

УДК: 519.6, 519.24

## Моделирование и вычисление плотности распределения вероятностей и функции распределения фаз огибающей фазоманипулированного сигнала

М. Л. Маслаков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ООО «Специальный Технологический Центр»,

Россия, 195220, г. Санкт-Петербург, пр-т Непокоренных, д. 17, корп. 4в

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,  
Россия, 190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67а

E-mail: maslakovml@gmail.com

*Получено 25.08.2025, после доработки — 04.03.2026.*

*Принято к публикации 13.03.2026.*

В различных областях науки при моделировании и статистическом анализе данных, характеризующихся циклической (периодичностью), используют круговые или обернутые модели распределений. В работе рассматривается плотность распределения вероятностей фазы гармонического сигнала и сигнала с фазовой манипуляцией в условиях аддитивного белого гауссовского шума. Представлены выражения для моделирования выборки случайных фаз гармонического и модулированного сигналов с заданными параметрами и корреляционной функцией. Приведены выражения для плотности распределения фаз фазоманипулированного сигнала. Показано, что плотность распределения фазоманипулированного сигнала становится мультимодальной. Кроме того, рассматриваемая плотность распределения является периодической функцией, а значит, для ее разложения в ряд естественно использование тригонометрического базиса Фурье. В работе впервые получены аналитические выражения для коэффициентов ряда Фурье при разложении рассматриваемой плотности по гармоническому базису и представлен вывод соответствующих выражений. Представлены примеры компьютерного моделирования и соответствующие графические материалы при вычислении коэффициентов Фурье функции плотности распределения вероятностей фаз для гармонического и фазоманипулированного сигналов. Также выведены выражение для функции распределения фазы и его разложение в ряд Фурье. На основе представления плотности распределения фаз в виде ряда Фурье проведено сравнение с другими круговыми распределениями, часто применяемыми в практических задачах, — распределение Мизеса и обернутое нормальное распределение. Полученные в работе результаты представляют теоретический и практический интерес для моделирования и статистического анализа фаз сигналов в различных прикладных задачах в области радиотехники, цифровой связи, радиолокации. В частности, в задачах оценки отношения «сигнал/шум», вероятности ошибки на бит, а также надежности решений демодулятора, т. е. мягкой демодуляции фазоманипулированных сигналов. Аналитические выражения для коэффициентов ряда Фурье могут быть использованы при оценке эмпирической плотности распределения.

Ключевые слова: плотность распределения фазы, круговая плотность распределения, обернутое распределение, нормальная круговая плотность распределения, плотность распределения Мизеса, функция распределения, ряд Фурье, фазовая манипуляция, комплексная огибающая

UDC: 519.6, 519.24

## Modeling and calculation of probability density function and cumulative distribution function of phase-shift-keying signals envelope phase

M. L. Maslakov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>LLC Special Technology Center,  
17/4b Nepokorenykh ave., Saint Petersburg, 195220, Russia  
<sup>2</sup>Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,  
67a Bolshaya Morskaya st., Saint Petersburg, 190000, Russia

E-mail: maslakovml@gmail.com

*Received 25.08.2025, after completion — 04.03.2026.  
Accepted for publication 13.03.2026.*

For modeling and statistical analysis of data characterized by cyclicity (periodicity) in various areas of science are used circular or wrapped distribution models. The phase distribution function of a harmonic and phase-shift-keying signal in case additive white Gaussian noise is considered. Algorithms for modeling random phases sample of harmonic and modulated signals with specified parameters and correlation function are presented. Expressions for the phase distribution density of the phase-shift-keying signal are given. It is shown that the phase probability density function of the phase-shift-keying signal becomes multimodal. In addition, the probability density function under consideration is a periodic function, which means that the trigonometric Fourier basis can be used to decompose it into a series. In paper for the first time, analytical expressions for the coefficients of the Fourier series when decomposing the density under consideration into a harmonic basis are obtained, and the derivation of the corresponding expressions are presented. Examples of computer modeling and corresponding graphical materials of calculating Fourier coefficients of the phase probability density function for harmonic and phase-shift-keying signals are presented. A formula for the cumulative distribution function and its decomposition into a Fourier series are also obtained. Based on the representation of the phase probability density function in the form of a Fourier series, a comparison is made with other circular distributions often used in practical problems, the Mises distribution and the wrapped normal distribution. The results obtained in this work are of theoretical and practical interest for modeling and statistical analysis of signal phases in various applied problems in area radio engineering, digital communication, radar, etc. In particular, in the problems of estimating the signal-to-noise ratio, the bit error rate, as well as the reliability of demodulator solutions, i. e. soft demodulation of phase-shift-keying signals. Analytical expressions for the Fourier series coefficients can be used to estimate the empirical probability density function.

**Keywords:** phase probability density function, circular distribution, wrapped distribution, normal circular distribution, Mises distribution, cumulative distribution function, Fourier series, phase-shift-keying, complex envelope

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 2, pp. 243–272 (Russian).

## 1. Введение

Во многих областях науки, например в статистической радиотехнике, астрономии, медицине, геологии, анализируемые данные являются замкнутыми/циклическими в некоторой ограниченной области [Mardia, Jupp, 2000; Jammalamadaka, SenGupta, 2001; Ferrari, 2009; Bell, Nadarajah, 2024]. Такие данные могут представлять собой фазы, углы направлений (векторов) [McGrew, Mongro, 2009], временные наблюдения (например, суточные или годовые наблюдения [Borradaile, 2003; Bell, Nadarajah, 2024]) и т. п. Например, уровень воды в определенных водоемах может циклически изменяться (повышаться и понижаться) в течение года или даже нескольких лет [Davis, 2002; Borradaile, 2003]. Второй пример — наблюдения за солнечной магнитной активностью: известно, что число пятен на солнце имеет 11-летний цикл [Goodman, 1992], хотя в более детальных исследованиях выделяют еще и 100-летний цикл [Наговицын, 2008].

В задачах радиотехники, обработки сигналов и радиофизики для оценки определенных характеристик часто применяют методы, основанные на измерении фаз (углов) [Bell, Nadarajah, 2024]. Например, задача моделирования и анализа статистики фаз возникает при реализации вокодеров для улучшения качества воспроизведения речи [Agiomyrgiannakis, Stylianou, 2009].

Для функционирования телекоммуникационных и радиолокационных систем важными задачами являются оценка и компенсация доплеровской частоты [Simon, Alouini, 2000; Xiong, 2006] и синхронизация опорных генераторов [Тихонов, 1964; Aubry et al., 2016] приемных устройств. При этом кроме шумовой аддитивной составляющей принимаемого сигнала существуют фазовые и частотные нестабильности генератора, которые вызывают так называемый фазовый шум. Для указанной задачи оценки фаз, разности фаз и учета фазовых флуктуаций также применяются круговые распределения [Тихонов, 1964; Aubry et al., 2016].

Не менее важной задачей, которую также можно отнести к области радиотехники, является задача определения параметров спутниковых орбит [Borradaile, 2003; McGrew, Mongro, 2009] и их привязки к координатам.

При передаче цифровых данных по радиоканалам в условиях замираний и сложной сигнально-помеховой обстановки в большинстве случаев используют сигналы с фазовой модуляцией или манипуляцией (phase-shift-keying, PSK) [Xiong, 2006; Chandra et al., 2011], а соответствующая ошибка оценки фазы в этом случае сводится к символьным и битовым ошибкам [Varotsos et al., 2017; Gappmair, Nistazakis, 2017]. Статистический анализ фаз при этом применяют как для оценки вероятности ошибки на бит [Егоров, Смаль, 2012; Varotsos et al., 2017], так и для оценки отношения «сигнал/шум» (ОСШ) [Егоров, Смаль, 2013]. Также модель плотности распределения вероятностей необходима в задаче оценки надежности решений демодулятора [Гладких, 2010] при оценке функционалов правдоподобия (см. подробнее в [Tuchler et al., 2002]).

Для статистического анализа подобных данных используют так называемые круговые, полярные или обернутые модели распределений (см. [Jammalamadaka, SenGupta, 2001; Ravindran, Ghosh, 2011]), а обработка и получение оценок имеют свою специфику, связанную со свойством цикличности наблюдений, т. е.

$$x_w = x \bmod Z, \quad (1)$$

где  $x_w$  — циклические или обернутые (wrapped) данные,  $x$  — исходные данные,  $\bmod Z$  — операция взятия по модулю числа  $Z$ .

В данной работе будем рассматривать фазы символов комплексной огибающей фазоманипулированного PSK-радиосигнала, которые будем обозначать как  $\varphi$ . Рассматриваемый диапазон будем полагать  $\varphi \in [-\pi; \pi)$ , хотя в ряде случаев, например при вычислении и последующем

статистическом анализе разности фаз, для сведения их к диапазону  $\varphi \in [-\pi; \pi)$  вместо (1) требуется промежуточный переход к диапазону  $\varphi \in [0; 2\pi)$ . Соответствующее преобразование фаз для приведения к диапазону  $\varphi \in [-\pi; \pi)$  имеет вид

$$\varphi = ((\tilde{\varphi} + \pi) \bmod 2\pi) - \pi, \quad (2)$$

где  $\tilde{\varphi}$  — значения фаз в общем случае в диапазоне  $\tilde{\varphi} \in (-\infty; \infty)$ .

При этом одной из задач при статистическом анализе измерений является оценка эмпирической плотности распределения вероятностей анализируемой случайной величины. Для этого известен ряд методов, например гистограммный метод, метод оконных функций, метод аппроксимации с использованием ортогональных функций и др., имеющие свои достоинства и недостатки (см. подробнее в [Сирота, 2016]). В частности, метод аппроксимации по базисным функциям относится к методам непараметрической статистики, а одним из его преимуществ (особенно по сравнению с гистограммным методом) являются относительно невысокие требования к объему анализируемой выборки. При этом в случае анализа циклических (или, другими словами, периодических) данных соответствующая функция плотности распределения является априорно периодической функцией, а значит, для разложения ее в ряд естественно использование тригонометрического базиса [Жук, 1982].

При этом выражения для точных значений коэффициентов Фурье для рассматриваемой в работе функции плотности распределения фазы гармонических и фазоманипулированных сигналов ранее не были получены. Вывод соответствующих выражений является основной целью данной работы.

В работе приведены некоторые обобщения применительно к задаче статистического анализа фаз комплексной огибающей модулированных (фазоманипулированных) и гармонических сигналов. Представлены реализации генераторов для моделирования выборки случайных фаз с заданными параметрами и корреляционной функцией. Рассмотрено разложение функции плотности распределения вероятностей в ряд Фурье. Впервые получены аналитические выражения для коэффициентов ряда Фурье. Впервые выведено точное выражение для функции распределения, а также получено ее разложение в ряд Фурье.

Статья организована следующим образом: в § 2 показан переход от комплексной огибающей сигнала к плотности распределения фазы, как для случая гармонического сигнала, так и для фазоманипулированного PSK-сигнала, а также приведены соответствующие выражения для плотностей распределения вероятностей фаз; § 3 посвящен вопросу моделирования случайных фаз с заданными параметрами; в § 4 показан подробный вывод коэффициентов ряда Фурье при разложении рассматриваемой функции плотности распределения по гармоническому базису; на основе представления в виде ряда Фурье в § 5 проведено сравнение рассматриваемой плотности распределения с некоторыми близкими распределениями, а именно круговым нормальным распределением и распределением Мизеса; в § 6 показан вывод выражения для функции распределения фазы; в § 7 рассмотрена точность полученных выражений, а также приведены некоторые замечания, связанные с их численной реализацией; в заключении кратко сформулированы основные результаты работы и приведен краткий анализ их практического использования.

## 2. Плотность распределения вероятностей фаз комплексной огибающей

Рассмотрим математическую модель модулированного PSK-сигнала [Тихонов, 1966]:

$$s(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = \{A_n \cos(\omega_0 t + \varphi_n), nT_{\text{sym}} \leq t < (n+1)T_{\text{sym}}, n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (3)$$

где  $A_n$  — амплитуда,  $\omega_0$  — несущая частота,  $\varphi_n$  — фаза символа,  $T_{\text{sym}}$  — длительность символа,  $n$  — номер символа.

При обработке таких сигналов удобно перейти к рассмотрению их комплексных огибающих, по сути, перейдя на нулевую частоту. Для этого представим сигнал (3) как реальную часть аналитического комплексного сигнала  $\dot{s}_A(t)$ :

$$s(t) = \text{Re}\{\dot{s}_A(t)\} = \text{Re}\{s(t) + js_H(t)\}, \quad (4)$$

где  $s_H(t)$  — преобразование Гильберта сигнала  $s(t)$ .

При этом

$$\begin{aligned} \dot{s}_A(t) &= A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) + jA(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) = A(t) \exp(j(\omega_0 t + \varphi(t))) = \\ &= A(t) \exp(j\varphi(t)) \exp(j\omega_0 t) = \dot{u}(t) \exp(j\omega_0 t), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\dot{u}(t)$  — комплексная огибающая сигнала  $s(t)$ .

