

Компьютерное моделирование динамики валового регионального продукта: сравнительный анализ нейросетевых моделей

Д. Д. Вавилова^{1,а}, К. В. Кетова^{1,б}, Р. Зерари^{2,с}

¹Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова,
Россия, 426069, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 296

E-mail: ^а vavilova_dd@mail.ru, ^б ketova_k@mail.ru, ^с rayane.zerari20@gmail.com

Получено 30.06.2025, после доработки – 13.10.2025.
Принято к публикации 11.11.2025.

Анализ экономических показателей региона играет важную роль в управлении и планировании развития, при этом валовой региональный продукт (ВРП) является одним из ключевых индикаторов экономической деятельности. Применение искусственного интеллекта, в том числе нейросетевых технологий, позволяет значительно повысить точность и надежность прогнозов экономических процессов. В данном исследовании сравниваются три модели нейросетевых алгоритмов для прогнозирования ВРП одного из типичных регионов РФ – Удмуртской Республики – на основе временных рядов за период с 2000 по 2023 год. В качестве моделей выбраны нейронная сеть с алгоритмом листучей мыши (BA-LSTM), модель нейронной сети обратного распространения ошибки, оптимизированная с помощью генетического алгоритма (GA-BPNN), и нейросетевая модель Элмана, оптимизированная алгоритмом роя частиц (PSO-Elman). В ходе исследования были выполнены такие этапы нейросетевого моделирования, как подготовка исходных данных, обучение моделей и их сравнительный анализ по показателям точности и качества прогнозов. Такой подход позволяет оценить преимущества и недостатки каждой модели в контексте прогнозирования ВРП, а также определить наиболее перспективные направления для дальнейших исследований. Использование современных нейросетевых методов открывает новые возможности для автоматизации анализа региональной экономики и повышения качества прогнозных оценок, что особенно актуально при ограниченных данных и для оперативного принятия решений. В исследовании в качестве входных данных для прогнозирования ВРП используются такие факторы, как величина производственного капитала, среднегодовая численность трудовых ресурсов, доля продукции высокотехнологичных и наукоемких отраслей в ВРП, а также показатель, учитывающий инфляцию. Высокая точность прогнозов, достигнутая в результате включения этих факторов в нейросетевые модели, подтверждает наличие сильной связи между этими факторами и ВРП. Результаты исследования показали высокую точность нейросетевой модели BA-LSTM на валидационной выборке: коэффициент детерминации составил 0,82, средняя абсолютная процентная ошибка – 4,19 %. Качество и надежность этой модели свидетельствуют о ее способности эффективно предсказывать динамику ВРП. В прогнозном периоде до 2030 года в Удмуртской Республике ожидается ежегодное увеличение ВРП +4,6 % в текущих ценах или +2,5 % в сопоставимых ценах 2023 года. К 2030 году прогнозируется ВРП на уровне 1264,5 млрд руб.

Ключевые слова: валовой региональный продукт (ВРП), нейросетевые модели, нейронная сеть BA-LSTM, нейронная сеть GA-BPNN, нейронная сеть PSO-Elman

UDC: 519.86

Computer modeling of the gross regional product dynamics: a comparative analysis of neural network models

D. D. Vavilova^{1,a}, K. V. Ketova^{1,b}, R. Zerari^{2,c}

¹Kalashnikov Izhevsk State Technical University,
7 Studencheskaya st., Izhevsk, 426069, Russia

²Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
29b Politekhnicheskaya st., St. Petersburg, 195251, Russia

E-mail: ^a vavilova_dd@mail.ru, ^b ketova_k@mail.ru, ^c rayane.zerari20@gmail.com

Received 30.06.2025, after completion — 13.10.2025.

Accepted for publication 11.11.2025.

Analysis of regional economic indicators plays a crucial role in management and development planning, with Gross Regional Product (GRP) serving as one of the key indicators of economic activity. The application of artificial intelligence, including neural network technologies, enables significant improvements in the accuracy and reliability of forecasts of economic processes. This study compares three neural network algorithm models for predicting the GRP of a typical region of the Russian Federation — the Udmurt Republic — based on time series data from 2000 to 2023. The selected models include a neural network with the Bat Algorithm (BA-LSTM), a neural network model based on backpropagation error optimized with a Genetic Algorithm (GA-BPNN), and a neural network model of Elman optimized using the Particle Swarm Optimization algorithm (PSO-Elman). The research involved stages of neural network modeling such as data preprocessing, training model, and comparative analysis based on accuracy and forecast quality metrics. This approach allows for evaluating the advantages and limitations of each model in the context of GRP forecasting, as well as identifying the most promising directions for further research. The utilization of modern neural network methods opens new opportunities for automating regional economic analysis and improving the quality of forecast assessments, which is especially relevant when data are limited and for rapid decision-making. The study uses factors such as the amount of production capital, the average annual number of labor resources, the share of high-tech and knowledge-intensive industries in GRP, and an inflation indicator as input data for predicting GRP. The high accuracy of the predictions achieved by including these factors in the neural network models confirms the strong correlation between these factors and GRP. The results demonstrate the exceptional accuracy of the BA-LSTM neural network model on validation data: the coefficient of determination was 0.82, and the mean absolute percentage error was 4.19 %. The high performance and reliability of this model confirm its capacity to predict effectively the dynamics of the GRP. During the forecast period up to 2030, the Udmurt Republic is expected to experience an annual increase in Gross Regional Product (GRP) of +4.6 % in current prices or +2.5 % in comparable 2023 prices. By 2030, the GRP is projected to reach 1264.5 billion rubles.

Keywords: gross regional product (GRP), neural network models, BA-LSTM neural network, GA-BPNN model, PSO-Elman neural network

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 6, pp. 1219–1236 (Russian).

