

УДК: 537.622

## Оптимизированные методы машинного обучения для исследования термодинамического поведения сложных спиновых систем

Д. Ю. Капитан<sup>1,a</sup>, П. А. Овчинников<sup>1,2</sup>, К. С. Солдатов<sup>1,2</sup>,  
П. Д. Андрющенко<sup>3</sup>, В. Ю. Капитан<sup>4,b</sup>

<sup>1</sup>Институт наукоемких технологий и передовых материалов, Дальневосточный федеральный университет, Россия, 690922, г. Владивосток, о. Русский, пос. Аякс, д. 10

<sup>2</sup>Институт прикладной математики, Дальневосточное отделение Российской академии наук, Россия, 690041, Владивосток, ул. Радио, д. 7

<sup>3</sup>Гейдельбергский институт глобального здравоохранения, Гейдельбергская университетская клиника, Гейдельбергский университет, ИНФ 130.3, Гейдельберг, 69120, Германия

<sup>4</sup>Институт функциональных интеллектуальных материалов, Национальный университет Сингапура, 21 Лоувер Кент Ридж Роуд, Сингапур 119077, Сингапур

E-mail: <sup>a</sup> kapitandmitrii@gmail.com, <sup>b</sup> kapitanvy@gmail.com

Получено 22.11.2025, после доработки — 11.12.2025.

Принято к публикации 12.12.2025.

В настоящей работе проводится систематическое исследование применения сверточных нейронных сетей (CNN) в качестве эффективного инструмента для анализа критических и низкотемпературных фазовых состояний в моделях двумерных спиновых систем. Рассматривается задача расчета зависимости средней энергии  $\langle E \rangle_T$  от пространственного распределения обменных интегралов  $J_k$  для модели Эдвардса – Андерсона на квадратной решетке с фрустрированными взаимодействиями. Реализуется единый сверточный классификатор фазовых состояний ферромагнитной модели Изинга на квадратной, треугольной, гексагональной решетках и кагоме-решетке, обученный на конфигурациях, сгенерированных кластерным алгоритмом Свендсена – Ванга. Температурные профили усредненной апостериорной вероятности высокотемпературной фазы, вычисленные этим классификатором, образуют четкие S-образные кривые с пересечением вблизи теоретических критических температур и позволяют установить значение  $T_c$  для решетки кагоме без дополнительного дообучения. Показано, что сверточные модели позволяют существенно снизить среднеквадратичную ошибку (RMSE) по сравнению с полносвязными архитектурами и эффективно улавливают сложные связи между термодинамическими характеристиками и структурой магнитных коррелированных систем.

Ключевые слова: модель Изинга, спиновые стекла, машинное обучение, сверточные нейронные сети

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00286 (<https://rscf.ru/project/25-21-00286/>).

© 2026 Дмитрий Юрьевич Капитан, Павел Алексеевич Овчинников, Константин Сергеевич Солдатов, Петр Дмитриевич Андрющенко, Виталий Юрьевич Капитан

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License. Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/> или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 537.622

## Optimized machine learning methods for studying the thermodynamic behavior of complex spin systems

D. Yu. Kapitan<sup>1,a</sup>, P. A. Ovchinnikov<sup>1,2</sup>, K. S. Soldatov<sup>1,2</sup>,  
P. D. Andriushchenko<sup>3</sup>, V. Yu. Kapitan<sup>4,b</sup>

<sup>1</sup>Institute of High Technologies and Advanced Materials, Far Eastern Federal University,  
10 Ajax, Russky Island, Vladivostok, 690922, Russia

<sup>2</sup>Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences,  
7 Radio st., Vladivostok, 690041, Russia

<sup>3</sup>Heidelberg Institute of Global Health, Heidelberg University Hospital, Heidelberg University,  
INF 130.3, Heidelberg, 69120, Germany

<sup>4</sup>Institute for Functional Intelligent Materials, National University of Singapore,  
21 Lower Kent Ridge Road, Singapore 119077, Singapore

E-mail: <sup>a</sup> kapitandmitrii@gmail.com, <sup>b</sup> kapitanvy@gmail.com

Received 22.11.2025, after completion – 11.12.2025.

Accepted for publication 12.12.2025.

This paper presents a systematic study of the application of convolutional neural networks (CNNs) as an efficient tool for the analysis of critical and low-temperature phase states in two dimensional spin system models. The problem of calculating the dependence of the average energy  $\langle E \rangle_T$  on the spatial distribution of exchange integrals  $J_k$  for the Edwards–Anderson model on a square lattice with frustrated interactions is considered.

We further construct a single convolutional classifier of phase states of the ferromagnetic Ising model on square, triangular, honeycomb, and kagome lattices, trained on configurations generated by the Swendsen–Wang cluster algorithm. Computed temperature profiles of the averaged posterior probability of the high-temperature phase, form clear S-shaped curves that intersect in the vicinity of the theoretical critical temperatures and allow one to determine  $T_c$  for the kagome lattice without additional retraining.

It is shown that convolutional models substantially reduce the root-mean-square error (RMSE) compared with fully connected architectures and efficiently capture complex correlations between thermodynamic characteristics and the structure of magnetic correlated systems.

Keywords: Ising model, spin glass, machine learning, convolutional neural networks

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2026, vol. 18, no. 1, pp. 25–40 (Russian).

The study was funded by the Russian Science Foundation, grant No. 25-21-00286 (<https://rscf.ru/project/25-21-00286/>).

## Введение

Описание природы низкотемпературной фазы в спиновых стеклах и фрустрированных спиновых системах остается одной из ключевых задач статистической физики [Edwards, Anderson, 1975; Parisi, 1983; Baity Jesi, 2016; Diep, 2025]. Изучение термодинамических характеристик моделей с взаимодействием между ближайшими соседями, как правило, опирается на анализ статистической суммы, содержащей информацию обо всем множестве допустимых микросостояний системы [Fisher, Huse, 1988; Yucesoy et al., 2012]. Однако с увеличением размера системы число состояний растет экспоненциально, что делает прямое вычисление статистической суммы для общего случая практически недостижимым [Lucas, 2014]. Дополнительные трудности связаны с характерными для фрустрированных систем большими временами релаксации, сложным энергетическим ландшафтом и макроскопической вырожденностью основного состояния [Krzakala, Martin, 2000; Arguin et al., 2010; Arguin et al., 2019; Itoi, 2021]. Хотя достижение равновесия требует учета большого числа микросостояний, рост вычислительных мощностей и совершенствование вычислительных методов позволили частично компенсировать возрастающую сложность задач, связанных с моделированием сложных спиновых систем [Nefedev, Kapitan, 2013; Васильев и др., 2020; Makarova et al., 2023; Lgotina et al., 2025; Ovchinnikov et al., 2025].

Из-за таких ограничений важное значение приобретают подходы, позволяющие исследовать фазовые переходы и критические явления без явного вычисления статистической суммы. Особый интерес при этом представляют алгоритмы распознавания фазовых состояний, которые опираются на статистику конфигураций и не требуют отдельной перенастройки под каждую конкретную геометрию решетки, размер системы или температурный диапазон. Методы машинного обучения предлагают инновационные подходы к решению подобных проблем, позволяя выявлять скрытые закономерности и предсказывать новые физические явления [Carrasquilla, Melko, 2017; Dean et al., 2018; McNaughton et al., 2020; Bukov et al., 2021; Kapitan et al., 2021; Zhang et al., 2021; Король и др., 2022; Fan et al., 2023]. В частности, сверточные нейронные сети (CNN) особенно хорошо подходят для обработки пространственно структурированных данных. Их архитектура, включающая последовательное применение сверточных слоев, позволяет автоматически извлекать иерархии признаков [Kapitan et al., 2023; Jiang et al., 2024].