Отсчеты (символы) комплексной огибающей можно рассматривать как точки на комплексной плоскости:

$$u = \{u_n = I_n + jQ_n = A_n \exp(j\varphi_n), n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (6)$$

где  $I$  и  $Q$  — синфазная и квадратурная составляющие соответственно.

При наличии аддитивного белого гауссовского шума модель (6) примет вид

$$\hat{u} = \{\hat{u}_n = I_n + x_{I,n} + j(Q_n + x_{Q,n}) = \hat{A}_n \exp(j\hat{\varphi}_n), n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (7)$$

а плотность распределения комплексной величины  $\hat{u}$ , полагая  $x_I$  и  $x_Q$  независимыми случайными нормальными величинами с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ , определяется выражением для двумерной нормальной плотности распределения:

$$W(u) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(\text{Re}\{u\} - I)^2 + (\text{Im}\{u\} - Q)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (8)$$

из которого могут быть получены выражения для плотностей распределения вероятностей модуля огибающей и фазы (см. подробнее в [Тихонов, 1966; Левин, 1989]).

### 2.1. Плотность распределения фазы гармонического сигнала

Рассмотрим сначала случай, когда все фазы символов равны: для простоты положим  $\varphi_n = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . В частном случае такой сигнал представляет собой гармонический сигнал. Однако если при формировании формы волны (модуляции) PSK-сигнала применяется формирующий фильтр, например, с импульсной характеристикой типа «приподнятый косинус» [Xiong, 2006], то сигнал не является гармоническим, а анализируемые фазы соответствуют моментам взятия отсчетов (подробнее см. в [Xiong, 2006]).

Для получения плотности распределения вероятностей фаз необходимо проинтегрировать выражение (8) по  $|u|$  от 0 до  $\infty$ . В результате получим выражение [Тихонов, 1966]:

$$W_{ph}(\varphi | h^2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) \left(1 + \sqrt{2\pi} h \cos(\varphi) \Phi(h \cos(\varphi)) \exp\left(\frac{h^2 \cos^2(\varphi)}{2}\right)\right), \quad (9)$$

где  $h^2$  — отношение «сигнал/шум» (ОСШ) (вообще говоря, с точностью до множителя 0,5),  $\Phi(z)$  — интеграл вероятности.

Примечание: здесь  $h^2$  есть

$$h^2 = \frac{1}{\sigma^2}, \quad (10)$$

где энергия сигнала применительно к рассматриваемому случаю PSK-модуляции равна 1, так как  $|u_n|^2 = I_n^2 + Q_n^2 = 1$ .

Подробный вывод выражения (9) впервые (из известных автору источников) был представлен в фундаментальных трудах В. И. Тихонова [Тихонов, 1966] и Б. Р. Левина [Левин, 1989]. Отметим, что вид выражений в [Тихонов, 1966; Левин, 1989] несколько отличается, однако путем простых математических преобразований сводится к единому выражению. При этом можно дополнительно отметить работу [Яковлева, 2021], где был получен аналогичный результат, с тем отличием, что в [Яковлева, 2021] обозначение  $\Phi(z)$  применено к функции ошибок, чаще обозначаемой как  $\text{erf}(z)$  (здесь  $z$  — некоторая переменная).

Воспользовавшись связью между интегралом вероятности, функцией ошибок и дополнительной функцией ошибок (см. [Gradshteyn, Ryzhik, 2007]):

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \left( 1 + \text{erf} \left( \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \right) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left( -\frac{z}{\sqrt{2}} \right), \quad (11)$$

а также с учетом  $\sqrt{I^2 + Q^2} = 1$  перепишем выражение (9), дополнив его также параметром  $\varphi_m \in [-\pi; \pi)$ , представляющим собой математическое ожидание. В результате приходим к более удобному (с точки зрения программной реализации) выражению:

$$W_{ph}(\varphi | \sigma, \varphi_m) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)}{2\pi} \left( 1 + \sqrt{\pi} \frac{\cos(\varphi - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma} \text{erfc} \left( -\frac{\cos(\varphi - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma} \right) \exp \left( \frac{\cos^2(\varphi - \varphi_m)}{2\sigma^2} \right) \right). \quad (12)$$

Для дальнейшего упрощения выражения можно обозначить

$$\phi = \phi(\varphi | \sigma, \varphi_m) = \frac{\cos(\varphi - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma}, \quad (13)$$

и тогда (12) преобразуется к форме

$$W_{ph}(\phi | \sigma, \varphi_m) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)}{2\pi} \left( 1 + \sqrt{\pi}\phi \text{erfc}(-\phi) \exp(\phi^2) \right). \quad (14)$$

Приведенные выражения (12) и (14) представляются более удобными благодаря однозначной связи между дисперсией нормальных случайных процессов в (7) и параметром  $\sigma$  в (12) и (14). При численной реализации достаточно вычислить один раз (13) и подставить в (14).

Далее в тексте в случаях  $\varphi_m = 0$  плотность распределения вероятности фазы, определяемую выражением (12), будем обозначать как  $W_{ph}(\varphi | \sigma)$ , а на рисунках для краткости — как  $W_{ph}(\varphi)$ .

## 2.2. Плотность распределения фаз модулированного PSK-сигнала

На основе выражения (12) может быть легко получена плотность распределения вероятностей фаз модулированного PSK-сигнала. Положим возможные значения фаз символов равновероятными, что имеет место для большинства практических случаев, и обозначим их как  $\varphi_{m,i}$ . Тогда выражение для плотности распределения фаз PSK-сигнала имеет вид [Маслаков, Егоров, 2023]

$$W_{\text{PSK}}(\varphi | \sigma, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} W_{ph}(\varphi | \sigma, \varphi_{m,i}), \quad (15)$$

где  $M$  — порядок или позиционность фазовой манипуляции. Например, для BPSK  $\{M = 2, \varphi_m = \{0, \pi\}\}$ , для QPSK  $\{M = 4, \varphi_m = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}\}\}$ .

Таким образом, плотность распределения фазы модулированного PSK-сигнала становится мультимодальной, с модами, соответствующими истинным значениям фазы соответствующих символов  $\varphi_{m,i}$ .

Для примера на рис. 1 приведены сигнальное созвездие для сигнала с QPSK-модуляцией при значении ОСШ 10 дБ и соответствующая плотность распределения фазы, которую обозначим как  $W_{\text{QPSK}}(\varphi) = W_{\text{PSK}}(\varphi | \sigma, M = 4)$ .

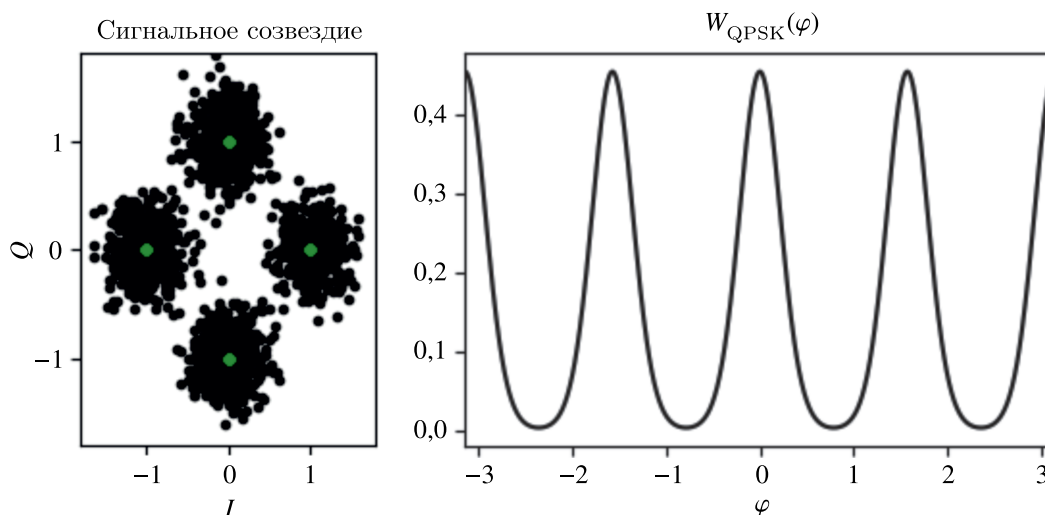


Рис. 1. Сигнальное созвездие QPSK-сигнала при значении ОСШ 10 дБ (слева) и соответствующая плотность распределения фазы (справа)

На представленном на рис. 1 сигнальном созвездии черными точками обозначены точки, соответствующие зашумленному QPSK-сигналу, зелеными — истинному сигнальному созвездию.

В случае когда для обработки требуется учет реальных вероятностей (или частот) для каждой конкретной реализации последовательности символов либо вероятности символов различны, выражение (15) преобразуется к виду [Маслаков, Егоров, 2023]

$$W_{\text{PSK}}(\varphi | \sigma, M) = \sum_{i=0}^{M-1} P(i) W_{ph}(\varphi | \sigma, \varphi_{m,i}), \quad (16)$$

где  $P(i)$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$ , — вероятности соответствующих символов.

При этом очевидно, что

$$\sum_{i=0}^{M-1} P(i) \equiv 1. \quad (17)$$

Отметим, что учет вероятностей  $P(i)$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$ , символов требуется при анализе реальных выборок относительно небольшого объема либо при явном «перекосе в сторону» определенного символа (обычно соответствующего 0), что иногда наблюдается в системах пакетной передачи данных.

### 3. Моделирование случайных фаз

В данном разделе рассмотрим реализации генераторов для моделирования выборки случайных фаз с плотностью распределения вероятности (12) и (15) с заданными параметрами  $\sigma > 0$  и  $\varphi_m \in [-\pi; \pi)$ , а также заданной корреляционной функцией.

### 3.1. Моделирование выборки фаз с заданными параметрами $\sigma$ и $\varphi_m$

Как следует из модели (7), фазы модулированного сигнала представляют собой направления зашумленных векторов на комплексной плоскости, т. е.

$$\varphi = \arg\{\widehat{u}\}. \quad (18)$$

Таким образом, генератор для формирования выборки случайных фаз с плотностью распределения вероятностей, определяемой выражением (12), с заданным значением  $\sigma$  и  $\varphi_m = 0$  имеет вид

$$\Psi(\varphi | \sigma) = \arg\{1 + N_1(x | \sigma) + jN_2(x | \sigma)\} = \arg\{1 + \sigma(N_1(x) + jN_2(x))\}, \quad (19)$$

где  $N_{1,2}(x | \sigma)$  — здесь и далее генераторы независимых нормальных гауссовских чисел с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ , а  $N_{1,2}(x)$  — генераторы независимых нормальных гауссовских чисел с нулевым средним и единичной дисперсией, т. е.  $N_{1,2}(x) = N_{1,2}(x | 1)$ .

Обозначение  $N_{1,2}(x)$  введено потому, что в программах и математических пакетах, используемых для моделирования, например Python (в частности, библиотека `numpy.random`) или MATLAB, имеется функция `randn()`, позволяющая формировать нормальные случайные числа с нулевыми средними и дисперсией, равной 1.

Можно заметить, что тот же результат, достигаемый из (19), можно получить следующим образом:

$$\Psi(\varphi | \sigma) = \arg\{r + N_1(x | r\sigma) + jN_2(x | r\sigma)\} = \arg\{r + r\sigma(N_1(x) + jN_2(x))\}, \quad (20)$$

использовав вместо единичной окружности окружность с радиусом  $r$ .

Эквивалентность результатов, обеспечиваемых выражениями (19) и (20), поясняется рис. 2.

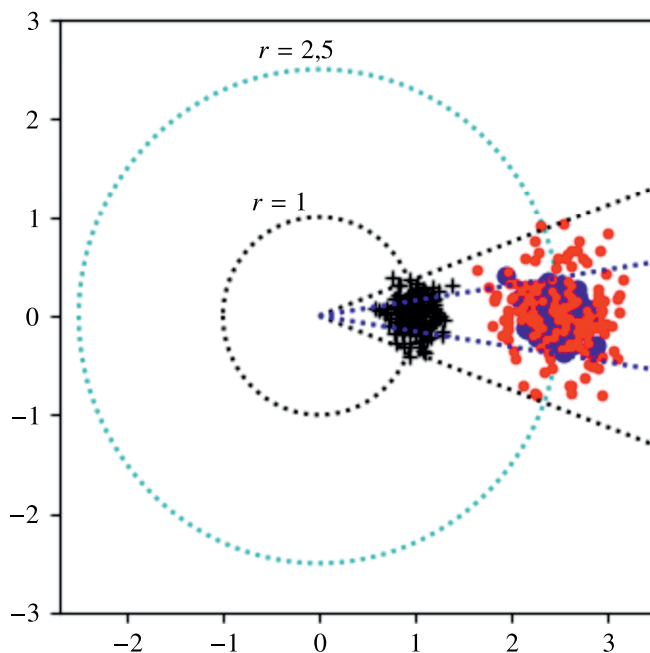


Рис. 2. Генерация комплексных отсчетов для получения случайных фаз выражением (19) — черные +; выражением (19) при смещении точек на окружность  $r = 2,5$  — синие точки; выражением (20) при  $r = 2,5$  — красные точки

Заметим, что с точки зрения численной реализации формирование выборки фаз в соответствии с (19) представляется более предпочтительным.

