

УДК: 534-18

Численное моделирование возникновения пика напряжения при отражении ударно-волнового импульса от зернистой пористой среды

И. К. Гималтдинов^а, А. С. Родионов

Уфимский государственный нефтяной технический университет,
Россия, 450064, г. Уфа, ул. Космонавтов, д. 1

E-mail: ^а iljas_g@mail.ru

Получено 29.10.2025, после доработки — 22.01.2026.

Принято к публикации 11.02.2026.

Исследование упругих волн в пористых средах актуально для задач поиска полезных ископаемых, при использовании пористых экранов для демпфирования ударно-волновых воздействий, для изучения строения земной коры и т. д. Упругие свойства пористой среды, о которых можно судить по скорости распространения разного рода волн, зависят от степени консолидации пористой среды. Например, насыпные среды (песок, стеклянные шарики, гранулированные материалы) обладают низкой скоростью звука (порядка 100 м/с), уплотнение таких сред сопровождается некоторым увеличением скорости, а их консолидация (песчаник, цементация газогидратом) приводит к многократному возрастанию скорости акустических волн, порядка 2000–3000 м/с. В данной работе теоретически исследуется динамика волнового импульса в ударной трубе, содержащей слой насыпной среды. Численное моделирование проведено для условий эксперимента. Приводится описание экспериментальной установки типа «ударная труба». Установка состоит из камеры высокого давления (КВД), камеры низкого давления (КНД) и секции насыпной среды. Ударно-волновой импульс (УВИ) создается из-за разрыва диафрагмы между КВД и КНД. Динамика УВИ регистрируется пьезоэлектрическими датчиками, расположенными заподлицо с внутренней стороны трубы. В ударной трубе, оснащенной секцией насыпных сред, волна испытывает многократные отражения от поверхности изучаемой пористой среды и верхнего торца трубы. Переотраженные сигналы используются в качестве зондирующих импульсов для изучения изменений в пористой среде, вызванных повторными прохождениями ударно-волнового импульса, с периодом около 10 мс. Используется математическая модель, включающая уравнения сохранения массы, уравнения сохранения импульсов и энергии для газовой фазы и твердых частиц с замыкающими соотношениями. Описание процесса проводится для одномерного плоского движения газовой и дисперсной фаз. Для численного решения используется аппроксимация уравнений, основанная на методе контрольного объема. Численные результаты показали, что предложенная модель качественно и количественно правильно описывает появление резкого кратковременного увеличения полного напряжения (пика) при повторном прохождении импульса через слой насыпной среды, наблюдаемого в экспериментах.

Ключевые слова: насыпная среда, ударная труба, волновой импульс, математическая модель, многофазная среда, метод контрольного объема, численные расчеты, образование пика

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 24-11-00274 (<https://rscf.ru/project/24-11-00274>).

UDC: 534-18

Numerical modeling of the occurrence of a stress peak during the reflection of a shock wave pulse from a granular porous medium

I. K. Gimaltdinov^a, A. S. Rodionov

Ufa State Petroleum Technological University,
1 Kosmonavtov st., Ufa, 450064, Russia

E-mail: ^a iljas_g@mail.ru

Received 29.10.2025, after completion — 22.01.2026.

Accepted for publication 11.02.2026.

The study of elastic waves in porous media is relevant for mineral exploration, the use of porous screens for shock wave damping, and the study of the structure of the earth's crust. The elastic properties of a porous medium, which can be judged by the propagation velocity of various types of waves, depend on the degree of consolidation of the porous medium. For example, bulk media (sand, glass beads, granular materials) have a low sound velocity (about 100 m/s); compaction of such media is accompanied by a slight increase in velocity, while their consolidation (sandstone, gas hydrate cementation) leads to a multiple increase in the acoustic wave velocity, on the order of 2000–3000 m/s. This paper theoretically investigates the dynamics of a wave pulse in a shock tube containing a layer of a bulk medium. Numerical modeling was performed under experimental conditions. A description of a shock tube experimental setup is provided. The setup consists of a high-pressure volume (HPV), a low-pressure volume (LPV), and a bulk medium section. A shock wave pulse (SWP) is generated by the rupture of a diaphragm between the HPV and LPV. The SWP dynamics are recorded by piezoelectric sensors located flush on the inside of the tube. In the shock tube, equipped with a bulk medium section, the wave experiences multiple reflections from the surface of the porous medium under study and the upper end of the tube. The reflected signals are used as probe pulses to study changes in the porous medium caused by repeated passages of the shock wave pulse, with a period of approximately 10 ms. A mathematical model is used that includes the equations of conservation of mass, momentum, and energy for the gas phase and solid particles with closure relations. The process is described for one-dimensional planar motion of the gas and dispersed phases. The numerical solution utilizes an approximation of the equations based on the control volume method. Numerical results have shown that the proposed model accurately describes, qualitatively and quantitatively, the occurrence of a sharp, short-term increase in the total voltage (peak) during repeated pulse passage through a layer of bulk material, as observed in experiments.

Keywords: bulk medium, shock tube, wave impulse, mathematical model, multiphase medium, control volume method, numerical calculations, peak formation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 2, pp. 359–375 (Russian).

The work was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 24-11-00274 (<https://rscf.ru/project/24-11-00274/>).

1. Введение

Исследование распространения волн в пористых средах связано с задачами поиска полезных ископаемых [Купер и др., 2022], использования пористых экранов для демпфирования ударно-волновых воздействий [Шагапов и др., 2006; Utkin, Chuprov, 2023], истечения газовзвеси из каналов [Широкова, Садин, 2023] и т. д.

По акустическим характеристикам песок обладает парадоксальными свойствами: малой скоростью распространения упругих волн (порядка 100–200 м/с), большим затуханием и высокой нелинейностью [Зайцев и др., 1999; Дучков и др., 2018]. Скорость существенно изменяется при поджатии песчаных образцов, к примеру, при давлениях поджатия 28–30 МПа скорость возрастает больше чем на порядок (~ 1500 м/с) [Дучков и др., 2018], консолидация (песчаник, цементация газогидратом) кардинально меняет акустические свойства, скорость возрастает больше чем на порядок (1200–2500 м/с) [Дучков и др., 2018; Губайдуллин и др., 2022], такое же возрастание скорости происходит при больших амплитудах, полученных за счет детонации [Чупров и др., 2022] или взрыва [Балапанов, Урманчеев, 2010].

Математические модели, которые описывают волновое движение в насыщенных средах, сложны из-за необходимости учитывать межфазные взаимодействия (трение, тепло и массообмен). Это требует привлечения сложных уравнений, которые могут быть нелинейными, и, соответственно, использования специальных методов решений.

На сегодняшний день есть разные подходы к моделированию волновых течений в пористых средах. Согласно подходу взаимопроникающих континуумов пористая среда представляется совокупностью твердой фазы-скелета и насыщающего его флюида — жидкости или газа. Эти сплошные среды взаимопроникают в друг друга и заполняют один и тот же объем [Нигматулин, 1987; Кутушев, Рудаков, 1993; Баширова, 2020; Мирова и др., 2020; Немцев и др., 2022].

Другой подход основан на кинетической теории гранулярных сред, в которой учитывается столкновительная динамика хаотического движения частиц [Gidaspow, 1994; Хмель, Федоров, 2016; Shimura, Matsuo, 2018; Lai et al., 2024].

Для описания плотных сред или порошковых материалов широко применяется модель с двумя давлениями, которая называется моделью Баера – Нунциато [Baer, Nunziato, 1986], в которой дополнительно введено эволюционное уравнение для объемной концентрации (закон релаксации давлений). Одной из важных особенностей модели Баера – Нунциато является то, что обе фазы — и несущая, и дисперсная — являются сжимаемыми.

Как правило, экспериментальные исследования по изучению динамики ударно-волновых импульсов (УВИ) проводятся на установке типа «ударная труба» [Ахметов и др., 2020; Ахметов и др., 2021], состоящей из камеры высокого (КВД) и низкого давления (КНД) и секции насыпной среды (НС), куда помещается исследуемая зернистая среда. Увеличение давления в КВД приводит к разрушению диафрагмы между камерами, вследствие чего образуется ударная волна, распространяющаяся в трубе. Расположенные вдоль трубы датчики регистрируют давление или полное напряжение в газовой фазе и в насыпной среде.

В ударной трубе, оснащенной секцией насыпных сред, волна многократно переотражается от поверхности изучаемой пористой среды и верхнего торца трубы. Использование переотраженных импульсов для изучения изменений в среде, произошедших под воздействием ударной волны, как зондирующих импульсов предложено в работе [Ахметов и др., 2022]. При изучении распространения ударного импульса в насыпных средах было выявлено образование пиков при прохождении зондирующего (переотраженного) импульса. В этой работе указано, что переотраженную волну можно рассматривать как зондирующий импульс, который падает на поверхность насыпной среды непосредственно после воздействия ударно-волнового импульса (основного импульса) в течение времени около 10 мс. Было высказано предположение, что образование пика

связано с разрыхлением верхнего слоя песка при воздействии ударного импульса и дальнейшем взаимодействии этого измененного слоя с падающим зондирующим импульсом.