В настоящей работе проводится систематическое исследование применения сверточных нейронных сетей в качестве эффективного инструмента для анализа критических и низкотемпературных фазовых состояний в моделях двумерных спиновых систем. Были рассмотрены две взаимосвязанные задачи. Во-первых, восстановление функциональной зависимости между средней энергией системы  $\langle E \rangle_T$  и пространственным распределением обменных интегралов  $J_k = f_j(x_k, y_k)$  на квадратной решетке спинового стекла. А также распознавание фазовых состояний в ферромагнитных решетках различных геометрий, что естественным образом позволяет определять значение критических температур без явного вычисления корреляционных функций или гамильтониана. Анализ качества предсказаний в зависимости от размера системы, типа распределения  $J_k$  и вида решетки показывает, что один и тот же тип архитектуры сверточных нейронных сетей (CNN) способен улавливать сложные связи между термодинамическими характеристиками и структурой магнитных коррелированных систем. Такой подход допускает обобщение на более широкий класс задач, включая модели с иными типами взаимодействий, фрустрациями, размерностями, а также для изучения других термодинамических характеристик [Butler et al., 2018; Shiina et al., 2024; Fu et al., 2024; Ju et al., 2025].

## Модель и обучающие данные

В настоящем исследовании была рассмотрена двумерная спиновая модель Изинга, определяемая гамильтонианом вида  $\mathcal{H} = -\sum J_{ij} S_i S_j$ , где  $S_i = \pm 1$  — спины, расположенные на узлах

различных типов решеток и взаимодействующие по заданным обменным интегралам  $J_{ij}$  между ближайшими соседями с учетом периодических граничных условий. Константы  $J_{ij}$  определяют характер взаимодействия: случайное распределение знаков  $J_{ij} = \pm 1$  соответствует фрустрированным спин-стеклольным системам, а фиксированные значения  $J_{ij} = +1$  — регулярным ферромагнитным решеткам. Таким образом, выбранная физическая модель непосредственно формирует архитектуру и формат обучающих данных: в первом случае обучающая выборка состоит из пространственно-случайных конфигураций взаимодействий, во втором — из конфигураций спинов при разных температурах для регулярных структур. Подход позволяет единообразно рассматривать широкий спектр физических задач, от анализа фазовых переходов до изучения корреляций в системах с различной топологией и типом фрустрации.

### ***Регрессия энергии спинового стекла***

В этой задаче исследуется модель Эдвардса–Андерсона на квадратной решетке с фрустрированными, случайно выбранными взаимодействиями  $J_{ij} = \pm 1$  [Edwards, Anderson, 1975]. Для каждой системы с заданным распределением  $J_{ij}$  и температуры  $T$  вычисляется средняя энергия:

$$\langle E \rangle_T = \frac{1}{N} \langle \mathcal{H} \rangle_T, \quad (1)$$

которая и используется в качестве целевой переменной для задачи регрессии.

Для установления зависимости между пространственным распределением обменных взаимодействий и термодинамическими характеристиками было реализовано и обучено несколько архитектур сверточных нейронных сетей. Применение методов глубокого обучения в задачах регрессии позволяет выявлять скрытые структурные закономерности и анализировать их вклад в формирование макроскопических свойств спиновых систем.

Для обучения моделей были подготовлены отдельные выборки для обучения, валидации и тестирования. Рассматривались две модели спинового стекла размерами  $6 \times 6$  и  $10 \times 10$ , для которых генерировались различные случайные распределения интегралов обменного взаимодействия  $J_{ij}$ . Для каждой конфигурации вычислялись значения физических характеристик при 60 температурах в диапазоне от  $[0,1; 6,0]$  с шагом 0,1. В итоге на вход нейронной сети подавались данные  $\{J_{ij}, T\}$ , а на выходе предсказывались значения средней энергии от температуры  $\langle E \rangle_T$ .

В архитектуре сверточных нейронных сетей обменные взаимодействия были разложены на два канала:  $J_{hor}$ , описывающий горизонтальные связи, и  $J_{ver}$ , описывающий вертикальные взаимодействия, что позволило явно учитывать пространственную структуру решетки.

Точным методом трансфер-матриц [Padalko et al., 2022] были рассчитаны значения средней энергии от температуры для 6860 конфигураций спинового стекла размера  $10 \times 10$ . Так как значения средней энергии каждой системы были рассчитаны для 60 значений температур, это сформировало обучающий массив размером 411 600 строк. Аналогично для решетки  $6 \times 6$  было сформировано 2010 независимых конфигураций и датасет размером 120 600 соответственно.

### ***Классификация фазовых состояний***

Для задачи классификации фазовых состояний использовался вышеописанный гамильтониан, где все взаимодействия были ферромагнитными  $J_{ij} = 1$  для всех ребер. Анализ выполнялся на нескольких типах пространственных решеток: квадратной, треугольной, гексагональной и кагоме. При этом конфигурации на решетке кагоме использовались исключительно для независимого тестирования и не входили в обучающий набор, что позволило оценить обобщающую способность модели.

Для обучения сверточной нейронной сети был сформирован набор данных, включающий конфигурации моделей Изинга на квадратных ( $32 \times 32$ ,  $48 \times 48$ ,  $56 \times 56$ ), треугольных ( $32 \times 32$ ,  $48 \times 48$ ,  $56 \times 56$ ) и гексагональных ( $22 \times 22$ ,  $34 \times 34$ ,  $42 \times 42$ ) решетках, сгенерированных кластерным алгоритмом Свендсена – Ванга [Swendsen, Wang, 1987]. Для каждого типа решетки рассматривались два непересекающихся температурных диапазона – ниже и выше критической температуры  $T_c$ . Конфигурации из узкой окрестности  $T_c$  сознательно исключались, чтобы уменьшить риск переобучения, вызванного высокой вариативностью состояний в критическом режиме.

Для каждого фиксированного значения температуры и размера решетки отбиралось не более 600 независимых конфигураций, что обеспечивало баланс между температурными классами. В итоге было использовано 43 температурных значения для квадратной, 47 – для треугольной и 58 – для гексагональной решетки. Совокупный набор данных включал 444 комбинации «температура  $\times$  размер решетки» и 266 400 конфигураций.

## Исследование термодинамического поведения спиновых стекол

Для решения задачи регрессии средней энергии от температуры  $\langle E \rangle$  (см. формулу (1)) спиновое стекло рассматривалось как взвешенный граф, в котором значения обменного взаимодействия представлены значениями ребер, а архитектура графа соответствует решетке. Для двумерной системы размером  $N = L \times L$  возможно  $2^{2N}$  различных распределений значений  $J_{ij}$ . Эти конфигурации охватывают весь спектр – от полностью антиферромагнитного состояния, при котором каждое значение  $J_k = -1$ , что приводит к  $\sum_{k=1}^{2N} J_k = -2N$ , до полностью ферромагнитного случая, где  $J_k = 1$  для всех  $k$ , и, соответственно,  $\sum_{k=1}^{2N} J_k = 2N$ .

С помощью сверточной нейронной сети мы хотим найти функциональную зависимость между средней энергией  $\langle E \rangle_T$  и пространственным распределением обменных интегралов на квадратной решетке спинового стекла  $J_k = f_J(x_k, y_k)$ . Здесь  $x_k$  и  $y_k$  представляют координаты связи  $k$ ,  $J_k$  – значение связи, а  $f_J$  – функция пространственного распределения значений связей спинового стекла. Для решения этой задачи было предложено использовать несколько архитектур CNN, описание которых приведено ниже.

Архитектура первой предложенной нейросетевой модели изображена на рис. 1. Она построена таким образом, чтобы обрабатывать конфигурации связей посредством последовательности операций свертки и пулинга (pooling). Изначально сеть использует два сверточных слоя (*Conv2D*) для извлечения низкоуровневых признаков из входных данных о связях, за которыми следуют слои пулинга с функцией максимума (*MaxPool*), которые уменьшают пространственную размерность, сохраняя при этом основную информацию. Для улучшения обобщения и предотвращения переобучения на этом этапе используется слой Dropout. Дальнейшие сверточные слои и слои пулинга постепенно уточняют представления признаков и сжимают данные. Слой глобального усреднения (*GAP*) затем агрегирует эти характеристики в компактное векторное представление. Затем этот вектор характеристик соединяется с вспомогательным входом (*Concatenate*), соответствующим температуре, что позволяет сети интегрировать как структурную, так и термодинамическую информацию. Полученный в результате комбинированный вектор проходит через полносвязные слои (*Dense*) для выполнения регрессии, что дает прогнозы средних уровней энергии. Такая архитектура облегчает эффективное моделирование поведения энергии в системах спинового стекла за счет совместного использования данных о конфигурациях связей и температуре.