1. Введение

В современную эпоху глобализации значимость региональных экономических показателей значительно возрастает. Одним из ключевых показателей развития экономики является валовой региональный продукт (ВРП), который отражает общую стоимость товаров и услуг, произведенных на территории определенного региона. В отличие от валового внутреннего продукта (ВВП) ВРП, рассчитанный по методу добавленной стоимости, дает более точное представление о состоянии региональной экономики, поскольку учитывает вклад всех предприятий и избегает повторного подсчета промежуточных затрат [Красс, Чупрынов, 2023].

Показатель ВРП выходит за рамки простого измерения экономической активности. Он помогает учитывать вклад конкретного региона в общегосударственную экономику, а также служит инструментом для привлечения инвестиций. ВРП позволяет оценить структуру промышленности и специализацию региона, что важно для разработки стратегий развития и определения сильных сторон экономики [Дубовик, Дмитриев, 2022].

Для оперативного и перспективного анализа динамики ВРП необходимо создавать точные прогнозные модели. Учет различных первостепенных и вспомогательных факторов, связанных с экономическими процессами, реализуется с помощью методов математического моделирования, что помогает лучше понять сложные механизмы и принимать обоснованные решения [Безручко, Смирнов, 2015]. Такие модели важны для рационального распределения ресурсов, планирования инвестиций и стратегического развития региона, что способствует его устойчивому росту.

В последние годы использование методов машинного обучения стало одним из ключевых направлений в экономическом прогнозировании, особенно когда речь идет о предсказании сложных событий. Например, в исследовании [Cicceri et al., 2020] было показано, что современные алгоритмы, такие как нелинейные модели авторегрессии, превосходят традиционные статистические методы по точности при прогнозировании макроэкономических переменных. Это подтверждает важность внедрения новых технологий для повышения качества экономических прогнозов.

Недавние достижения в области искусственного интеллекта и машинного обучения, особенно использование нейросетевых моделей, открыли новые возможности для повышения точности прогнозов [Ketova, Vavilova, 2020]. Нейронные сети (НС) отлично справляются с выявлением сложных нелинейных зависимостей в данных, что делает их перспективным инструментом для экономического моделирования. В настоящей статье рассматривается применение трех нейросетевых моделей для прогнозирования ВРП, оценивается их эффективность и обсуждается потенциал для улучшения точности экономических прогнозов. Сравнивая результаты, авторы определяют наиболее подходящую прогнозную модель, которая поможет принимать более обоснованные решения для формирования стратегии развития региона.

В области прогнозирования валового внутреннего продукта (ВВП) проведено множество исследований. В частности, в работе китайского исследователя [Lai, 2022] представлена нейронная сеть Элмана, оптимизированная с помощью алгоритма роя частиц, для предсказания ВВП провинции Сычуань за период с 1992 по 2020 год. Результаты оказались весьма впечатляющими: средняя абсолютная процентная ошибка (*MAPE*) составила всего 2,36 %, а среднеквадратичная ошибка — около 1,66 %, что свидетельствует о высокой точности нейросетевой модели.

Также стоит отметить египетское исследование [Shams et al., 2024], в котором была разработана модель на базе сочетания методов корреляции Пирсона, долгой краткосрочной памяти (LSTM) и рекуррентной нейронной сети (RNN) для предсказания ВВП. Эта модель демонстрирует высокий показатель детерминации (R^2) 99,99 %, что говорит о ее высокой точности.

Интересный подход представлен в работе [Gjylapi, Kasemi, 2013], где авторы использовали генетические алгоритмы в сочетании с нейронными сетями для повышения эффективности

обучения и повышения точности прогнозов ВВП в Албании. Такой гибридный метод позволяет учитывать важнейшие экономические факторы и значительно улучшать качество предсказаний.

Еще одно китайское исследование [Xu et al., 2014] сосредоточено на использовании нейронных сетей с обратным распространением ошибки. Авторы смогли преодолеть традиционные проблемы таких сетей, например медленную сходимость и склонность к локальным минимумам, и тем самым добиться более высокой точности по сравнению с классическими методами, такими как множественная регрессия.

Наконец, в работе [Hamiane et al., 2023] проведено сравнение различных моделей прогнозирования: сети LSTM оказались значительно лучше, чем модели авторегрессии. Так, средняя квадратичная ошибка для LSTM составила 0,010, тогда как у авторегрессионной модели — около 0,095, что говорит о превосходстве нейросетевых методов в задачах прогноза временных рядов.

Общий вывод таков: современные алгоритмы машинного обучения и нейросетевые модели значительно повышают точность и надежность прогнозов, открывая новые возможности для анализа экономических процессов. В этой связи работы в выбранном исследователями направлении являются актуальными.

В качестве объектов сравнительного анализа выбраны три гибридные нейросетевые модели, репрезентирующие различные стратегии построения прогнозных нейросетевых алгоритмов. Критериями выбора послужили их доказанная эффективность в задачах прогнозирования экономических временных рядов, отраженная в научной литературе [Gjylapi, Kasemi, 2013; Xu et al., 2014; Lai, 2022], а также принципиальные различия в их архитектуре.

Модель BA-LSTM выбрана как представитель класса сетей с механизмом долгой краткосрочной памяти, которые стали стандартом для анализа последовательных данных. Ее гибридизация с алгоритмом летучей мыши (BA) направлена на более точную настройку гиперпараметров по сравнению со стандартными методами.

Модель GA-BPNN представляет классические нейронные сети, оптимизированные с помощью эволюционного подхода. Генетический алгоритм (GA) призван решить такие проблемы сетей обратного распространения ошибки, как медленная сходимость и зависимость от начальной инициализации весов.