Дальнейшее исследование усиления УВИ при воздействии переотраженного импульса на слой насыпной среды продолжено в работах [Ахметов и др., 2024; Ахметов и др., 2025а], в которых с учетом анализа результатов эволюции зондирующего импульса установлено, что в верхнем слое песка формируется пик, вдвое превышающий амплитуду импульса на поверхности, по мере прохождения в толщу песка амплитуда пика нарастает в отличие от амплитуды основного импульса, которая уменьшается, различие достигает 3,5 раза, форма импульса существенно изменяется с увеличением толщины слоя, пик смещается с заднего фронта к переднему, значительно нарастая по амплитуде.

Предварительная утрамбовка песка для получения пика на зондирующем импульсе является важным, как это показано в работе [Ахметов и др., 2025а]. В этой работе в СНС помещался песок без утрамбовки — рыхлый. При первом эксперименте, в котором УВИ многократно переотражался от песка, на зондирующем импульсе давления и образования пика не было. Из-за многократного переотражения УВИ происходило уплотнение (утаптывание) песка. При втором эксперименте на зондирующем импульсе уже происходило усиление УВИ и образовывался пик.

В работе [Уткин, Чупров, 2024] на основе численного моделирования описана динамика УВИ с образованием пика на переотраженном импульсе. Авторы этой работы указывают на необходимость дальнейших исследований, так как пик получен из-за отражения волны от нижнего торца ударной трубы, но, как показывают результаты экспериментов, УВИ затухает и до нижнего торца ударной трубы практически не доходит.

В настоящей работе предложено возможное описание механизма появления описанного ранее пика на зондирующем импульсе и проведено численное моделирование данного эффекта с последующим сопоставлением с экспериментальными данными.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Численное исследование динамики взаимодействия УВИ со слоем насыпной среды проведем для условий экспериментов, представленных в работе [Ахметов и др., 2025а]. Расположение датчиков в ударной трубе приведено на рис. 1. Чувствительная часть датчиков давления диаметром 1,5 см закреплена заподлицо с внутренней стенки ударной трубы. Исследуемая среда представляла собой насыпку из песчинок, размеры которых находятся в диапазоне от 160 до 650 мкм, среднеарифметический размер — 390 мкм [Ахметов и др., 2022]. Нагнетание воздуха в КВД приводит к разрыву диафрагмы из промасленной бумаги, разделяющей КВД и КНД. После разрыва диафрагмы в трубе формируется УВИ, длительность которого определяется длиной КВД. Перед выполнением эксперимента насыпная среда уплотнялась путем утряски пористость составляла 0,391. Необходимо отметить, что утряска является важным условием для получения пика полного напряжения на зондирующем импульсе.

Для описания волнового движения в пористой порошкообразной среде, представляющей смесь контактирующих друг с другом твердых частиц и газа, заполняющего поровое пространство, примем следующую систему уравнений [Болдырева и др., 2007; Gimaltdinov et al., 2024], включающую уравнение сохранения масс для газа и твердых частиц:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g v_g}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial \rho_s v_s}{\partial x} &= 0, \\ \rho_i &= \alpha_i \rho_s^0 \quad (i = g, s), & \alpha_g + \alpha_s &= 1, \end{aligned} \quad (1)$$

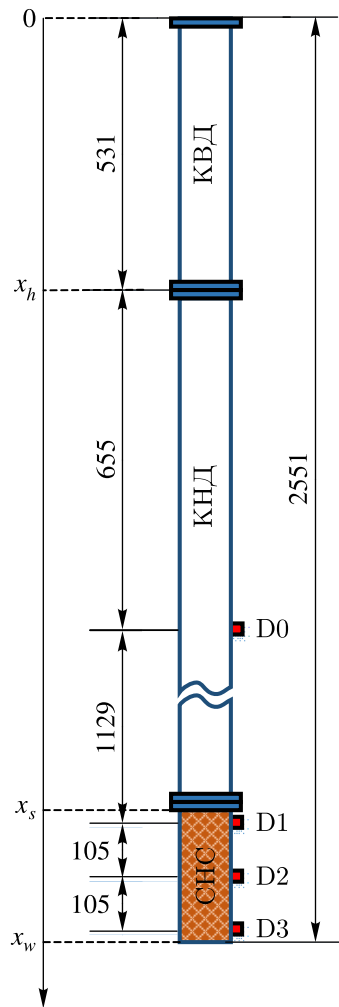


Рис. 1. Схема ударной трубы, состоящей из камеры высокого давления (КВД), камеры низкого давления (КНД) и оснащенной насыпной секцией (СНС) [Ахметов и др., 2022]

импульсов для обеих фаз:

$$\frac{\partial \rho_g v_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g v_g^2}{\partial x} + \alpha_g \frac{\partial p_g}{\partial x} = -F_\mu - F_m, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_s v_s}{\partial t} + \frac{\partial \rho_s v_s^2}{\partial x} + \alpha_s \frac{\partial p_g}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_{s*}}{\partial x} + F_\mu + F_m, \quad (3)$$

энергии газовой и дисперсной фаз:

$$\frac{\partial \rho_g u_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g u_g v_g}{\partial x} + p_g \frac{\partial (\alpha_g v_g + \alpha_s v_s)}{\partial x} = (F_\mu + F_m)(v_g - v_s) - Q, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho_s u_s}{\partial t} + \frac{\partial \rho_s u_s v_s}{\partial x} - \sigma_{s*} e_{s*} = Q, \quad e_{s*} = \frac{\partial v_s}{\partial x}. \quad (5)$$

Здесь ρ_i , v_i , u_i , T_i — приведенная плотность, массовая скорость, удельная внутренняя энергия и температура i -й фазы ($i = g, s$), c_{vg} — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, c_s — удельная теплоемкость частиц, p_g — давление газовой фазы, R — газовая постоянная, σ_{s*} , e_{s*} — соответственно продольная компонента тензора приведенных напряжений и деформации твердой фазы пористой среды, F_μ , F_m — силы вязкого межфазного трения и присоединенных масс, Q — интенсивность передачи тепла от газовой фазы к дисперсной в единице объема смеси.

Межчастичное взаимодействие — приведенное напряжение [Кутушев, Родионов, 1999] в порошкообразном скелете, будем его описывать следующим уравнением состояния [Кутушев, Родионов, 1999]:

$$\sigma_{s*} = \begin{cases} -\rho_s \alpha_{g0} a_{s0}^2 \left(\frac{\alpha_{g0}}{\alpha_g} - 1 \right), & \alpha_{g0} \geq \alpha_g, \\ 0, & \alpha_{g0} < \alpha_g. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь a_{s0} — скорость звука в порошкообразной среде, находящейся в насыпном состоянии. Данное уравнение соответствует схеме нелинейно-упругого тела.

Газ будем считать калорически совершенным, материал твердой фазы — несжимаемым:

$$p_g = \rho_g^0 R T_g, \quad u_g = c_{vg} T_g, \quad (7)$$

$$\rho_s^0 = \text{const}, \quad u_s = c_s T_s. \quad (8)$$

Составляющие силы межфазного взаимодействия задаются в виде [Болдырева и др., 2007]

$$F_\mu = \frac{3}{4} \frac{\alpha_g \alpha_s}{d} C_d \rho_g^0 |v_g - v_s| (v_g - v_s), \quad F_m = \frac{\alpha_g \alpha_s}{2} C_m \rho_g^0 \left(\frac{dv_g}{dt} - \frac{dv_s}{dt} \right), \quad (9)$$

где d — диаметр частиц порошкообразной среды, C_d — коэффициент трения, C_m — коэффициент при силе присоединенных масс, равный 1 для зернистых сред с твердыми сферическими частицами [Губайдуллин и др., 2015]. Коэффициент трения сферических частиц в насыпных средах описывается на основе эмпирической формулы Эргана [Губайдуллин и др., 2015]:

$$C_d = \frac{4}{3\alpha_g} \left(\frac{150(1 - \alpha_g)}{\alpha_g \text{Re}} + 1,75 \right), \quad \alpha_g \leq 0,55, \quad (10)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_g^0 |v_g - v_s| d}{\mu_g}, \quad \mu_g = \text{const},$$

где Re — число Рейнольдса относительного движения фаз, μ_g — вязкость газовой фазы.

Интенсивность теплообмена фаз описывается следующей зависимостью [Губайдуллин и др., 2015]:

$$Q = \frac{6\alpha_s \lambda_g \text{Nu} (T_g - T_s)}{d^2}, \quad \lambda_g = \text{const}, \quad (11)$$

где Nu — число Нуссельта, λ_g — теплопроводность газа. Число Нуссельта определяется следующей зависимостью [Нигматулин, 1987]:

$$\text{Nu} = \begin{cases} 2 + 0,106 \text{Re} \text{Pr}^{1/3}, & \text{Re} \leq 200, \\ 2,274 + 0,6 \text{Re}^{2/3} \text{Pr}^{1/3}, & \text{Re} > 200, \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{Pr} = \frac{c_{pg} \mu_g}{\lambda_g}, \quad c_{pg} = \gamma c_{vg}, \quad \gamma = \text{const}.$$

Здесь γ и c_{pg} — показатель адиабаты и удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, Pr — число Прандтля.