Детально архитектура, представленная на рис. 1, описывается следующим образом: *Conv2D*: ( $32, 3 \times 3$ )  $\rightarrow$  *Conv2D*: ( $64, 3 \times 3$ )  $\rightarrow$  *MaxPool*: ( $2 \times 2$ )  $\rightarrow$  *Dropout*: (0,2)  $\rightarrow$

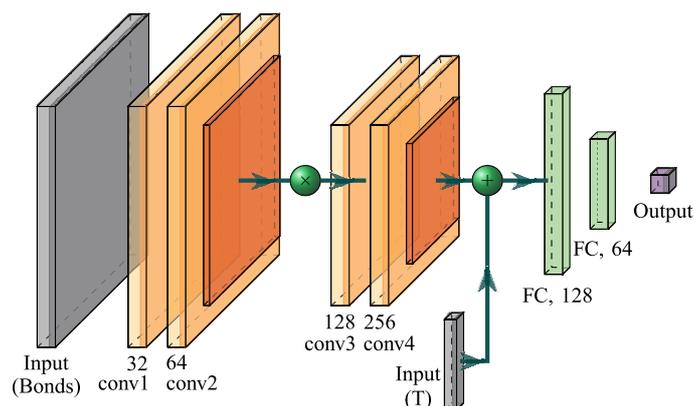


Рис. 1. Предложенная архитектура CNN1

→ *Conv2D*: (128,  $3 \times 3$ ) → *Conv2D*: (256,  $3 \times 3$ ) → *MaxPool*: ( $2 \times 2$ ) → *GAP* →  
 → *Concatenate*: (Temp input) → *Dense*: (128) → *Dense*: (64) → *Dense*: (1).

Вторая модель CNN, представленная на рис. 2, объединяет сверточные, повышающей дискретизации (*upsampling*) и полносвязные слои для эффективного захвата и обработки сложных паттернов, присутствующих в конфигурациях связей. Отличительной особенностью этой архитектуры является включение слоев повышающей дискретизации, реализованных с помощью транспонированных сверточных операций (*Conv2DTranspose*), которые служат для реконструкции пространственных измерений карт признаков. Этот механизм позволяет модели восстанавливать представления с высоким разрешением и сохранять мелкие детали из входных данных. После этапов повышающей дискретизации модель применяет глобальное усреднение для сжатия пространственно расширенных карт признаков в компактное векторное представление. Затем этот вектор признаков соединяется со вспомогательным скалярным входом, соответствующим температуре. Впоследствии объединенное представление обрабатывается через серию полносвязных слоев для выполнения задачи регрессии. Количество параметров CNN1 и CNN2 было одинаковым и составляло 384 941.

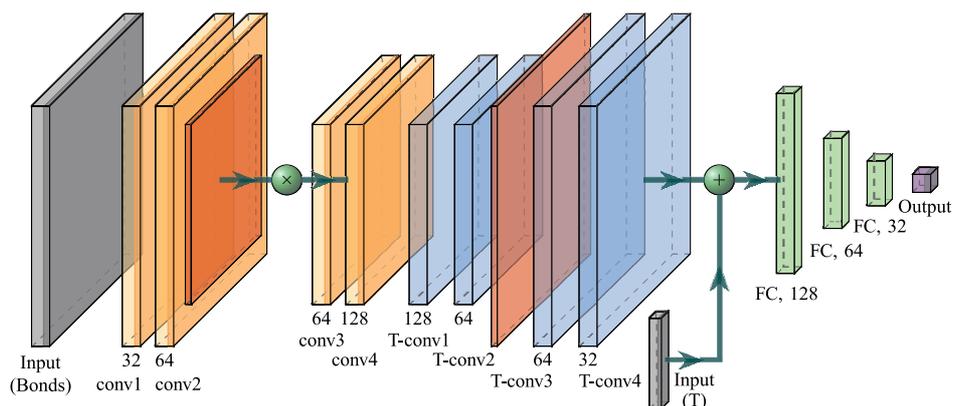


Рис. 2. Предложенная архитектура CNN2

Эту архитектуру, показанную на рис. 2, можно описать следующим образом:  
*Conv2D*: (32,  $3 \times 3$ ) → *Conv2D*: (64,  $3 \times 3$ ) → *MaxPool*: ( $2 \times 2$ ) → *Dropout*: (0,2) →  
 → *Conv2D*: (64,  $3 \times 3$ ) → *Conv2D*: (128,  $3 \times 3$ ) → *Conv2DTranspose*: (128,  $3 \times 3$ ) →  
 → *Conv2DTranspose*: (64,  $3 \times 3$ ) → *UpSampling*: ( $2 \times 2$ ) → *Conv2DTranspose*: (64,  $3 \times 3$ ) →  
 → *Conv2DTranspose*: (32,  $3 \times 3$ ) → *GAP* → *Dense*: (128) → *Dense*: (64) → *Dense*: (32).

Для оценки точности работы CNN было проведено сравнение с полносвязными нейронными сетями (обозначенными как FC1 и FC2) и специализированными глубокими архитектурами с двумя уровнями абстракции спиновой решетки (CC1 и CC2, от англ. *Custom Connected Neural Networks*). Детальное описание архитектур, анализ выбора гиперпараметров и результаты их применения подробно представлены в работе [Andriushchenko et al., 2022]. В рамках данной статьи архитектуры FC1 и FC2 представляют собой полносвязные нейронные сети, состоящие из трех (с 4142 обучаемыми параметрами) и четырех (с 9617 обучаемыми параметрами) скрытых слоев соответственно (модели FC4 и FC5 в работе [Andriushchenko et al., 2022], рис. 2). Полносвязные архитектуры были использованы в качестве базового решения (baseline), при этом отобранная пара моделей показала наименьшую среднеквадратичную ошибку (RMSE) на тестовой выборке.

Архитектуры CC1 и CC2 были специально разработаны для учета пространственной структуры решетки и существенного сокращения числа обучаемых параметров по сравнению с полносвязными аналогами. Ключевая идея CC-архитектур заключается в замене полносвязных скрытых слоев на слои, в которых нейроны соединены аналогично спинам на квадратной решетке. В предложенной схеме первый скрытый слой  $h_1$  интерпретируется как виртуальные связи (bonds), а последующие слои  $h_2$  и  $h_3$  — как виртуальные спины. Различия между архитектурами CC1 (1694 обучаемых параметра) и CC2 (1602 параметра) определяются способом соединения спинов между слоями: используются как полносвязные соединения, так и связи, имитирующие геометрию взаимодействий в спиновой решетке. Такой подход позволяет явно встроить информацию о пространственном расположении связей в структуру нейронной сети, что способствует снижению ошибки предсказания (рис. 3 в работе [Andriushchenko et al., 2022]).

Кроме того, для оптимизации CNN был апробирован подход с масштабированием градиента, так называемый метод модификации ландшафта (LM) [Choi, 2024; Kapitan, Choi, 2025]. Метод LM улучшает оптимизацию путем преобразования целевой функции  $g(x)$  в модифицированную форму  $\widehat{g}(x)$ , управляемую параметрами  $a$  и пороговым значением  $c$ . Это может помочь оптимизаторам, например Adam, лучше избегать локальных минимумов и седловых точек, что приводит к более быстрой сходимости к глобальному или близкому к нему локальному оптимуму. В нашем случае процедура масштабирования выглядит следующим образом: градиент  $\nabla g_t$  масштабируется с помощью функции преобразования  $f$ , текущего значения функции потерь  $rl_t$  и параметра  $c_t$  на шаге  $t$ :

$$\nabla \widehat{g}_t = \frac{\nabla g_t}{af((rl_t - c_t)_+) + 1}, \quad (2)$$

где  $c_t$  было установлено близко к минимальному значению функции потерь.

В данном исследовании мы использовали соотношение данных 0,8 : 0,15 : 0,05 для обучения, валидации и тестирования соответственно. Модели сначала обучались на наборе данных для размеров  $6 \times 6$ , а затем дополнительно обучались на наборе данных для размеров  $10 \times 10$ . Количество эпох для каждого этапа обучения составляло 10, а размер батча — 256. Среднеквадратичные ошибки (RMSE) средней энергии были рассчитаны для выходных значений различных CNN от эталонных значений, полученных с помощью метода трансфер-матриц. RMSE рассчитывалась для  $6 \times 6$  и  $10 \times 10$  по всему тестовому набору данных и усреднялась по температуре и различным тестовым конфигурациям распределения интеграла обмена  $J$ . Полученные значения RMSE в зависимости от архитектуры CNN и размера системы представлены в таблице 1.