Модель PSO-Elman воплощает идею рекуррентных сетей, явно учитывающих предыдущие состояния. Алгоритм роя частиц (PSO) применяется для настройки ее параметров, что демонстрировало хорошие результаты в ряде исследований.

Цель настоящей работы состоит в сравнительном анализе современных нейросетевых моделей, позволяющих максимально точно аппроксимировать динамику валового регионального продукта под влиянием социально-экономических факторов, а также в обосновании выбора нейросетевой модели для прогноза динамики ВРП. Сравниваемые модели покрывают ключевые подходы — рекуррентные сети с памятью (LSTM), классические сети обратного распространения ошибки (BPNN) и рекуррентные сети простой структуры (Elman), — каждый из которых усилен своим эвристическим алгоритмом оптимизации. Это позволяет оценить, какой из подходов является наиболее адекватным для моделирования динамики ВРП.

Научная новизна данного исследования заключается в качественном сравнительном анализе современных нейросетевых моделей, адаптированных под решение задачи прогнозирования ВРП. Впервые построен прогноз динамики валового регионального продукта с использованием нейросетевой модели, входными данными которой являются факторы различных производственных функций.

Рассмотренные в работе нейросетевые модели прогноза ВРП реализованы на современном языке программирования Python с использованием встроенного набора библиотек: Pandas — для работы с данными, NumPy — для численных операций, Scikit-Learn — для предобработки данных

и оценки качества моделей, Keras — для построения различных архитектур нейронных сетей, Deap — для реализации генетического алгоритма, Matplotlib — для визуализации результатов.

2. Постановка задачи моделирования динамики валового регионального продукта

Валовой региональный продукт является трудномоделируемым показателем. На сегодняшний день существует множество работ, посвященных различным методам и подходам к моделированию ВРП. Чаще всего исследователи используют производственные функции таких типов, как функции Кобба–Дугласа, Солоу, Аллена и их модификации [Кутышкин, 2021; Магнушевская, 2023; Вавилова, Зерари, 2024]. Однако самыми главными недостатками производственных функций являются значительное упрощение экономической системы региона и рассмотрение небольшого числа факторов, влияющих на величину ВРП.

Другой подход к моделированию ВРП имеет более прикладной характер и представляет собой анализ динамики его величины и построение математической модели с учетом влияния различных факторов: темпов роста занятых людей в экономике, изменения структуры экономики, индекса экономической сложности и других составляющих экономического роста.

В настоящем исследовании формируется гипотеза о том, что значительно улучшить прогнозируемость ВРП можно с помощью современных нейросетевых моделей, в которых в качестве входных факторов будут рассмотрены показатели, фигурирующие в различных производственных функциях. Чаще всего исследователи рассматривают в качестве факторов, влияющих на величину и динамику ВРП, основные производственные фонды, трудовые ресурсы, уровень экономической специализации [Кудров, 2023].

Ранее проведенные исследования [Вавилова, Кетова, 2023] подталкивают выполнять обучение нейросетевых моделей динамики ВРП на основе входных данных, среди которых производственный капитал, численность трудовых ресурсов, показатель научно-технического прогресса, а также индекс-дефлятор валового внутреннего продукта. В настоящей работе предлагается использовать четыре фактора, влияющих на величину ВРП (в год t): остаточная стоимость производственного капитала (ОПФ на конец года t), среднегодовая численность трудовых ресурсов (в год t), доля продукции высокотехнологичных и наукоемких отраслей в ВРП (в качестве показателя научно-технического прогресса, в год t), индекс-дефлятор ВВП (в год t , в процентах к предыдущему году).

Для моделирования и прогнозирования динамики валового регионального продукта используются официальные статистические данные одного из типичных регионов РФ — Удмуртской Республики (УР). Данный регион демонстрирует среднероссийские значения по многим социально-экономическим показателям. Это подтверждается не только статистической информацией, но и более глубокими исследованиями, представленными, например, в работе [Валентей и др., 2024].

Данные по ВРП УР рассматриваются на интервале 2000–2023 гг. Статистическая информация для расчетов присутствует в источнике [Территориальный орган . . ., 2025]. Чтобы обеспечить корректное сравнение данных ВРП во времени, его динамика представлена в сопоставимых ценах 2023 года с учетом индекса-дефлятора [Территориальный орган . . ., 2025]. Динамика ВРП УР в текущих ценах и в сопоставимых ценах 2023 года за период 2000–2023 гг., а также информация по социально-экономическим показателям представлены в таблице 1.

В исследовании используются три различные нейросетевые модели для прогнозирования ВРП в текущих и в сопоставимых ценах 2023 года, что позволяет детально сравнить их предсказательную способность. Обучающая выборка использует временной диапазон статистических данных за период 2000–2017 гг., валидационная выборка включает данные временного диапазона за период 2018–2023 г.

Таблица 1. Динамика ВРП и социально-экономических показателей (факторов ВРП) в УР за период 2000–2023 гг.