3. Численная схема

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (1)–(5), описывающих распространение волн давления и полного напряжения в газе и пористой среде, введем в рассмотрение равномерную пространственную сетку размерности N с границами в точках x^i , $i = 0, N$. Будем считать, что скорости газа и твердых частиц заданы в центре ячеек в точках $x_{i+1/2} = x^i - \frac{1}{2h}$, а все остальные параметры на границах ячеек — в точках x^i , где h — шаг по пространству. Далее используется неявная схема, основанная на методе контрольного объема [Патанкар, 1984].

Для вычисления потоков на границах ячеек используется схема с разностями против потока [Патанкар, 1984].

В результате аппроксимации с первым порядком точности по времени и пространству уравнения сохранения массы для газа и твердых частиц (1) запишутся в виде

$$\frac{\rho_{g,i} - \bar{\rho}_{g,i}}{\tau} + \frac{1}{h}(\rho_{g,i} \max(v_{g,i+3/2}, 0) + \rho_{g,i+1} \min(v_{g,i+3/2}, 0) - \rho_{g,i-1} \max(v_{g,i+1/2}, 0) - \rho_{g,i} \min(v_{g,i+1/2}, 0)) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\rho_{s,i} - \bar{\rho}_{s,i}}{\tau} + \frac{1}{h}(\rho_{s,i} \max(v_{s,i+3/2}, 0) + \rho_{s,i+1} \min(v_{s,i+3/2}, 0) - \rho_{s,i-1} \max(v_{s,i+1/2}, 0) - \rho_{s,i} \min(v_{s,i+1/2}, 0)) = 0. \quad (14)$$

Аналогичным образом запишем уравнения сохранения импульсов (3) и (4):

$$\begin{aligned} & \frac{0,5(\rho_{g,i} + \rho_{g,i-1})v_{g,i+1/2} - 0,5(\bar{\rho}_{g,i} + \bar{\rho}_{g,i-1})\bar{v}_{g,i+1/2}}{\tau} + \\ & + \frac{\rho_{g,i} \max(0,5(v_{g,i+1/2} + v_{g,i+3/2}), 0)v_{g,i+1/2} + \rho_{g,i} \min(0,5(v_{g,i+1/2} + v_{g,i+3/2}), 0)v_{g,i+3/2}}{h} - \\ & - \frac{\rho_{g,i-1} \max(0,5(v_{g,i-1/2} + v_{g,i+1/2}), 0)v_{g,i-1/2} + \rho_{g,i-1} \min(0,5(v_{g,i-1/2} + v_{g,i+1/2}), 0)v_{g,i+1/2}}{h} = \\ & = -0,5(\alpha_{g,i+1} + \alpha_{g,i}) \frac{P_{g,i+1} - P_{g,i}}{h} - F_{\mu,i+1/2} - F_{m,i+1/2}, \\ & \frac{0,5(\rho_{s,i+1} + \rho_{s,i})v_{s,i+1/2} - 0,5(\bar{\rho}_{s,i+1} + \bar{\rho}_{s,i})\bar{v}_{s,i+1/2}}{\tau} + \\ & + \frac{\rho_{s,i} \max(0,5(v_{s,i+1/2} + v_{s,i+3/2}), 0)v_{s,i+1/2} + \rho_{s,i} \min(0,5(v_{s,i+1/2} + v_{s,i+3/2}), 0)v_{s,i+3/2}}{h} - \\ & - \frac{\rho_{s,i-1} \max(0,5(v_{s,i-1/2} + v_{s,i+1/2}), 0)v_{s,i-1/2} + \rho_{s,i-1} \min(0,5(v_{s,i-1/2} + v_{s,i+1/2}), 0)v_{s,i+1/2}}{h} = \\ & = -0,5(\alpha_{s,i+1} + \alpha_{s,i}) \frac{P_{g,i+1} - P_{g,i}}{h} + \frac{\sigma_{s*,i+1} - \sigma_{s*,i}}{h} + F_{\mu,i+1/2} + F_{m,i+1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Остальные уравнения системы (1)–(12) записываются аналогично выражениям (13)–(14). Переменные с чертой соответствуют предыдущему моменту времени. Здесь операторы \min и \max используются для численной аппроксимации потоков через грани ячеек в соответствии со схемой с разностями против потоков.

Далее полученная система решается итерационным методом. При каждой итерации трехточечные уравнения решаются методом прогонки.

В качестве нулевой итерации в уравнениях (13)–(16) берутся значения функции с предыдущего временного слоя. В функциях \min и \max скорость берется с предыдущей итерации, а в других случаях — с текущей, все остальные параметры берутся с текущей итерации.

4. Начальные и граничные условия

Для исследования динамики УВИ в ударной трубе со слоем насыпной среды зададим следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} p_g &= p_{g1}, \quad \rho_g^0 = \rho_{g1}^0, \quad T_g = T_0, \quad v_g = 0, \quad \alpha_g = 1, \quad \alpha_s = 0 \quad (0 \leq x \leq x_h); \\ p_g &= p_0, \quad \rho_g^0 = \rho_{g0}^0, \quad T_g = T_0, \quad v_g = 0, \quad \alpha_g = 1, \quad \alpha_s = 0 \quad (x_h < x \leq x_s); \\ p_g &= p_0, \quad \rho_g^0 = \rho_{g0}^0, \quad T_g = T_0, \quad \alpha_g = \alpha_{g0}, \\ v_s &= 0, \quad \sigma_{s*} = 0, \quad e_{s*} = 0, \quad \alpha_s = \alpha_{s0} \quad (x_s < x \leq x_w). \end{aligned}$$

Здесь нижними индексами 0 отмечены невозмущенные параметры системы и граничные условия:

$$v_g = 0, \quad v_s = 0 \quad (x = 0, x = L_w).$$

5. Результаты расчетов

Расчеты выполнены для песка и воздуха при значениях термодинамических параметров газовой и дисперсной фаз, соответствующих экспериментальным значениям: $p_{0g} = 37$ кПа, $T_0 = 290$ К, $\rho_{g0}^0 = 1,19$ кг/м³, $\gamma = 1,4$, $c_{vg} = 720$ м²/(с² · К), $\mu_g = 1,81$ кг/(м · с), $\lambda_g = 0,034$ кг · м/(с² · К), $\rho_s^0 = 2620$ кг/м³, $c_s = 560$ м²/(с² · К), $d = 390$ мкм.

Отметим, что датчики, соприкасающиеся с насыпной средой, регистрируют полное напряжение $-\sigma = p_g - \sigma_{s*}$, а если экранировать действие песчинок на датчики, например, тонкой сеткой, то они регистрируют только давление в газе p_g [Belov et al., 2015].

Динамика отражения и прохождения ударно-волнового импульса при взаимодействии со слоем песка, в виде эпюр, представлена на рис. 2. При распаде разрыва между КВД и КНД (рис. 2, $t = 0,1$ мс) образуется ударно-волновой импульс амплитудой около 17 кПа и протяженностью 1,2 м ($t = 2,5$ мс), передний фронт импульса крутой, задний — пологий. Скорость распространения УВИ в воздухе составляет примерно 370 м/с. Отражение от слоя песка приводит к увеличению амплитуды отраженной волны более чем в два раза, до 39 кПа ($t = 7,0$ мс). В область насыпки проходит волна давления с увеличенной амплитудой, происходит растяжение переднего фронта ($t = 9,0$ мс). Численные расчеты показали, что при прохождении песчаной насыпки происходит практически полное затухание амплитуды давления в газе. Одновременно с отражением УВИ происходит динамическое нагружение порошкообразной среды. В процессе этого нагружения основное влияние оказывает газ, заполняющий пористое пространство порошкообразной среды. Исходное возмущение газа в пористой среде создается проходящей по поровому пространству ударной волной. В то же время под действием возмущенного газа и силы Архимеда в среде контактирующих между собой твердых частиц генерируются волны уплотнения, формирующие быструю волну [Болдырева и др., 2007]. Амплитуда полного напряжения, складывающаяся от приведенного напряжения и давления в газе, равна амплитуде отраженной волны давления в газе, а при отражении от твердой стенки достигает 80 кПа (штриховая линия, рис. 2, $t = 7,0$ и 9,0 мс).

Эпюры для более поздних моментов времени показаны на рис. 3. Переотраженная от верхнего торца трубы волна распространяется в направлении СНС со скоростью примерно 353 м/с (см. эпюры для моментов $t = 12,0$ и 15,5 мс) и воздействует на возмущенную первым (падающим) УВИ насыпную среду ($t = 21,4$ и 23,3 мс). Распространение ударно-волнового импульса в насыпной среде сопровождается появлением пикообразных распределений полного напряжения (см. рис. 3, моменты $t = 21,4$ и 23,3 мс).