Из таблицы 1 можно сделать вывод что сверточные нейронные сети (CNN1, CNN2) и их модификации с масштабированием градиента (CNN1LM, CNN2LM) значительно превосходят полносвязные и кастомные модели, снижая ошибку предсказания на порядок (например, 0,0017 у CNN2LM против 0,0382 у полносвязной сети для  $10 \times 10$ ). Безусловно, увеличение точности сверточных сетей связано с увеличением количества обучаемых параметров. Однако простое увеличение количества параметров полносвязных нейронных сетей не приводило к увеличению

точности предсказаний, а, наоборот, снижало точность. Поэтому снижение ошибки предсказания сверточных нейронных сетей мы связываем с более эффективным извлечением пространственных корреляций и адаптацией к структуре взаимодействий данной архитектурой. В свою очередь, добавление масштабирования градиента обеспечивает дополнительную устойчивость при росте размера системы и стабильное снижение RMSE.

Таблица 1. Сравнение точности предсказаний средней энергии на основе RMSE для полносвязных сетей (FC1, FC2), сетей со специализированной архитектурой (CC1, CC2), сверточных сетей (CNN1, CNN2) и сверточных сетей с масштабированием градиента (CNN1LM, CNN2LM)

N	FC1	FC2	CC1	CC2	CNN1	CNN2	CNN1LM	CNN2LM
$6 \times 6$	0,0555	0,0557	0,0413	0,0491	0,0118	<b>0,0025</b>	0,0034	0,0044
$10 \times 10$	0,0377	0,0382	0,0261	0,0302	0,0018	0,0019	0,0031	<b>0,0017</b>

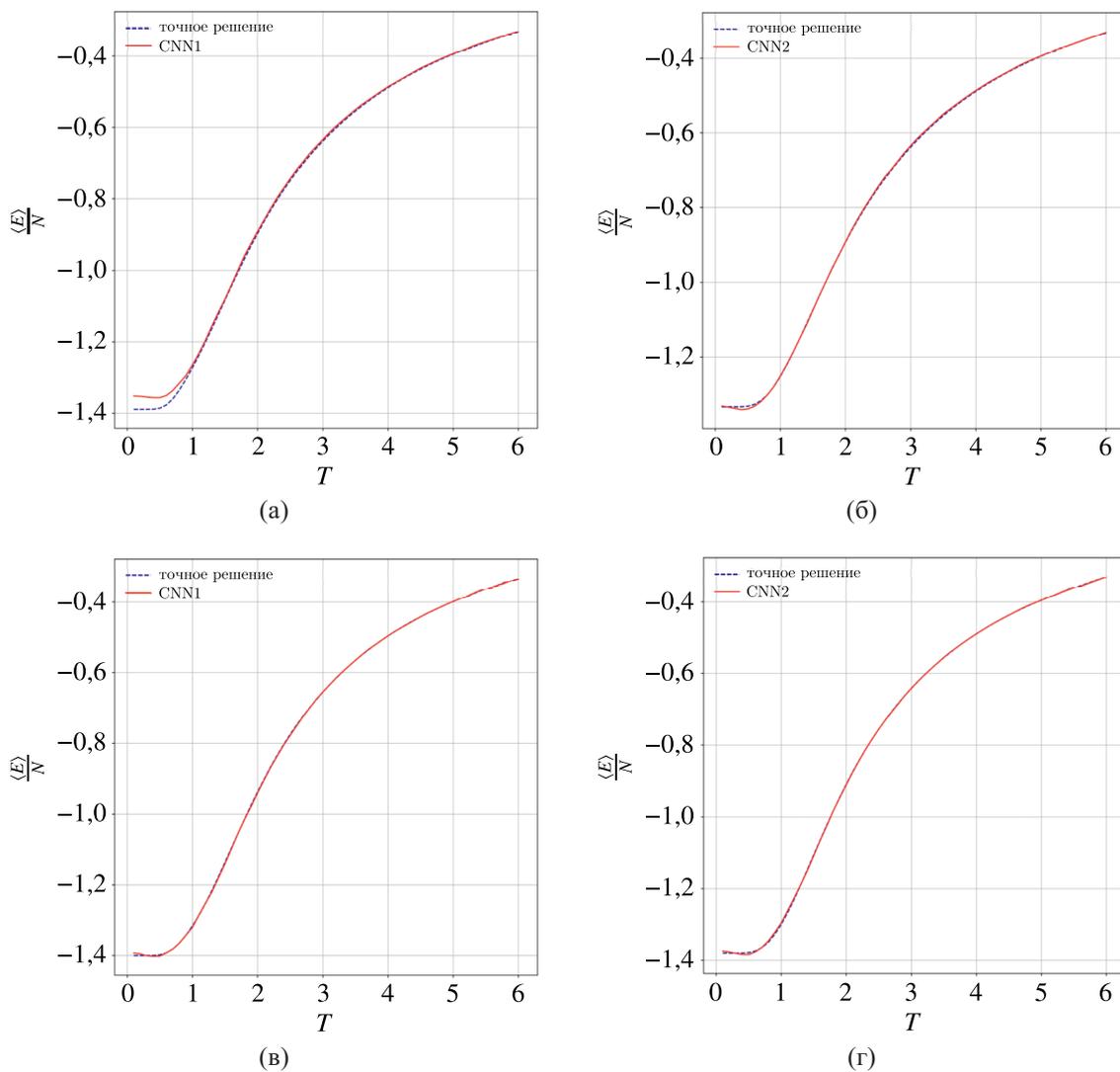


Рис. 3. Сравнение зависимостей средних значений энергии от температуры для случайных конфигураций, полученных с помощью метода трансфер-матриц (точное решение) и нейронных сетей (CNN1 и CNN2) для систем разного размера: а)  $6 \times 6$ , CNN1; б)  $6 \times 6$ , CNN2; в)  $10 \times 10$ , CNN1; г)  $10 \times 10$ , CNN2

На рис. 3 показаны сравнения вычисления средней энергии с использованием точного метода трансфер-матриц и CNN различных архитектур (CNN1, CNN2) для моделей из тестового датасета. Модель CNN2 демонстрирует наилучшее совпадение с вычисленными значениями, что подтверждает важность оптимального выбора архитектуры сверточных сетей. Анализ графиков (рис. 3) показывает, что все архитектуры сверточных сетей обеспечивают высокую точность расчета средней энергии при  $T > 1$ , причем различия между архитектурами начинают проявляться только в области низких температур ( $T < 1$ ) — наиболее сложной для моделирования. Из графиков видно, что в области низких температур предсказания CNN1 и CNN2 отклоняются от точных значений больше, чем в области высоких температур. Это связано с тем, что в низкотемпературной области фрустрированные спиновые системы демонстрируют высокую степень коррелированности и сложную структуру энергетических состояний. Основной вклад в средние термодинамические значения в области низких температур привносят основные состояния (ground states), расчет которых является одной из сложнейших задач статистической физики.

### Единый сверточный классификатор фаз двумерных периодических решеток спинов Изинга

Рассмотрим задачу распознавания фазовых состояний в двумерных моделях Изинга на решетках различных геометрий с периодическими граничными условиями. Целью является построение единого классификатора, который по конфигурации спинов определяет принадлежность системы к низкотемпературной или высокотемпературной фазе и тем самым позволяет восстановить положение фазового перехода. Каждая решетка рассматривается как граф ближайших соседей с фиксированными обменными интегралами  $J_{ij} = 1$ , а конфигурация спинов задается набором значений  $S_i = \pm 1$  на его вершинах. Таким образом, выполняется поиск отображения

$$\{S_i(T)\} \mapsto y(T) \in \{\text{low}, \text{high}\}, \quad (3)$$

где метка  $y$  кодирует принадлежность конфигурации к низкотемпературной или высокотемпературной фазе.

Для подачи на вход сверточной сети разнородные геометрии приводились к единому формату: каждой конфигурации сопоставлялась фиксированная матрица размером  $56 \times 66$  с двумя каналами. Первый канал содержал значения спинов в кодировке  $\pm 1$ , второй — бинарную маску занятых позиций (1 на узлах решетки и 0 на пустом фоне). Такой формат обеспечивает устойчивость к отличиям в линейных размерах и позволяет одной архитектуре обрабатывать различные типы решеток. Для квадратной и треугольной геометрий исходные матрицы спинов центрировались в общей матрице без деформаций.