Год (<i>t</i>)	ВРП в текущих ценах (в год <i>t</i>), млрд руб.	ОПФ (остаточная стоимость на конец года <i>t</i>), млрд руб.	Численность трудовых ресурсов (в среднем за год <i>t</i>), тыс. чел.	Индекс-дефлятор ВВП (в год <i>t</i> , в процентах к предыдущему году), %	Доля продукции высокотехнологичных и наукоемких отраслей в ВРП (в год <i>t</i>), %	ВРП в ценах 2023 года (в год <i>t</i>), млрд руб.
2000	53,31	110,848	968,437	137,6	13,8	588,33
2001	65,55	126,380	972,298	116,5	14,4	620,96
2002	78,35	134,884	979,074	115,6	15,2	642,08
2003	89,04	148,026	989,230	113,8	15,9	641,11
2004	100,83	158,979	993,480	120,3	16,7	603,57
2005	140,00	177,785	994,398	119,3	17,6	702,38
2006	164,85	198,979	990,116	115,2	18,4	717,92
2007	205,65	241,749	980,581	113,8	19,3	787,02
2008	243,14	276,635	970,714	118,0	20,3	788,50
2009	230,94	295,679	955,363	102,0	21,3	734,39
2010	274,58	316,712	939,122	114,2	22,4	764,43
2011	335,98	345,916	920,820	115,9	21,9	807,02
2012	372,78	379,045	899,567	108,9	21,8	822,35
2013	405,13	403,890	889,412	105,3	22,4	848,75
2014	450,55	445,530	861,031	107,5	23,4	878,12
2015	518,00	468,424	844,642	107,2	24,3	941,72
2016	570,26	513,395	822,464	102,8	19,0	1008,20
2017	592,04	568,580	812,753	105,3	18,8	994,04
2018	679,94	577,294	799,927	110,0	18,9	1038,27
2019	722,85	1347,752	806,226	103,3	19,4	1068,37
2020	684,43	1437,167	796,766	100,9	21,1	1002,69
2021	867,61	1540,145	806,303	119,0	18,0	1068,03
2022	965,72	1574,098	796,297	115,8	18,6	1026,56
2023	957,40	1651,112	807,353	118,8	18,3	957,40

Эффективность моделей анализируется на обучающей выборке по двум ключевым показателям: по средней абсолютной процентной ошибке (*MAPE*) и по коэффициенту детерминации (*R*²). Качество моделей прогнозирования оценивается по ошибке прогнозирования на валидационной выборке, которая рассчитывается как отклонение моделируемых значений от фактических.

Средняя абсолютная процентная ошибка (*MAPE*) измеряет масштаб ошибки предсказания по модели каждого уровня временного ряда и рассчитывается по формуле [Вавилова, Зерари, 2024]

$$MAPE = \frac{1}{N} \cdot \sum_{t=1}^N \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \cdot 100 \, \%$$

Коэффициент детерминации (*R*²) характеризует качество подобранный модели; он представляет собой процент объясненной дисперсии результирующей переменной [Айвазян, 2022]:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^N (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2},$$

где y_t — фактическое значение уровня временного ряда в момент времени t , \widehat{y}_t — модельное значение уровня временного ряда в момент времени t , \bar{y} — среднее значение уровня ряда, N — количество наблюдений.

Чтобы стабилизировать процесс обучения нейронных сетей и сделать его более качественным, входные данные модели нормируются в диапазоне от 0 до 1. Эта модификация гарантирует, что каждый входной сигнал будет одинаково полезен для обучения модели. Нормализация по минимаксному методу выполняется следующим образом [Aliyu et al., 2024]:

$$X' = \frac{X - X_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}},$$

где X' — нормализованное значение входных данных, X — исходное значение входных данных, X_{\max} и X_{\min} — соответственно максимальное и минимальное значения признака в наборе данных.

3. Теоретические аспекты построения нейросетевых моделей

3.1. Модель нейронной сети с алгоритмом летучей мыши (BA-LSTM)

Основой первой нейросетевой модели является нейронная сеть LSTM (Long Short-Term Memory). LSTM — это разновидность рекуррентной нейронной сети, хорошо понимающая временные зависимости в последовательных данных, что делает ее эффективной для экономического прогнозирования временных рядов [Sundermeyer et al., 2015].

Архитектура LSTM отличается способностью долго сохранять информацию благодаря специальным ячейкам памяти. Каждый блок этой сети содержит три ключевых гейта, которые контролируют поток данных, позволяя модели решать, когда нужно запомнить новую информацию, а когда — забыть старую [Nguyen, Tran, 2024]. Обновление состояния LSTM на каждом шаге описывается уравнениями (1)–(6) [Lai, 2022; Hamiane et al., 2024].

Входные гейты i_t отвечают за определение количества новой информации, которую следует добавить в память:

$$i_t = \sigma(w_i[h_{t-1}, x_t] + b_i). \quad (1)$$

Гейт забывания f_t решает, какая часть уже накопленных данных должна быть удалена:

$$f_t = \sigma(w_f[h_{t-1}, x_t] + b_f). \quad (2)$$

Гейт выхода o_t управляет тем, какая информация будет передана дальше из ячейки:

$$o_t = \sigma(w_o[h_{t-1}, x_t] + b_o). \quad (3)$$

Для обновления состояния ячейки памяти вводится вектор кандидатного состояния \tilde{c}_t : к нему добавляют новые значения, выбранные для запоминания, и отсекается информация, признанная ненужной. Он определяется гиперболическим тангенсом

$$\tilde{c}_t = \text{th}(w_c[h_{t-1}, x_t] + b_c). \quad (4)$$

В формулах (1)–(4) h_{t-1} — состояние ячейки на предыдущем временном шаге (содержит информацию о предыдущих входах), x_t — входной сигнал текущего временного шага, $[h_{t-1}, x_t]$ — конкатенация скрытого состояния h_{t-1} и входного сигнала x_t , σ — активационная функция (функция ReLU, Rectified Linear Unit [ReLU activation function..., 2025]), w и b — соответствующие веса и смещения. Индексы обозначают гейты: i — входной, f — забывающий, o — выходной. Индекс c указывает на характеристики вектора кандидатного состояния.

Далее обновляется внутреннее состояние ячейки c_t с помощью забывающих и входных гейтов:

$$c_t = f_t c_{t-1} + i_t \otimes \tilde{c}_t, \quad (5)$$

где c_t — текущее состояние ячейки памяти, c_{t-1} — предыдущее состояние ячейки памяти, \otimes — поэлементное умножение.

