

УДК: 531.36:62-529

Модификация электродинамического метода трехосной стабилизации космического аппарата для околополярных орбит

М. В. Максименко^a, А. А. Тихонов^b

Санкт-Петербургский государственный университет,
Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9

E-mail: ^a m.v.maksimenko@spbu.ru, ^b a.tikhonov@spbu.ru

*Получено 16.04.2025, после доработки — 16.12.2025.
Принято к публикации 21.12.2025.*

Для трехосной стабилизации космического аппарата (КА) в орбитальной системе координат, в том числе в непрямом положении равновесия, применяется электродинамический метод управления, основанный на одновременном использовании двух управляющих моментов, оказывающих влияние на динамику вращательного движения космического аппарата в магнитном поле Земли (МПЗ), а именно лоренцева момента и момента магнитного взаимодействия. Предполагается, что КА, оснащенный электрическим зарядом с управляемым вектором статического момента заряда первого порядка и управляемым собственным магнитным моментом, движется по кеплеровой круговой околоземной орбите произвольного наклона. Ранее было показано, что объединение двух систем управления — магнитной и лоренцевой — в единую электродинамическую систему управления (ЭДСУ) позволяет успешно решать различные задачи управления угловым движением КА. В отличие от многих известных исследований, выполненных для той или иной приближенной модели МПЗ, в данной работе не накладывается ограничений на точность аппроксимации МПЗ. Ранее выполненные исследования показали ограниченность возможностей ЭДСУ для КА, движущихся по орбитам, близким по наклону к полярным, в силу наличия в этом случае таких точек на траектории КА, в которых возможно совпадение линий действия вектора геомагнитной индукции и вектора скорости КА относительно МПЗ. Поэтому в данной работе ставится и решается задача преодоления отмеченных трудностей. Предложена модификация ЭДСУ, основанная, во-первых, на оптимизации управления угловым движением КА и, во-вторых, на ограничении максимальной величины модуля вектора центра заряда относительно центра масс КА, который необходимо создавать в процессе управления. Рекомендован способ выбора параметров для модифицированной ЭДСУ. Приведенные результаты численных экспериментов для КА, находящихся на полярной и приполярных орбитах, не только демонстрируют работоспособность предложенной модификации ЭДСУ, но и свидетельствуют о возможности технической реализации модифицированного электродинамического метода трехосной стабилизации КА.

Ключевые слова: космический аппарат, лоренцев момент, магнитный момент, трехосная стабилизация, оптимизация, полярная орбита

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-41-02031 (<https://rscf.ru/project/24-41-02031/>).

UDC: 531.36:62-529

Modification of the electrodynamic method for spacecraft attitude stabilization at circumpolar orbits

M. V. Maksimenko^a, A. A. Tikhonov^b

Saint Petersburg State University,
7-9 Universitetskaya nab., Saint-Petersburg, 199034, Russia

E-mail: ^a m.v.maksimenko@spbu.ru, ^b a.tikhonov@spbu.ru

Received 16.04.2025, after completion — 16.12.2025.

Accepted for publication 21.12.2025.

For the three-axis stabilization of the spacecraft in the orbital coordinate system, including in the indirect equilibrium position, an electrodynamic control method is used based on the simultaneous use of two control torques that affect the dynamics of the spacecraft's rotational motion in the Earth's magnetic field (EMF), namely, the Lorentz torque and the torque of magnetic interaction. It is assumed that the spacecraft, equipped with an electric charge with a controlled vector of static moment of charge of the first order and a controlled intrinsic magnetic moment, moves in a Keplerian circular Earth orbit of arbitrary inclination. It was previously shown that combining two control systems, magnetic and Lorentz control, into a single electrodynamic control system (EDCS) makes it possible to successfully solve various problems of controlling the angular motion of spacecraft. Unlike many well-known studies performed for one or another approximate EMF model, this work does not impose restrictions on the accuracy of the EMF approximation. Previous studies have shown the limited capabilities of the EDCS for spacecraft moving in orbits close to the polar ones, due to the presence in this case of such points on the spacecraft trajectory in which it is possible for the lines of action of the geomagnetic induction vector and the spacecraft velocity vector relative to the EMF. Therefore, in this paper, the problem of overcoming these difficulties is posed and solved. A modification of the EDCS is proposed, based, firstly, on optimizing the control of the angular motion of the spacecraft and, secondly, on limiting the maximum value of the modulus of the vector of the center of charge relative to the center of mass of the spacecraft, which must be created during control. A method for selecting parameters for a modified EMF is recommended. The presented results of numerical experiments for spacecraft located in polar and circumpolar orbits not only demonstrate the operability of the proposed modification of the EDCS, but also indicate the possibility of technical implementation of the modified electrodynamic method of three-axis spacecraft stabilization.

Keywords: spacecraft, Lorentz torque, magnetic torque, threeaxial stabilization, optimization, polar orbit

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 1, pp. 149–168 (Russian).

The work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 24-41-02031, <https://rscf.ru/project/24-41-02031/>).

Введение

Методы полупассивного управления вращательным движением космического аппарата (КА) вокруг его центра масс получили свое развитие еще в середине XX века (см. [Белецкий, 1965; Белецкий, 1975; Сарычев, Овчинников, 1985] и др.). Эти методы опираются на использование различных по своей природе сил и моментов, генерируемых естественным образом в околоземном пространстве. Хорошо развиты методы управления, основанные на использовании взаимодействия КА с магнитным полем Земли (МПЗ) [Белецкий, 1965; Rodriguez-Vazquez, Prats, 2014; Giri et al., 2017; Морозов, Каленова, 2018; Ovchinnikov, Roldugin, 2021]. В основе указанного взаимодействия лежит создание на борту КА собственного магнитного момента (магнитные системы управления) или электростатического заряда (лоренцевы системы управления). Объединение возможностей лоренцевой и магнитной систем управления угловым движением КА имеет место в электродинамической системе управления (ЭДСУ), позволяющей путем программного изменения моментов (лоренцева и магнитного взаимодействия) не только ориентировать КА в любом заданном угловом положении, но и погасить собственные колебания КА около его центра масс [Тихонов, 2003; Giri, Sinha, 2014; Giri, Sinha, 2017; Prabhat et al., 2022; Maksimenko, Tikhonov, 2025]. Изменение управляющих моментов сил достигается за счет изменения двух управляемых векторов — собственного магнитного момента КА и вектора центра заряда КА относительно центра масс КА. В случаях, когда положение равновесия КА не является прямым, или орбита КА не является круговой, или при наличии заранее известных возмущений, необходимо компенсировать действующие на КА возмущающие моменты, что тоже возможно с помощью программного изменения тех же управляемых векторов [Александров, Тихонов, 2013; Klyushin et al., 2024; Maksimenko, Tikhonov, 2025]. Также в работах [Александров, Тихонов, 2013; Aleksandrov, Tikhonov, 2017; Maksimenko, Tikhonov, 2025] обосновывается асимптотическая устойчивость углового движения КА для выбранных параметров КА, орбиты и управления.

В работах [Александров и др., 2016; Александров и др., 2017; Aleksandrov, Tikhonov, 2020; Aleksandrov, Tikhonov, 2024; Maksimenko, Tikhonov, 2025] рассматриваются различные варианты программного углового движения КА, которые могут быть реализованы с помощью объединения двух систем управления — магнитной и лоренцевой — в единую ЭДСУ. Проведенные теоретические исследования и выполненные численные эксперименты подтверждают работоспособность и эффективность ЭДСУ для КА, находящихся на орбитах произвольного наклона (рис. 1). С другой стороны, техническая реализация ЭДСУ КА требует более тщательного анализа законов изменения управляемых векторов. В данной статье проведен подробный анализ реализации ЭДСУ для КА, находящихся на орбитах высокого наклона. Особенностью движения КА на полярных или околополярных орбитах является то, что для некоторых положений на орбите вектор скорости центра масс КА становится по направлению близким к вектору магнитной индукции МПЗ (рис. 2), что затрудняет создание необходимого по величине лоренцева момента, но не исключает его использования для стабилизации КА.

Исследованию динамики спутников, находящихся на полярных орбитах, традиционно уделяется большое внимание ввиду практической важности этого направления исследований и разнообразия приложений, включающих прогнозирование погоды, мониторинг окружающей среды [Cunningham et al., 2004], обеспечение специальной подвижной спутниковой связи, цифрового спутникового радиовещания, обеспечение поисково-спасательных операций, обеспечение стабильного соединения в акватории Северного морского пути [Буянов, Кокорич, 2024]. В упомянутых работах именно околополярные орбиты, как круговые [Aslanov, Sizov, 2022], так и сильноэллиптические [Буянов, Кокорич, 2024], имеют преимущество перед остальными околоземными орбитами.



Рис. 1. Типы орбит в зависимости от наклона

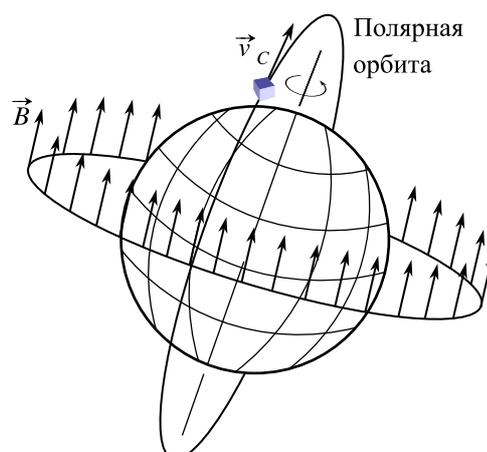


Рис. 2. Магнитная индукция \vec{B} и скорость центра масс КА \vec{v}_c на полярной орбите

Решение задач ориентации и стабилизации КА, находящихся на околополярных орбитах, обычно опирается на использование магнитных систем управления, которые без существенных проблем работают на таких орбитах, в отличие от ситуаций, когда орбиты близки к экваториальным.