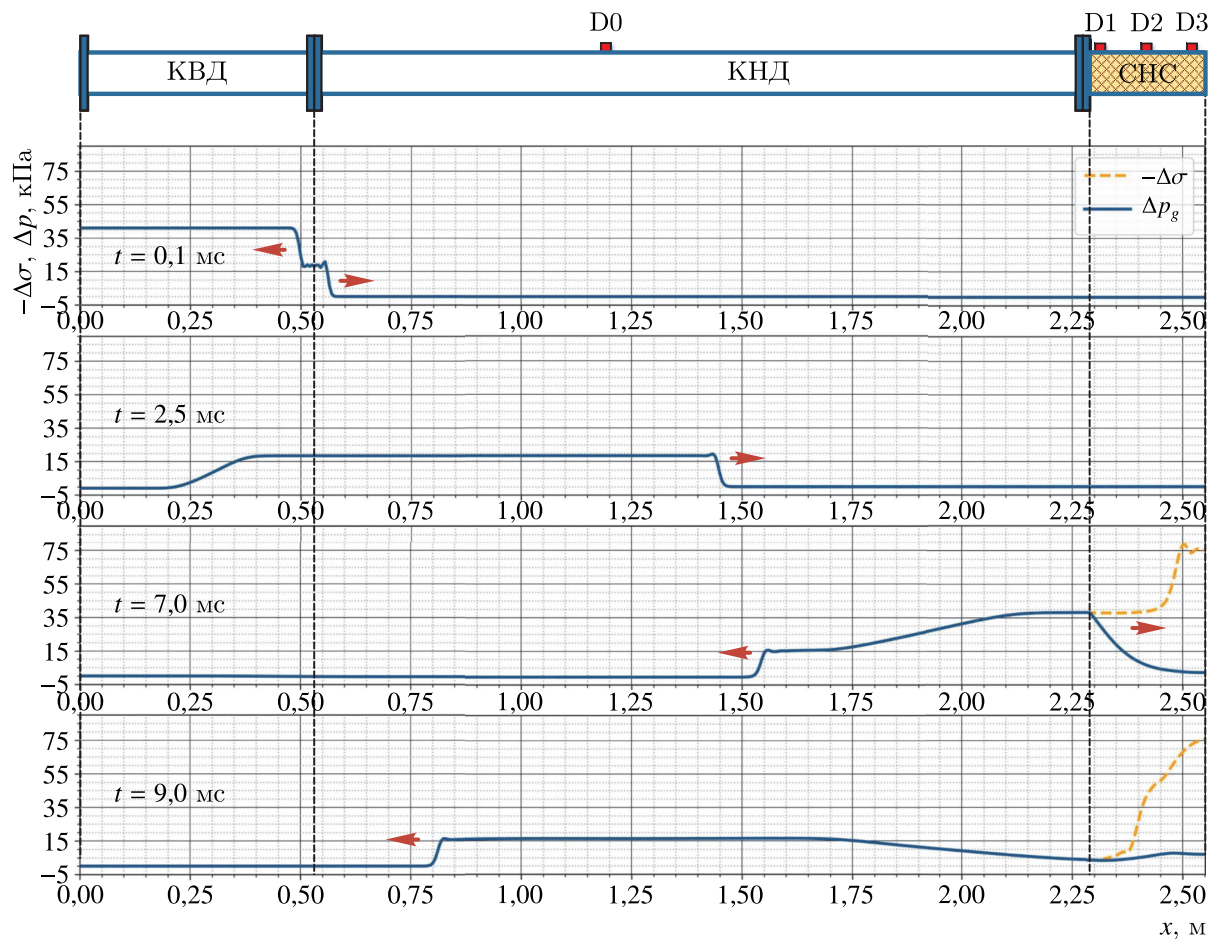


Рис. 2. Схема ударной трубы, эпюры амплитуды давления в газе (сплошные линии) и полного напряжения (штриховые линии) ударно-волнового импульса по пространству для моментов времени 0,1, 2,5, 7,0 и 9,0 мс. Вертикальные штриховые линии отделяют камеру высокого давления (КВД), камеру низкого давления (КНД) и секцию насыпной среды (СНС)

На рис. 4 представлены экспериментальные и расчетные осциллограммы для датчиков D0, D1, D2, D3, которые показывают динамику УВИ в зависимости от времени. В результате разрыва диафрагмы происходит формирование ударно-волнового импульса амплитудой около 20 кПа, который регистрируется датчиком D0. Отражение волны от слоя песка приводит к увеличению амплитуды, и прошедшая волна на уровне датчика D1 имеет амплитуду на 30 % больше по сравнению с начальным значением. Эволюция УВИ через насыпную среду ведет к практически полному затуханию волны давления Δp_g (см. эпюры для датчиков D2, D3). По мере движения УВИ по насыпке приведенное напряжение практически не затухает, амплитуда полного напряжения, которое складывается из приведенного напряжения в скелете и давления в газе ($-\sigma = \Delta p_g - \sigma_{s*}$) на уровне датчика D1, — около 40 кПа, кроме этого, на задней части импульса полного напряжения характерный всплеск (амплитудой больше 50 кПа) связан с отраженной волной от нижнего торца ударной трубы. Отражение УВИ от дна ударной трубы приводит к двукратному увеличению его амплитуды до 80 кПа (см. показания для датчика D3). Отметим, что расчетная осциллограмма для давления газа Δp_g , для падающей волны (первое воздействие на насыпку) хорошо согласуется с экспериментальным значением для полного напряжения, которое регистрируется датчиками D1, D2, D3.

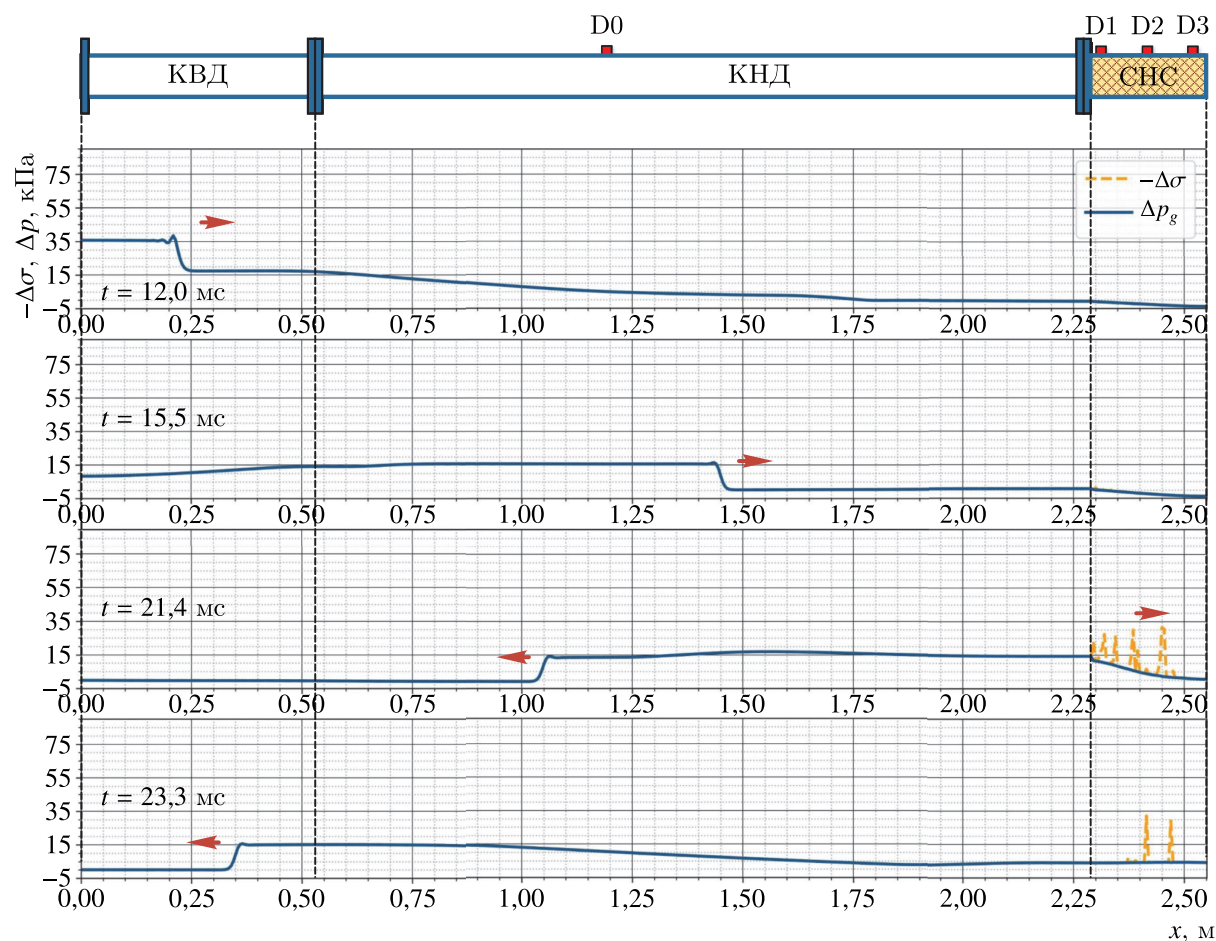


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, но для моментов 12,0, 15,5, 21,4 и 23,3 мс

Отраженная от песка УВИ распространяется в газовой фазе в направлении верхней границы ударной трубы. В результате отражения от верхнего торца в момент времени 18 мс волна повторно воздействует на насыпную среду. Как следует из анализа эпюры для датчика D1, переотраженная волна давления газа в песке имеет меньшую амплитуду (около 20 кПа) по сравнению с первым воздействием на насыпную среду, фронт прошедшей волны также имеет более пологую форму. Рассчитанное полное напряжение для переотраженной волны на уровне датчика D1 имеет крутой фронт с амплитудой около 35 кПа. Воздействие переотраженного УВИ на возмущенную падающей волной насыпную среду приводит к инициированию приведенного (межгранулярного) напряжения, которое на фоне полного напряжения проявляется в виде нерегулярных всплесков-пиков (см. показания для датчиков D2 и D3).