Наконец, вычисляется выходное скрытое состояние h_t , которое зависит от текущего состояния c_t и выходных гейтов o_t :

$$h_t = o_t \otimes \text{th}(c_t), \quad (6)$$

где h_t — скрытое состояние на текущем временном шаге (содержит информацию о текущем входе и передает преобразованную информацию на следующий шаг или слой).

Для оптимизации параметров LSTM используется алгоритм летучей мыши (BA, Bat Algorithm) [Raghavan et al., 2015], создание которого вдохновлено эхолокацией летучих мышей при поиске наилучших решений в чрезвычайно сложных пространствах поиска. Алгоритм летучей мыши использует популяции, состоящие из множества агентов (их прозвали летучими мышами [Gandomi et al., 2012]). Летучая мышь здесь подобна кандидату оптимального решения в L -мерном пространстве параметров (в данной работе термин «летучая мышь» — это метафорическое значение как элемента алгоритма BA). Летучая мышь является одной особью в популяции, и она инициализируется позицией и скоростью. Координаты i -й летучей мыши можно определить как $X_i = (x_1, x_2, \dots, x_L)$, а ее скорость — как $V_i = (v_1, v_2, \dots, v_L)$.

Один из параметров модели — это частота импульса летучей мыши, скалярная величина — q_i . Она используется для балансировки влияния оптимальной позиции на текущую. Частота также влияет на скорость перемещения мыши в пространстве. Для каждой особи обновление частоты осуществляется по формуле

$$q_i = q_{\min} + \beta(q_{\max} - q_{\min}),$$

где q_{\max} , q_{\min} — максимальная и минимальная частоты импульсов, β — случайное число от 0 до 1 (добавляет элемент случайности в процесс поиска).

После определения частоты q_i скорость V_i обновляется с учетом текущего положения и глобального лучшего решения X^* [Lai, 2022]:

$$V_i^t = V_i^{t-1} + q_i (X_i^t - X^*).$$

Наилучшая особь X^* определяется путем оценки пригодности позиции каждой летучей мыши и выбора той, которая имеет наивысшее значение пригодности. Положение летучей мыши на текущем шаге рассчитывается с использованием формулы $X_i^t = X_i^{t-1} + V_i^t$.

Методология применения модели BA-LSTM структурирована и содержит следующие этапы. Первое — это настройка архитектуры LSTM, причем она задается в соответствии с требованиями задачи прогнозирования (гиперпараметры для модели BA-LSTM включают количество скрытых слоев, число узлов в каждом слое, скорость обучения и количество итераций). Второе — это настройка параметров алгоритма летучих мышей (количество особей, начальное положение летучих мышей и их начальная скорость). Процесс оптимизации продолжается до тех пор, пока алгоритм не подберет оптимальные параметры (или пока не будут достигнуты критерии сходимости). По итогу полученные наилучшие параметры используются для инициализации и обучения модели LSTM в целях прогнозирования.

3.2. Оптимизированная с помощью генетического алгоритма модель нейронной сети обратного распространения (GA-BPNN)

Основой второй нейросетевой модели для прогнозирования ВРП является нейронная сеть обратного распространения ошибки (BPNN, Back Propagation Neural Network). Модель BPNN дополняется генетическим алгоритмом (GA, Genetic Algorithm), выступающим в роли инструмента оптимизации. Эту нейронную сеть будем называть GA-BPNN.

Благодаря своей эффективности в задачах временных рядов сеть BPNN широко используется для краткосрочного и долгосрочного прогнозирования в различных сферах [Lai, 2022; Arthur et al., 2020]. Рассмотрим ее структуру. Она включает три вида слоя: X — входной, H — скрытый, Y — выходной [Lai, 2022]:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad H = (h_1, h_2, \dots, h_p)^T, \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T.$$

Математическая модель связей между слоями задается системой уравнений

$$h_k = \sum_{i=1}^n w_{ki} x_i, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad y_j = \sigma \left(\sum_{k=1}^p z_{jk} h_k \right), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где x_i соответствует определенному входному признаку, w_{ki} — веса, связывающие i -й узел входного слоя с k -м узлом скрытого слоя, p — количество узлов в скрытом слое, n — количество узлов во входном слое, z_{jk} — веса, связывающие k -й узел скрытого слоя с j -м узлом выходного слоя, m — количество узлов в выходном слое, σ — активационная функция (сигмоидальная функция).

Для обучения нейронной сети BPNN используется алгоритм обратного распространения ошибки. Этот алгоритм регулирует веса связей в сети, основываясь на разнице между предсказанным выходом и фактическими данными. Ошибка оценивается с помощью функции потерь:

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^p (y_k - \hat{y}_k)^2,$$

где y_k — истинный выход, \hat{y}_k — предсказанный выход для k -го нейрона.

Для достижения наилучших результатов при обучении сети BPNN применяется генетический алгоритм. Он запускается с начальной популяцией потенциальных вариантов, каждый из которых представляет собой модификацию структуры нейронной сети. В качестве оптимизируемых параметров выступают количество нейронов в скрытых слоях. Каждая особь оценивается по ее пригодности, которая определяется по ошибке, полученной на обучающем наборе данных. В процессе работы генетического алгоритма используются операторы отбора, скрещивания (кроссовера), мутации. Для выбора родителей используется случайная выборка, причем худшие решения имеют шанс быть выбраны для дальнейшего воспроизведения, что обеспечивает разнообразие популяции. Реализуется одноточечное скрещивание, когда две родительские хромосомы обмениваются сегментами, создавая новых потомков. Мутация вносит случайные изменения в гены, что помогает избежать локальных минимумов и способствует поиску лучших решений. Этот цикл — от отбора и скрещивания до мутации — повторяется многократно, пока модель не достигнет требуемого уровня точности. После завершения оптимизации полученные параметры используются для построения модели GA-BPNN в целях прогнозирования.