Так, в работе [Reyhanoglu, Drakunov, 2008] решается задача трехосной магнитной стабилизации КА на полярной орбите. Используется нелинейная математическая модель и метод функций Ляпунова. Однако обнаружена высокая чувствительность законов управления к параметрам управлений. Аналогичная задача магнитной стабилизации КА в прямом положении равновесия в орбитальной системе координат решается в [Морозов, Каленова, 2018] другим способом — на базе системы линеаризованных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. С помощью специальной замены переменных исходная нестационарная дифференциальная система сводится к стационарной, но более высокой размерности. Далее применяется известный подход для построения управляющих моментов, который применяется для решения прикладных задач [Каленова, Морозов, 2010; Каленова, Морозов, 2019; Морозов, Каленова, 2020]. При наличии управляемости стационарной системы на основе квадратичного критерия качества строится оптимальный алгоритм управления, из которого получают линейную обратную связь с постоянными коэффициентами. После этого осуществляется обратный переход к исходным переменным нестационарной системы, что дает выражение для закона управления в исходной системе.

В обеих упомянутых работах МПЗ моделируется как прямой магнитный диполь. Такая аппроксимация МПЗ является традиционной при выполнении качественных аналитических исследований, а использование более точных моделей МПЗ, сопряженное со значительным усложнением математических моделей, обычно имеет место лишь на этапе численного моделирования для получения количественных результатов. Тем не менее имеются работы, в которых аналитические исследования успешно выполняются на базе квадрупольной и октупольной аппроксимаций МПЗ, причем как в нелинейной постановке [Тихонов, 2003; Антипов и др., 2006; Антипов, Тихонов, 2007; Антипов, Тихонов, 2014; Antipov, Tikhonov, 2014; Tikhonov et al., 2017; Aleksandrov, Tikhonov, 2020], так и на базе линейного приближения [Каленова и др., 2024]. В некоторых задачах динамики углового движения КА аналитические результаты получены для аппроксимации МПЗ вообще с произвольной степенью точности [Тихонов и др., 2011; Александров, Тихонов, 2013; Aleksandrov, Tikhonov, 2017; Aleksandrov, Tikhonov, 2023; Aleksandrov, Tikhonov, 2024; Maksimenko, Tikhonov, 2025].

С теоретической точки зрения наличие управляемости в магнитных системах управления [Морозов, Каленова, 2020] свидетельствует о возможности их использования практически для любых задач. Однако присущая магнитным системам управления проблема ограничения на направление управляющего момента требует специфических подходов к их реализации и некоторой оптимизации для практического преодоления упомянутой проблемы [Ovchinnikov et al., 2015]. Один из таких естественных подходов — использование дополнительных исполнительных органов, что и имеет место в ЭДСУ.

Следует отметить, что повышение эффективности работы ЭДСУ также может быть достигнуто путем некоторой ее оптимизации. Так, в работе [Тихонов и др., 2011] предложен метод оптимизации ЭДСУ, основанный на исключении тех составляющих управляемых векторов, которые не вносят вклада в управляющие моменты. Там же выполнена оценка эффективности оптимизации, которая минимизирует энергозатраты на создание соответствующих управляющих моментов, не влияя на их величину и направление, что позволяет рекомендовать этот подход при реализации ЭДСУ КА на практике.

Еще одно возможное направление исследования путей оптимизации ЭДСУ связано с вышеупомянутым естественным ограничением на направление лоренцева момента, особенно проявляющимся при движении КА по околополярным орбитам. Тем не менее вопрос оптимизации работы ЭДСУ для КА, находящихся на околополярных орбитах, ранее в литературе не рассматривался. В данной статье ставится задача создания модификации ЭДСУ, которая может быть рекомендована для КА, находящихся именно на околоземных орбитах, близких к полярным, с учетом характерных массогабаритных параметров существующих КА.

Электродинамическая система управления

Системы координат и другие обозначения

Рассмотрим КА, центр масс которого (точка C) движется по круговой кеплеровой околоземной орбите радиусом R в гравитационном и магнитном полях Земли.

Введем следующие правые декартовы системы координат (рис. 3):

- инерциальная система координат $O_E X^* Y^* Z^*$ (орты $\vec{i}^*, \vec{j}^*, \vec{k}^*$) с началом в центре Земли, ось $O_E Z^*$ направлена по оси собственного вращения Земли, ось $O_E X^*$ — в восходящий узел орбиты КА, а плоскость $X^* Y^*$ совпадает с плоскостью экватора;
- орбитальная система координат $C\xi\eta\zeta$ (орты $\vec{\xi}_0, \vec{\eta}_0, \vec{\zeta}_0$) с началом в центре масс КА, ось $C\xi$ направлена по касательной к орбите в сторону движения, ось $C\eta$ — по нормали к плоскости орбиты, ось $C\zeta$ — вдоль радиус-вектора $R = R\vec{\zeta}_0$ центра масс КА относительно центра Земли O_E ;
- система главных центральных осей инерции $Cxyz$ (орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

С учетом вращения орбитальной системы $C\xi\eta\zeta$ относительно инерциальной системы координат $O_E X^* Y^* Z^*$ с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{\eta}_0$ их взаимная ориентация определяется на основании равенств

$$\begin{pmatrix} \vec{i}^* \\ \vec{j}^* \\ \vec{k}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t & 0 \\ \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\zeta}_0 \\ \vec{\xi}_0 \\ \vec{\eta}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t & 0 \\ \cos i \sin \omega_0 t & \cos i \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t \\ \sin i \sin \omega_0 t & \sin i \cos \omega_0 t & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\zeta}_0 \\ \vec{\xi}_0 \\ \vec{\eta}_0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

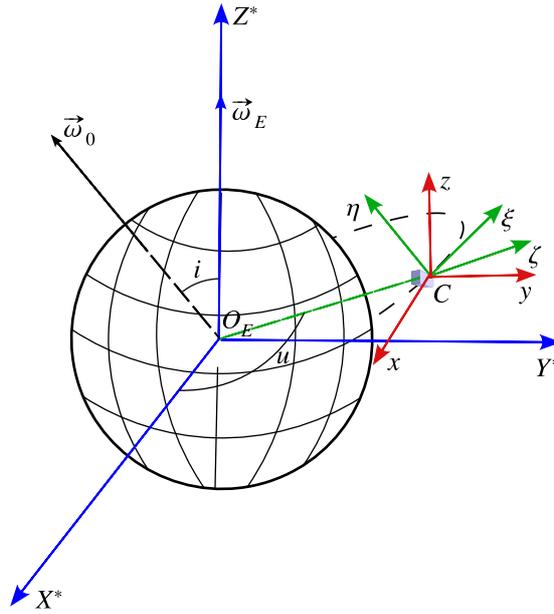


Рис. 3. Используемые системы координат: инерциальная система координат $O_E X^* Y^* Z^*$, где точка O_E — центр Земли, ось $O_E Z^*$ направлена по оси собственного вращения Земли, ось $O_E X^*$ — в восходящий узел орбиты КА, плоскость $X^* Y^*$ совпадает с плоскостью экватора; орбитальная система координат $C \xi \eta \zeta$, точка C — центр масс КА, ось $C \xi$ направлена по касательной к орбите в сторону движения, ось $C \eta$ — по нормали к плоскости орбиты, ось $C \zeta$ — вдоль радиус-вектора $R = R_{\zeta_0}^{\vec{z}}$ центра масс КА относительно центра Земли O_E ; система главных центральных осей инерции $Cxyz$; i — наклонение орбиты, $u = \omega_0 t$ — аргумент широты, $\vec{\omega}_E$ — угловая скорость вращения Земли, $\vec{\omega}_0$ — угловая скорость вращения орбитальной системы $C \xi \eta \zeta$ относительно инерциальной системы координат $O_E X^* Y^* Z^*$

где $i = (\widehat{\vec{k}^*}, \widehat{\vec{\eta}_0})$ — наклонение орбиты, $\omega_0 t = (\widehat{\vec{i}^*}, \widehat{\vec{\zeta}_0})$ — аргументы широты, при $t = 0$ КА находится в восходящем узле орбиты. Если обозначить $u = \omega_0 t$, то выражение (1) примет вид

$$\begin{aligned}\vec{i}^* &= -\vec{\xi}_0 \sin u + \vec{\zeta}_0 \cos u, \\ \vec{j}^* &= \vec{\xi}_0 \cos i \cos u - \vec{\eta}_0 \sin i + \vec{\zeta}_0 \cos i \sin u, \\ \vec{k}^* &= \vec{\xi}_0 \sin i \cos u + \vec{\eta}_0 \cos i + \vec{\zeta}_0 \sin i \sin u.\end{aligned}$$

Ориентация системы координат $Cxyz$ относительно орбитальной системы координат $C \xi \eta \zeta$ задается матрицей направляющих косинусов $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$. Если определять ориентацию КА в орбитальной системе координат с помощью «самолетных» углов φ (крен), θ (тангаж), ψ (рыскание) (так же как, например, в [Maksimenko, Tikhonov, 2025]), то элементы матрицы \mathbf{A} примут вид

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos \psi \cos \theta, & a_{12} &= \cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi, & a_{13} &= \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \sin \theta \cos \varphi; \\ a_{21} &= \sin \psi \cos \theta, & a_{22} &= \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi, & a_{23} &= \sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi; \\ a_{31} &= -\sin \theta, & a_{32} &= \sin \varphi \cos \theta, & a_{33} &= \cos \varphi \cos \theta.\end{aligned}$$

Если орбитальная система координат принимается за базовую (т. е. ту систему координат, в которой решается задача угловой стабилизации КА), то программная ориентация КА в этой системе координат задается некоторой определенной матрицей \mathbf{A}_0 направляющих косинусов. Обозначим через $\vec{\omega}' = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ угловую скорость КА относительно орбитальной системы координат. Угловое движение КА, в котором

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0, \quad \vec{\omega}' = \vec{0}, \quad (2)$$

будем называть программным движением КА.

