387.
- Kandilarov J., Vulkov L.* Simultaneous numerical reconstruction of time-dependent convection coefficient and source in magnetohydrodynamics flow system // Proceedings of the 16th Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM. — 2025. — P. 179–191.
- Koleva M. N., Vulkov L. G.* A Galerkin finite element method for the reconstruction of a time-dependent convection coefficient and source in a 1D model of magnetohydrodynamics // Applied Sciences. — 2024. — Vol. 14, No. 13. — P. 5949.
- Lavrentiev M. M., Romanov V. G., Shishatski S. P.* Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. — Translations of Mathematical Monographs. — Providence: American Mathematical Society, 1986.
- Lesnic D.* Inverse problems with applications in science and engineering. — Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2021.

- Nouar M., Abdeledjalil C., Alsalhi O. M., Ould Sidi H.* Inverse problem of identifying a time-dependent source term in a fractional degenerate semi-linear parabolic equation // *Mathematics*. — 2025. — Vol. 13, No. 9. — P. 1486.
- Prilepko A. P., Solov'ev V. V.* On the solvability of inverse boundary value problems for determining the coefficient preceding the lower derivative in a parabolic equation // *Differential Equations*. — 1987. — Vol. 23, No. 1. — P. 136–143.
- Reips L., Burger M., Engbers R.* Towards dynamic PET reconstruction under flow conditions: parameter identification in a PDE model // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2018. — Vol. 26, No. 2. — P. 185–200.
- Samarskii A. A.* The Theory of difference schemes. — New York: CRC Press, 2001.
- Samarskii A., Vabishchevich P.* Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics. — Berlin: Walter de Gruyter, 2000.
- Savitzky A., Golay M. J.* Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures // *Analytical Chemistry*. — 1964. — Vol. 36. — P. 1627–1639.
- Tikhonov A. N., Arsenin V. Y.* Solutions of ill-posed problems. — New York: Winston, 1977.
- Vabishchevich P., Vasil'ev V.* Computational determination of the lowest order coefficient in a parabolic equation // *Doklady Mathematics*. — 2014a. — Vol. 89, No. 2. — P. 179–181.
- Vabishchevich P. N., Vasil'ev V. I.* Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations // *Inverse Problems in Science and Engineering*. — 2014b. — Vol. 24, No. 1. — P. 42–59.
- Vabishchevich P. N., Vasil'ev V. I., Vasil'eva M. V.* Computational identification of the right-hand side of a parabolic equation // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2015. — Vol. 55, No. 6. — P. 1015–1021.
- Vasil'ev V., Kardashevsky A., Sivtsev P.* Computational experiment on the numerical solution of some inverse problems of mathematical physics // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. — 2016. — Vol. 158, No. 1. — P. 012093.
- Vasil'ev V. I., Kardashevsky A. M., Popov V. V.* Numerical reconstruction of the right hand side with separable variables of the parabolic equation // *AIP Conference Proceedings*. — 2018. — Vol. 2025, No. 1. — P. 100011.