3.3. Оптимизированная алгоритмом роя частиц нейросетевая модель Элмана (PSO-Elman)

В данном разделе представлен алгоритм прогнозирования динамики ВРП с применением нейронной сети Элмана (Elman), которая дополняется алгоритмом роя частиц (PSO, Particle Swarm Optimization), выступающим в роли инструмента оптимизации. Эту нейронную сеть будем называть PSO-Elman.

Нейронная сеть Элмана — это рекуррентная модель, в которую встроен дополнительный слой контекста (хранит информацию о предыдущих состояниях сети, позволяя сети учитывать временные зависимости в данных). Такой механизм особенно актуален для анализа временных рядов, поскольку обеспечивает учет временных зависимостей в данных [Liu et al., 2015].

Структура сети Elman включает четыре слоя: входной, скрытый, слой контекста и выходной (U , X , X_c и Y соответственно). Входной слой U принимает исходные данные, скрытый слой X их преобразует для формирования промежуточных представлений, слой контекста X_c сохраняет состояние предыдущего скрытого слоя, что позволяет модели учитывать прошлую информацию. В конечном итоге выходной слой Y формирует прогноз.

Взаимодействие между слоями можно описать математически [Lai, 2022]. Пусть $Y(t)$ — это выходной сигнал на текущем шаге t , тогда он определяется функцией активации f_2 , которая зависит от взвешенной данных скрытого слоя X :

$$Y(t) = f_2(W_2 X(t) + b_2),$$

где $X(t)$ — данные скрытого слоя на текущем шаге t , W_2 и b_2 — веса и смещения, связывающие скрытый слой с выходом.

Данные $X(t)$ вычисляются по функции f_1 от текущего состояния контекстного слоя $X_c(t)$ и предыдущих входных данных $U(t-1)$, взятых с весом W_1 и смещением b_1 :

$$X(t) = f_1(W_1 X_c(t) + W_1 U(t-1) + b_1).$$

Контекстный слой $X_c(t)$ обновляется на основе предыдущего состояния скрытого слоя $X(t-1)$: $X_c(t) = X(t-1)$. Функции f_1 и f_2 — это функции активации для скрытых и выходных слоев соответственно. Веса W_1 , W_2 и смещения b_1 , b_2 отвечают за связь слоев и настраиваются в процессе обучения.

Для повышения эффективности работы сети Элмана применяется алгоритм роя частиц. В этом методе каждая частица представляет собой потенциальное решение — набор параметров нейронной сети (количество нейронов в скрытых слоях, размер популяции частиц). Положение роя частиц в пространстве — это вектор параметров нейронной сети.

Обновление позиций X_i и скоростей частиц V_i происходит по следующим формулам. Скорость V_i^{t+1} каждой i -й частицы на следующем шаге определяется с учетом ее текущей скорости V_i^t , индивидуальной лучшей позиции p_i и лучшей позицией всего роя p^* [Тетин, 2018; Lai, 2022]:

$$V_i^{t+1} = V_i^t + \alpha_1 \beta_1 (p_i - X_i^t) + \alpha_2 \beta_2 (p^* - X_i^t).$$

Значения X_i^{t+1} обновляются путем прибавления новой скорости V_i^{t+1} к текущей позиции X_i^t (это наборы параметров НС, которые оптимизируются алгоритмом роя частиц):

$$X_i^{t+1} = X_i^t + V_i^{t+1}.$$

Здесь α_1 и α_2 — коэффициенты, регулирующие влияние индивидуальной лучшей позиции и лучшей позиции всего роя на процесс сходимости, β_1 и β_2 — числа в диапазоне от 0 до 1, добавляющие элемент случайности в процесс поиска. Эти коэффициенты обычно инициализируются случайным образом, но они также могут быть оптимизированы в процессе обучения.

Процесс обучения нейронной сети PSO-Elman заключается в последовательных итерациях. На начальных этапах создается сеть и задается ее архитектура, после чего инициализируются параметры алгоритма роя частиц: число частиц, их начальные положения и скорости. Каждая частица оценивается по степени соответствия ее параметров задаваемой модели [Lai, 2022], т. е. через ошибку предсказания на обучающем наборе данных. В процессе оптимизации параметры каждой частицы корректируются, а индивидуальные и глобальные лучшие решения обновляются. Этот цикл продолжается до достижения заданного числа итераций или выполнения условий сходимости, после чего выбранные параметры используют для финальной настройки модели PSO-Elman.

4. Результаты обучения нейросетевых моделей и их сравнительный анализ

4.1. Сравнительный анализ нейросетевых моделей

Перед сравнительным анализом была проведена стадия предварительной настройки гиперпараметров каждой модели. Их выбор был обусловлен как рекомендациями из цитируемой литературы, так и результатами серии вычислительных экспериментов, направленных на минимизацию ошибки на валидационной выборке.

Структура нейросетевой модели BA-LSTM была настроена в виде 4–10–1, то есть 4 — это количество узлов во входном слое, 10 — это количество узлов в скрытом слое, а 1 — это количество узлов выходного слоя. Размер популяции, используемой в модели, равен 20. Максимальное количество итераций задано 100. Архитектура с одним скрытым слоем, содержащим 10 нейронов, была выбрана как компромисс между способностью модели к аппроксимации и риском переобучения. Четыре входных нейрона соответствуют количеству факторов, один выходной — прогнозируемому значению ВРП. Эксперименты с большим количеством нейронов (15, 20 и более) и дополнительными слоями не показали значимого улучшения качества на валидационной выборке, но существенно увеличивали время обучения.