Управляемые векторы и управляющие моменты

Концепция построения ЭДСУ опирается на возможность управляемого изменения двух ключевых векторных параметров, а именно \vec{P} и \vec{I} , для создания управляющих моментов — лоренцева \vec{M}_L и момента магнитного взаимодействия \vec{M}_M , обеспечивающих программное угловое движение КА. Эта концепция была предложена в работе [Антипов, Тихонов, 2007] и в дальнейшем получила развитие в ряде работ, направленных на решение конкретных задач динамики углового движения КА [Антипов, Тихонов, 2014; Aleksandrov, Tikhonov, 2020; Aleksandrov, Tikhonov, 2024; Klyushin et al., 2024; Maksimenko, Tikhonov, 2025]. В работе [Петров, Тихонов, 1999] показано, что для любых реальных КА и тем более для КА, работающих в режимах, близких к ориентированному движению, момент \vec{M}_L с хорошей степенью точности может быть аппроксимирован выражением

$$\vec{M}_L = \vec{P} \times \vec{T}, \quad (3)$$

где $\vec{P} = Q\vec{\rho}_0$ имеет смысл статического момента заряда первого порядка, Q — заряд КА, $\vec{\rho}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ — радиус-вектор центра заряда КА относительно центра масс КА в системе координат $S_{хуz}$. Вектор \vec{T} вычисляется по формуле $\vec{T} = \mathbf{A}^\top(\vec{v}_C \times \vec{B})$, где скорость центра масс КА \vec{v}_C относительно геомагнитного поля и вектор магнитной индукции \vec{B} заданы своими проекциями в орбитальной системе координат $S_{\xi\eta\zeta}$. Заметим, что при заданных параметрах орбиты и выбранной модели МПЗ векторы \vec{v}_C и \vec{B} являются известными функциями времени. Здесь и далее в работе используется мультипольная модель МПЗ [Антипов, Тихонов, 2013], причем порядок аппроксимации не ограничен.

Момент магнитного взаимодействия вычисляется по формуле

$$\vec{M}_M = \vec{I} \times \vec{B}, \quad (4)$$

где вектор \vec{I} — собственный управляемый магнитный момент КА. Полагаем МПЗ однородным в объеме КА, поэтому значение \vec{B} в формулах (3), (4) совпадает с его значением в центре масс КА.

В случае стабилизации КА в орбитальной системе координат в непрямом положении равновесия управляемые векторы \vec{P} и \vec{I} содержат три компоненты — восстанавливающую, диссипативную и компенсирующую:

$$\vec{P} = \vec{P}_{\text{rest}} + \vec{P}_{\text{diss}} + \vec{P}_{\text{comp}}, \quad (5)$$

$$\vec{I} = \vec{I}_{\text{rest}} + \vec{I}_{\text{diss}} + \vec{I}_{\text{comp}} \quad (6)$$

для создания одноименных компонент управляющих моментов. Такой подход к построению управлений хорошо себя зарекомендовал при решении разнообразных задач динамики углового движения КА и может рассматриваться как классический [Зубов, 1975]. При этом восстанавливающий момент является линейным по угловым отклонениям от программных значений, а диссипативный момент — линейным по угловым скоростям [Dosaev, 2019]. Построение компенсирующих компонент будет описано далее.

Движение КА относительно его центра масс как твердого тела под действием гравитационного, лоренцева и магнитного моментов (3), (4) описывается уравнениями Эйлера:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J}\vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\mathbf{J}\vec{\omega}) = \vec{M}_G + \vec{M}_L + \vec{M}_M, \quad (7)$$

где $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ — тензор инерции КА в системе главных центральных осей инерции $S_{хуz}$, $\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\omega}_0 = \vec{\omega}' + \omega_0\vec{n}_0$ — абсолютная угловая скорость КА, \vec{M}_G — гравитационный момент, который вычисляется по формуле

$$\vec{M}_G = 3\omega_0^2(\mathbf{A}^\top\vec{\zeta}_0) \times (\mathbf{J}\mathbf{A}^\top\vec{\zeta}_0).$$

Чтобы замкнуть дифференциальную систему, рассмотрим динамические уравнения (7) вместе с кинематическими уравнениями Пуассона:

$$\frac{d\vec{\xi}_0}{dt} = \vec{\xi}_0 \times \vec{\omega} - \omega_0 \vec{\xi}_0, \quad \frac{d\vec{\eta}_0}{dt} = \vec{\eta}_0 \times \vec{\omega}, \quad \frac{d\vec{\zeta}_0}{dt} = \vec{\zeta}_0 \times \vec{\omega} + \omega_0 \vec{\xi}_0. \quad (8)$$

Компенсация возмущений

Пусть программное движение КА задано в виде

$$\varphi = \varphi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \vec{\omega}' = \vec{0} \quad (9)$$

и в общем случае не является прямым положением равновесия КА в орбитальной системе координат. Гравитационный момент и выражение $\omega_0^2(\mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0) \times (\mathbf{J}\mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0)$, входящие в уравнения (7), не обращаются в ноль при программном движении КА. Для компенсации возмущающего момента

$$\vec{M}_d = \omega_0^2(3(\mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0) \times (\mathbf{J}\mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0) - (\mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0) \times (\mathbf{J}\mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0))$$

используется подход, основанный на создании соответствующих составляющих электродинамических параметров \vec{P}_{comp} и \vec{I}_{comp} [Tikhonov, 2015]. Таким образом, формулы (5) и (6), используемые для вычисления восстанавливающих, диссипативных и компенсирующих компонент управляемых векторов \vec{P} и \vec{I} для реализации ЭДСУ, направленной на стабилизацию углового движения КА, с учетом введенных обозначений имеют вид

$$\vec{P} = Qk_L \vec{T}_0 + Qh_L \vec{\omega}' \times \vec{T} + \frac{\vec{M}_d \cdot (\mathbf{A}^\top \vec{B})}{|\vec{B}| \cdot |\vec{T}|} \left(\mathbf{V}^\top \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad (10)$$

$$\vec{I} = k_M \vec{B}_0 + h_M \vec{\omega}' \times (\mathbf{A}^\top \vec{B}) + \mathbf{V}^\top \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\vec{M}_d \cdot ((\mathbf{A}^\top \vec{B}) \times \vec{T})}{|\vec{B}|^2 |\vec{T}|} \\ -\frac{\vec{M}_d \cdot \vec{T}}{|\vec{B}| \cdot |\vec{T}|} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Здесь предполагается, что $|\vec{T}| \neq 0$. Коэффициенты управления k_L , k_M , h_L , h_M являются в общем случае функциями времени, \mathbf{V} — известная матрица [Александров, Тихонов, 2013]:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{B_x}{|\vec{B}|} & \frac{B_y}{|\vec{B}|} & \frac{B_z}{|\vec{B}|} \\ \frac{T_x}{|\vec{T}|} & \frac{T_y}{|\vec{T}|} & \frac{T_z}{|\vec{T}|} \\ \frac{[\vec{B} \times \vec{T}]_x}{|\vec{B}| \cdot |\vec{T}|} & \frac{[\vec{B} \times \vec{T}]_y}{|\vec{B}| \cdot |\vec{T}|} & \frac{[\vec{B} \times \vec{T}]_z}{|\vec{B}| \cdot |\vec{T}|} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, подставляя выражения для крутящих моментов (3) и (4) в уравнения Эйлера (7), получим следующую систему динамических дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{J}(\vec{\omega}' + \omega_0 \vec{\eta}_0)] + (\vec{\omega}' + \omega_0 \vec{\eta}_0) \times (\mathbf{J}\vec{\omega}') + \omega_0 \vec{\omega}' \times (\mathbf{J}\vec{\eta}_0) = \vec{M}_{L\text{rest}} + \vec{M}_{L\text{diss}} + \vec{M}_{M\text{rest}} + \vec{M}_{M\text{diss}}, \quad (12)$$

где в правой части стоят восстанавливающие (с индексом rest) и диссипативные (с индексом diss) компоненты управляющих моментов (3), (4) соответственно.

Модификация управления

Оптимизация и анализ эффективности

Оценим вклад каждой компоненты вектора \vec{P} из выражения (5) в вектор $\vec{\rho}_0$ для переходного процесса стабилизации углового положения КА. Для этого построим графики величин каждой из этих составляющих для следующих инерционных параметров КА, заряда, радиуса орбиты и ее наклона, а также параметров управления (см. табл. 1). Введем положительные параметры управления $k_{L0}, k_{M0}, h_{L0}, h_{M0}$ в виде

$$k_{L0} = k_L Q |\vec{T}(t)|^2, \quad k_{M0} = k_M |\vec{B}(t)|^2, \quad h_{L0} = h_L Q |\vec{T}(t)|^2, \quad h_{M0} = h_M |\vec{B}(t)|^2.$$

Таблица 1. Данные параметров КА, орбиты и управления для численных экспериментов

Параметр	Обозначение	Величина	Единицы измерения
КА	A	1000	кг · м ²
	B	1200	кг · м ²
	C	800	кг · м ²
	Q	$5 \cdot 10^{-3}$	Кл
Орбита	R	$7 \cdot 10^6$	м
	i_1	$\frac{70\pi}{180}$	рад
	i_2	$\frac{80\pi}{180}$	рад
	i_3	$\frac{\pi}{2}$	рад
Управление	k_{L0}	$2,5 \cdot 10^{-3}$	Н · м
	k_{M0}	$2 \cdot 10^{-3}$	Н · м
	h_{L0}	0,2	Н · м · с
	h_{M0}	1,0	Н · м · с

Вычисления проводятся для безразмерных величин с помощью параметров Родрига–Гамильтона при следующих начальных значениях углов φ, θ, ψ и безразмерной начальной абсолютной угловой скорости КА в проекциях на оси системы координат $S_{хуз}$:

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0,2 \text{ рад}, \quad \psi(0) = -0,2 \text{ рад}, \quad \theta(0) = 0,2 \text{ рад}, \\ \Omega_x(0) = \frac{\omega_x(0)}{\omega_0} = 0,2, \quad \Omega_y(0) = \frac{\omega_y(0)}{\omega_0} = 0,7, \quad \Omega_z(0) = \frac{\omega_z(0)}{\omega_0} = 0,3. \end{aligned} \quad (13)$$

В качестве программного движения приняты следующие значения «самолетных» углов:

$$\varphi_0 = 0,5 \text{ рад}, \quad \psi_0 = 0,3 \text{ рад}, \quad \theta_0 = 0,1 \text{ рад}. \quad (14)$$

Как было отмечено выше, в расчетах может быть использована мультиполярная модель МПЗ любого порядка аппроксимации. Ниже приведены результаты численных экспериментов, выполненных при квадрупольной аппроксимации МПЗ.

На рис. 4–6 представлены переходные процессы стабилизации КА на орбитах с наклонами i_k ($k = 1, 2, 3$), взятыми из таблицы 1. Заметим, что во всех трех случаях удается достаточно быстро стабилизировать КА в программном движении (14), что теоретически подтверждает работоспособность ЭДСУ при выбранных параметрах.