Для гексагональной решетки были реализованы два способа укладки данных. В первом случае спины записывались построчно во множество строк общей матрицы с последующим маскированием незаполненной области. Во втором варианте использовалась укладка по обходу в ширину (Breadth-First Search, BFS): из параметров элементарной ячейки восстанавливался граф ближайших соседей. Далее по этому графу формировалась перестановка узлов  $\pi$  в порядке обхода в ширину, начиная с выбранной стартовой вершины  $v_0$ . Полученный вектор спинов  $(S_{\pi(1)}, \dots, S_{\pi(N)})$  записывался построчно в матрицу размером  $56 \times 66$  с чередованием направления, что уменьшает разрывы локальной связности между концом одной строки и началом следующей и существенно снижает размывание кривых вероятности высокотемпературной фазы  $P_{\text{high}}(T)$  вблизи  $T_c$ . Для решетки кагоме аналогично применялись BFS-укладка и запись в общую матрицу с маской. Для повышения устойчивости и учета симметрий системы использовались аугментации: случайные повороты конфигураций на  $90^\circ$  и отражения относительно вертикальной и горизонтальной осей, применяемые синхронно к обоим каналам.

Важно отметить, что BFS-укладка в общем случае не является инвариантной относительно автоморфизмов графа: выбор стартовой вершины  $v_0$  определяет конкретную перестановку узлов и, следовательно, конкретное матричное представление одной и той же конфигурации. В наших расчетах это свойство использовалось как дополнительная аугментация данных. Для каждой конфигурации на гексагональной решетке и кагоме-решетке генерировалось до четырех различных BFS-укладок, соответствующих обходам от стартовых вершин, выбранных в разных частях решетки. Одна и та же CNN обучалась одновременно на всех таких представлениях, поэтому ее параметры подстраивались к признакам, устойчивым к выбору  $v_0$ . При изменении набора стартовых вершин получаемые оценки критической температуры из пересечения  $P_{\text{high}}(T)$  и  $1 - P_{\text{high}}(T)$  оставались стабильными в пределах точности, характеризуемой отклонениями, приведенными в таблице 2.

Таблица 2. Отклонения предсказанных значений  $T_c$  нейронной сетью от  $T_c^{\text{ref}}$  для разных решеток и размеров

Геометрия решетки	$32 \times 32$	$48 \times 48$	$56 \times 56$
Квадратная	$+0,006 \pm 0,001$	$+0,010 \pm 0,001$	$+0,006 \pm 0,001$
Треугольная	$-0,009 \pm 0,002$	$-0,001 \pm 0,001$	$+0,002 \pm 0,001$
Гексагональная	$-0,005 \pm 0,001$	$-0,002 \pm 0,001$	$-0,004 \pm 0,001$
Кагоме	$-0,007 \pm 0,001$	$+0,001 \pm 0,001$	$+0,006 \pm 0,001$

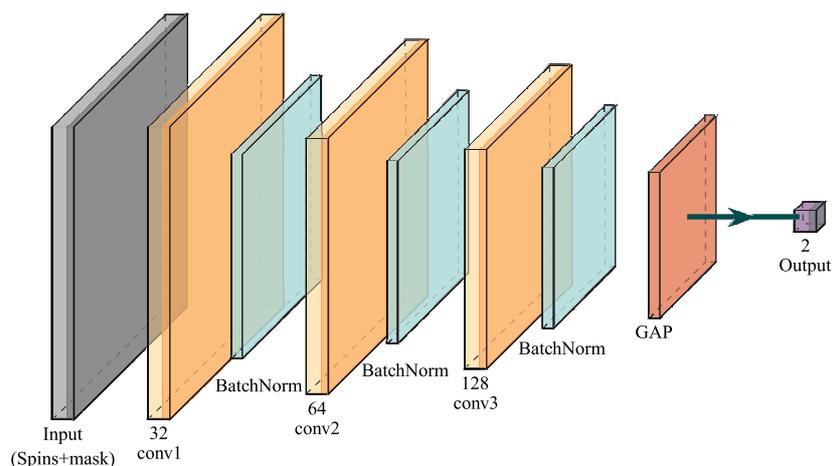


Рис. 4. Предложенная архитектура CNN3

Архитектура классификатора, изображенная на рис. 4, представляет собой последовательность сверточных блоков с последующей агрегацией через слой глобального усреднения и выходным полносвязным слоем размерности два, который возвращает вероятности низкотемпературной и высокотемпературной фаз. Структуру сети можно записать в виде  $Conv2D: (32, 3 \times 3) \rightarrow BatchNorm \rightarrow Dropout: (0,25) \rightarrow Conv2D: (64, 3 \times 3) \rightarrow BatchNorm \rightarrow Dropout: (0,25) \rightarrow Conv2D: (128, 3 \times 3) \rightarrow BatchNorm \rightarrow Dropout: (0,25) \rightarrow GAP \rightarrow Dense: (2)$ .

Слой BatchNorm включены после сверточных слоев для нормализации активаций в каждом мини-батче, что стабилизирует распределения признаков, ускоряет сходимость обучения и выступает дополнительной регуляризацией. Оптимизация осуществлялась методом Adam со скоростью обучения  $10^{-3}$  и размером пакета 256. Одна и та же CNN обучалась совместно на

квадратной, треугольной и гексагональной решетках. Конфигурации на решетке кагоме использовались только на этапе тестирования обобщающей способности модели.

Значением на выходе нейронной сети является вероятность высокотемпературной фазы, которую обозначим через  $P_{\text{high}}(x)$  для отдельной конфигурации  $x$ . Для фиксированной температуры  $T$  рассматривается усредненная по конфигурациям зависимость

$$P_{\text{high}}(T) = \frac{1}{n_T} \sum_{i=1}^{n_T} [\text{CNN}(x_i(T))]_{\text{класс}=\text{high}}, \quad (4)$$

где усреднение проводится по  $n_T$  независимым конфигурациям  $x_i(T)$ , сгенерированным при данной температуре. Функция  $P_{\text{high}}(T)$  играет роль эффективного «порядкового параметра» классификатора: при низких температурах она близка к нулю, а при высоких — к единице. В качестве оценки критической температуры используется решение уравнения

$$P_{\text{high}}(T) = \frac{1}{2}, \quad (5)$$

полученное с помощью локальной линейной интерполяции по  $T$ . Для анализа сопоставлялись также кривые  $1 - P_{\text{high}}(T)$ ; пересечение  $P_{\text{high}}(T)$  и  $1 - P_{\text{high}}(T)$  вблизи  $T_c$  наглядно иллюстрирует смену преобладающей фазы. Стоит отметить: такое определение  $T_c$  воспроизводит те же численные значения, что и известные классические методы. Однако в случаях наличия внешнего поля или многокомпонентных параметров порядка данное определение уже не обязательно остается корректным или оптимальным. В подобных случаях естественно рассматривать альтернативные критерии [Van Nieuwenburg et al., 2017]. На рис. 5 и 6 показаны усредненные кривые  $P_{\text{high}}(T)$  и  $1 - P_{\text{high}}(T)$  для различных размеров и геометрий решеток, а на рис. 7 приведена увеличенная окрестность критической области для гексагональной решетки.

Для независимой проверки результатов классификатора вычислялась теплоемкость на спин:

$$C(T) = N \frac{\langle E^2 \rangle_T - \langle E \rangle_T^2}{T^2}, \quad (6)$$

где  $N$  — число спинов, а  $\langle E \rangle_T$  и  $\langle E^2 \rangle_T$  — соответственно первый и второй моменты энергии при температуре  $T$  [Fisher, Huse, 1988; Baity Jesi, 2016].