В модели нейронной сети PSO-Elman, работающей по аналогичной схеме 4–10–1, для процесса поиска решения были использованы параметры $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0,5$. Максимальное число итераций — 100, размер популяции PSO — 10. Размер популяции в 10 особей при 100 итерациях стал достаточен для сходимости алгоритма к удовлетворительному решению без избыточных вычислительных затрат. Увеличение этих параметров не приводило к существенному улучшению точности нейронной сети PSO-Elman.

В модели GA-BPNN количество узлов во входном слое равно 4, количество узлов в скрытом слое инициализируется случайным образом в диапазоне от 1 до 99. Количество узлов в выходном слое равно 1. В генетическом алгоритме была реализована популяция из 10 особей в течение 10 поколений. Задана вероятность скрещивания — 0,5, вероятность мутации — 0,2. Модель обучалась в течение 100 итераций со скоростью обучения 0,001. Вероятность скрещивания (0,5) и мутации (0,2) выбраны как стандартные для обеспечения баланса между исследованием пространства решений и выбора лучших особей. Скорость обучения (0,001) подобрана эмпирически для обеспечения устойчивой сходимости алгоритма обратного распространения ошибки.

Обучение трех указанных моделей для прогнозирования ВРП в УР занимало различное время обучения. В таблице 2 приведено среднее время обучения нейросетевых алгоритмов (при повторном запуске обучения 5 раз).

Кривые функции потерь — зависимости средней абсолютной процентной ошибки (*MAPE*) от итераций для каждой нейросетевой модели — представлены на рис. 1.

Таблица 2. Среднее время обучения нейросетевых моделей для прогнозирования ВРП

Нейросетевая модель	Среднее время обучения, с	
	Модели в текущих ценах	Модели в ценах 2023 года
BA-LSTM	767	813
GA-BRNN	2531	2520
PSO-Elman	4620	4502

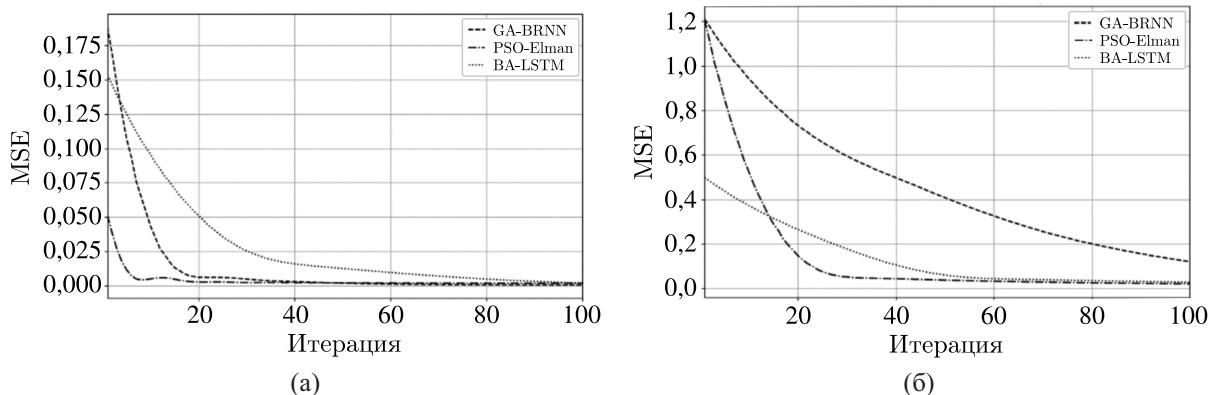


Рис. 1. Кривые функции потерь в зависимости от итераций для трех нейросетевых моделей: а) в текущих ценах; б) в ценах 2023 года

После обучения трех различных моделей для прогнозирования ВРП в УР мы получили результаты, представленные в таблице 3. Все три модели можно сравнить по показателям эффективности: коэффициенту детерминации (R^2) и средней абсолютной процентной ошибке ($MAPE$). Указанные показатели качества нейросетевых моделей рассчитаны для двух вариантов: динамики ВРП в текущих и сопоставимых ценах 2023 года.

Таблица 3. Оценка нейросетевых моделей прогнозирования ВВП в текущих ценах и в ценах 2023 года

Модели	В текущих ценах				В ценах 2023 года			
	Обучающая выборка		Валидационная выборка		Обучающая выборка		Валидационная выборка	
	R^2	$MAPE, \%$	R^2	$MAPE, \%$	R^2	$MAPE, \%$	R^2	$MAPE, \%$
BA-LSTM	0,92	7,52	0,81	5,48	0,94	3,87	0,82	4,19
GA-BPNN	0,90	7,98	0,74	6,76	0,91	4,47	0,64	8,42
PSO-Elman	0,86	9,01	0,55	16,29	0,82	5,86	0,77	4,75

Аппроксимация динамики ВРП УР с помощью представленных выше трех нейросетевых моделей показана на рис. 2, а (в текущих ценах), на рис. 2, б (в сопоставимых ценах 2023 года).

Результаты исследования демонстрируют высокую эффективность модели GA-BPNN в аппроксимации ВРП в текущих ценах. Коэффициент детерминации (R^2) достиг значения 0,90, а средняя абсолютная процентная ошибка ($MAPE$) составила 7,98 %. В целом качество предсказаний на валидационной выборке остается стабильным: R^2 равен 0,74, а $MAPE$ — 5,76 %. Также достаточно высокие показатели точности данной модели на обучающей выборке в ценах 2023 года, при этом на валидационной выборке показатель точности несколько ухудшается.