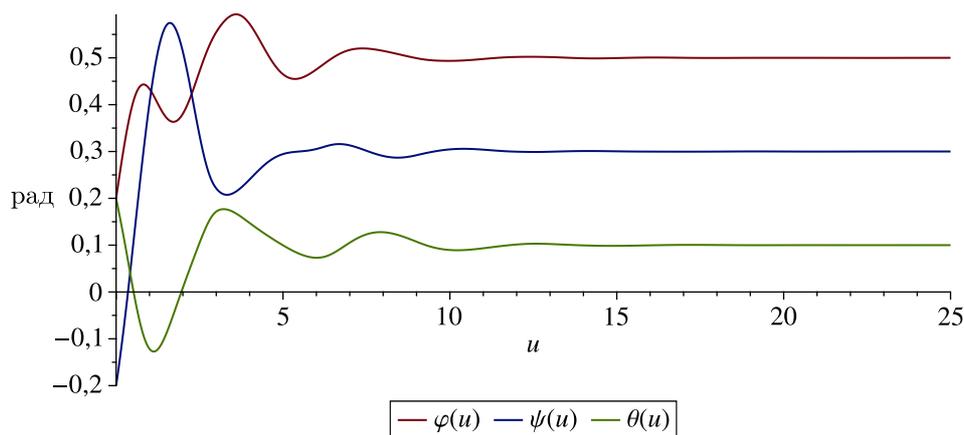


Рис. 4. Процесс стабилизации КА на орбите с наклонением $i_1 = 70^\circ$, представленный в виде графиков изменения «самолетных» углов φ , ψ , θ , выраженных в радианах, от безразмерной переменной u , откладываемой на горизонтальной оси

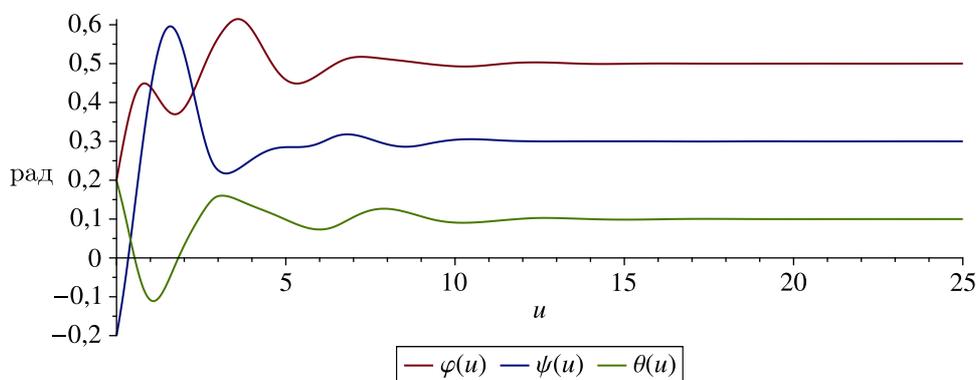


Рис. 5. Процесс стабилизации КА на орбите с наклонением $i_2 = 80^\circ$, представленный в виде графиков изменения «самолетных» углов φ , ψ , θ , выраженных в радианах, от безразмерной переменной u , откладываемой на горизонтальной оси

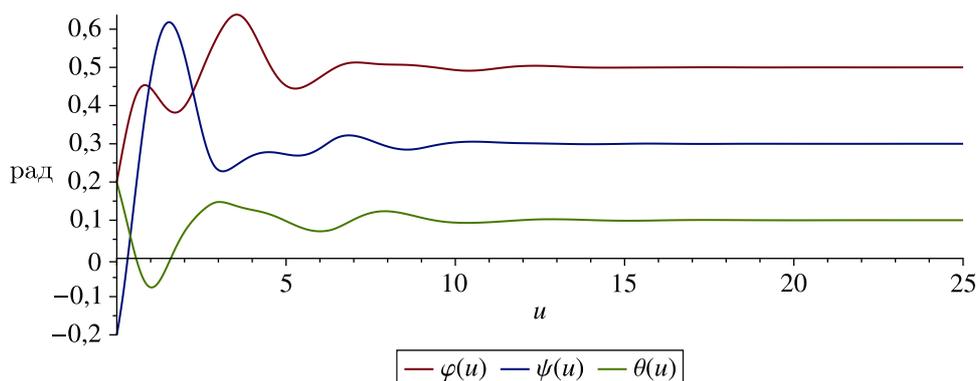


Рис. 6. Процесс стабилизации КА на орбите с наклонением $i_3 = 90^\circ$, представленный в виде графиков изменения «самолетных» углов φ , ψ , θ , выраженных в радианах, от безразмерной переменной u , откладываемой на горизонтальной оси

Обратимся теперь к вопросу о практической реализуемости построенного управления. Если вопрос о реализуемости управляемого вектора \vec{I} достаточно хорошо изучен и поэтому в данном случае не вызывает необходимости дополнительных исследований, то вопрос о реализу-

емости вектора \vec{P} требует дополнительного исследования ввиду наличия очевидных конструктивных ограничений на величины Q и $|\vec{\rho}_0|$, а следовательно, и на величину $|\vec{P}|$. Согласно статьям [Gangestad et al., 2010; Tealib et al., 2020] можно понять, что в настоящее время существуют технологии, которые позволяют получить заряд на поверхности КА порядка 10^{-2} Кл/кг. В рассматриваемом случае результаты численных экспериментов приведены для КА с характерной массой порядка 1000 кг и характерной величиной заряда Q порядка 10^{-3} Кл (табл. 1). Такая величина заряда на три порядка меньше верхней оценочной границы заряда, который может нести КА массой 1000 кг. Поэтому вопрос технической реализации такого заряда не должен вызывать проблем. С другой стороны, вопрос, касающийся оперативного переноса центра заряда внутри КА, может быть решен с использованием устройства, предложенного в изобретении [Петров, Тихонов, 2001].

На рис. 7–9 изображены графики изменения величин $\frac{|\vec{P}_{rest}|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{diss}|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{compl}|}{Q}$ в процессе стабилизации программного движения КА для тех же параметров из табл. 1.

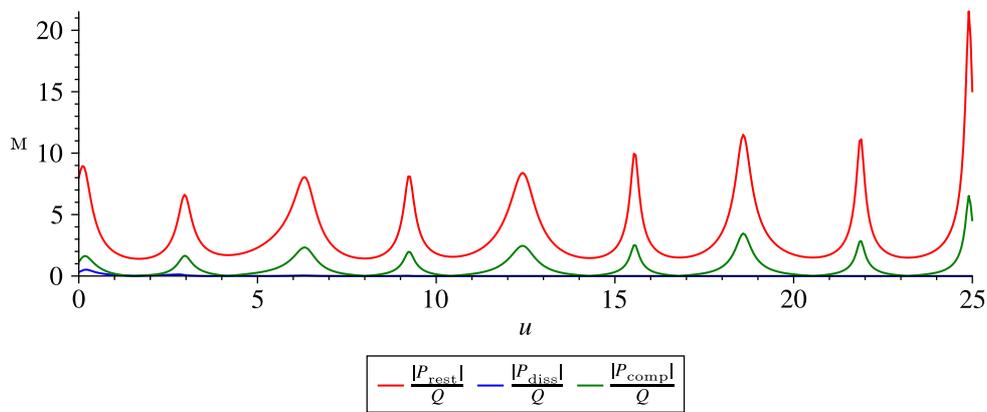


Рис. 7. Изменение величин $\frac{|\vec{P}_{rest}|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{diss}|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{compl}|}{Q}$, отмеченных на рисунке красным, синим и зеленым цветом соответственно, выраженных в метрах, в зависимости от безразмерной переменной u для КА, движущегося по орбите с наклоном $i_1 = 70^\circ$

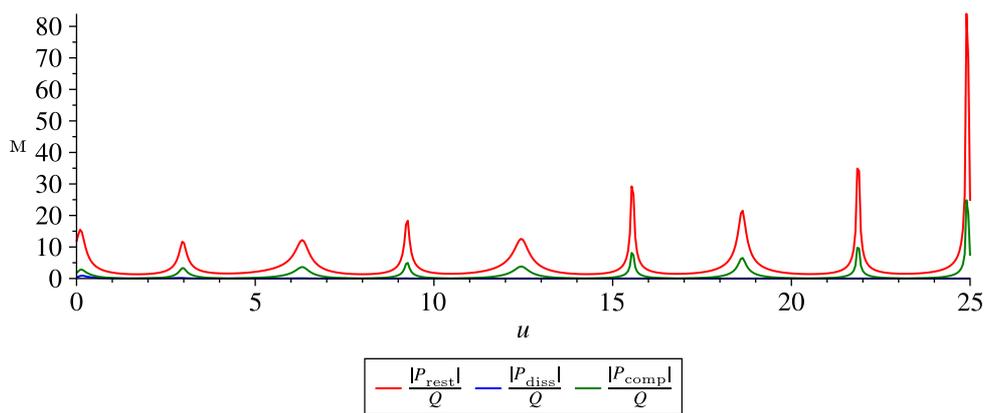


Рис. 8. Изменение величин $\frac{|\vec{P}_{rest}|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{diss}|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{compl}|}{Q}$, отмеченных на рисунке красным, синим и зеленым цветом соответственно, выраженных в метрах, в зависимости от безразмерной переменной u для КА, движущегося по орбите с наклоном $i_2 = 80^\circ$

Анализ полученных результатов позволяет сделать выводы о том, что, во-первых, по мере приближения i к 90° значения $|\vec{\rho}_0|$ стремительно нарастают и оказываются недопустимо большими.

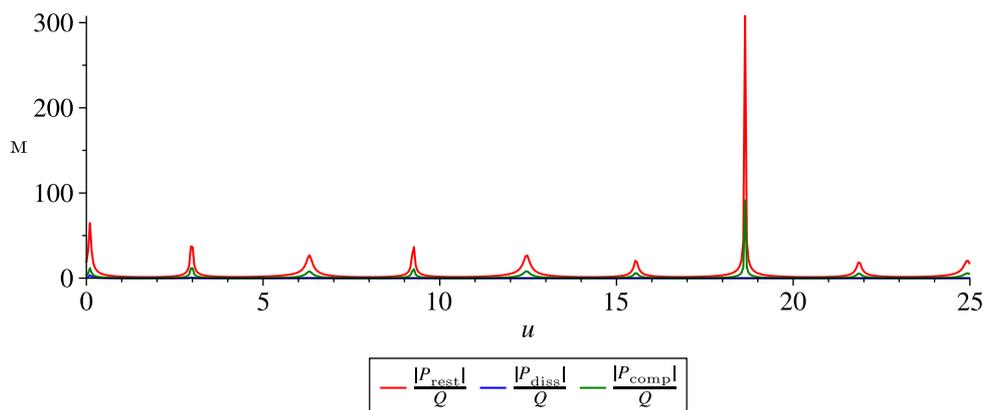


Рис. 9. Изменение величин $\frac{|\vec{P}_{rest}|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{diss}|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{comp}|}{Q}$, отмеченных на рисунке красным, синим и зеленым цветом соответственно, выраженных в метрах, в зависимости от безразмерной переменной u для КА, движущегося по орбите с наклоном $i_3 = 90^\circ$

ми по сравнению с размерами КА и, во-вторых, наибольший вклад в длину вектора $\vec{\rho}_0$ вносит компонента \vec{P}_{rest} . Следовательно, требуется модификация метода, и в первую очередь она должна быть направлена на ограничение составляющей \vec{P}_{rest} .