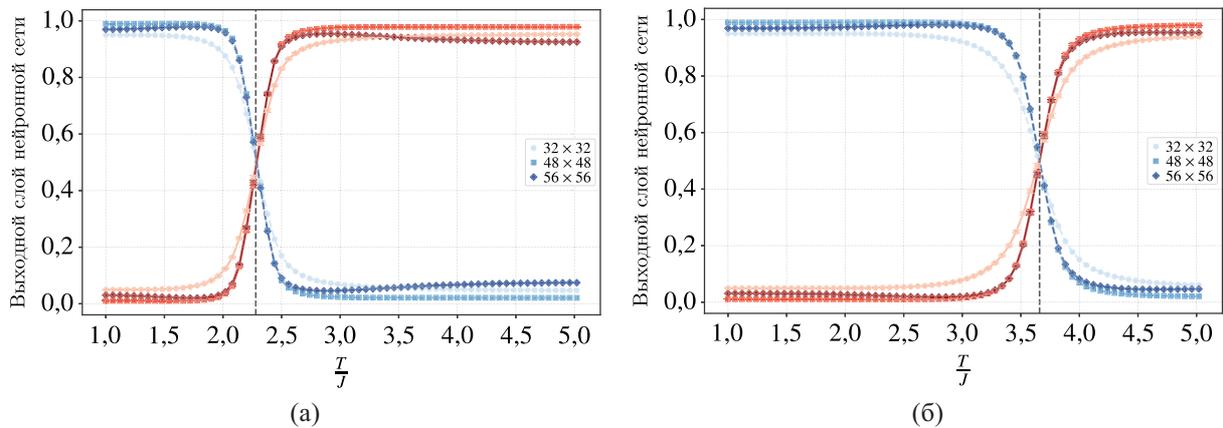


Рис. 5. Предсказание нейронной сети для двумерной квадратной (а) и треугольной (б) решеток спинов Изинга. Линейные размеры систем  $32 \times 32$ ,  $48 \times 48$  и  $56 \times 56$  спинов. Кривые  $P_{\text{high}}(T)$  (красные) и  $1 - P_{\text{high}}(T)$  (синие) усреднены по 600 независимым конфигурациям. Черная вертикальная линия обозначает контрольное значение  $T_c^{\text{ref}}$

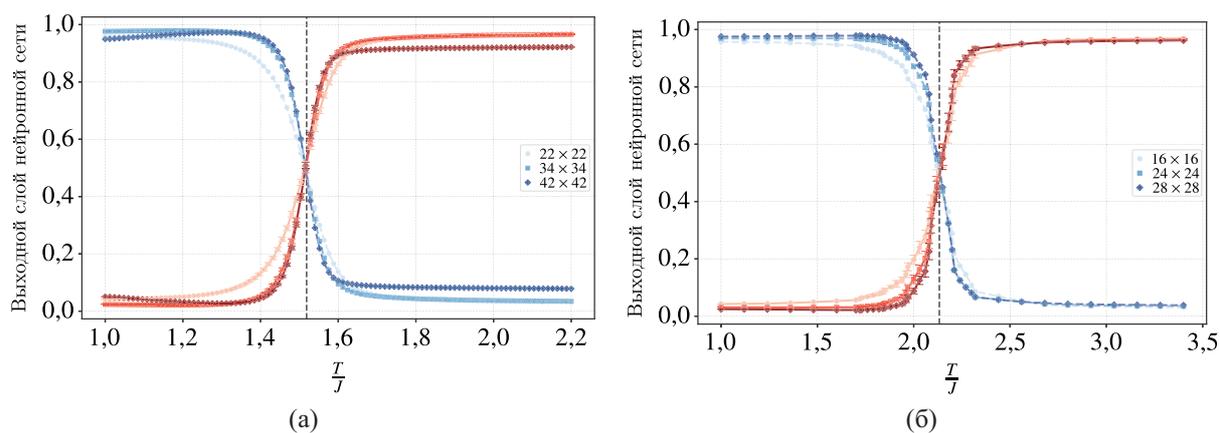


Рис. 6. Предсказание нейронной сети для двумерной гексагональной решетки (а) и кагоме-решетки (б) спинов Изинга. Линейные размеры систем  $22 \times 22$ ,  $34 \times 34$  и  $42 \times 42$  спинов для гексагональной решетки,  $16 \times 16$ ,  $24 \times 24$  и  $28 \times 28$  спинов для кагоме-решетки. Кривые  $P_{\text{high}}(T)$  (красные) и  $1 - P_{\text{high}}(T)$  (синие) усреднены по 600 независимым конфигурациям. Черная вертикальная линия обозначает контрольное значение  $T_c^{\text{ref}}$

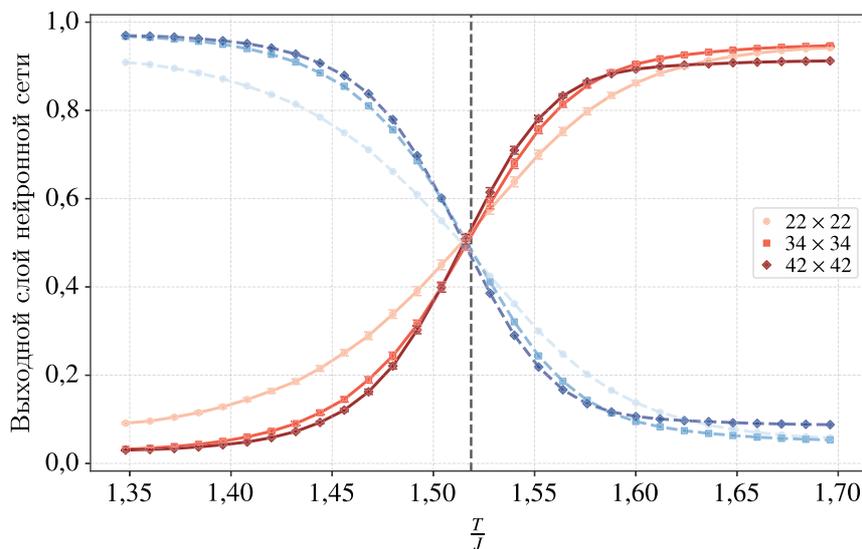


Рис. 7. Предсказание нейронной сети для двумерной гексагональной решетки спинов Изинга с увеличением окрестности  $T_c$ . Линейные размеры систем  $22 \times 22$ ,  $34 \times 34$  и  $42 \times 42$  спинов. Черная вертикальная линия обозначает контрольное значение  $T_c^{\text{ref}}$

Максимум  $C(T)$  сопоставлялся с положением пересечения  $P_{\text{high}}(T)$  (рис. 8). В качестве контрольных значений [Onsager, 1944; Houtappel, 1950; Syozi, 1951; Baxter, 1982] критической температуры ферромагнитной модели Изинга использовались

$$T_c^{\text{sq}} \approx 2,269, \quad T_c^{\text{tri}} \approx 3,641, \quad T_c^{\text{hc}} \approx 1,519, \quad T_c^{\text{kag}} \approx 2,143. \quad (7)$$

В таблице 2 приведены отклонения предсказанных нейронной сетью значений  $T_c$  от  $T_c^{\text{ref}}$  для различных геометрий и размеров решеток. Доверительные интервалы для оценок критической температуры вычислялись путем расчета среднего  $\langle P_{\text{high}}(T) \rangle$  и стандартного отклонения по конфигурациям  $\sigma_p(T)$ . Для каждой решетки и каждого значения  $T$  многократно (300 раз) формировались подвыборки, по которым строилась кривая  $P_{\text{high}}(T)$  и определялась соответствующая оценка  $T_c^{(b)}$ . Полученное распределение  $\{T_c^{(b)}\}$  использовалось для нахождения центральной оцен-