Для получения фаз, сконцентрированных в области значения  $\varphi_m$ , достаточно осуществить поворот всех точек на комплексной плоскости, в результате получаем

$$\Psi(\varphi | \sigma, \varphi_m) = \arg\{\exp(j\varphi_m) + \sigma(N_1(x) + jN_2(x))\} \tag{21}$$

либо воспользовавшись (1) в форме:

$$\Psi(\varphi | \sigma, \varphi_m) = [\varphi_m + \arg\{(1 + \sigma(N_1(x) + jN_2(x)))\}] \bmod 2\pi. \tag{22}$$

Значение  $\varphi_m$  есть математическое ожидание случайной фазы. При этом важно отметить, что получение оценки  $\varphi_m$  по выборочным значениям отличается от получения оценки математического ожидания для случайных величин, лежащих в диапазоне  $(-\infty; \infty)$  и имеющих симметричное распределение, таких как, например, нормальное гауссовское, логистическое и т. п. распределения. Это связано со скачками фазы при значениях  $\varphi_m$  вблизи краев интервала  $[-\pi; \pi)$  (см. подробнее в [Jammalamadaka, SenGupta, 2001; Mardia, Jupp, 2000]).

Оценка  $\varphi_m$  может быть вычислена следующим образом (см. подробнее [Jammalamadaka, SenGupta, 2001]):

$$\widehat{\varphi}_m = \arg\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \cos(\varphi_i) + j \sum_{i=0}^{n-1} \sin(\varphi_i) \right\} = \arg\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \exp(j\varphi_i) \right\}, \tag{23}$$

где  $\varphi_i$  — элементы выборки,  $n$  — объем выборки.

Вывод формулы (23) для оценки  $\varphi_m$  по выборочным значениям фаз, подчиняющимся рассматриваемому в работе распределению (12), приведен автором в приложении к статье.

Для демонстрации сказанного на рис. 3 показана нормированная гистограмма выборки фаз, полученная при  $\sigma = 0,4$ ,  $\varphi_m = \frac{7\pi}{8} \approx 2,74889$  и объеме выборки  $n = 2000$ .

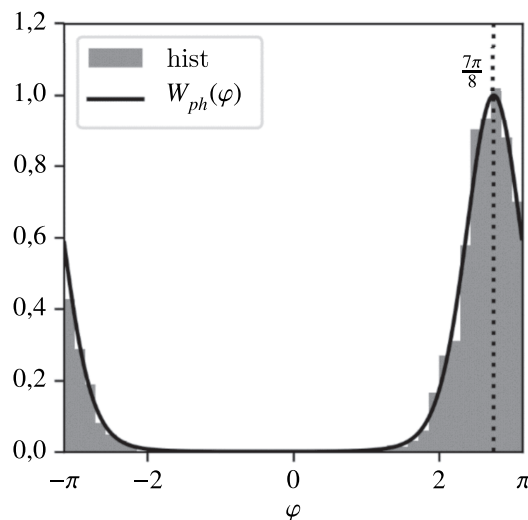


Рис. 3. Нормированная гистограмма для выборки  $\Psi(\varphi | \sigma = 0,4, \varphi_m = \frac{7\pi}{8})$  и соответствующая плотность распределения

Так, в рамках эксперимента оценка по формуле (21) составила  $\widehat{\varphi}_m = 2,74863 \approx \frac{7\pi}{8}$ , в то время как усреднение по выборке —  $\bar{\varphi} = 1,69913$ .

Также на рис. 3 показана плотность распределения вероятностей, полученная для соответствующих заданных параметров.

### 3.2. Моделирование случайного процесса с заданной корреляционной функцией и параметром $\sigma$

В ряде практических задач интерес может представлять моделирование случайного процесса с заданной корреляционной функцией. Рассмотрим пример, в котором порождающий процесс задается регрессионной моделью первого порядка:

$$x_{c,i} = \beta x_{c,i-1} + \sigma_\beta N(x), \quad (24)$$

где  $c$  в индексе означает коррелированность случайного процесса,  $|\beta| \leq 1$  — коэффициент, определяющий интервал корреляции, т. е.

$$\frac{1}{T_{\text{cor}}} = -\ln \beta, \quad (25)$$

а  $\sigma_\beta$  связано с желаемым значением среднего квадратичного отклонения  $\sigma$  следующим образом:

$$\sigma_\beta = \sqrt{1 - \beta^2} \sigma. \quad (26)$$

Как известно [Тихонов, 1966], нормированная корреляционная функция такого случайного процесса определяется выражением

$$R(\tau) = \exp\left(-\frac{|\tau|}{T_{\text{cor}}}\right). \quad (27)$$

Обозначим через  $N_c(x_c | \sigma, \beta)$  генератор для моделирования нормального случайного процесса (23). В результате, сформировав два независимых случайных процесса  $N_{c,1,2}(x_c | \sigma, \beta)$  и подставив в (19), приходим к

$$\Psi_c(\varphi_c | \sigma, \beta) = \arg\{1 + N_{c,1}(x_c | \sigma, \beta) + jN_{c,2}(x_c | \sigma, \beta)\}. \quad (28)$$

Сформированный таким образом случайный процесс  $\varphi_c$  будет иметь ту же функцию корреляции, что и порождающие его процессы  $x_{c,1,2}$ . При этом  $\varphi_c$  будет иметь плотность распределения (12).

Здесь важно отметить, что при моделировании случайного процесса на основе выражения (28) могут быть скачки фазы, что необходимо учитывать при вычислении функции корреляции получаемого случайного процесса. Указанный эффект начинает наблюдаться при значениях  $\sigma > 0,25$ .

### 3.3. Моделирование случайных фаз модулированного PSK-сигнала с заданным ОСШ

Рассмотрим моделирование потока фаз случайных символов фазоманипулированного PSK-сигнала. Будем полагать символы равновероятными. Тогда истинные значения фаз можно смоделировать на основе случайного дискретного равномерного генератора:

$$U_\varphi(\varphi_m | M) = \frac{2\pi}{M} U(M), \quad (29)$$

где  $U(M)$  — генератор целых чисел в диапазоне  $[0; M-1]$  (примечание: в математических пакетах Python-библиотека `numpy.random` и MATLAB реализована в виде функции `randint`),  $M$  — порядок модуляции.

Из требуемого значения ОСШ получим значение  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,5}{h^2}}. \quad (30)$$

Здесь полагаем, что значение ОСШ задано в «рзах». В случае задания ОСШ в дБ, что является более употребительным в инженерной практике, выражение (30) преобразуется к

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,5}{10^{0,1h^2}}}. \quad (31)$$

В результате для моделирования фаз PSK-сигнала можно воспользоваться генератором вида

$$\Psi_M(\varphi | \sigma) = \Psi(\varphi | \sigma, U_\varphi(\varphi_m | M)) = [U_\varphi(\varphi_m | M) + \Psi(\varphi | \sigma)] \bmod 2\pi. \quad (32)$$

#### 4. Разложение функции плотности распределения вероятностей фаз в ряд Фурье

Функция плотности распределения вероятностей фазы (12) представляет собой периодическую функцию с периодом  $2\pi$  и, следовательно, может быть представлена в виде разложения в ряд Фурье [Жук, 1982] в общем случае в форме [Толстов, 1980]

$$W_{ph}(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)), \quad \varphi[-\pi; \pi). \quad (33)$$

Коэффициенты ряда Фурье определяются из выражений [Толстов, 1980]

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_{ph}(\theta) d\theta, \quad (34)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_{ph}(\theta) \cos(k\theta) d\theta, \quad (35)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_{ph}(\theta) \sin(k\theta) d\theta. \quad (36)$$

##### 4.1. Разложение в ряд Фурье функции $W_{ph}(\varphi)$

Для простоты будем рассматривать случай  $\varphi_m = 0$ . Тогда в силу четности функции (12) значения коэффициентов

$$b_k \equiv 0, \quad (37)$$

и, соответственно, от (33) приходим к ряду Фурье вида

$$W_{ph}(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\varphi), \quad \varphi[-\pi; \pi). \quad (38)$$

Интеграл в выражении (34) равен 1 для любого значения  $\sigma$ , что следует из свойства нормировки, вообще говоря, любой плотности распределения, следовательно,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_{ph}(\theta | \sigma) d\theta = \frac{1}{2\pi}. \quad (39)$$

Получим далее значения коэффициентов  $a_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , в зависимости от значения  $\sigma$ . Для этого перепишем выражение для плотности распределения вероятностей фаз в более удобной форме для вычисления интеграла (35).

Для интеграла вероятности известно асимптотическое разложение [Gradshteyn, Ryzhik, 2007]:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!!}. \quad (40)$$

Подставим (40) в (12) с учетом (11), в результате получим

$$\begin{aligned} W_{ph}(\varphi | \sigma) &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{2\pi} \frac{\cos(\varphi)}{\sigma}\right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\cos^2(\varphi)}{2\sigma^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{2n+1}(\varphi)}{\sigma^{2n+1}(2n+1)!!}\right) \exp\left(\frac{\cos^2(\varphi)}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{2\pi} \frac{\cos(\varphi)}{2\sigma} \exp\left(\frac{\cos^2(\varphi)}{2\sigma^2}\right) + \frac{\cos(\varphi)}{\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{2n+1}(\varphi)}{\sigma^{2n+1}(2n+1)!!}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\varphi)}{\sigma} \exp\left(\frac{\cos^2(\varphi)}{2\sigma^2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{2n+2}(\varphi)}{\sigma^{2n+2}(2n+1)!!}\right). \quad (41) \end{aligned}$$

Экспоненту также представим в виде ряда [Gradshteyn, Ryzhik, 2007], тогда

$$\begin{aligned} W_{ph}(\varphi | \sigma) &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\varphi)}{\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{2n}(\varphi)}{2^n \sigma^{2n} n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{2n+2}(\varphi)}{\sigma^{2n+2}(2n+1)!!}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{2n+1}(\varphi)}{2^n \sigma^{2n+1} n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{2n+2}(\varphi)}{\sigma^{2n+2}(2n+1)!!}\right). \quad (42) \end{aligned}$$

Для упрощения последующих выкладок введем обозначения для следующих коэффициентов:

$$C(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right), \quad (43)$$

$$C_1(n, \sigma) = \frac{1}{2^n \sigma^{2n+1} n!}, \quad (44)$$

$$C_2(n, \sigma) = \frac{1}{\sigma^{2n+2}(2n+1)!!}. \quad (45)$$

Тогда (42) перепишем в виде

$$W_{ph}(\varphi | \sigma) = C(\sigma) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_1(n, \sigma) \cos^{2n+1}(\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} C_2(n, \sigma) \cos^{2n+2}(\varphi)\right). \quad (46)$$

Подставим (46) в интеграл (35):

$$\begin{aligned} a_k(\sigma) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C(\sigma) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_1(n, \sigma) \cos^{2n+1}(\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} C_2(n, \sigma) \cos^{2n+2}(\theta)\right) \cos(k\theta) d\theta = \\ &= \frac{C(\sigma)}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\theta) d\theta + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_1(n, \sigma) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1}(\theta) \cos(k\theta) d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} C_2(n, \sigma) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+2}(\theta) \cos(k\theta) d\theta \right). \quad (47) \end{aligned}$$

Очевидно, что первый интеграл в скобках равен 0 для любых  $k \geq 1$ , поэтому уберем его из дальнейших выкладок.