Согласно исследованию, выполненному в [Тихонов и др., 2011], из формулы для восстанавливающей компоненты вектора $\vec{P}_{rest} = Qk_L \mathbf{A}_0^\top \vec{T}$ следует, что компонента $\vec{P}_{rest}^{\parallel}$, направленная вдоль вектора \vec{T} , не вносит вклада в управляющий момент \vec{M}_L . Следовательно, возможна оптимизация вектора \vec{P} , соответствующая минимизации компоненты $\vec{P}_{rest}^{\parallel}$. Тогда вместо вектора \vec{P}_{rest} будет создаваться только составляющая \vec{P}_{rest}^{\perp} , определяемая по формуле

$$\vec{P}_{rest}^{\perp} = \vec{P}_{rest} - \vec{P}_{rest}^{\parallel} = Qk_L \left(\vec{T}_0 - (\vec{T}_0 \cdot \vec{T}) \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|^2} \right). \quad (15)$$

С учетом оптимизации (15) выполнена серия численных экспериментов по стабилизации программного режима движения КА при тех же значениях параметров (см. табл. 1). На рис. 10–12 представлены графики изменения величин $\frac{|\vec{P}_{rest}^{\perp}|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{diss}|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{comp}|}{Q}$.

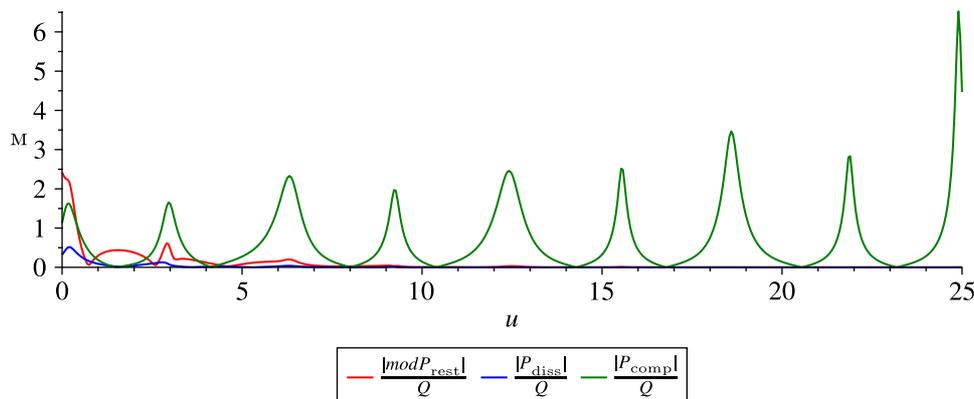


Рис. 10. Изменение величин $\frac{|\text{mod } P_{rest}|}{Q} = \frac{|\vec{P}_{rest}^{\perp}|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{diss}|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{comp}|}{Q}$, отмеченных на рисунке красным, синим и зеленым цветом соответственно, выраженных в метрах, в зависимости от безразмерной переменной u для КА, движущегося по орбите с наклоном $i_1 = 70^\circ$

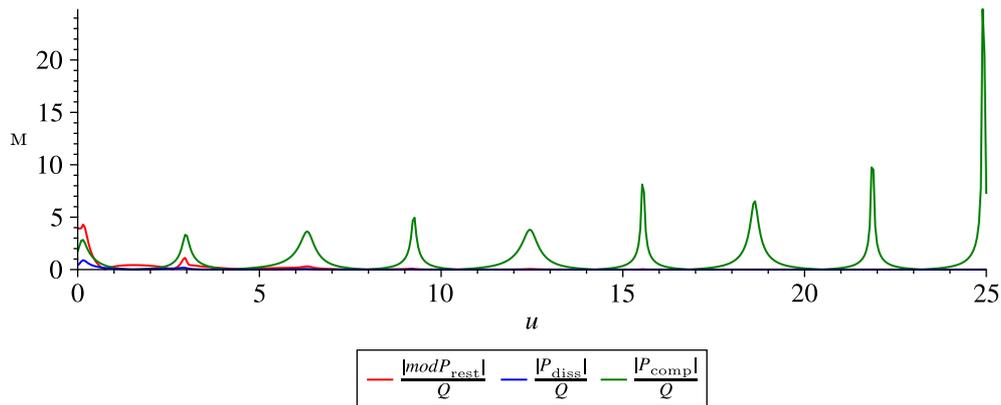


Рис. 11. Изменение величин $\frac{|modP_{rest}|}{Q} = \frac{|\vec{P}_{rest}^\perp|}{Q}$, $\frac{|P_{diss}|}{Q}$, $\frac{|P_{comp}|}{Q}$, отмеченных на рисунке красным, синим и зеленым цветом соответственно, выраженных в метрах, в зависимости от безразмерной переменной u для КА, движущегося по орбите с наклонением $i_2 = 80^\circ$

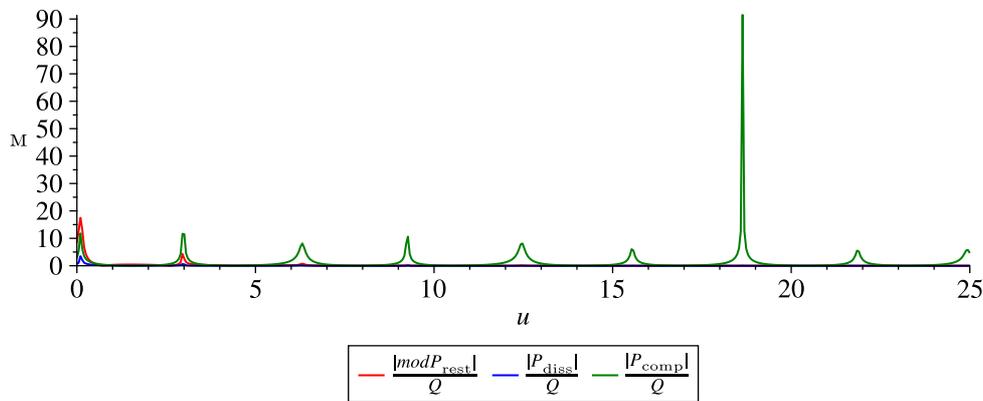


Рис. 12. Изменение величин $\frac{|modP_{rest}|}{Q} = \frac{|\vec{P}_{rest}^\perp|}{Q}$, $\frac{|P_{diss}|}{Q}$, $\frac{|P_{comp}|}{Q}$, отмеченных на рисунке красным, синим и зеленым цветом соответственно, выраженных в метрах, в зависимости от безразмерной переменной u для КА, движущегося по орбите с наклонением $i_3 = 90^\circ$

Откуда видно, что предложенная оптимизация вектора \vec{P}_{rest} позволяет существенно (для околополярных орбит — на порядок) уменьшить величину модуля вектора \vec{P} и, соответственно, вектора $\vec{\rho}_0$, который необходимо создавать в процессе управления.

Модификация управления с ограничением модуля вектора $\vec{\rho}_0$

Несмотря на то что разработанный метод позволяет обеспечить стабилизацию программного углового движения КА на орбитах с любым наклонением, вопрос технической реализации такого способа управления для КА на околополярных орбитах требует дальнейшей проработки, поскольку, как видно из рис. 10–12, величина $|\vec{\rho}_0|$ может достигать неприемлемо больших значений. Это обстоятельство связано с тем, что при наклонениях орбиты, близких к 90° , имеются такие точки на траектории КА, в которых возможно совпадение линий действия вектора геомагнитной индукции \vec{B} и вектора \vec{v}_C скорости центра масс КА относительно МПЗ. В результате в этих точках вектор \vec{T} становится близком к нулевому, а эффективность управляющего момента \vec{M}_L резко падает. Учитывая, что упомянутые падения являются кратковременными, предлагается модифицировать закон управления (10), (11) таким образом, чтобы вместо величины $|\vec{T}|$

в него входила модифицированная норма $|\vec{T}|_{\text{mod}}$, вычисляемая по формуле

$$|\vec{T}|_{\text{mod}} = \frac{1}{2}(|\delta - |\vec{T}|| + \delta + |\vec{T}|), \quad (16)$$

где $\delta = \min_u(|\vec{T}|_{i=0}) \approx 0,12$ (см. рис. 13).

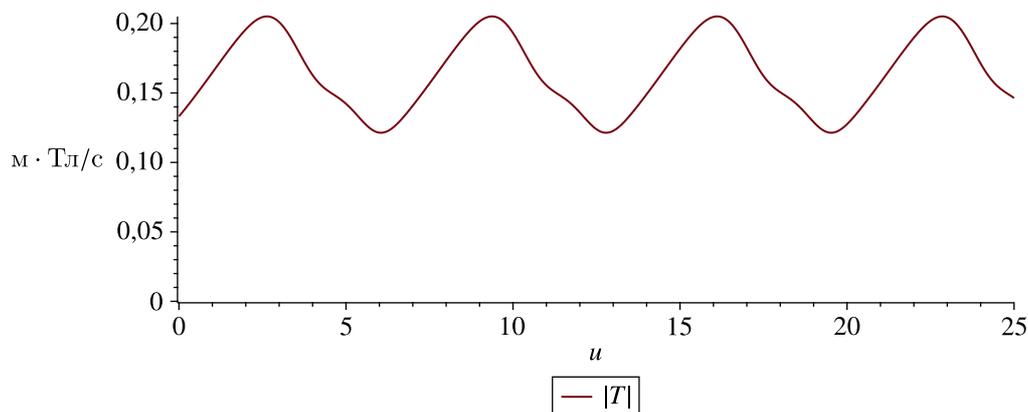


Рис. 13. Изменение модуля вектора $\vec{T} = \mathbf{A}^T(\vec{v}_C \times \vec{B})$, выраженного в м·Тл/с, в зависимости от безразмерной переменной u для КА, находящегося на экваториальной орбите (наклонение $i = 0$)

При таком выборе постоянной δ величина $|\vec{T}|_{\text{mod}}$, вычисленная по формуле (16), для КА, движущегося по полярной орбите, будет изменяться, как показано на рис. 14. Предложенная модификация нормы вектора \vec{T} позволяет ограничить норму вектора $\vec{\rho}_0$ по всем трем его компонентам и тем самым обеспечить реализуемость лоренцева момента для КА, движущихся в том числе и по околополярным орбитам.