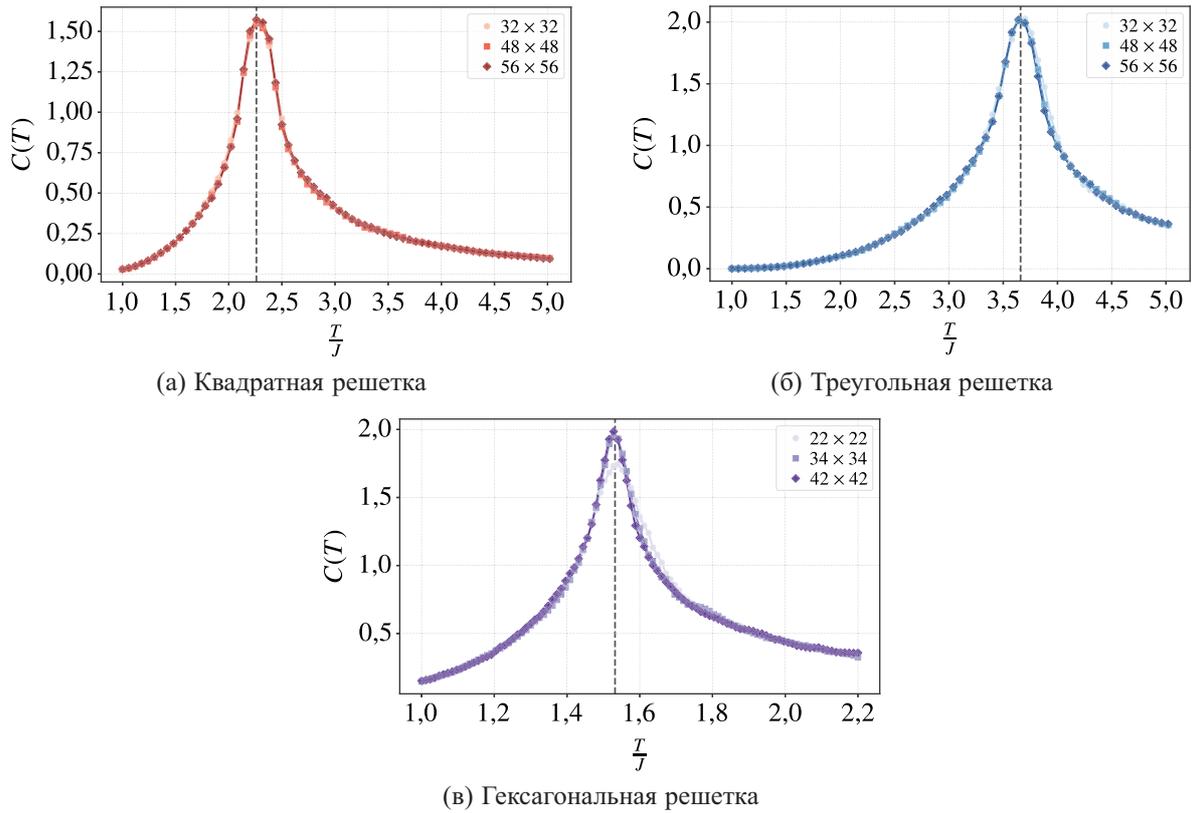


Рис. 8. Температурная зависимость теплоемкости  $C(T)$  для двумерных квадратной (а), треугольной (б) и гексагональной (в) решеток спинов Изинга при разных линейных размерах системы. Черная вертикальная линия указывает на пиковое значение  $C(T)$

ки  $\widehat{T}_c$  и 95%-го доверительного интервала. В таблице 2 значения  $\Delta T = \widehat{T}_c - T_c^{\text{ref}}$  приводятся вместе с полушириной доверительного интервала  $\delta T$ , то есть в виде  $\Delta T \pm \delta T$ .

Полученные результаты показывают, что на квадратной, треугольной и гексагональной решетках CNN формирует отчетливые S-образные кривые  $P_{\text{high}}(T)$  с пересечением вблизи соответствующих критических температур. Переход от простого построчного представления к BFS-укладке для гексагональной решетки устраняет систематический сдвиг по температуре и повышает крутизну кривых в критической области, что согласуется с положением максимумов  $C(T)$ . При применении обученного классификатора к решетке кагоме пересечение  $P_{\text{high}}(T)$  локализуется в окрестности

$$T_c^{\text{kag}} = \frac{4}{\ln(3 + 2\sqrt{3})} \approx 2,143, \tag{8}$$

что подтверждает переносимость выученных признаков между различными геометриями при геометрически информированной укладке данных на вход. Сопоставление построчного представления и BFS-перестановки показывает, что геометрически осмысленная укладка является ключевым фактором снижения размывания решения в критической области и уменьшения систематического сдвига оценки  $T_c$ . Интересно, что на рис. 5 и 6 наблюдается небольшое отклонение от идеальной сигмоидальной формы. Указанные аномалии могут возникать как следствие влияния размерного эффекта на низко- и высокотемпературные фазы. Используемая регуляризация стабилизирует обучение при совместной настройке на нескольких геометриях и способствует унификации извлекаемых признаков.

Таким образом, единый сверточный классификатор позволяет надежно выявлять фазовые переходы в двумерных решетках различной геометрии и без дополнительного обучения переносится на решетку кагоме. Оценки критических температур, извлеченные из пересечения  $P_{\text{high}}(T)$ , хорошо согласуются как с теоретическими значениями  $T_c^{\text{ref}}$ , так и с положением максимумов теплоемкости  $C(T)$ . Канал маски и геометрически информированная укладка позволяют уменьшить размывание в критической области без усложнения архитектуры модели.

## Заключение

Проведенное исследование демонстрирует эффективность применения сверточных нейронных сетей к изучению низкотемпературных фаз спиновых систем и фазовых переходов во фрустрированных магнитных материалах. Предложенные подходы на основе CNN позволили максимально эффективно решить две задачи: восстановление зависимости средней энергии от пространственного распределения обменных интегралов и классификацию фазовых состояний без требования явного вычисления статистической суммы.

Результаты свидетельствуют о том, что CNN-архитектуры превосходят традиционные полносвязные и глубокие нейронные сети с со специализированной архитектурой в точности предсказаний, особенно при низких температурах, где достигается высокая точность при  $T < 1$ . Разделение обменных интегралов на каналы горизонтальных ( $J_{\text{hor}}$ ) и вертикальных ( $J_{\text{ver}}$ ) взаимодействий обеспечило эффективный учет пространственной структуры системы, что является критическим для выявления сложных связей между термодинамическими характеристиками и структурой в низкотемпературной фазе.

Важным результатом является обобщающая способность разработанного классификатора различать низко- и высокотемпературные состояния на решетках различной геометрии (квадратная, треугольная, гексагональная, кагоме) без переобучения в рамках класса двумерных периодических решеток Изинга с взаимодействием между ближайшими соседями. Использование единой фиксированной матрицы размером  $56 \times 66$  с бинарной маской занятых позиций обеспечило устойчивость алгоритма к различиям в размерах и геометриях. Применение кластерного алгоритма Свендсена–Ванга для генерации независимых конфигураций и исключение данных из области критической температуры предотвратили переобучение и обеспечили надежность валидации.

Предложенные подходы открывают возможности для расширения исследований на более широкий класс спиновых систем, включая модели с иными архитектурами, типами взаимодействия и размерностями, а также для анализа других термодинамических характеристик. Решения на основе сверточных нейронных сетей демонстрируют отличный потенциал методов машинного обучения в решении классических проблем статистической физики, особенно в ситуациях, когда экспоненциальный рост числа микросостояний делает прямые вычисления практически недостижимыми. Дальнейшие исследования могут быть направлены на применение более сложных архитектур нейронных сетей, включая графовые нейронные сети для явного учета топологии взаимодействий и обеспечение инвариантности, а также на расширение подхода на трехмерные системы и анизотропные взаимодействия.

## Список литературы (References)

- Васильев Е. В., Пержу А. В., Король А. О., Капитан Д. Ю., Рыбин А. Е., Солдатов К. С., Капитан В. Ю.* Численное моделирование двумерных магнитных скирмионных структур // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12, № 5. — С. 1051–1061. — DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1051-1061
- Vasil'ev E. V., Perzhu A. V., Korol A. O., Kapitan D. Yu., Rybin A. E., Soldatov K. S., Kapitan V. Yu.* Chislennoe modelirovanie dvumernykh magnitnykh skirmionnykh struktur [Numerical simulation of two-dimensional magnetic skyrmion structures] // Computer Research and Modeling. — 2020. — Vol. 12, No. 5. — P. 1051–1061 (in Russian).