Далее воспользуемся известными формулами для понижения степени косинуса: для четной степени —

$$\cos^p(z) = \frac{1}{2^p} \binom{p}{\frac{p}{2}} + \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{l=0}^{p/2-1} \binom{p}{l} \cos((p-2l)z); \quad (48)$$

для нечетной —

$$\cos^p(z) = \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{l=0}^{(p-1)/2} \binom{p}{l} \cos((p-2l)z). \quad (49)$$

С учетом (48) и (49) выражение (47) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} a_k(\sigma) &= \frac{C(\sigma)}{\pi} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_1(n, \sigma) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1}(\theta) \cos(k\theta) d\theta + \sum_{n=0}^{\infty} C_2(n, \sigma) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+2}(\theta) \cos(k\theta) d\theta \right) = \\ &= \frac{C(\sigma)}{\pi} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_1(n, \sigma) \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2^{2n}} \sum_{l=0}^n \binom{2n+1}{l} \cos((2n+1-2l)\theta) \right) \cos(k\theta) d\theta + \right. \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} C_2(n, \sigma) \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} + \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{l=0}^n \binom{2n+2}{l} \cos((2n+2-2l)\theta) \right) \cos(k\theta) d\theta \Big) = \\ &= \frac{C(\sigma)}{\pi} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_1(n, \sigma)}{2^{2n}} \sum_{l=0}^n \binom{2n+1}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((2n+1-2l)\theta) \cos(k\theta) d\theta + \right. \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} C_2(n, \sigma) \left( \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\theta) d\theta + \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{l=0}^n \binom{2n+2}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((2n+2-2l)\theta) \cos(k\theta) d\theta \right) \right). \quad (50) \end{aligned}$$

Здесь также заметим, что для любых  $n \geq 0$  и  $k \geq 1$  слагаемое равно

$$\frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\theta) d\theta = 0. \quad (51)$$

Кроме того, модифицируем коэффициенты  $C_1, C_2$ :

$$C'_1(n, \sigma) = \frac{C_1(n, \sigma)}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{3n} \sigma^{2n+1} n!}, \quad (52)$$

$$C'_2(n, \sigma) = \frac{C_2(n, \sigma)}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^{2n+1} \sigma^{2n+2} (2n+1)!}. \quad (53)$$

С учетом (51)–(53), а также применив тригонометрическое тождество

$$\cos(z_1) \cos(z_2) = \frac{\cos(z_1 - z_2) + \cos(z_1 + z_2)}{2}, \quad (54)$$

из (50) получим выражение

$$\begin{aligned}
 a_k(\sigma) &= \frac{C(\sigma)}{\pi} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} C'_1(n, \sigma) \sum_{l=0}^n \binom{2n+1}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((2n+1-2l)\theta) \cos(k\theta) d\theta + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} C'_2(n, \sigma) \sum_{l=0}^n \binom{2n+2}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((2n+2-2l)\theta) \cos(k\theta) d\theta \right) = \\
 &= \frac{C(\sigma)}{\pi} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} C'_1(n, \sigma) \sum_{l=0}^n \binom{2n+1}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((2n+1-2l-k)\theta) + \cos((2n+1-2l+k)\theta)}{2} d\theta + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} C'_2(n, \sigma) \sum_{l=0}^n \binom{2n+2}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((2n+2-2l-k)\theta) + \cos((2n+2-2l+k)\theta)}{2} d\theta \right) = \\
 &= \frac{C(\sigma)}{\pi} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} C'_1(n, \sigma) \sum_{l=0}^n \binom{2n+1}{l} \frac{1}{2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos((2n+1-2l-k)\theta) d\theta + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((2n+1-2l+k)\theta) d\theta \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} C'_2(n, \sigma) \sum_{l=0}^n \binom{2n+2}{l} \frac{1}{2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos((2n+2-2l-k)\theta) d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((2n+2-2l+k)\theta) d\theta \right) \right). \quad (55)
 \end{aligned}$$

Далее, при вычислении интегралов в (55) можно заметить, что все слагаемые, кроме случаев

$$\begin{cases} \cos((2n+1-2l-k)\theta) = 1, \\ \cos((2n+2-2l-k)\theta) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n+1-2l-k = 0, \\ 2n+2-2l-k = 0, \end{cases} \quad (56)$$

при интегрировании дают 0. Напротив, в случае (56) соответствующий интеграл равен  $2\pi$ . При этом значения  $2\pi$  сокращаются с двойкой в знаменателе, появляющейся из тождества (54), и значением  $\pi$ , стоящим в знаменателе перед интегралом (35).

В результате окончательно получим следующие выражения для коэффициентов ряда Фурье (38)  $a_k(\sigma)$ : для четных значений  $k$  —

$$a_k(\sigma) = C(\sigma) \sum_{n=(k-2)/2}^{\infty} C'_2(n, \sigma) \binom{2n+2}{n-\frac{k-2}{2}}, \quad k = 2, 4, 6, \dots; \quad (57)$$

для нечетных  $k$  —

$$a_k(\sigma) = C(\sigma) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=(k-1)/2}^{\infty} C'_1(n, \sigma) \binom{2n+1}{n-\frac{k-1}{2}}, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (58)$$

Формально аналогичные выкладки можно проделать и при вычислении (39), получив в результате

$$\frac{a_0}{2} = C(\sigma) \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_2(n, \sigma)}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \right) = C(\sigma) \left( 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C'_2(n, \sigma)}{2} \binom{2n+2}{n+1} \right) = \frac{1}{2\pi}. \quad (59)$$

Таким образом, выражение для разложения в ряд Фурье функции плотности распределения вероятности фаз (12) имеет вид

$$W_{ph}(\varphi | \sigma) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\sigma) \cos(k\varphi), \quad \varphi[-\pi; \pi), \quad (60)$$

где коэффициенты  $a_k$  определяются из (57), (58).

#### 4.2. Разложение в ряд Фурье функции $W_{PSK}(\varphi | \sigma, M)$

В работе [Маслаков, Егоров, 2023] было показано, что выражение для плотности распределения фазы PSK-сигнала в форме (15) или более общем виде (16) может быть также представлено в виде циклической (круговой) свертки плотности  $W_{ph}(\varphi | \sigma)$  с импульсной характеристикой вида

$$h_M(\varphi) = \sum_{i=0}^{M-1} P(i) \delta\left(\varphi - i \frac{2\pi}{M}\right), \quad (61)$$

где  $\delta(\varphi)$  — дельта-функция.

Как отмечалось в подпараграфе 2.2, коэффициенты  $P(i)$  представляют собой значения вероятностей появления соответствующих символов. В результате

$$W_{PSK}(\varphi | \sigma, M) = h_M(\varphi) * W_{ph}(\varphi | \sigma), \quad (62)$$

где символом  $*$  обозначена операция циклической свертки.

Операция (62) эквивалентна перемножению рядов Фурье соответствующих функций. В частности, для двухпозиционной фазовой манипуляции BPSK при  $M = 2$  и  $P(0) = P(1) = 0,5$  коэффициенты ряда Фурье импульсной характеристики (61), которые обозначим в виде  $a_k^h$ , равны

$$\begin{cases} a_k^h = 1, & k = 0, 2, 4, \dots, \\ a_k^h = 0, & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (63)$$

Таким образом, каждый нечетный коэффициент в (60) равен 0. В результате разложение в ряд Фурье функции  $W_{PSK}(\varphi | \sigma, M)$  можно записать в следующем виде:

$$W_{PSK}(\varphi | \sigma, M) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}(\sigma) \cos(2k\varphi), \quad \varphi[-\pi; \pi). \quad (64)$$

Аналогично можно представить ряд Фурье функции  $W_{PSK}(\varphi | \sigma, M)$  для других значений  $M$ , а также в общем случае произвольных (с учетом (17)) значений  $P(i)$ ,  $i \in [0 : M - 1]$ . Как отмечалось ранее, для большинства практических случаев  $P(i) = \frac{1}{M}$ ,  $i \in [0 : M - 1]$ .

На рис. 4 для примера показаны вычисленные значения коэффициентов Фурье для гармонического и фазоманипулированного BPSK-сигналов, а также соответствующие плотности распределения вероятностей фазы для случаев  $P(0) = P(1) = 0,5$  и  $P(0) = 0,6$ ,  $P(1) = 0,4$  при значении  $\sigma = 0,15$ , что соответствует ОСШ примерно 13,5 дБ.

Дополнительно отметим, что в [Маслаков, Егоров, 2023] поставлена и решена обратная задача нахождения функции  $W_{ph}(\varphi | \sigma)$  по имеющейся плотности распределения  $W_{PSK}(\varphi | \sigma, M)$  (как точной, так и эмпирической оценке) через представление функций в виде ряда Фурье.

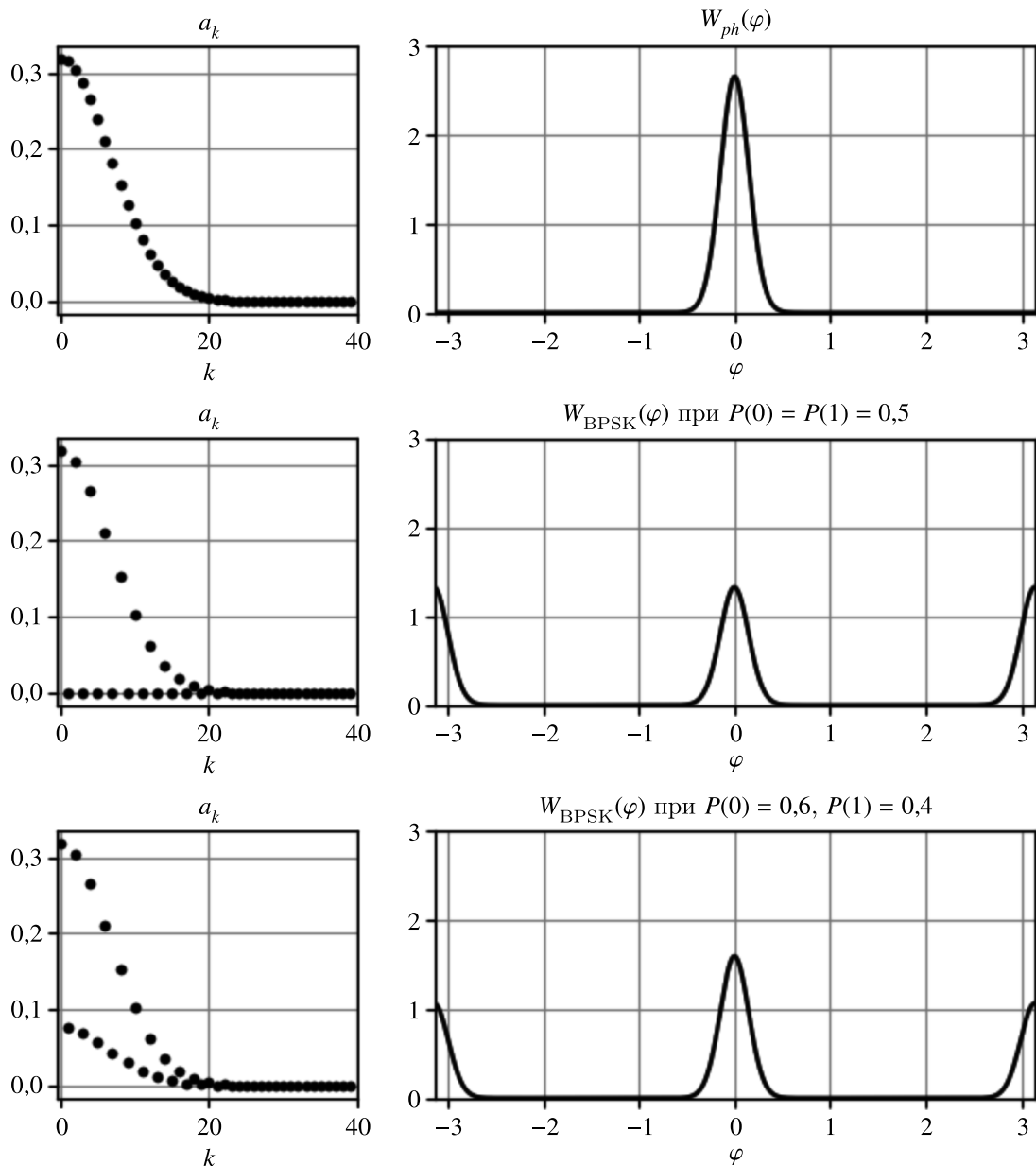


Рис. 4. Коэффициенты Фурье (слева) и соответствующие плотности распределения вероятностей фаз (справа) гармонического сигнала и BPSK-сигнала для случаев  $P(0) = P(1) = 0,5$  и  $P(0) = 0,6, P(1) = 0,4$

## 5. Сравнение плотности распределения $W_{ph}(\varphi | \sigma)$ с близкими распределениями

В данном разделе сравним плотность распределения фаз  $W_{ph}(\varphi | \sigma)$ , определяемую выражением (12), с некоторыми близкими распределениями, а именно круговым нормальным распределением и распределением Мизеса, часто используемыми в различных практических задачах [Ferrari, 2009; McGrew, Monroe, 2009; Ravindran, Ghosh, 2011]. На рис. 5 показаны зависимости сравнения указанных функций плотностей распределений с рассматриваемой плотностью распределения  $W_{ph}(\varphi | \sigma)$  в метриках  $L_2$  и  $C$ .