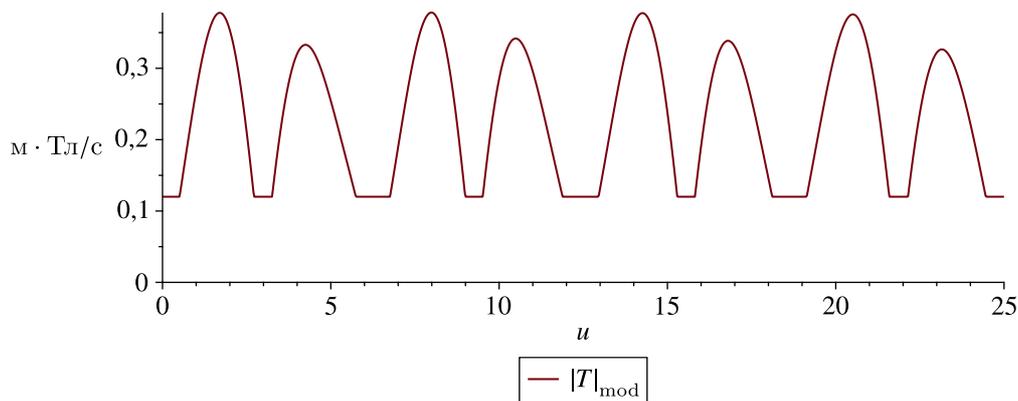


Рис. 14. Изменение модуля вектора $|\vec{T}|_{\text{mod}}$, выраженного в м·Тл/с, в зависимости от безразмерной переменной u для КА на полярной орбите при $\delta = 0,12$

На рис. 15–17 приведены значения составляющих управляемого вектора $\vec{\rho}_0$ с учетом оптимизации восстанавливающей компоненты \vec{P}_{rest} и модификации управления (10), (11), (16), полученные в процессе интегрирования системы дифференциальных уравнений управляемого движения КА для параметров из табл. 1.

Легко видеть, что все три компоненты вектора $\vec{\rho}_0$ ограничены, а его модуль не превосходит, даже по существенно завышенной оценке, величины 2,1 м.

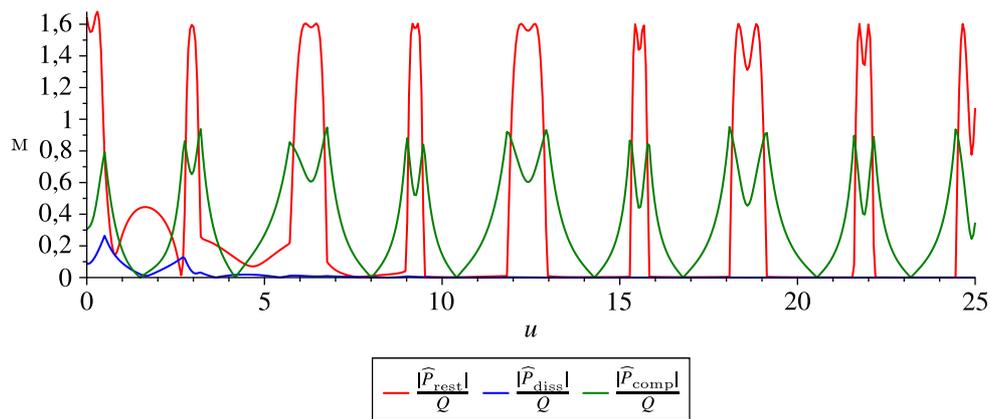


Рис. 15. Изменение величин $\frac{|\widehat{P}_{rest}|}{Q} = \frac{|\vec{P}_{rest}^\pm|}{Q}$, $\frac{|\widehat{P}_{diss}|}{Q} = \frac{|\vec{P}_{diss}|}{Q}$, $\frac{|\widehat{P}_{comp}|}{Q} = \frac{|\vec{P}_{comp}|}{Q}$ с учетом оптимизации восстанавливающей компоненты \vec{P}_{rest} и модификации управления (10), (11), (16), отмеченных на рисунке красным, синим и зеленым цветом соответственно, выраженных в метрах, в зависимости от безразмерной переменной u для КА, движущегося по орбите с наклоном $i_1 = 70^\circ$, $\delta = 0,12$

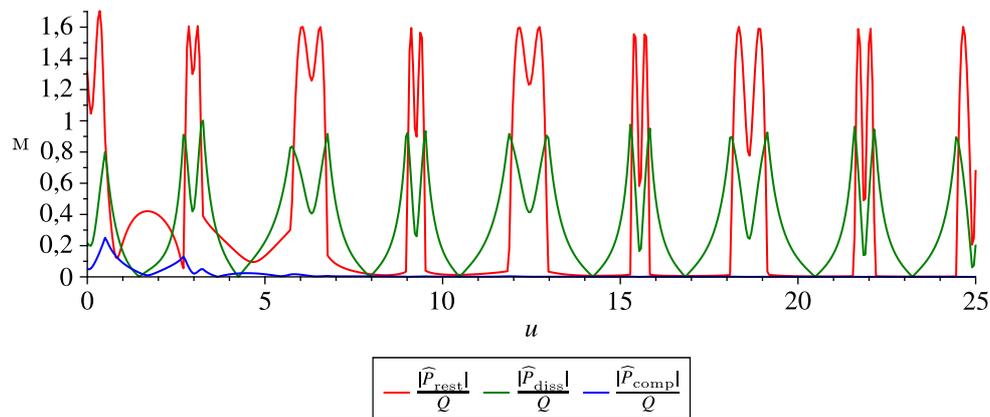


Рис. 16. Изменение величин $\frac{|\widehat{P}_{rest}|}{Q} = \frac{|\vec{P}_{rest}^\pm|}{Q}$, $\frac{|\widehat{P}_{diss}|}{Q} = \frac{|\vec{P}_{diss}|}{Q}$, $\frac{|\widehat{P}_{comp}|}{Q} = \frac{|\vec{P}_{comp}|}{Q}$ с учетом оптимизации восстанавливающей компоненты \vec{P}_{rest} и модификации управления (10), (11), (16), отмеченных на рисунке красным, синим и зеленым цветом соответственно, выраженных в метрах, в зависимости от безразмерной переменной u для КА, движущегося по орбите с наклоном $i_2 = 80^\circ$, $\delta = 0,12$

Анализ переходных процессов, имеющих место при модифицированном управлении, свидетельствует о том, что даже в самом неблагоприятном случае полярной орбиты ($i = 90^\circ$) они мало отличаются от аналогичных процессов, рассчитанных с управлением (10), (11) (см. рис. 18).

Таким образом, предложенная модификация управления (10), (11) с учетом замены (16) для $|\vec{T}|$ обеспечивает техническую реализуемость метода управления без снижения его эффективности.

Заключение

В статье предложены оптимизация электродинамического метода управления угловым движением КА, которая минимизирует энергозатраты на создание управляющих моментов — лоренцева момента и момента магнитного взаимодействия, а также его модификация, позволяющая гарантировать ограниченность вектора статического момента заряда первого порядка в процессе генерирования управляющего лоренцева момента вне зависимости от наклона орбиты КА.

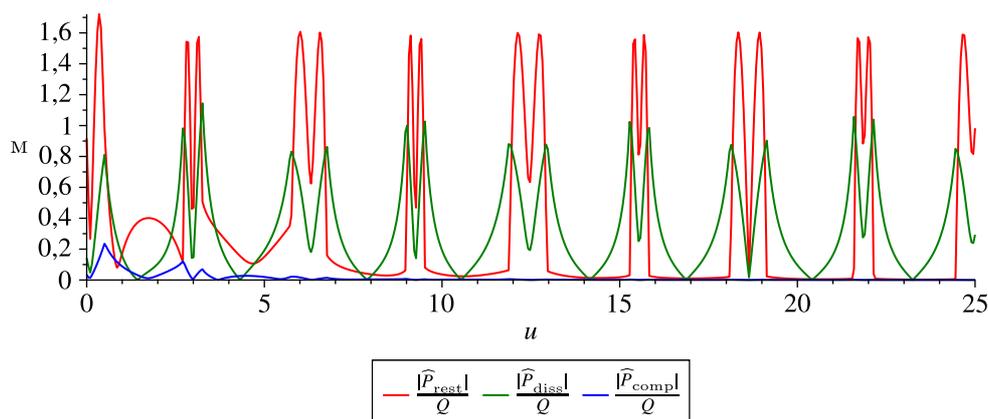


Рис. 17. Изменение величин $\frac{|\vec{P}_{rest}|}{Q} = \frac{|\vec{P}_{rest}^*|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{diss}|}{Q} = \frac{|\vec{P}_{diss}^*|}{Q}$, $\frac{|\vec{P}_{comp}|}{Q} = \frac{|\vec{P}_{comp}^*|}{Q}$ с учетом оптимизации восстанавливающей компоненты \vec{P}_{rest} и модификации управления (10), (11), (16), отмеченных на рисунке красным, синим и зеленым цветом соответственно, выраженных в метрах, в зависимости от безразмерной переменной u для КА, движущегося по орбите с наклонением $i_3 = 90^\circ$, $\delta = 0,12$

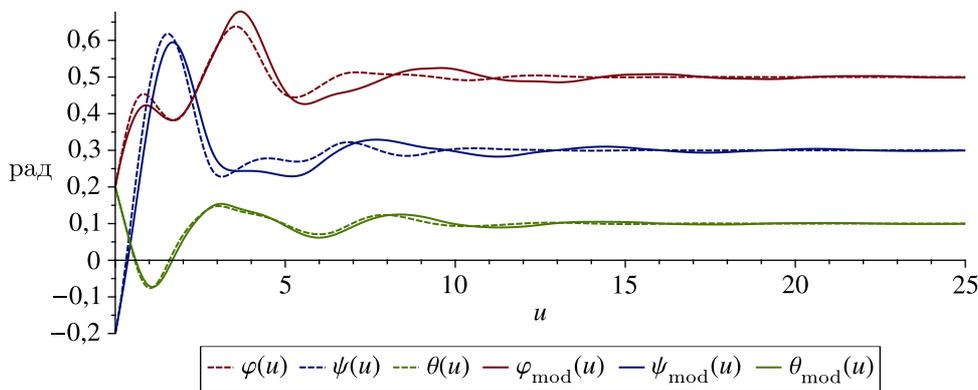


Рис. 18. Сравнение переходных процессов стабилизации КА на орбите с наклонением $i_3 = 90^\circ$ для исходного (пунктирная линия) и модифицированного (сплошная линия) управлений, выраженное в виде графиков зависимостей «самолетных» углов φ , ψ , θ от безразмерной переменной u

Проведенный в статье анализ величины управляемого вектора \vec{P} позволил выявить особенности электродинамической системы управления для КА, находящихся на орбитах с наклонением, близким к $\frac{\pi}{2}$, связанные с тем, что величина вектора $\vec{\rho}_0$ значительно превышает характерные размеры КА. Таким образом, предложенный в статье подход к формированию управляющего момента \vec{M}_L в виде (15), при этом никак не влияя на его величину и направление, позволит уменьшить модуль вектора $\vec{\rho}_0$ до величины, соответствующей размерам реального КА.