Из анализа рис. 4 можно сделать вывод, что существенное различие с экспериментальными данными состоит в том, что расчетные значения полного напряжения многократно превышают экспериментальные. Следует также отметить, что динамика переотраженного УВИ сопровождается наличием пикообразных всплесков на осциллограмме полного напряжения, так же как и в эксперименте.

Для того чтобы расчетные осциллограммы были близки к экспериментальным результатам, предположим, что происходит сильное затухание приведенного напряжения при его эволюции в насыпной среде из-за трения между частицами песка. Для этого в выражение для приведенного напряжения введем эффективный коэффициент затухания, с учетом которого выражение

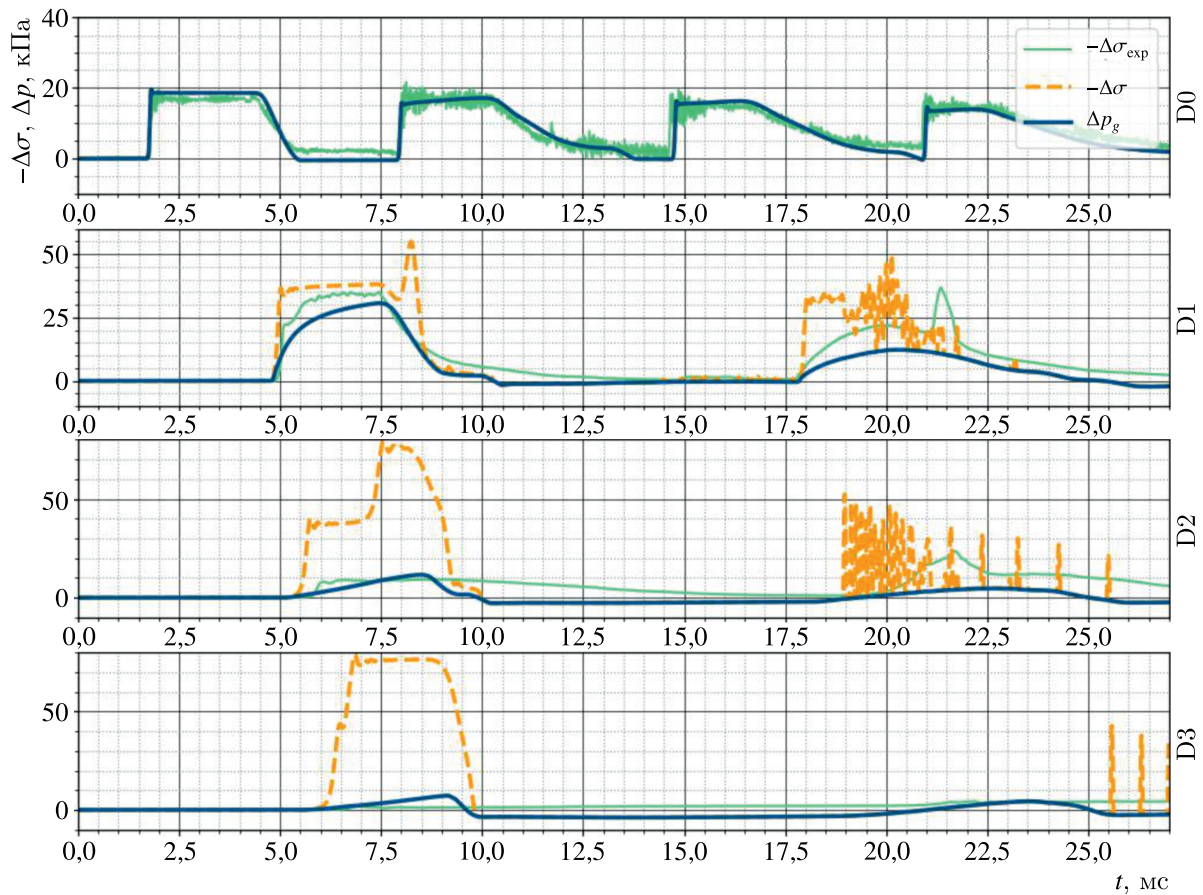


Рис. 4. Осциллограммы давления для датчиков D0–D3. Расчетные параметры — как на рис. 2

для σ_{s*} запишется в виде

$$\sigma_{s*} = \begin{cases} -\exp(-0,41(x - x_s))\rho_s\alpha_{g0}a_{s0}^2\left(\frac{\alpha_{g0}}{\alpha_g} - 1\right), & \alpha_{g0} \geq \alpha_g, \\ 0, & \alpha_{g0} < \alpha_g, \end{cases} \quad (17)$$

где $x_s = 2293$ мм — координата начала слоя насыпки в СНС (рис. 1).

Выделим момент времени возникновения пика: от $t_1 = 21,3$ мс до $t_2 = 21,9$ мс; будем полагать, что при прохождении первого (падающего) УВИ нижний слой песка в СНС уплотняется сильнее, чем верхний слой, и для объемного содержания газа в расчетах примем следующее выражение:

$$\alpha_g = \begin{cases} 0,98\alpha_g, & t_1 < t < t_2, \\ \alpha_g, & t < t_1, t > t_2. \end{cases} \quad (18)$$

$$\alpha_s = 1 - \alpha_g.$$

Расчетные эпюры амплитуды давления газа Δp_g и полного напряжения $-\Delta\sigma$, с учетом затухания приведенного напряжения по формуле (17) и изменения объемного содержания по выражению (18), представлены на рис. 5 и 6. Динамика УВИ, которая описана на рис. 2–4, имеет место и для рис. 5 и 6. Из рис. 5 и 6 следует, что происходит затухание приведенного напряжения в слое насыпной среды во время прохождения первого (падающего) УВИ, а также

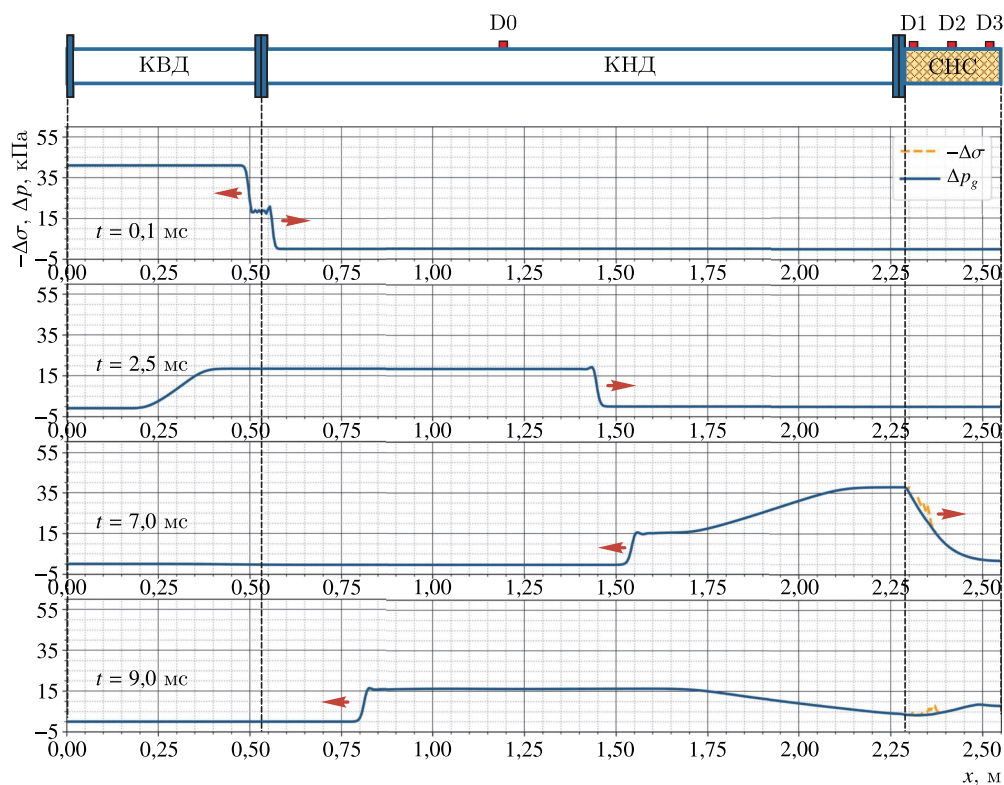


Рис. 5. Схема ударной трубы, эпюры амплитуды давления в газе (сплошные линии) и полного напряжения (точечные линии) ударно-волнового импульса по пространству для моментов времени 0,1, 2,5, 7,0 и 9,0 мс. Параметры такие же, как на рис. 2