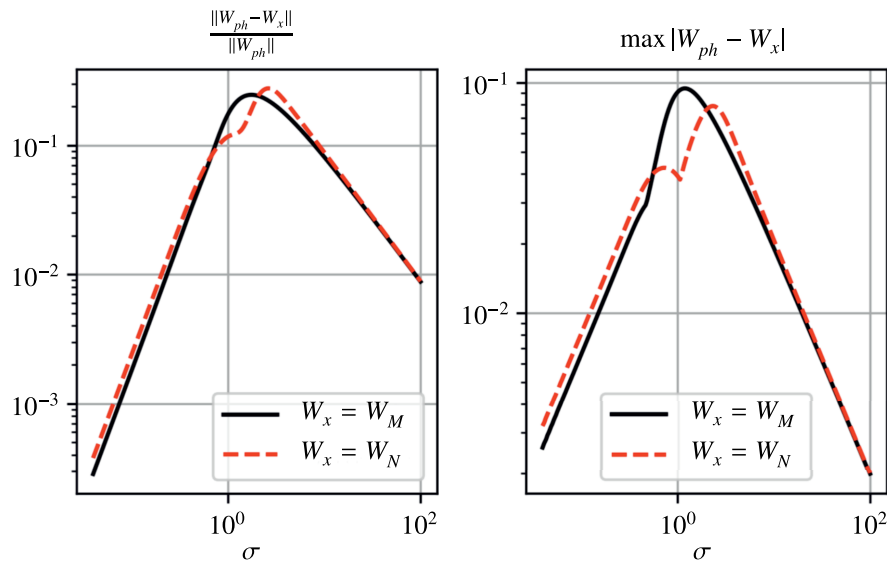


Рис. 5. Сравнение плотности распределений вероятностей  $W_{ph}(\varphi | \sigma)$  с нормальным круговым распределением  $W_N(\varphi | \sigma)$  и распределением Мизеса  $W_M(\varphi | \sigma)$  в зависимости от параметра  $\sigma$

Как видно, при малых значениях  $\sigma$  плотности достаточно близки. Аналогично: при больших значениях  $\sigma$  плотности также достаточно близки, так как в этом случае все они вырождаются в равномерное распределение  $\frac{1}{2\pi}$  на интервале  $[-\pi; \pi)$ . Относительно существенное отличие наблюдается при умеренных значениях от 0,1 до 2, представляющих наибольший практический интерес.

Далее приведем сравнение указанных распределений  $W_N(\varphi | \sigma)$  и  $W_M(\varphi | \sigma)$  с распределением фаз  $W_{ph}(\varphi | \sigma)$  с позиции представления соответствующих плотностей в виде ряда Фурье.

### 5.1. Сравнение с нормальной круговой плотностью распределения

Для циркулярных данных известна обобщенная модель плотности распределения вероятностей [Mardia, Jupp, 2000; Jammalamadaka, SenGupta, 2001]:

$$W_G(\varphi | \sigma, \varphi_m) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \tau(\sigma)^{k^p} \cos(k(\varphi - \varphi_m)) \right), \quad \varphi \in [-\pi; \pi). \quad (65)$$

В частном случае при  $\tau(\sigma) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)$  и  $p = 2$  выражение (65) сводится к круговому (обернутому) нормальному распределению (см. [Jammalamadaka, SenGupta, 2001]):

$$\begin{aligned} W_N(\varphi | \sigma, \varphi_m) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\varphi - \varphi_m - 2\pi k)^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}k^2\right) \cos(k(\varphi - \varphi_m)) \right), \quad \varphi \in [-\pi; \pi). \end{aligned} \quad (66)$$

Для представления плотности распределения  $W_{ph}(\varphi | \sigma)$  в виде ряда Фурье с коэффициентами, соответствующими модели (65), определяемыми в виде

$$a'_k(\sigma) = \tau(\sigma)^{k^p(\sigma)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (67)$$

автором численно получены зависимости  $\tau(\sigma)$  и  $p(\sigma)$ , которые представлены на рис. 6. Здесь же заметим, что в (65) множитель  $\frac{1}{2\pi}$  вынесен за скобки в отличие от разложения  $W_{ph}(\varphi | \sigma)$  в ряд Фурье, приведенном в § 4, где использована более классическая форма ряда Фурье. Чтобы учесть это различие, коэффициенты в (67) обозначены как  $a'_k$ , т. е.

$$a'_k(\sigma) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \pi a_k(\sigma), & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (68)$$

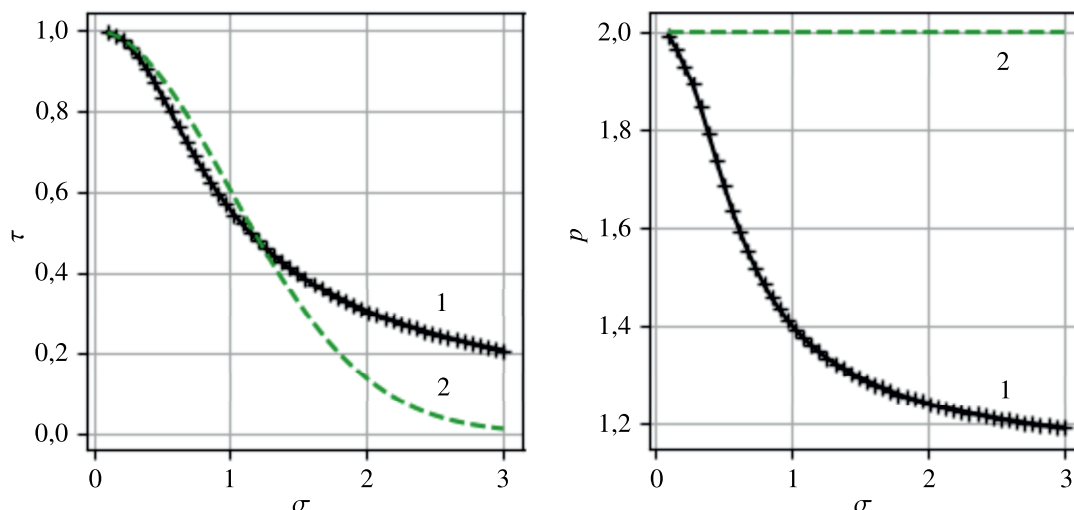


Рис. 6. Зависимости параметров  $\tau(\sigma)$  и  $p(\sigma)$  обобщенной модели (65): 1 — для случая плотностей  $W_{ph}(\varphi | \sigma)$ , 2 — для случая плотностей  $W_N(\varphi | \sigma)$

Здесь же, на рис. 6, для сравнения приведены зависимости  $\tau(\sigma)$  и  $p(\sigma)$  для случая нормальной круговой плотности распределения. Можно заметить, что для малых значений  $\sigma$  значения  $\tau$  близки, однако отличие значений  $p$  для рассматриваемых распределений существенно.

## 5.2. Сравнение с плотностью распределения Мизеса

Рассмотрим разности фаз, получаемых в соответствии с выражением (19):

$$\varphi_{d,i} = \varphi_{i+1} - \varphi_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (69)$$

Для приведения фаз  $\varphi_{d,i}$  к диапазону  $[-\pi; \pi)$  воспользуемся преобразованием (2).

Как известно, разность (или сумма) «достаточно большого количества» случайных величин сводится к нормальному распределению. В случае случайных величин, имеющих круговое (обернутое) распределение, разности (или суммы) таких случайных величин сводятся к распределению Мизеса (см. подробнее в [Mardia, Jupp, 2000; Abreu, 2008]), в некоторых источниках иногда также называемому нормальным [Jammalamadaka, SenGupta, 2001]. Заметим, что нормальным его называют отчасти из-за указанного свойства, в то время как непосредственно нормальным круговым распределением является распределение (66). Также отметим, что в [Simon, Alouini, 2000; Abreu, 2008] данное распределение называют распределением Тихонова, полученным применительно к задаче синхронизации и фазовой автоподстройки частоты [Тихонов, 1959; Тихонов, 1964].

Таким образом, плотность распределения вероятностей разности фаз (69) наиболее близко описывается распределением Мизеса. С учетом принятых в работе обозначений выражение

для распределения Мизеса имеет вид [Mardia, Jupp, 2000; Simon, Alouini, 2000; Jammalamadaka, SenGupta, 2001]

$$W_M(\varphi | \sigma, \varphi_m) = \frac{\exp\left(\frac{\cos(\varphi - \varphi_m)}{\sigma^2}\right)}{2\pi I_0\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}, \quad \varphi \in [-\pi; \pi], \quad (70)$$

где  $I_0\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка 0.

Для примера на рис. 7 приведены нормированная гистограмма разностей фаз, распределение Мизеса, обозначенное как  $W_M(\varphi)$ , и распределение  $W_{ph}(\varphi)$ .

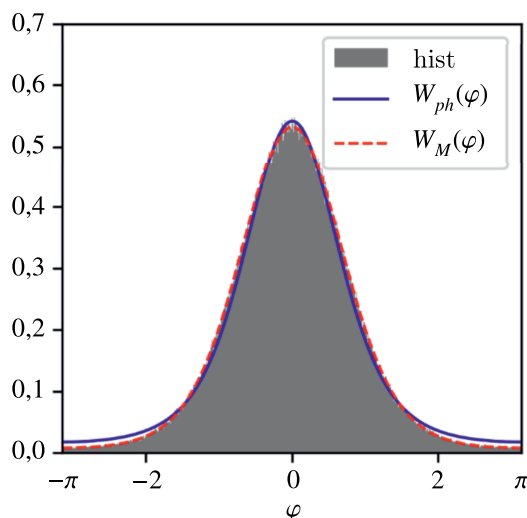


Рис. 7. Нормированная гистограмма разностей фаз и плотности распределения Мизеса  $W_M(\varphi)$  и распределения  $W_{ph}(\varphi)$

Значения параметра  $\sigma$  для распределений  $W_{ph}(\varphi | \sigma)$  и  $W_M(\varphi | \sigma)$  были подобраны для текущей выборки методом максимального правдоподобия. Объем выборки составлял  $10^6$ . Здесь же отметим, что значение  $\sigma^2$  для разности (или суммы) случайных фаз будет в два раза больше значения соответствующего значения для исходной выборки, что соответствует свойствам при сложении случайных величин (см., например, [Тихонов, 1966]). То есть если обозначить  $\sigma_{ph}$  как значение  $\sigma$  для выборки, соответствующей распределению  $W_{ph}(\varphi | \sigma)$ , а  $\sigma_M$  — для разностей фаз этой выборки и соответствующей распределению  $W_M(\varphi | \sigma)$ , то

$$\sigma_M = \frac{\sigma_{ph}}{\sqrt{2}}. \quad (71)$$

Разложение функции (70) в ряд Фурье имеет вид (см. [Jammalamadaka, SenGupta, 2001])

$$W_M(\varphi | \sigma, \varphi_m) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \frac{2}{I_0\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} I_k\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \cos(k(\varphi - \varphi_m)) \right), \quad \varphi \in [-\pi; \pi], \quad (72)$$

где  $I_k\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка  $k$ .

Соответствующие коэффициенты ряда Фурье в (72) есть

$$a_{M,k}(\sigma) = \frac{I_k\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}{I_0\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (73)$$

В свою очередь, с учетом сказанного плотность распределения Мизеса приближенно равна свертке двух плотностей распределения  $W_{ph}(\varphi)$ . Тогда коэффициенты Фурье соответствующих плотностей связаны следующим образом:

$$a_{M,k}(\sigma) \approx a_k'^2 \left( \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right). \quad (74)$$

Сказанное иллюстрируется на рис. 8.

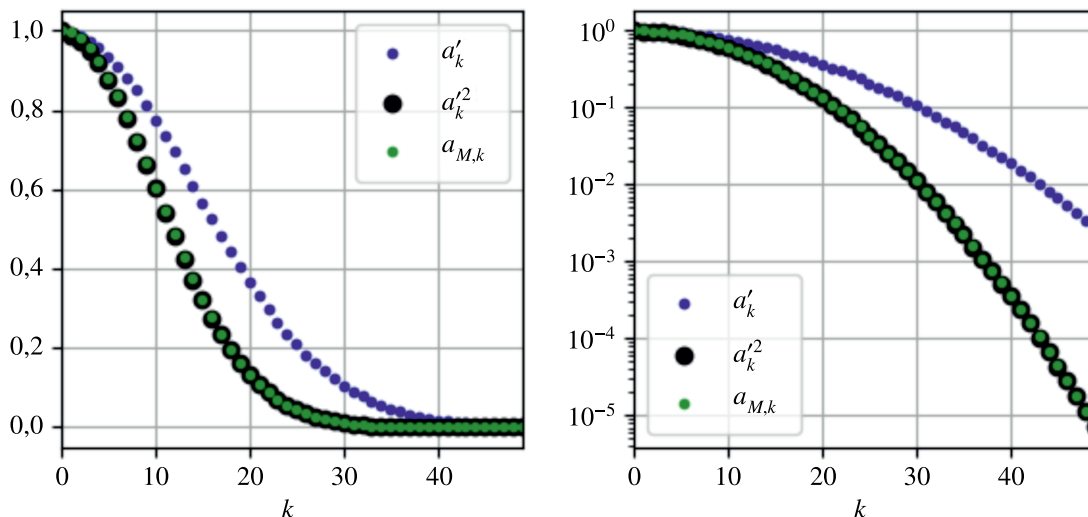


Рис. 8. Сравнение коэффициентов Фурье  $a'_k$  для распределения  $W_{ph}(\varphi)$  и  $a_{M,k}$  для плотности распределения Мизеса в линейном (слева) и полулогарифмическом (справа) масштабах

Здесь коэффициенты Фурье вычислены при значении  $\sigma = 0,1$ . На рис. 8 видно приближенное выполнение (74).