Выполненные в работе расчеты, проведенные с использованием заведомо заниженного на три порядка значения заряда Q , подтверждают целесообразность использования предложенной оптимизации управления при реализации ее на практике для КА, находящихся на орбитах любого наклонения, включая приполярные и полярные.

Список литературы (References)

- Александров А. Ю., Александрова Е. Б., Лапшин А. Е., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация искусственного спутника Земли в режиме двухосной закрутки // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2017. — Т. 18, № 5. — С. 346–351. — DOI: 10.17587/mau.18.346-351

- Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Lapshin A. E., Tikhonov A. A.* Elektrodinamicheskaya stabilizaciya iskusstvennogo sputnika Zemli v rezhime dvuhosnoj zakrutki [Electrodynamic stabilization of an artificial Earth satellite in the mode of biaxial rotation] // *Mekhatronika, avtomatizaciya, upravlenie*. — 2017. — Vol. 18, No. 5. — P. 346–351. — DOI: 10.17587/mau.18.346-351 (in Russian).
- Александров А. Ю., Антипов К. А., Платонов А. В., Тихонов А. А.* Электродинамическая стабилизация искусственного спутника Земли в кёниговой системе координат // *Известия РАН. Теория и системы управления*. — 2016. — № 2. — С. 128–141.
- Aleksandrov A. Yu., Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A.* Elektrodinamicheskaya stabilizaciya iskusstvennogo sputnika Zemli v kenigovoj sisteme koordinat [Electrodynamic stabilization of a satellite in the Koenig coordinate system] // *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*. — 2016. — No. 2. — P. 128–141 (in Russian).
- Александров А. Ю., Тихонов А. А.* Одноосная электродинамическая стабилизация искусственного спутника Земли в орбитальной системе координат // *Автоматика и телемеханика*. — 2013. — № 8. — С. 22–31.
- Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Monoaxial electrodynamic stabilization of earth satellite in the orbital coordinate system // *Autom. Remote Control*. — 2013. — Vol. 74. — P. 1249–1256. — DOI: 10.1134/S000511791308002X (Original Russian paper: *Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Odnoosnaya elektrodinamicheskaya stabilizaciya iskusstvennogo sputnika Zemli v orbital'noj sisteme koordinat // *Avtomatika i telemekhanika*. — 2013. — No. 8. — P. 22–31.)
- Антипов К. А., Петров К. Г., Тихонов А. А.* Электродинамический метод трехосной стабилизации динамически симметричного космического аппарата // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1*. — 2006. — Вып. 1, № 1. — С. 79–90.
- Antipov K. A., Petrov K. G., Tikhonov A. A.* Elektrodinamicheskij metod trekhosnoj stabilizacii dinamicheski simmetrichnogo kosmicheskogo apparata [The electrodynamic method for attitude stabilization of a dynamically symmetric spacecraft] // *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser. 1*. — 2006. — Vyp. 1, No. 1. — P. 79–90 (in Russian).
- Антипов К. А., Тихонов А. А.* Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли // *Автоматика и телемеханика*. — 2007. — № 8. — С. 44–56.
- Antipov K. A., Tikhonov A. A.* Parametric control in the problem of spacecraft stabilization in the geomagnetic field // *Automation and Remote Control*. — 2007. — Vol. 68. — P. 1333–1344. — DOI: 10.1134/S000511790708005X (Original Russian paper: *Antipov K. A., Tikhonov A. A.* Parametricheskoe upravlenie v zadache o stabilizacii kosmicheskogo apparata v magnitnom pole Zemli // *Avtomatika i telemekhanika*. — 2007. — No. 8. — P. 44–56.)
- Антипов К. А., Тихонов А. А.* Мультипольные модели геомагнитного поля: построение N -го приближения // *Геомагнетизм и аэронавигация*. — 2013. — Т. 53, № 2. — С. 271–281.
- Antipov K. A., Tikhonov A. A.* Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the N th approximation // *Geomagn. Aeron.* — 2013. — Vol. 53. — P. 257–267. — DOI: 10.1134/S0016793213020023 (Original Russian paper: *Antipov K. A., Tikhonov A. A.* Mul'tipol'nye modeli geomagnitnogo polya: postroenie N -go priblizheniya // *Geomagnetizm i aeronomiya*. — 2013. — Vol. 53, No. 2. — P. 271–281.)
- Антипов К. А., Тихонов А. А.* Электродинамическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // *Космические исследования*. — 2014. — Т. 52, № 6. — С. 512–520.
- Antipov K. A., Tikhonov A. A.* Electrodynamic control for spacecraft attitude stability in the geomagnetic field // *Cosmic Research*. — 2014. — Vol. 52, No. 6. — P. 472–480. — DOI: 10.7868/S0023420614060016 (Original Russian paper: *Antipov K. A., Tikhonov A. A.* Elektrodinamicheskoe upravlenie v zadache o stabilizacii kosmicheskogo apparata v geomagnitnom pole // *Kosmicheskie issledovaniya*. — 2014. — Vol. 52, No. 6. — P. 512–520.)
- Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. — М.: Наука, 1965. — 416 с.
- Beleckiy V. V.* Motion of an artificial satellite about its center of mass. — Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, 1966. (Russ. ed.: *Beleckiy V. V.* Dvizhenie iskusstvennogo sputnika Zemli otnositel'no centra mass. — Moscow: Nauka, 1965. — 416 p.)
- Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Издательство Московского университета, 1975. — 307 с.
- Beleckiy V. V.* Dvizhenie sputnika otnositel'no centra mass v gravitacionnom pole. — Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1975. — 307 p. (in Russian).
- Буянов И. С., Кокорич М. Г.* Применение высокоэллиптических орбит (ВЭО) для связи в полярных районах // *Современные проблемы телекоммуникаций: материалы Всероссийской научно-технической конференции*. — Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2024. — С. 314–318. — DOI: 10.55648/SPT-2024-1-314
- Buyanov I. S., Kokorich M. G.* Primenenie vysokoellipticheskikh orbit (VEO) dlya svyazi v polyarnyh rajonah [Application of highly elliptical orbits for communications in polar regions] // *Sovremennye problemy telekommunikacij: materialy Vserossijskoj nauchno-tehnicheskoy konferencii*. — Novosibirsk: Sibirskij gosudarstvennyj universitet telekommunikacij i informatiki, 2024. — P. 314–318 (in Russian).