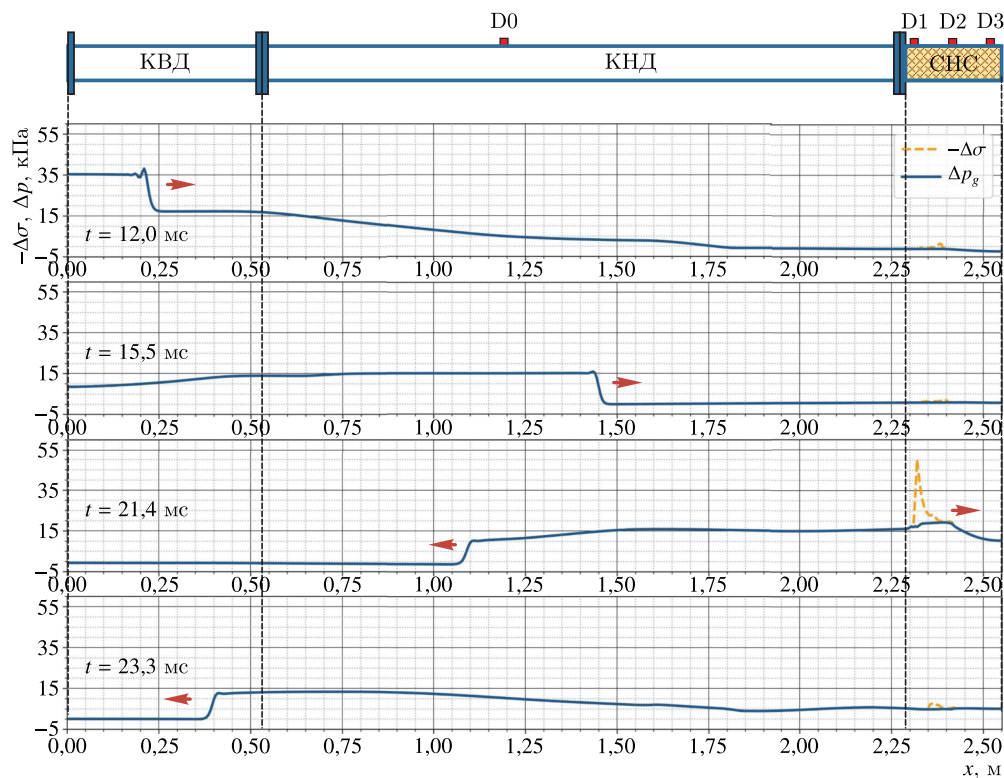


Рис. 6. Схема ударной трубы, эпюры ударно-волнового импульса по пространству для моментов 12,0, 15,5, 21,4 и 23,3 мс. Параметры такие же, как на рис. 2

появление характерного для экспериментальных осциллограмм пика (см. рис. 6, эпюра для момента $t = 21,4$ мс). В дальнейшем пик полного напряжения затухает по мере распространения по насыпке (см. $t = 23,3$ мс).

Расчетные осциллограммы для датчиков D0, D1, D2, D3 (см. рис. 7), с использованием модифицированных выражений (17), (18) для приведенного напряжения σ_{s*} и объемного содержания газа α_g , показывают хорошее согласие с экспериментальными данными для датчиков D0 и D1. На уровне датчика D2 отличие состоит в том, что фронт УВИ экспериментальных осциллограмм крутой, а в расчетах — пологий. Скорость переотраженного сигнала меньше, чем расчетного (датчик D2), что соответствует существенному разрыхлению слоя насыпки. Амплитуда экспериментальных осциллограмм на датчике D3 меньше по сравнению с амплитудой расчетных. В целом можно сказать, что дополнительный учет затухания межгранулярного напряжения и разрыхления верхнего слоя насыпки приводит к более близким результатам, которые наблюдаются в экспериментах.

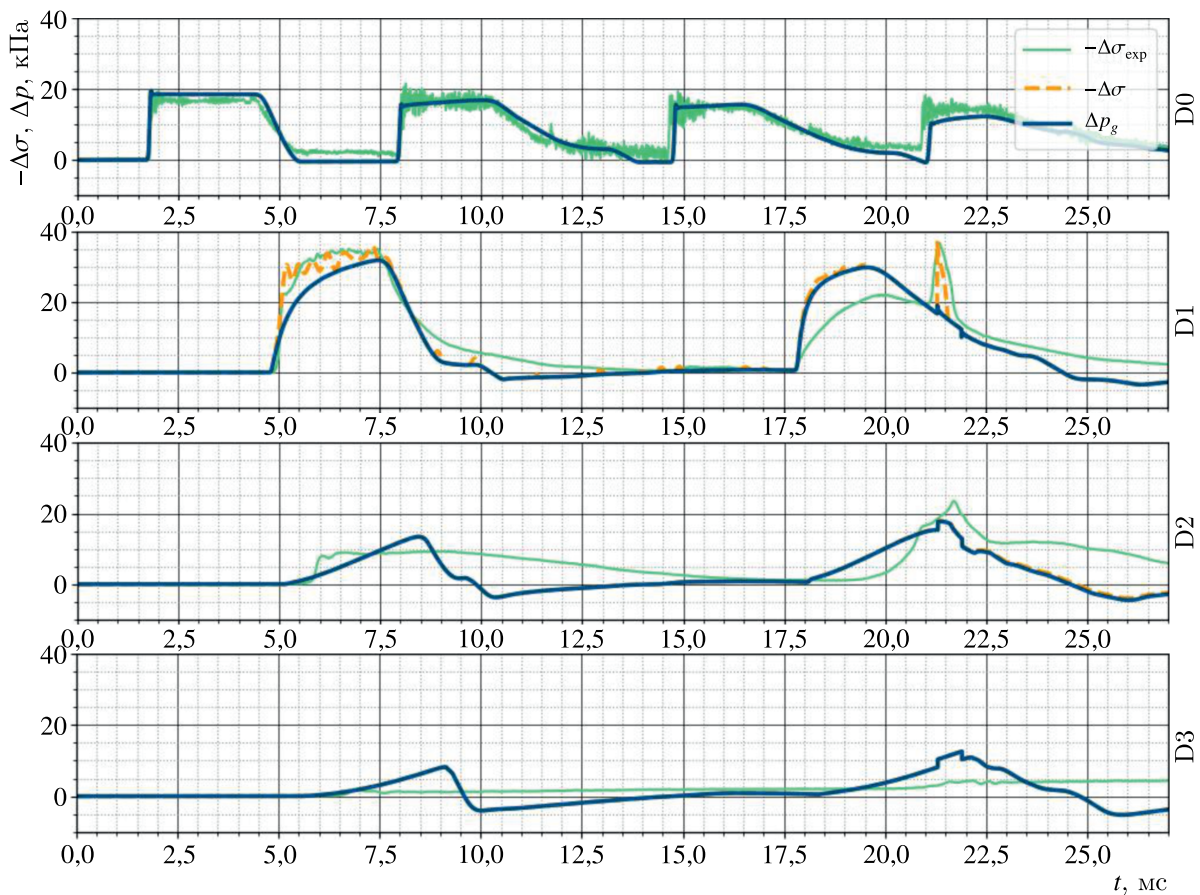


Рис. 7. Осциллограммы давления для датчиков D0–D3 с учетом поправок (17) и (18). Остальные параметры — как на рис. 2

6. Заключение

Предложено объяснение возникновения резкого краткосрочного увеличения полного напряжения-пика при повторном прохождении ударно-волнового импульса через слой насыпной среды.

Проведено сопоставление полученных результатов с известными экспериментальными данными, получено хорошее качественное и количественное согласие.