## 6. Функция распределения фаз комплексной огибающей

По определению (см., например, [Тихонов, 1966; Левин, 1989]), функция распределения есть интеграл от функции плотности распределения вероятностей. Для упрощения будем полагать  $\varphi_m = 0$ . С учетом  $\varphi \in [-\pi; \pi)$  выражение для функции распределения есть

$$F_{ph}(\varphi | \sigma) = \int_{-\pi}^{\varphi} W_{ph}(\theta | \sigma) d\theta, \quad \varphi \in [-\pi; \pi). \quad (75)$$

Получим далее выражение для функции распределения. Воспользуемся асимптотическим разложением (46), при этом для упрощения выкладок введем обозначения  $W_{1,2}(\varphi | \sigma)$  для соответствующих слагаемых, содержащих суммы. В результате запишем

$$W_{ph}(\varphi | \sigma) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} W_1(\varphi | \sigma) + W_2(\varphi | \sigma)\right). \quad (76)$$

Вычислим отдельно интегралы от функций  $W_{1,2}(\varphi | \sigma)$ :

$$\begin{aligned} F_1(\varphi | \sigma) &= \int_{-\pi}^{\varphi} W_1(\theta | \sigma) d\theta = \int_{-\pi}^{\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} C_1(n, \sigma) \cos^{2n+1}(\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} C_1(n, \sigma) \int_{-\pi}^{\varphi} \cos^{2n+1}(\theta) d\theta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_1(n, \sigma) \frac{1}{2^{2n}} \sum_{l=0}^n \binom{2n+1}{l} \frac{\sin((2n-2l+1)\varphi)}{2n-2l+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C'_1(n, \sigma) \sum_{l=0}^n \binom{2n+1}{l} \frac{\sin((2n-2l+1)\varphi)}{2n-2l+1}, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} F_2(\varphi | \sigma) &= \int_{-\pi}^{\varphi} W_2(\theta | \sigma) d\theta = \int_{-\pi}^{\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} C_2(n, \sigma) \cos^{2n+2}(\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} C_2(n, \sigma) \int_{-\pi}^{\varphi} \cos^{2n+2}(\theta) d\theta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_2(n, \sigma) \left( \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} (\varphi + \pi) + \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{l=0}^n \binom{2n+2}{l} \frac{\sin((2n-2l+2)\varphi)}{2n-2l+2} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C'_2(n, \sigma) \left( \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} (\varphi + \pi) + \sum_{l=0}^n \binom{2n+2}{l} \frac{\sin((2n-2l+2)\varphi)}{2n-2l+2} \right). \end{aligned} \quad (78)$$

При вычислении интегралов в (77), (78), содержащих косинус в некоторой степени, были использованы соответствующие формулы из [Gradshteyn, Ryzhik, 2007].

В результате окончательно получаем

$$F_{ph}(\varphi | \sigma) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right) \left( \varphi + \pi + \sqrt{\frac{\pi}{2}} F_1(\varphi | \sigma) + F_2(\varphi | \sigma) \right), \quad \varphi \in [-\pi; \pi]. \quad (79)$$

Также выражение для функции распределения можно получить и в виде ряда Фурье, подставив (60) в (75). В результате получаем

$$F_{ph}(\varphi | \sigma) = \frac{1}{2\pi} (\varphi + \pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\sigma)}{k} \sin(k\varphi), \quad \varphi \in [-\pi; \pi]. \quad (80)$$

Другими словами, (80) есть разложение в ряд Фурье функции (79).

## 7. Оценка точности полученных выражений и некоторые замечания относительно их численной реализации

В данном разделе рассмотрим вопрос точности, а также приведем некоторые замечания, связанные с численной реализацией полученных в работе выражений (42), (57), (58) и, соответственно, (60) для плотности распределения, а также (79) и (80) для функции распределения.

Можно заметить, что коэффициенты  $C'_1(n, \sigma)$  и  $C'_2(n, \sigma)$  с ростом  $n$  быстро уменьшаются при возведении в степень числа 2 и вычислении факториалов, находящихся в знаменателе. Напротив, значение числа сочетаний в формулах (57), (58), (77) и (78) с увеличением  $n$  растет. В результате в процессе вычисления коэффициентов  $C'_1(n, \sigma)$  и  $C'_2(n, \sigma)$ , с последующей подстановкой в соответствующие выражения и вычислением плотности и функции распределения, возникнет некоторая вычислительная погрешность, связанная с представлением чисел в памяти компьютера.

Для решения указанной проблемы необходимо, чтобы вычисление указанных коэффициентов и числа сочетаний в соответствующих выражениях было согласованным. Иначе говоря,

введение коэффициентов  $C'_1(n, \sigma)$  и  $C'_2(n, \sigma)$  было сделано лишь для упрощения вывода полученных в работе выражений. В то время как при вычислении сумм числитель и знаменатель необходимо вычислить одновременно. Для лучшей наглядности перепишем выражения для коэффициентов ряда Фурье и функции распределения полностью. Коэффициенты ряда Фурье для четных значений  $k$ :

$$a_k(\sigma) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)}{2\pi} \sum_{n=(k-2)/2}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1} \sigma^{2n+2} (2n+1)!!} \binom{2n+2}{n - \frac{k-2}{2}}, \quad k = 2, 4, 6, \dots; \quad (81)$$

для нечетных  $k$ :

$$a_k(\sigma) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=(k-1)/2}^{\infty} \frac{1}{2^{3n} \sigma^{2n+1} n!} \binom{2n+1}{n - \frac{k-1}{2}}, \quad k = 1, 3, 5, \dots; \quad (82)$$

функция распределения:

$$F(\varphi | \sigma) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)}{2\pi} \left( \varphi + \pi + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n} \sigma^{2n+1} n!} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} \frac{\sin((2n-2k+1)\varphi)}{2n-2k+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2n+2} (2n+1)!!} \left( \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} (\varphi + \pi) + \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{2n+2}{k} \frac{\sin((2n-2k+2)\varphi)}{2n-2k+2} \right) \right). \quad (83)$$

Здесь же дополнительно заметим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\sigma) = 0. \quad (84)$$

Вообще говоря, это следует из свойств коэффициентов ряда Фурье (см. [Толстов, 1980]), однако можно заметить, что числитель в суммах приведенных выражений растет значительно медленнее знаменателя. Кроме того,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} a_k(\sigma) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (85)$$

что также очевидно, если заметить наличие  $\sigma^{2n+2}$  и  $\sigma^{2n+1}$  в знаменателе слагаемых выражений (81) и (82) соответственно. В этом случае ненулевым останется только коэффициент  $a_0$ , а плотность распределения сведется к равномерному распределению

$$W_{ph}(\varphi | \sigma \rightarrow \infty) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}, \quad \varphi[-\pi; \pi]. \quad (86)$$

Напротив, рассмотрим подробнее поведение слагаемых при малых значениях  $\sigma$ . Из сумм в выражениях (81), (82) выделим множитель, зависящий от  $\sigma$ :

$$\frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)}{\sigma^{2n}}. \quad (87)$$

Если знаменатель в (87) также представить как степень экспоненты, а именно в форме

$$\sigma^{2n} = \exp(2n \cdot \ln(\sigma)), \quad (88)$$

можно заметить, что при фиксированном  $n$  значение  $-\frac{1}{2\sigma^2}$  убывает быстрее, чем  $2n \cdot \ln(\sigma)$  при малых  $\sigma$  (в общем случае при  $\sigma \rightarrow 0$ ). При этом значения  $a_k(\sigma)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , стремятся к  $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}$ , что легко видеть из (59).

Таблица 1. Первые слагаемые сумм при вычислении коэффициентов Фурье

$k$	$n$						
	0	1	2	3	4	5	6
1	1	0,375	0,078125	0,011393229(6)	0,00128173828 ...	0,0001174926 ...	0,0916951 ... e - 06
2	0,5	0,1(6)	0,03125	0,0041(6)	0,00043402(7)	3,7202380 ... e - 05	2,7126736 ... e - 06
3	—	0,125	0,0390625	0,0068359375	0,0008544921 ...	8,3923339 ... e - 05	6,8187713 ... e - 06
4	—	0,041(6)	0,0125	0,00208(3)	0,000248015873	2,3251488 ... e - 05	1,8084490 ... e - 06
5	—	—	0,0078125	0,0022786458(3)	0,00036621 ...	4,1961669 ... e - 05	3,7882063 ... e - 06
6	—	—	0,00208(3)	0,00059523809 ...	9,3005952 ... e - 05	1,0333994 ... e - 05	9,0422453 ... e - 07
7	—	—	—	0,0003255208(3)	9,1552734 ... e - 05	1,3987223 ... e - 05	1,5152825 ... e - 06
8	—	—	—	7,44047619e - 05	2,0667989 ... e - 05	3,1001984 ... e - 05	3,2880892 ... e - 07

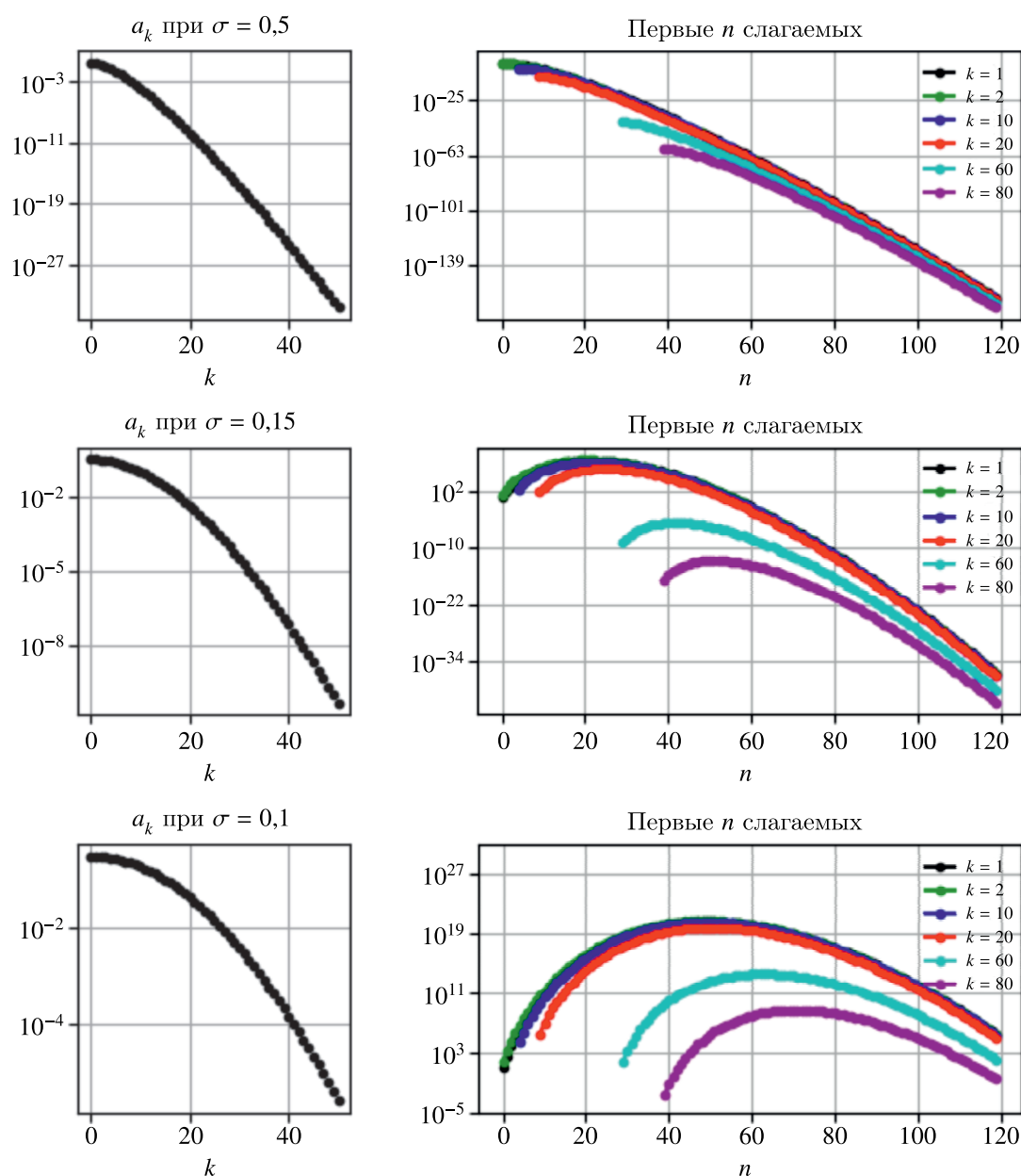


Рис. 9. Первые слагаемые сумм (81), (82) для коэффициентов Фурье  $k = 1, 2, 10, 20, 60, 80$  (справа), а также коэффициенты Фурье (слева) для различных значений  $\sigma$

Рассмотрим также процесс вычисления коэффициентов Фурье. Допустим,  $\sigma = 1$ . В таблице 1 приведены первые слагаемые, получаемые из сумм (81), (82) без учета коэффициента, стоящего перед суммой.

Как видно, слагаемые достаточно быстро убывают. Однако для значений  $\sigma < 1$  скорость убывания будет медленнее, а первые слагаемые могут даже возрасти. Для наглядности соответствующие слагаемые для некоторых номеров коэффициентов Фурье приведены на рис. 9. Там же приведены соответствующие первые значения коэффициентов Фурье.