- Король А. О., Капитан В. Ю., Пержу А. В., Падалко М. А., Капитан Д. Ю., Волотовский Р. А., Васильев Е. В., Рыбин А. Е., Овчинников П. А., Андриященко П. Д., Макаров А. Г., Шевченко Ю. А., Ильюшин И. Г., Солдатов К. С.* Вычисление основных состояний спиновых стекол с использованием ограниченной машины Больцмана // Письма в ЖЭТФ. — 2022. — Т. 115, № 8. — С. 500–506. — DOI: 10.1134/S0021364022080034
- Korol A. O., Kapitan V. Yu., Perzhu A. V., Padalko M. A., Kapitan D. Yu., Volotovskii R. A., Vasiliev E. V., Rybin A. E., Ovchinnikov P. A., Andriushchenko P. D., Makarov A. G., Shevchenko Yu. A., Il'yushin I. G., Soldatov K. S.* Vychislenie osnovnykh sostoyanii spinovykh stekol s ispol'zovaniem ogranichennoi mashiny Bol'tsmana [Calculation of the ground states of spin glasses using the Restricted Boltzmann Machine] // JETP Letters. — 2022. — Vol. 115, No. 8. — P. 500–506 (in Russian).
- Andriushchenko P., Kapitan D., Kapitan V.* A new look at the spin glass problem from a deep learning perspective // Entropy. — 2022. — Vol. 24, No. 5. — P. 697.
- Arguin L.-P., Damron M., Newman C. M., Stein D. L.* Uniqueness of ground states for short-range spin glasses in the half-plane // Commun. Math. Phys. — 2010. — Vol. 300, No. 3. — P. 641–657.
- Arguin L.-P., Newman C. M., Stein D. L.* A relation between disorder chaos and incongruent states in spin glasses on  $\mathbb{Z}^d$  // Commun. Math. Phys. — 2019. — Vol. 367, No. 3. — P. 1019–1043.
- Baiy Jesi M.* Spin glasses. — Cham: Springer, 2016. — 212 p.
- Baxter R. J.* Exactly solved models in statistical mechanics. — London: Academic Press, 1982. — 486 p.
- Bukov M., Schmitt M., Dupont M.* Learning the ground state of a non-stochastic quantum Hamiltonian in a rugged neural network landscape // SciPost Phys. — 2021. — Vol. 10, No. 6. — P. 147.
- Butler K. T., Davies D. W., Cartwright H., Isayev O., Walsh A.* Machine learning for molecular and materials science // Nature. — 2018. — Vol. 559, No. 7715. — P. 547–555.
- Carrasquilla J., Melko R. G.* Machine learning phases of matter // Nature Physics. — 2017. — Vol. 13, No. 5. — P. 431–434.
- Choi M.* Improved Metropolis–Hastings algorithms via landscape modification with applications to simulated annealing and the Curie–Weiss model // Advances in Applied Probability. — 2024. — Vol. 56, No. 2. — P. 587–620.
- Dean J., Patterson D., Young C.* A new golden age in computer architecture: Empowering the machine-learning revolution // IEEE Micro. — 2018. — Vol. 38, No. 2. — P. 21–29.
- Diep H.* Frustrated spin systems: history of the emergence of a modern physics // C.R. Physique. — 2025. — Vol. 26. — P. 225–251.
- Edwards S. F., Anderson P. W.* Theory of spin glasses // J. Phys. F: Metal Phys. — 1975. — Vol. 5, No. 5. — P. 965.
- Fan C., Shen M., Nussinov Z., Liu Z., Sun Y., Liu Y.-Y.* Searching for spin glass ground states through deep reinforcement learning // Nature Commun. — 2023. — Vol. 14, No. 1. — P. 725.
- Fisher D. S., Huse D. A.* Equilibrium behavior of the spin-glass ordered phase // Physical Review B. — 1988. — Vol. 38, No. 1. — P. 386.
- Fu C., Zhang X., Zhang H., Ling H., Xu S., Ji S.* Lattice Convolutional Networks for Learning Ground States of Quantum Many-Body Systems // Proc. 2024 SIAM Int. Conf. on Data Mining (SDM). — 2024. — P. 490–498.
- Houtappel R. M. F.* Order-disorder in hexagonal lattices // Physica. — 1950. — Vol. 16, No. 5–6. — P. 425–455.
- Itoi C.* Uniqueness of ground state in the Edwards–Anderson spin glass model // J. Phys. Soc. Japan. — 2021. — Vol. 90, No. 3. — P. 033002.
- Jiang Z., Chen G., Qiao R., Feng P., Chen Y., Su J., Zhao Z., Jin M., Chen X., Li Z., Lu H.* Point convolutional neural network algorithm for Ising model ground state research based on spring vibration // Sci. Rep. — 2024. — Vol. 14, No. 1. — P. 2643.
- Ju Y., Alam S. S., Minoff J., Anselmi F., Pu H., Patel A.* Interpreting convolutional neural networks' low-dimensional approximation to quantum spin systems // Phys. Rev. Res. — 2025. — Vol. 7, No. 1. — P. 013094.

- Kapitan V., Choi M.* Adaptive gradient scaling: integrating Adam and landscape modification for protein structure prediction // *BMC Bioinformatics*. — 2025. — Vol. 26, No. 1. — P. 161.
- Kapitan D., Korol A., Vasiliev E., Ovchinnikov P., Rybin A., Lobanova E., Soldatov K., Shevchenko Y., Kapitan V.* Application of machine learning in solid state physics // *Solid State Physics*. — 2023. — Vol. 74. — P. 1–65.
- Kapitan V., Vasiliev E., Perzhu A., Kapitan D., Rybin A., Korol A., Soldatov K., Shevchenko Y.* Numerical simulation of magnetic skyrmions on flat lattices // *AIP Advances*. — 2021. — Vol. 11, No. 1. — P. 015041.
- Krzakala F., Martin O. C.* Spin and link overlaps in three-dimensional spin glasses // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 85, No. 14. — P. 3013–3016.
- Lgotina D. A., Prudnikov V. V., Prudnikov P. V.* Non-equilibrium relaxation dynamics of an asymmetric Co/Cu/Co heterostructure: a Monte Carlo study // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2025. — Vol. 58, No. 29. — P. 295001.
- Lucas A.* Ising formulations of many NP problems // *Frontiers in Physics*. — 2014. — Vol. 2. — P. 5.
- Makarova K., Makarov A., Strongin V., Titovets I., Shevchenko Y., Kapitan V., Rybin A., Kapitan D., Korol A., Vasiliev E., Ovchinnikov P., Soldatov K., Trukhin V., Nefedev K.* Canonical Monte Carlo multispin cluster method // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2023. — Vol. 427. — P. 115153.
- McNaughton B., Milošević M. V., Perali A., Pilati S.* Boosting Monte Carlo simulations of spin glasses using autoregressive neural networks // *Phys. Rev. E*. — 2020. — Vol. 101, No. 5. — P. 053312.
- Nefedev K. V., Kapitan V.* Concentration phase transition and hysteresis phenomena in Co-nanofilms. Computer data processing and simulation // *Advanced Materials Research*. — 2013. — Vol. 718. — P. 69–73.
- Van Nieuwenburg E. P. L., Liu Y.-H., Huber S. D.* Learning phase transitions by confusion // *Nature Physics*. — 2017. — Vol. 13. — P. 435–439.
- Onsager L.* Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition // *Phys. Rev.* — 1944. — Vol. 65, No. 3–4. — P. 117–149.
- Ovchinnikov P., Soldatov K., Kapitan V., Chitov G. Y.* Hierarchy of percolation patterns in a kinetic replication model // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2025. — Vol. 58, No. 38. — P. 385002.
- Padalko M., Shevchenko Y., Kapitan V., Nefedev K.* Parallel computing of Edwards–Anderson model // *Algorithms*. — 2022. — Vol. 15, No. 1. — P. 13.
- Parisi G.* Order parameter for spin-glasses // *Phys. Rev. Lett.* — 1983. — Vol. 50, No. 24. — P. 1946.
- Shiina K., Mori H., Okabe Y., Lee H. K.* Super-resolution of spin configurations based on flow-based generative models // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2024.
- Swendsen R. H., Wang J. -S.* Nonuniversal critical dynamics in Monte Carlo simulations // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Vol. 58, No. 2. — P. 86–88.
- Syozhi I.* Statistics of kagomé lattice // *Prog. Theor. Phys.* — 1951. — Vol. 6, No. 3. — P. 306–308.
- Yucesoy B., Katzgraber H. G., Machta J.* Evidence of non-mean-field-like low-temperature behavior in the Edwards–Anderson spin-glass model // *Physical Review Letters*. — 2012. — Vol. 109, No. 17. — P. 177204.
- Zhang C., Bengio S., Hardt M., Recht B., Vinyals O.* Understanding deep learning (still) requires rethinking generalization // *Commun. ACM*. — 2021. — Vol. 64, No. 3. — P. 107–115.