Список литературы (References)

- Ахметов А. Т., Азаматов М. А., Мухаметзянов А. Ф.* Изменение структуры ударных волн в насыпных средах при переотражении // Многофазные системы. — 2020. — Т. 15, № 1–2. — С. 10.
- Akhmetov A. T., Azamatov M. A., Mukhametzyanov A. F.* Izmeneniye struktury udarnykh voln v nasypnykh sredakh pri pereotrazhenii [Changes in the structure of shock waves in bulk media during reflection] // Multiphase Systems. — 2020. — Vol. 15, No. 1–2. — P. 10 (in Russian).
- Ахметов А. Т., Гималтдинов И. К., Азаматов М. А., Мухаметзянов А. Ф., Богданов Д. Р.* Зондирование водогазонасыщенных насыпных сред переотраженными волнами непосредственно после воздействия ударной волны // Письма в Журнал технической физики. — 2022. — Т. 48, № 1. — С. 23–26.
- Akhmetov A. T., Gimaltdinov I. K., Azamatov M. A., Mukhametzyanov A. F., Bogdanov D. R.* Sounding of water-gas-saturated bulk media by rereflected waves immediately after the impact of a shock wave // Technical Physics Letters. — 2022. — Vol. 48, No. 3. — P. 97–102. (Original Russian paper: *Akhmetov A. T., Gimaltdinov I. K., Azamatov M. A., Mukhametzyanov A. F., Bogdanov D. R.* Zondirovaniye vodogazonasyschennykh nasypnykh sred pereotrazhennykh voln neposredstvenno posle vozdeystviya udarnoy volny // Pis'ma v Zhurnal fizicheskoy fiziki. — 2022. — Vol. 48, No. 1. — P. 23–26.)
- Ахметов А. Т., Гималтдинов И. К., Мухаметзянов А. Ф.* Выявление условий формирования пиков давления в зондирующем импульсе // Инженерно-физический журнал. — 2025а. — Т. 98, № 1. — С. 190–196.
- Akhmetov A. T., Gimaltdinov I. K., Mukhametzyanov A. F.* Vyyavleniye usloviy formirovaniya pikov davleniya v zondiruyushchem impul'se [Identification of conditions for the formation of pressure peaks in the probing pulse] // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. — 2025a. — Vol. 98, No. 1. — P. 190–196 (in Russian).
- Ахметов А. Т., Гималтдинов И. К., Мухаметзянов А. Ф., Гизатуллин Р. Ф.* Эффект усиления ударных волн в насыпных средах // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. — 2024. — Т. 519, № 1. — С. 41–46.
- Akhmetov A. T., Gimaltdinov I. K., Mukhametzyanov A. F., Gizatullin R. F.* Effekt usileniya udarnykh voln v nasypnykh sredakh [The effect of shock wave amplification in bulk media] // Doklady Rossiyskoy akademii nauk. Fizika, tekhnicheskkiye nauki. — 2024. — Vol. 519, No. 1. — P. 41–46 (in Russian).
- Ахметов А. Т., Гималтдинов И. К., Мухаметзянов А. Ф., Гизатуллин Р. Ф., Азаматов М. А.* Усиление переотраженных ударно-волновых импульсов при распространении в песке // Прикладная механика и техническая физика. — 2025b.
- Akhmetov A. T., Gimaltdinov I. K., Mukhametzyanov A. F., Gizatullin R. F., Azamatov M. A.* Usileniye pereotrazhennykh udarno-volnovykh impul'sov pri rasprostraneni v peske [Amplification of reflected shock wave pulses during propagation in sand] // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. — 2025b (in Russian).
- Ахметов А. Т., Гималтдинов И. К., Ситдикова Л. Ф., Азаматов М. Ш., Султангареев Ю. С., Хайретдинов Т. Д.* О влиянии влагосодержания на распространение ударных волн слабой интенсивности в насыпных средах // Инженерно-физический журнал. — 2021. — Т. 94, № 2. — С. 418–423.
- Akhmetov A. T., Gimaltdinov I. K., Sitdikova L. F., Azamatov M. Sh., Sultangareyev Yu. S., Khayretdinov T. D.* O vliyani vlagosoderzhaniya na rasprostraneniye udarnykh voln slaboy intensivnosti v nasypnykh sredakh [On the influence of moisture content on the propagation of low-intensity shock waves in bulk media] // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. — 2021. — Vol. 94, No. 2. — P. 418–423 (in Russian).
- Балапанов Д. М., Урманчев С. Ф.* Роль межфазных взаимодействий при газовой детонации в инертной пористой среде // Письма в ЖТФ. — 2010. — Т. 36, № 13. — С. 71–80.
- Balapanov D. M., Urmancheev S. F.* Role of interphase interactions during gas detonation in inert porous medium // Technical Physics Letters. — 2010. — Vol. 36, No. 7. — P. 618–622. (Original Russian paper: *Balapanov D. M., Urmancheev S. F.* Rol' mezhfaznykh vzaimodeystviy pri gazovoy detonatsii v inertnoy poristoy srede // Pis'ma v ZhTF. — 2010. — Vol. 36, No. 13. — P. 71–80.)
- Баширова К. И.* Об искажении проходящей и отраженной ударных волн при взаимодействии со слоем гранулированной среды // Многофазные системы. — 2020. — Т. 15, № 3–4. — С. 223–227.
- Bashirova K. I.* Ob iskazhenii prokhodyashchei i otrazhennoi udarnykh voln pri vzaimodeistvii so sloem granulirovannoi sredu [On the distortion of transmitted and reflected shock waves when interacting with a layer of a granular medium] // Multiphase Systems. — 2020. — Vol. 15, No. 3–4. — P. 223–227 (in Russian).

- Болдырева О. Ю., Губайдуллин А. А., Дудко Д. Н., Кутушев А. Г.* Численное исследование передачи ударно-волновой нагрузки экранируемой плоской стенке через слой порошкообразной среды и разделяющий их воздушный зазор // *Физика горения и взрыва*. — 2007. — Т. 43, № 1. — С. 132–142.
- Boldyreva O. Yu., Gubaidullin A. A., Dudko D. N., Kutushev A. G.* Numerical study of the transfer of shock-wave loading to a screened flat wall through a layer of a powdered medium and a subsequent air gap // *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. — 2007. — Vol. 43, No. 1. — P. 114–123. (Original Russian paper: *Boldyreva O. Yu., Gubaidullin A. A., Dudko D. N., Kutushev A. G.* Chislennoye issledovaniye peredachi udarno-volnovoy nagruzki ekraniruyemoy ploskoy stenke cherez sloy poroshkoobraznoy sredy i razdelyayushchiy ikh vozdushnyy zazor // *Fizika gorenija i vzryva*. — 2007. — Vol. 43, No. 1. — P. 132–142.)
- Губайдуллин А. А., Болдырева О. Ю., Дудко Д. Н.* Распространение возмущений давления в насыщенной пузырьковой жидкостью пористой среде // *Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки*. — 2015. — Т. 157, № 1. — С. 101–106.
- Gubaidullin A. A., Boldyreva O. Yu., Dudko D. N.* Rasprostraneniye vozmushcheniy davleniya v nasyshchennoy puzyr'kovoy zhidkost'yu poristoy srede [Propagation of pressure disturbances in a porous medium saturated with bubbly liquid] // *Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskiye nauki*. — 2015. — Vol. 157, No. 1. — P. 101–106 (in Russian).
- Губайдуллин А. А., Болдырева О. Ю., Дудко Д. Н.* Скорость и поглощение линейных волн в пористых средах, насыщенных газом и его гидратом // *Прикладная механика и техническая физика*. — 2022. — Т. 63, № 4 (374). — С. 56–63.
- Gubaidullin A. A., Boldyreva O. Yu., Dudko D. N.* Velocity and attenuation of linear waves in porous media saturated with gas and its hydrate // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. — 2022. — Vol. 63, No. 4. — P. 599–605. (Original Russian paper: *Gubaidullin A. A., Boldyreva O. Yu., Dudko D. N.* Skorost' i pogloshcheniye lineynykh voln v poristyx sredakh, nasyshchennykh gazom i yego gidratom // *Prikladnaya mekhanika i tehnikeskaya fizika*. — 2022. — Vol. 63, No. 4 (374). — P. 56–63.)
- Дучков А. Д., Дучков А. А., Дугаров Г. А., Дробчик А. Н.* Скорости ультразвуковых волн в песчаных образцах, содержащих воду, лед или гидраты метана и тетрагидрофурана (лабораторные измерения) // *Доклады Академии наук*. — 2018. — Т. 478, № 1. — С. 94–99.
- Duchkov A. D., Duchkov A. A., Dugarov G. A., Drobchik A. N.* Velocities of ultrasonic waves in sand samples containing water, ice, or methane and tetrahydrofuran hydrates (laboratory measurements) // *Doklady Earth Sciences*. — 2018. — Vol. 478, No. 1. — P. 74–78. (Original Russian paper: *Duchkov A. D., Duchkov A. A., Dugarov G. A., Drobchik A. N.* Skorosti ul'trazvukovykh voln v peschanykh obraztsakh, sodержashchikh vodu, lyod ili gidraty metana i tetragidrofurana (laboratornyye izmereniya) // *Doklady Akademii nauk*. — 2018. — Vol. 478, No. 1. — P. 94–99.)
- Зайцев В. Ю., Колпаков А. Б., Назаров В. Е.* Детектирование акустических импульсов в речном песке. Эксперимент // *Акустический журнал*. — 1999. — Т. 45, № 2. — С. 235–241.
- Zaytsev V. Yu., Kolpakov A. B., Nazarov V. E.* Detektirovaniye akusticheskikh impul'sov v rechnom peske. Eksperiment [Detection of acoustic pulses in river sand. Experiment] // *Akusticheskiy zhurnal*. — 1999. — Vol. 45, No. 2. — P. 235–241 (in Russian).
- Купер К. Э., Дробчик А. Н., Дучков А. А., Дугаров Г. А., Шарафутдинов М. Р.* Исследование структуры газогидратных отложений методами рентгеновской томографии и акустического зондирования // *Инженерно-физический журнал*. — 2022. — Т. 95, № 7. — С. 1815–1820.
- Kuper K. E., Drobchik A. N., Duchkov A. A., Dugarov G. A., Sharafutdinov M. R.* Issledovaniye struktury gazogidratnykh otlozheniy metodov khirurgicheskoy tomografii i akusticheskogo zondirovaniya [Study of the structure of gas hydrate deposits using X-ray tomography and acoustic sounding methods] // *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*. — 2022. — Vol. 95, No. 7. — P. 1815–1820 (in Russian).
- Кутушев А. Г., Родионов С. П.* Численное исследование влияния параметров слоя насыпной среды и падающей ударной волны на давление на экранируемой плоской стенке // *Физика горения и взрыва*. — 1999. — Т. 35, № 2. — С. 105–113.
- Kutushev A. G., Rodionov S. P.* Chislennoye issledovaniye privodit parametry sloya nasypnoy sredy i padayushchey udarnoy volny pri davlenii na ekraniruyemoy ploskoy stenke [Numerical study of the influence of parameters of a bulk medium layer and an incident shock wave on the pressure on a screened flat wall] // *Fizika gorenija i vzryva*. — 1999. — Vol. 35, No. 2. — P. 105–113 (in Russian).
- Кутушев А. Г., Рудаков Д. А.* Численное исследование воздействия ударной волны на преграду, экранируемую слоем пористой порошкообразной среды // *Прикладная механика и техническая физика*. — 1993. — Т. 34, № 5. — С. 25–31.
- Kutushev A. G., Rudakov D. A.* Numerical study of the action of a shock wave on an obstacle screened by a layer of porous powder material // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. — 1993. — Vol. 34, No. 5. — P. 618–624. (Original Russian paper: *Kutushev A. G., Rudakov D. A.* Chislennoye issledovaniye vozdeystviya udarnoy volny na pregradu, jekraniruemuju sloem poristoj poroshkoobraznoj sredy // *Prikladnaya mekhanika i tehnikeskaya fizika*. — 1993. — Vol. 34, No. 5. — P. 25–31.)