Рассмотрим возможность получения оценки точности полученных выражений (81), (82) при вычислениях. Допустим, что при вычислении коэффициентов ограничились суммированием до  $(N-1)$  слагаемого включительно. Тогда остаточный член ряда, который обозначим как  $R_{k,N}(\sigma)$ , представляет собой: для четных значений  $k$  —

$$\begin{aligned}
 R_{k,N}(\sigma) &= C(\sigma) \left( \frac{1}{2^{2N+1} \sigma^{2N+2} (2N+1)!!} \binom{2N+2}{N - \frac{k-2}{2}} + \right. \\
 &+ \frac{1}{2^{2(N+1)+1} \sigma^{2(N+1)+2} (2(N+1)+1)!!} \binom{2(N+1)+2}{N+1 - \frac{k-2}{2}} + \\
 &+ \left. \frac{1}{2^{2(N+2)+1} \sigma^{2(N+2)+2} (2(N+2)+1)!!} \binom{2(N+2)+2}{N+2 - \frac{k-2}{2}} + \dots \right) = \\
 &= C(\sigma) \frac{1}{2^{2N+1} \sigma^{2N+2} (2N+1)!!} \binom{2N+2}{N - \frac{k-2}{2}} \times \\
 &\times \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m} \sigma^{2m}} \frac{\prod_{l=1}^m (2N+2l+2)}{\prod_{l=1}^m (2N+2l+1)} \cdot \frac{\prod_{l=1}^{2m} (N+l+2)}{\prod_{l=1}^m (N+l - \frac{k-2}{2}) \prod_{l=1}^m (N+l+2 + \frac{k-2}{2})} \right) = \\
 &= C(\sigma) \frac{1}{2^{2N+1} \sigma^{2N+2} (2N+1)!!} \binom{2N+2}{N - \frac{k-2}{2}} \times \\
 &\times \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m} \sigma^{2m}} \frac{\prod_{l=1}^m (2N+2l+1) \prod_{l=1}^m (2N+2l+2)}{\prod_{l=1}^m (2N+2l+1)} \cdot \frac{\prod_{l=1}^m (2N+2l+2)}{\prod_{l=1}^m (N+l+1 - \frac{k}{2}) \prod_{l=1}^m (N+l+1 + \frac{k}{2})} \right) = \\
 &= C(\sigma) \frac{1}{2^{2N+1} \sigma^{2N+2} (2N+1)!!} \binom{2N+2}{N - \frac{k-2}{2}} \times \\
 &\times \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2m}} \cdot \frac{\prod_{l=1}^m (2N+2l+2)}{\prod_{l=1}^m ((2N+2l+2)^2 - k^2)} \right), \quad k = 2, 4, 6, \dots; \tag{89}
 \end{aligned}$$

для нечетных  $k$  —

$$\begin{aligned}
 R_{k,N}(\sigma) &= C(\sigma) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left( \frac{1}{2^{3N} \sigma^{2N+1} N!} \binom{2N+1}{N - \frac{k-1}{2}} + \right. \\
 &+ \frac{1}{2^{3(N+1)} \sigma^{2(N+1)+1} (N+1)!} \binom{2(N+1)+1}{N+1 - \frac{k-1}{2}} + \\
 &+ \left. \frac{1}{2^{3(N+2)} \sigma^{2(N+2)+1} (N+2)!} \binom{2(N+2)+1}{N+2 - \frac{k-1}{2}} + \dots \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= C(\sigma) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2^{3N} \sigma^{2N+1} N!} \left( N - \frac{k-1}{2} \right) \times \\
 &\times \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3m} \sigma^{2m} \prod_{l=1}^m (N+l)} \cdot \frac{\prod_{l=1}^{2m} (2N+l+1)}{\prod_{l=1}^m \left( N+l - \frac{k-1}{2} \right) \prod_{l=1}^m \left( N+l + \frac{k+1}{2} \right)} \right) = \\
 &= C(\sigma) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2^{3N} \sigma^{2N+1} N!} \left( N - \frac{k-1}{2} \right) \times \\
 &\times \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3m} \sigma^{2m} \prod_{l=1}^m (N+l)} \cdot \frac{\prod_{l=1}^m (2N+2l) \prod_{l=1}^m (2N+2l+1)}{\prod_{l=1}^m \frac{(2N+2l+1)^2 - k^2}{2^2}} \right) = \\
 &= C(\sigma) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2^{3N} \sigma^{2N+1} N!} \left( N - \frac{k-1}{2} \right) \cdot \left( 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^{2m}} \cdot \frac{\prod_{l=1}^m (2N+2l+1)}{\prod_{l=1}^m ((2N+2l+1)^2 - k^2)} \right), \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (90)
 \end{aligned}$$

Здесь, в приведенных выражениях, коэффициент  $C(\sigma)$  есть (43).

В качестве верхних оценок для (89), (90) можно воспользоваться следующими, соответственно для четных и нечетных  $k$ :

$$R_{k,N}(\sigma) < C(\sigma) \frac{1}{2^{2N+1} \sigma^{2N+2} (2N+1)!!} \left( N - \frac{k-2}{2} \right) \cdot \frac{\sigma^2(2N+4-k)}{\sigma^2(2N+4-k)-1}, \quad k = 2, 4, 6, \dots, \quad (91)$$

$$R_{k,N}(\sigma) < C(\sigma) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2^{3N} \sigma^{2N+1} N!} \left( N - \frac{k-1}{2} \right) \cdot \frac{\sigma^2(2N+3-k)}{\sigma^2(2N+3-k)-1}, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (92)$$

Таким образом, продемонстрировано, что можно вычислить коэффициенты ряда Фурье для функции плотности распределения фазы с достаточно высокой точностью. Однако стоит отметить некоторые нюансы программной реализации. Необходимо учитывать особенности работы и типы принимаемых и возвращаемых переменных, используемых при вычислении функций. Так, например, при реализации на языке Python существует возможность работы с целыми числами, значительно превышающими стандартные `int32` (`int64`), а также `uint32` (`uint64`) при возведении в степень, для чего можно воспользоваться конструкцией `x**y`. Для возведения числа 2 в степень  $z$  лучше применить `1<<z`, а, соответственно, при делении целого числа  $x$  на  $2^z - x$  `z`. Также отметим, что далеко не во всех математических пакетах/библиотеках имеется реализация функции вычисления двойного факториала, входящего, в частности, выражения (53), (81), (83). Для случая малых значений  $\sigma$  можно, например, предварительно перейти к представлению степени показательной функции (88), а соответствующий множитель, содержащий параметр  $\sigma$ , — вычислить следующим образом:

$$\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} - 2n \cdot \ln(\sigma)\right). \quad (93)$$

## 8. Заключение

В работе исследуется распределение фаз гармонических и модулированных PSK-сигналов. Представлены выражения для моделирования случайных фаз с заданными параметрами и корреляционной функцией.

Автором впервые получены аналитические формулы для расчета коэффициентов ряда Фурье плотности распределения вероятностей фаз гармонического и модулированного фазоманипулированного PSK-сигнала в зависимости от параметра  $\sigma$ . Рассмотрена точность полученных выражений. Также впервые получены выражение для функции распределения фаз и его разложение в ряд Фурье. На основе представления плотности в виде ряда Фурье проведен сравнительный анализ с некоторыми другими близкими круговыми распределениями — распределением Мизеса и обернутым нормальным распределением. При этом показана связь коэффициентов Фурье между рассматриваемой плотностью распределения и распределением Мизеса.

Полученные в работе результаты представляют теоретический и практический интерес для моделирования и статистического анализа фаз сигналов в различных прикладных задачах в области радиотехники, цифровой связи и радиолокации. В частности, в задачах оценки отношения «сигнал/шум» [Егоров, Смаль, 2013], вероятности ошибки на бит [Егоров, Смаль, 2012; Varotsos et al., 2017], а также надежности решений демодулятора, т. е. мягкой демодуляции фазоманипулированных PSK-сигналов.

Полученные в данной статье результаты существенно дополняют работу [Маслаков, Егоров, 2023] в части оценки эмпирической плотности распределения вероятностей фаз. Так, полагая нормальность шумовой составляющей принимаемого сигнала, что достаточно хорошо согласуется с реальными результатами, распределение фаз описывается рассматриваемым в работе распределением. Тогда в дополнение к регуляризированным оценкам коэффициентов Фурье, получаемых в соответствии с [Маслаков, Егоров, 2023], могут быть вычислены точные значения коэффициентов Фурье по формулам (57), (58) (или (81), (82)). В результате решение обратной задачи оценки плотности распределения фазы принимаемого фазоманипулированного PSK-сигнала может быть уточнено на основе коэффициентов Фурье, полученных численно. Указанный результат может быть использован при вычислении функционалов правдоподобия [Tuchler et al., 2002; Гладких, 2010] для последующей оценки надежности решений демодулятора PSK-сигналов.

Полученные в работе результаты применимы для интересного с практической точки зрения диапазона значений ОСШ от  $-10$  до  $20$  дБ, в первую очередь с учетом потенциальной помехоустойчивости систем связи, использующих сигналы с PSK-модуляцией (см. подробнее в [Simon, Alouini, 2000; Xiong, 2006; Chandra et al., 2011]), что соответствует значениям  $\sigma$  примерно от  $0,06$  до  $2$ .

## Приложение. Вывод формулы для оценки среднего значения фазы

Рассмотрим оценку параметра  $\varphi_m \in [-\pi; \pi)$  по выборке  $\{\varphi_i, i = 0, 1, \dots, L - 1\}$ , подчиняющейся распределению  $W_{ph}(\varphi | \sigma, \varphi_m)$ , определяемую выражением (12). Запишем функцию правдоподобия:

$$L(\varphi_m, \sigma | \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \prod_{i=0}^n W_{ph}(\varphi_i | \sigma, \varphi_m). \quad (\text{П.1})$$

Для удобства перейдем от (П.1) к логарифмической функции правдоподобия, тогда

$$l(\varphi_m, \sigma | \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \ln(W_{ph}(\varphi_i | \sigma, \varphi_m)). \quad (\text{П.2})$$

Наиболее вероятное значение параметра  $\widehat{\varphi}_m$  определяется как максимум функции правдоподобия (П.1) или логарифмической функции правдоподобия (П.2), т. е.

$$\widehat{\varphi}_m = \arg \max_{\varphi_m \in [-\pi; \pi)} l(\varphi_m, \sigma | \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \quad (\text{П.3})$$

а для вычисления оценки  $\widehat{\varphi}_m$  необходимо вычислить производную и приравнять ее нулю:

$$\frac{\partial l(\varphi_m, \sigma \mid \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{\partial \varphi_m} = 0. \quad (\text{П.4})$$

Запишем подробнее производную (П.4):

$$\frac{\partial l(\varphi_m, \sigma \mid \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{\partial \varphi_m} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{\partial W_{ph}(\varphi_i \mid \sigma, \varphi_m)}{\partial \varphi_m}}{W_{ph}(\varphi_i \mid \sigma, \varphi_m)}. \quad (\text{П.5})$$

Рассмотрим подробнее числитель слагаемых в (П.5). Для некоторого значения  $\varphi_i$  можно записать

$$\frac{\partial W_{ph}(\varphi_i \mid \sigma, \varphi_m)}{\partial \varphi_m} = \frac{\partial}{\partial \varphi_m} \left[ \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)}{2\pi} \left( 1 + \sqrt{\pi} \frac{\cos(\varphi - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma} \cdot \operatorname{erfc}\left(-\frac{\cos(\varphi - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \exp\left(\frac{\cos^2(\varphi - \varphi_m)}{2\sigma^2}\right) \right) \right]. \quad (\text{П.6})$$

Для сокращения выкладок подставим в (П.6) коэффициент  $C(\sigma)$ , определяемый выражением (43), а также учтем, что производная от слагаемого, не зависящего от  $\varphi_m$ , равна нулю, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{ph}(\varphi_i \mid \sigma, \varphi_m)}{\partial \varphi_m} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_m} \left[ C(\sigma) \left( \sqrt{\pi} \frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \exp\left(\frac{\cos^2(\varphi_i - \varphi_m)}{2\sigma^2}\right) \right) \right] = \\ &= C(\sigma) \left( \sqrt{\pi} \frac{\sin(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \exp\left(\frac{\cos^2(\varphi_i - \varphi_m)}{2\sigma^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\pi} \frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma} \frac{2 \sin(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\cos^2(\varphi_i - \varphi_m)}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{\cos^2(\varphi_i - \varphi_m)}{2\sigma^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\pi} \frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \exp\left(\frac{\cos^2(\varphi_i - \varphi_m)}{2\sigma^2}\right) \frac{2 \cos(\varphi_i - \varphi_m) \sin(\varphi_i - \varphi_m)}{2\sigma^2} \right) = \\ &= C(\sigma) \left( \sqrt{\pi} \frac{\sin(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \exp\left(\frac{\cos^2(\varphi_i - \varphi_m)}{2\sigma^2}\right) + \sqrt{\pi} \frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma} \frac{2 \sin(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma \sqrt{\pi}} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\pi} \frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \exp\left(\frac{\cos^2(\varphi_i - \varphi_m)}{2\sigma^2}\right) \frac{2 \cos(\varphi_i - \varphi_m) \sin(\varphi_i - \varphi_m)}{2\sigma^2} \right) = \\ &= C(\sigma) \frac{\sqrt{\pi} \sin(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma} \left( \operatorname{erfc}\left(-\frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left(\frac{\cos^2(\varphi_i - \varphi_m)}{2\sigma^2}\right) \left( 1 + \frac{\cos^2(\varphi_i - \varphi_m)}{\sigma^2} \right) + \frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right). \quad (\text{П.7}) \end{aligned}$$