- Зубов В. И.** Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 495 с.
Zubov V.I. Theorie de la commande. — Moscow: Mir, 1978 (in French). (Russ. ed.: *Zubov V.I.* Lekcii po teorii upravleniya. — Moscow: Nauka, 1975. — 495 p.)
- Каленова В. И., Морозов В. М.** Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. — М.: Физматлит, 2010. — 208 с.
Morozov V.M., Kalenova V.I. Lineynye nestatsionarnye sistemy i ikh prilozheniya k zadacham mekhaniki [Linear nonstationary systems and their applications to problems of mechanics]. — Moscow: Fizmatlit Publ., 2010. — 208 p. (in Russian).
- Каленова В. И., Морозов В. М.** Приводимость линейных нестационарных систем специального вида с управлением и наблюдением // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2019. — Т. 58, № 1. — С. 3–12.
Morozov V.M., Kalenova V.I. Reducibility of linear time-varying systems of special form with control and measurements // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2019. — Vol. 58, No. 1. — P. 1–11. (Original Russian paper: *Morozov V.M., Kalenova V.I.* Privodimost' linejnyh nestacionarnyh sistem special'nogo vida s upravleniem i nablyudeniem // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. — 2019. — Vol. 58, No. 1. — P. 3–12.)
- Каленова В. И., Морозов В. М., Тихонов А. А.** Стабилизация относительного равновесия спутника при учете более сложной модели геомагнитного поля // XLVIII Академические чтения по космонавтике. Сборник тезисов, посвященный памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства. — В 3-х томах. — Т. 1. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2024. — С. 295–298.
Kalenova V.I., Morozov V.M., Tikhonov A.A. Stabilizaciya odnositel'nogo ravnovesiya sputnika pri uchete bolee slozhnoj modeli geomagnitnogo polya [Stabilization of the relative equilibrium of the spacecraft by taking into account a more complex model of the geomagnetic field] // XLVIII Akademicheskie chteniya po kosmonavtike. Sbornik tezisov, posvyashchennyj pamyati akademika S.P.Korolyova i drugih vydayushchihsya otechestvennyh uchenyh – pionerov osvoeniya kosmicheskogo prostranstva. — V 3-h tomah. — T. 1. — Moscow: Izd-vo MG TU im. N. E. Baumana, 2024. — P. 295–298 (in Russian).
- Морозов В. М., Каленова В. И.** Управление с помощью магнитных моментов ориентацией спутника, движущегося по полярной орбите // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2018. — № 9 (81). — С. 8–23. — DOI: 10.18698/2308-6033-2018-9-1798
Morozov V.M., Kalenova V.I. Upravlenie s pomoshch'yu magnitnyh momentov orientaciej sputnika, dvizhushchegosya po polyarnoj orbite [Controlling the orientation of a polar-orbiting satellite by means of magnetic moments] // Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii. — 2018. — No. 9 (81). — P. 8–23. — DOI: 10.18698/2308-6033-2018-9-1798 (in Russian).
- Морозов В. М., Каленова В. И.** Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации // Космические исследования. — 2020. — Т. 58, № 3. — С. 199–207. — DOI: 10.1134/S0010952520030041
Morozov V.M., Kalenova V.I. Satellite control using magnetic moments: controllability and stabilization algorithms // Cosmic Research. — 2020. — Vol. 58. — P. 158–166. — DOI: 10.1134/S0010952520030041 (Original Russian paper: *Morozov V.M., Kalenova V.I.* Upravlenie sputnikom pri pomoshchi magnitnyh momentov: upravlyaemost' i algoritmy stabilizacii // Kosmicheskie issledovaniya. — 2020. — Vol. 58, No. 3. — P. 199–207.)
- Петров К. Г., Тихонов А. А.** Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч. 1: Напряженность магнитного поля Земли в орбитальной системе координат // Вестник Санкт-Петербургского университета. — 1999. — Вып. 1, № 1. — С. 92–100.
Petrov K.G., Tikhonov A.A. Moment sil Lorenca, dejstvuyushchih na zaryazhennyj sputnik v magnitnom pole Zemli. Ch. 1: Napryazhennost' magnitnogo polya Zemli v orbital'noj sisteme koordinat [The moment of Lorentz forces acting on a charged satellite in the Earth's magnetic field. Part 1: The intensity of the Earth's magnetic field in the orbital coordinate system] // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. — 1999. — Vyp. 1, No. 1. — P. 92–100 (in Russian).
- Петров К. Г., Тихонов А. А.** Патент RU – № 2191146 – С1 на изобретение «Способ полупассивной стабилизации искусственного спутника Земли и устройство для его реализации» МПК 7 В64G 1/32, 1/38 по заявке № 2001107811, Приоритет 16.03.01, 34 с.
Petrov K.G., Tikhonov A.A. Sposob polupassivnoj stabilizacii iskusstvennogo sputnika Zemli i ustrojstvo dlya ego realizacii [A method for semi-passive stabilization of an artificial Earth satellite and a device for its implementation] // Patent on invention RU – No. 2191146. — 2001. — 34 p. (in Russian).
- Сарычев В. А., Овчинников М. Ю.** Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли // Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1985. — Т. 23. — 104 с.
Sarychev V.A., Ovchinnikov M.Yu. Magnitnyye sistemy orientatsii iskusstvennykh sputnikov Zemli [Magnetic systems of attitude control for Earth's artificial satellites] // Itogi nauki i tekhniki. Ser. Issledovanie kosmicheskogo prostranstva. — Moscow: VINITI AN SSSR, 1985. — Vol. 23. — 104 p. (in Russian).

- Тихонов А. А.* Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исследования. — 2003. — Т. 41, № 1. — С. 69–79.
Tikhonov A. A. A method of semipassive attitude stabilization of a spacecraft in the geomagnetic field // Cosmic Research. — 2003. — Vol. 41, No. 1. — P. 63–73. (Original Russian paper: *Tikhonov A. A.* Metod polupassivnoy stabilizacii kosmicheskogo apparata v geomagnitnom pole // Kosmicheskie issledovaniya. — 2003. — Vol. 41, No. 1. — P. 69–79.)
- Тихонов А. А., Петров К. Г.* Мультипольные модели магнитного поля Земли // Космические исследования. — 2002. — Т. 40, № 3. — С. 219–229.
Tikhonov A. A., Petrov K. G. Multipole models of the Earth's magnetic field // Cosmic Research. — 2002. — Vol. 40, No. 3. — P. 203–212. — DOI: 10.1023/A:1015916718570 (Original Russian paper: *Tikhonov A. A., Petrov K. G.* Mul'tipol'nye modeli magnitnogo polya Zemli // Kosmicheskie issledovaniya. — 2002. — Vol. 40, No. 3. — P. 219–229.)
- Тихонов А. А., Спасич Д. Т., Антипов К. А., Саблина М. В.* Оптимизация электродинамического метода стабилизации искусственного спутника Земли // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 9. — С. 112–120.
Tikhonov A. A., Antipov K. A., Sablina M. V., Spasich D. T. Optimizing the electrodynamic stabilization method for a man-made Earth satellite // Automation and Remote Control. — 2011. — Vol. 72, No. 9. — P. 1898–1905. (Original Russian paper: *Tikhonov A. A., Spasich D. T., Antipov K. A., Sablina M. V.* Optimizaciya elektrodinamicheskogo metoda stabilizacii iskusstvennogo sputnika Zemli // Avtomatika i telemekhanika. — 2011. — No. 9. — P. 112–120.)
- Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Asymptotic stability of a satellite with electrodynamic attitude control in the orbital frame // Acta Astronautica. — 2017. — Vol. 139. — P. 122–129. — DOI: 10.1016/j.actaastro.2017.06.033
- Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite // Aerospace Science and Technology. — 2020. — Vol. 104. — P. 105963. — DOI: 10.1016/j.ast.2020.105963
- Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Natural magneto-velocity coordinate system for satellite attitude stabilization: dynamics and stability analysis // Journal of Applied and Computational Mechanics. — 2023. — Vol. 9, No. 2. — P. 513–520. — DOI: 10.22055/jacm.2022.41942.3842
- Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* On electrodynamic attitude stabilization of a spacecraft in the natural magneto-velocity coordinate system // Awrejcewicz J. (eds.) Perspectives in dynamical systems. II — Numerical and analytical approaches. — Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — Vol. 454. Cham: Springer, 2024. — DOI: 10.1007/978-3-031-56496-3_47
- Antipov K. A., Tikhonov A. A.* On satellite electrodynamic attitude stabilization // Aerospace Science and Technology. — 2014. — Vol. 33. — P. 92–99. — DOI: 10.1016/j.ast.2014.01.004
- Aslanov V. S., Sizov D. A.* Chaotic pitch motion of an aerodynamically stabilized magnetic satellite in polar orbits // Chaos, Solitons & Fractals. — 2022. — Vol. 164. — P. 112718. — DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112718
- Cunningham J. D., Bloom H. J., Nelson C. S.* National polar-orbiting operational environmental satellite system: meeting future user needs for Earth system observations // Proc. SPIE 5549, Weather and Environmental Satellites. — 2004. — DOI: 10.1117/12.560214
- Dosaev M.* Interaction between internal and external friction in rotation of vane with viscous filling // Applied Mathematical Modelling. — 2019. — Vol. 68. — P. 21–28. — DOI: 10.1016/j.apm.2018.11.002
- Gangestad J. W., Pollock G. E., Longuski J. M.* Lagrange's planetary equations for the motion of electrostatically charged spacecraft // Celest. Mech. Dyn. Astr. — 2010. — Vol. 108. — P. 125–145. — DOI: 10.1007/s10569-010-9297-z
- Giri D., Mukherjee B., T N B., Sinha M.* Three-axis global magnetic attitude control of Earth-pointing satellites in circular orbit // Asian Journal of Control. — 2017. — Vol. 19, No. 3. — DOI: 10.1002/asjc.1506
- Giri D. K., Sinha M.* Magneto-Coulombic attitude control of earth-pointing satellites // J. Guid. Control. Dyn. — 2014. — Vol. 37, No. 6. — P. 1946–1960. — DOI: 10.2514/1.G000030

- Giri D.K., Sinha M.* Three-axis attitude control of Earth-pointing isoinertial magneto-Coulombic satellites // *Int. J. Dyn. Control.* — 2017. — Vol. 5, No. 3. — P. 644–652. — DOI: 10.1007/s40435-015-0206-x
- Klyushin M. A., Maksimenko M. V., Tikhonov A. A.* Electrodynamic attitude stabilization of a spacecraft in an elliptical orbit // *Aerospace.* — 2024. — Vol. 11, No. 11. — P. 956. — DOI: 10.3390/aerospace11110956
- Maksimenko M. V., Tikhonov A. A.* Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in an indirect position // *Acta Astronautica.* — 2025. — Vol. 232. — P. 516–524. — DOI: 10.1016/j.actaastro.2025.03.018
- Ovchinnikov M., Roldugin D.* Magnetic attitude control and periodic motion for the in-orbit rotation of a dual-spin satellite // *Acta Astronautica.* — 2021. — Vol. 186. — P. 203–210. — DOI: 10.1016/j.actaastro.2021.05.035
- Ovchinnikov M. Y., Roldugin D. S., Penkov V. I.* Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // *Acta Astronautica.* — 2015. — Vol. 110. — P. 279–286. — DOI: 10.1016/j.actaastro.2014.11.030
- Prabhat H., Mukherjee B. K., Giri D. K., Sinha M.* Fault-tolerant sliding mode satellite attitude stabilization using magneto-Coulombic torquers // *Aerosp. Sci. Technol.* — 2022. — Vol. 121. — DOI: 10.1016/j.ast.2021.107316
- Reyhanoglu M., Drakunov S.* Attitude stabilization of small satellites using only magnetic actuation // 34th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics. — 2008. — DOI: 10.1109/iecon.2008.4757
- Rodriguez-Vazquez A., Prats M. M.* Spacecraft magnetic attitude control using approximating sequence of Riccati equations // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems.* — 2014. — Vol. 51. — DOI: 10.1109/TAES.2015.130478
- Tealib S. K., Abdel-Aziz Y., Awad M. E., Khalil K. I., Radwan M.* Satellite formation flying control using an innovative technique subject to electromagnetic acceleration // *Int. J. Space Science and Engineering.* — Vol. 6, No. 2. — P. 147–164.
- Tikhonov A. A.* On electrodynamic compensation of a torque disturbing satellite orientation // 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP), October 5–9, Saint Petersburg. — 2015. — P. 132–134. — DOI: 10.1109/SCP.2015.7342069
- Tikhonov A. A., Antipov K. A., Korytnikov D. G., Nikitin D. Yu.* Electrodynamic compensation of disturbing torque and attitude stabilization of a satellite in J2 perturbed orbit // *Acta Astronautica.* — 2017. — Vol. 141. — P. 219–227. — DOI: 10.1016/j.actaastro.2017.10.009