- Мирова О. А., Баженова Т. В., Голуб В. В.* Влияние экрана из гранулированного материала на многократное отражение плоской ударной волны внутри замкнутого объема // Теплофизика высоких температур. — 2020. — Т. 58, № 1. — С. 144–147.
Mirova O. V., Bazhenova T. V., Golub V. V. Effect of a granulated-material screen on the multiple reflection of a plane shock wave inside a closed volume // High Temperature. — 2020. — Vol. 58, No. 1. — P. 140–143. (Original Russian paper: *Mirova O. V., Bazhenova T. V., Golub V. V.* Vliyanie ekrana iz granulirovannogo materiala na mnogokratnoe otrazhenie ploskoi udarnoi volny vnutri zamknutogo ob'ema // Teplofizika vysokikh temperatur. — 2020. — Vol. 58, No. 1. — P. 144–147.)
- Немцев М. Ю., Меньшов И. С., Семенов И. В.* Численное моделирование динамических процессов в среде мелкодисперсных твердых частиц // Математическое моделирование. — 2022. — Т. 34, № 8. — С. 73–96.
Nemtsev M. Yu., Menshov I. S., Semenov I. V. Numerical simulation of dynamic processes in a medium of fine-grained solid particles // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2023. — Vol. 15. — P. 210–226. (Original Russian paper: *Nemtsev M. Yu., Menshov I. S., Semenov I. V.* Chislennoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov v srede melkodispersnykh tverdykh chastits // Matematicheskoe modelirovanie. — 2022. — Vol. 34, No. 8. — P. 73–96.)
- Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. В 2 ч. — М.: Наука, 1987.
Nigmatulin R. I. Dinamika mnogofaznykh sred [Dynamics of multiphase media]. V 2 ch. — Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
- Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
Patankar S. Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamikov zhidkostey [Numerical methods for solving problems of heat transfer and fluid dynamics]. — Moscow: Energoatomizdat, 1984 (in Russian).
- Уткин П. С., Чупров П. А.* Численное моделирование распространения зондирующих импульсов в плотной засыпке гранулированной среды // Компьютерные исследования и моделирование. — 2024. — Т. 16, № 6. — С. 1361–1384.
Utkin P. S., Chuprov P. A. Chislennoye modelirovaniye rasprostraneniya zondovykh impul'sov v plotnoy zasypke granulirovannoy sredy [Numerical simulation of the propagation of probing pulses in a dense bed of a granular medium] // Computer Research and Modeling. — 2024. — Vol. 16, No. 6. — P. 1361–1384 (in Russian).
- Хмель Т. А., Федоров А. В.* Влияние столкновительной динамики частиц на процессы ударно-волнового диспергирования // Физика горения и взрыва. — 2016. — Т. 52, № 2. — С. 93–105.
Khmel T. A., Federov A. V. Effect of collision dynamics of particles on the processes of shock wave dispersion // Combustion, Explosion, and Shock Waves. — 2016. — Vol. 52, No. 2. — P. 207–218. (Original Russian paper: *Khmel T. A., Federov A. V.* Vliyanie stolknovitel'noi dinamiki chastits na protsessy udarno-volnovogo dispergirovaniya // Fizika goreniya i vzryva. — 2016. — Vol. 52, No. 2. — P. 93–105.)
- Чупров П. А., Порошина Я. Э., Уткин П. С.* Численное моделирование прохождения ударной волны над плотным слоем частиц в рамках уравнений Баера–Нунциато // Горение и взрыв. — 2022. — Т. 15, № 2. — С. 67–74.
Chuprov P. A., Poroshina Ya. E., Utkin P. S. Chislennoye modelirovaniye prokhozheniya udarnoy volny nad plotnym sloyem chastits v ramkakh uravneniy Bayera–Nunziato [Numerical simulation of the passage of a shock wave over a dense layer of particles using the Baer–Nunziato equations] // Goreniye i vzryv. — 2022. — Vol. 15, No. 2. — P. 67–74 (in Russian).
- Шагапов В. Ш., Султанов А. Ш., Урманчиев С. Ф.* К решению задачи об отражении линейных волн во флюиде от насыщенного этим флюидом пористого полупространства // Прикладная механика и техническая физика. — 2006. — Т. 47, № 5 (279). — С. 16–26.
Shagapov V. Sh., Sultanov A. Sh., Urmancheev S. F. K resheniyu zadachu ob otrazhenii lineynykh voln vo flyuide ot nasyshchennogo etim flyuidom poristogo poluprostranstva [Towards solving the problem of reflection of linear waves in a fluid from a porous half-space saturated with this fluid] // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. — 2006. — Vol. 47, No. 5 (279). — P. 16–26 (in Russian).
- Широкова Е. Н., Садин Д. В.* Волновые и релаксационные эффекты при истечении газозвеси, частично заполняющей цилиндрический канал // Компьютерные исследования и моделирование. — 2023. — Т. 15, № 6. — С. 1495–1506.
Shirokova E. N., Sadin D. V. Volnovyye i relaksatsionnyye efekty pri istechenii gazovzvesi, chastichno zapolnyaushey tsilindricheskoy kanal [Wave and relaxation effects during the outflow of a gas suspension partially filling a cylindrical channel] // Computer Research and Modeling. — 2023. — Vol. 15, No. 6. — P. 1495–1506 (in Russian).
- Baer M. R., Nunziato J. W.* A two-phase mixture theory for the deflagration to detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Intern. J. Multiphase Flow. — 1986. — Vol. 12. — P. 861–889.

- Belov E., Blachman M., Britan A., Sadot O., Ben-Dor G.* Experimental investigation of the stress wave propagation inside a granular column impacted by a shock wave // *Shock Waves*. — 2015. — No. 25. — P. 675–681.
- Britan A., Levy A.* Weak shock wave interaction with inert granular media // *Handbook of shock waves* / G. Ben-Dor, O. Igra, T. Elperin (eds.). — 2001. — P. 597–666.
- Gidaspow D.* *Multiphase flow and fluidization*. — Academic Press, 1994.
- Gimaltdinov I. K., Rodionov A. S., Valiakhmetova O. Yu.* Numerical solution of the initial boundary value problem of the impact of a shock pulse on a layer of a bulk medium // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2024. — Vol. 45, No. 11. — P. 5396–5404.
- Lai S., Rao Y., Wang H.* Computational analysis of a dense granular system driven by a propagating shock wave in an Eulerian–Eulerian framework // *Physics of Fluids*. — 2024. — Vol. 36. — Paper 043321.
- Shimura K., Matsuo A.* Two-dimensional CFD-DEM simulation of vertical shock wave-induced dust lifting processes // *Shock Waves*. — 2018. — Vol. 28. — P. 1285–1297.
- Utkin P., Chuprov P.* Numerical simulation of shock wave propagation over a dense particle layer using the Baer–Nunziato model // *Physics of Fluids*. — 2023. — Vol. 35, No. 11. — P. 113313.