В результате уравнение (П.4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\varphi_m, \sigma \mid \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{\partial \varphi_m} &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial W_{ph}(\varphi_i \mid \sigma, \varphi_m)}{\partial \varphi_m} = \sum_{i=0}^{n-1} C(\sigma) \frac{\sqrt{\pi} \sin(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma} \times \\ &\quad \times \left( \operatorname{erfc}\left(-\frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \exp\left(\frac{\cos^2(\varphi_i - \varphi_m)}{2\sigma^2}\right) \left( 1 + \frac{\cos^2(\varphi_i - \varphi_m)}{\sigma^2} \right) + \frac{\cos(\varphi_i - \varphi_m)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) = 0. \quad (\text{П.8}) \end{aligned}$$

Очевидно, что для нахождения решения (П.8) достаточно решить

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sin(\varphi_i - \varphi_m) = 0. \quad (\text{П.9})$$

Путем тригонометрических преобразований в (П.9) получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\sin(\varphi_i) \cos(\varphi_m) - \cos(\varphi_i) \sin(\varphi_m)) = 0. \quad (\text{П.10})$$

В результате решения уравнения (П.10), оценка  $\widehat{\varphi}_m$  может быть найдена следующим образом:

$$\widehat{\varphi}_m = \arctan \left( \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sin(\varphi_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} \cos(\varphi_i)} \right) = \arg \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \cos(\varphi_i) + j \sum_{i=0}^{n-1} \sin(\varphi_i) \right\} = \arg \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \exp(j\varphi_i) \right\}. \quad (\text{П.11})$$

В результате пришли к выражению (23), аналогично [Mardia, Jupp, 2000; Jammalamadaka, SenGupta, 2001].

## Список литературы (References)

- Гладких А. А.* Основы теории мягкого декодирования избыточных кодов в стирающем канале связи. — Ульяновск: УлГТУ, 2010. — 379 с.  
*Gladkikh A. A.* Osnovy' teorii myagkogo dekodirovaniya izbytochnykh kodov v stirayushem kanale svyazi [Fundamentals of the theory of redundant codes soft decoding in an erasinf communication channel]. — Ulyanovsk: UIGTU, 2010. — 379 p. (in Russian).
- Егоров В. В., Смаль М. С.* Оценка вероятности ошибки на бит по флуктуациям фазы информационных сигналов // Телекоммуникации. — 2012. — № 5. — С. 2–5.  
*Egorov V. V., Smal M. S.* Ocenka veroyatnosti oshibki na bit po fluktuaciyam fazy informacionnyh signalov [Bit error rate estimation based on fluctuations in the phase of information signal] // Telecommunications and Radio Engineering. — 2012. — No. 5. — P. 2–5 (in Russian).
- Егоров В. В., Смаль М. С.* Оценка отношения сигнал/шум при использовании сигналов с фазовой модуляцией // Телекоммуникации. — 2013. — № 8. — С. 29–34.  
*Egorov V. V., Smal M. S.* Ocenka otnosheniya signal/shum pri ispol'zovanii signalov s fazovoj modulyaciej [Signal-to-noise ratio when using signal phase modulation] // Telecommunications and Radio Engineering. — 2013. — No. 8. — P. 29–34 (in Russian).
- Жук В. В.* Аппроксимация периодических функций. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1982. — 368 с.  
*Zhuk V. V.* Approksimaciya periodicheskikh funkcij [Approximation of periodic functions]. — Leningrad: Izd-vo Leningradskogo universiteta, 1982. — 368 p. (in Russian).
- Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Радио и связь, 1989. — 656 с.  
*Levin B. R.* Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki [Theoretical foundations of statistical radio engineering]. — Moscow: Radio i svyaz', 1989. — 656 p. (in Russian).
- Маслаков М. Л., Егоров В. В.* Вычисление функции плотности распределения вероятности фаз на основе решения обратной задачи // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2023. — Т. 26, № 3. — С. 287–300. — DOI: 10.15372/SJNM20230305  
*Maslakov M. L., Egorov V. V.* Estimation of the phase probability density function by solving the inverse problem // Numer. Analys. Appl. — 2023. — Vol. 16. — P. 236–247. — DOI: 10.1134/S1995423923030059 (Original Russian paper: *Maslakov M. L., Egorov V. V.* Vychislenie funkcii plotnosti raspredeleniya veroyatnosti faz na osnove resheniya obratnoj zadachi // Sibirskij zhurnal vychislitel'noj matematiki. — 2023. — Vol. 26, No. 3. — P. 287–300.)

- Наговицын Ю. А.* Глобальная активность Солнца на длительных временах // *Астрофизический бюллетень*. — 2008. — № 1. — С. 45–58.  
*Nagovitsyn Yu. A.* Global solar activity on long time scales // *Astrophys. Bull.* — 2008. — Vol. 63. — P. 43–55. — DOI: 10.1007/s11755-008-1005-7 (Original Russian paper: *Nagovitsyn Yu. A.* Global'naya aktivnost' Solnca na dlitel'nyh vremenah // *Astrofizicheskij byulleten'*. — 2008. — No. 1. — P. 45–58.)
- Сирота А. А.* Методы и алгоритмы анализа данных и их моделирование в MATLAB. — СПб.: БХВ-Петербург, 2016. — 376 с.  
*Sirota A. A.* Metody i algoritmy analiza dannykh i ikh modelirovanie v MATLAB [Methods and algorithms of data analysis and their modeling in MATLAB]. — Saint Petersburg: BKhV-Peterburg, 2016. — 376 p. (in Russian).
- Тихонов В. И.* Влияние флуктуаций на точность работы устройств синхронизации // *Успехи физических наук*. — 1964. — Т. 83, № 4. — С. 665–694. — DOI: 10.3367/UFNr.0083.196408d.0665  
*Tikhonov V. I.* Effect of fluctuations on the operating accuracy of synchronization equipment // *Sov. Phys. Usp.* — 1965. — Vol. 7. — P. 574–591. — DOI: 10.1070/PU1965v007n04ABEH003635 (Original Russian paper: *Tikhonov V. I.* Vliyanie fluktuacij na tochnost' raboty ustrojstv sinhronizacii // *Uspehi fizicheskikh nauk*. — 1964. — Vol. 83, No. 4. — P. 665–694.)
- Тихонов В. И.* Влияние шумов на работу схемы фазовой автоподстройки частоты // *Автоматика и телемеханика*. — 1959. — Т. 20, № 9. — С. 1188–1196.  
*Tikhonov V. I.* Vliyanie шумов na rabotu shemy fazovoj avtopodstrojki chastoty [Noise influence on operation of frequency phase adjustment circuit] // *Avtomatika i telemehanika*. — 1959. — Vol. 20, No. 9. — P. 1188–1196 (in Russian).
- Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. — М.: Советское радио, 1966. — 680 с.  
*Tikhonov V. I.* Statisticheskaya radiotekhnika [Statistical radio engineering]. — Moscow: Sovetskoe radio, 1966. — 680 p. (in Russian).
- Толстов Г. П.* Ряды Фурье. — М.: Наука, 1980. — 382 с.  
*Tolstov G. P.* Fourier series. — New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1962. — 360 p. (Russ. ed.: *Tolstov G. P.* Ryady Fur'e. — Moscow: Nauka, 1980.)
- Яковлева Т. В.* Особенности статистического распределения фазы квазигармонического сигнала // *Доклады Академии наук. Матем., информ., проц. упр.* — 2021. — Т. 497. — С. 35–37. — DOI: 10.31857/S2686954321020089  
*Yakovleva T. V.* Features of the statistical distribution of a quasi-harmonic signal phase // *Dokl. Math.* — 2021. — Vol. 103. — P. 95–97. — DOI: 10.1134/S1064562421020083 (Original Russian paper: *Yakovleva T. V.* Osobennosti statisticheskogo raspredeleniya fazy kvazigarmonicheskogo signala // *Doklady Akademii nauk. Matem., inform., procz. upr.* — 2021. — Vol. 497. — P. 35–37.)
- Яковлева Т. В.* Статистическое распределение фазы квазигармонического сигнала: основы теории и компьютерное моделирование // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2024. — Т. 16, № 2. — С. 287–297. — DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-2-287-297  
*Yakovleva T. V.* Statisticheskoe raspredelenie fazy kvazigarmonicheskogo signala: osnovy teorii i komp'yuternoe modelirovanie [Statistical distribution of the quasi-harmonic signal's phase: basics of theory and computer simulation] // *Computer Research and Modeling*. — 2024. — Vol. 16, No. 2. — P. 287–297. (in Russian).
- Abreu G.* On the generation of Tikhonov variates // *IEEE Transactions on Communications*. — 2008. — Vol. 56, No. 7. — P. 1157–1168. — DOI: 10.1109/TCOMM.2008.060510
- Agiomyrgiannakis Y., Stylianou Y.* Wrapped Gaussian mixture models for modeling and high-rate quantization of phase data of speech // *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*. — 2009. — Vol. 17, No. 4. — P. 775–786. — DOI: 10.1109/TASL.2008.2008229
- Aubry A., Maio A. D., Carotenuto V., Farina A.* Radar phase noise modeling and effects-part I: MTI filters // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. — 2016. — Vol. 52, No. 2. — P. 698–711. — DOI: 10.1109/TAES.2015.140549
- Bell W., Nadarajah S.* A review of wrapped distributions for circular data // *Mathematics*. — 2024. — Vol. 12. — P. 2440. — DOI: 10.3390/math12162440
- Borradaile G.* Statistics of Earth Science Data: their distribution in space, time, and orientation. — Berlin: Springer-Verlag, 2003. — 352 p.
- Chandra A., Chattopadhyay A., Bose Ch.* Performance analysis of PSK systems with phase error in fading channels: A survey // *Physical Communication*. — 2011. — Vol. 4, No. 1. — P. 63–82. — DOI: 10.1016/j.phycom.2010.12.001
- Davis J. C.* Statistics and data analysis in geology. — New York: John Wiley & Sons, 2002. — 638 p.

- Ferrari C.* The wrapping approach for circular data Bayesian modeling. — 2009. — 124 p.
- Gappmair W., Nistazakis H.E.* Subcarrier PSK performance in terrestrial FSO links impaired by gamma-gamma fading, pointing errors, and phase noise // *Journal of Lightwave Technology*. — 2017. — Vol. 35, No. 9. — P. 1624–1632. — DOI: 10.1109/JLT.2017.2685678
- Goodman J.M.* HF communications science and technology. — New York: Van Nostrand Reinhold, 1992. — 632 p.
- Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Table of integrals, series, and products. — San Diego: Elsevier Inc., 2007. — 1172 p.
- Jammalamadaka S.R., Kozubowski T.J.* A general approach for obtaining wrapped circular distributions via mixtures // *Sankhya A*. — 2017. — Vol. 79. — P. 133–157. — DOI: 10.1007/s13171-017-0096-4
- Jammalamadaka S.R., SenGupta A.* Topics in circular statistics. — Singapore: World Scientific Publishing, 2001. — 322 p.
- Mardia K.V., Jupp P.E.* Directional statistics. — Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2000. — 430 p.
- McGrew J.C., Monroe C.B.* An introduction to statistical problem solving in geography. — Boston: McGraw-Hill, 2009. — 254 p.
- Ravindran P., Ghosh S.K.* Bayesian analysis of circular data using wrapped distributions // *Journal of Statistical Theory and Practice*. — 2011. — Vol. 5. — P. 547–561.
- Simon M.K., Alouini M.* Digital communication over fading channels: a unified approach to performance analysis. — New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000. — 546 p.
- Tuchler M., Singer A.C., Koetter R.* Minimum mean squared error equalization using a priori information // *IEEE Transactions on Signal Processing*. — 2002. — Vol. 50, No. 3. — P. 673–683.
- Varotsos G.K., Nistazakis H.E., Tombras G.S., Gappmair W.* Average error performance in Subcarrier PSK FSO links over weak turbulence channels with spatial jitter and phase noise // 6th International Conference on Modern Circuits and Systems Technologies (MOCASST), Thessaloniki, Greece, 2017. — P. 1–4. — DOI: 10.1109/MOCASST.2017.7937669
- Xiong F.* Digital modulation techniques. — Boston: Artech House, 2006. — 1018 p.