Модель PSO-Elman для прогноза ВРП в текущих ценах также показывает на обучающем наборе данных приемлемый, но более низкий показатель R^2 — он равен 0,86, а $MAPE$ — 9,01 %. В целом она несколько уступает по точности модели GA-BPNN. На валидационной выборке эффективность модели снизилась: R^2 стал 0,55, а $MAPE$ — 16,29 %. Однако при тестировании на

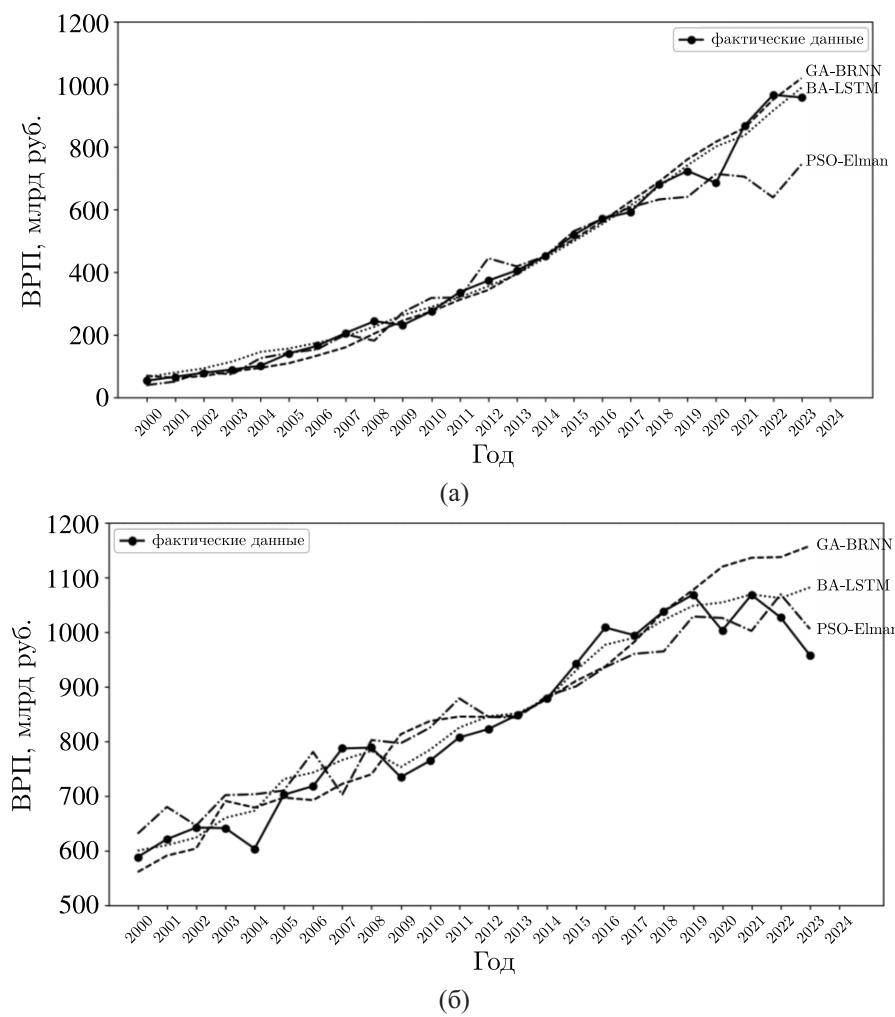


Рис. 2. Аппроксимация динамики ВРП УР по нейросетевым моделям: а) в текущих ценах; б) в ценах 2023 года

данных, скорректированных в ценах 2023 года, модель показала хорошие результаты: для обучающего набора R^2 составил 0,82, $MAPE$ – 5,86 %, а для валидационной выборки R^2 равен 0,77, $MAPE$ = 4,75 %. Перевод же в сопоставимый формат позволил снизить ошибку, однако в целом предсказательная способность PSO-Elman остается ниже, чем у GA-BPNN.

Наиболее точные прогнозы предоставила модель BA-LSTM, которая показала рекордные показатели на обучающем наборе: R^2 = 0,92 и $MAPE$ = 7,52 %; для валидационной выборки R^2 = 0,81 и $MAPE$ = 5,48 %. При сравнении результатов в ценах, приведенных к 2023 году, модель продемонстрировала схожие показатели для обучающего набора: R^2 = 0,94 и $MAPE$ = 3,87 %, а для валидационной выборки R^2 = 0,82 и $MAPE$ = 4,19 %. Эти данные подтверждают, что BA-LSTM стабильно работает для двух вариантов прогноза.

Таким образом, среди нейросетевых моделей выделяется BA-LSTM как наиболее надежная благодаря наивысшим значениям коэффициентов детерминации как для текущих значений ВРП, так и для приведенных к уровню 2023 года данных.

При выборе модели прогноза ВРП важно учитывать не только точность, но и такие факторы, как сложность реализации, потребности в вычислительных ресурсах и устойчивость к изменениям в данных. Модель BA-LSTM выделяется высокой точностью и простотой настройки, а также способностью эффективно моделировать временные зависимости, что обеспечивает

стабильные результаты в долгосрочной перспективе. Нейронная сеть BA-LSTM демонстрирует устойчивость по сравнению с более сложными моделями, которые могут терять свою эффективность из-за переобучения или изменений в паттернах. Модель BA-LSTM является сбалансированным и надежным выбором для долгосрочного прогнозирования макроэкономических показателей региона.

4.2. Результаты прогнозирования динамики ВРП

Для прогнозирования динамики ВРП требуется знать прогнозную динамику влияющих на него факторов. Прогнозная динамика факторов ВРП была построена на основе авторегрессионных моделей первого порядка. На рис. 3, а–г представлены прогнозы факторов, влияющих на ВРП в УР: остаточная стоимость производственного капитала, численность трудовых ресурсов, доля высокотехнологичных и наукоемких отраслей в ВРП, индекс-дефлятор ВВП. Их прогнозы будут использованы для построения прогноза (с помощью лучшей нейросетевой модели) динамики ВРП УР до 2030 года.

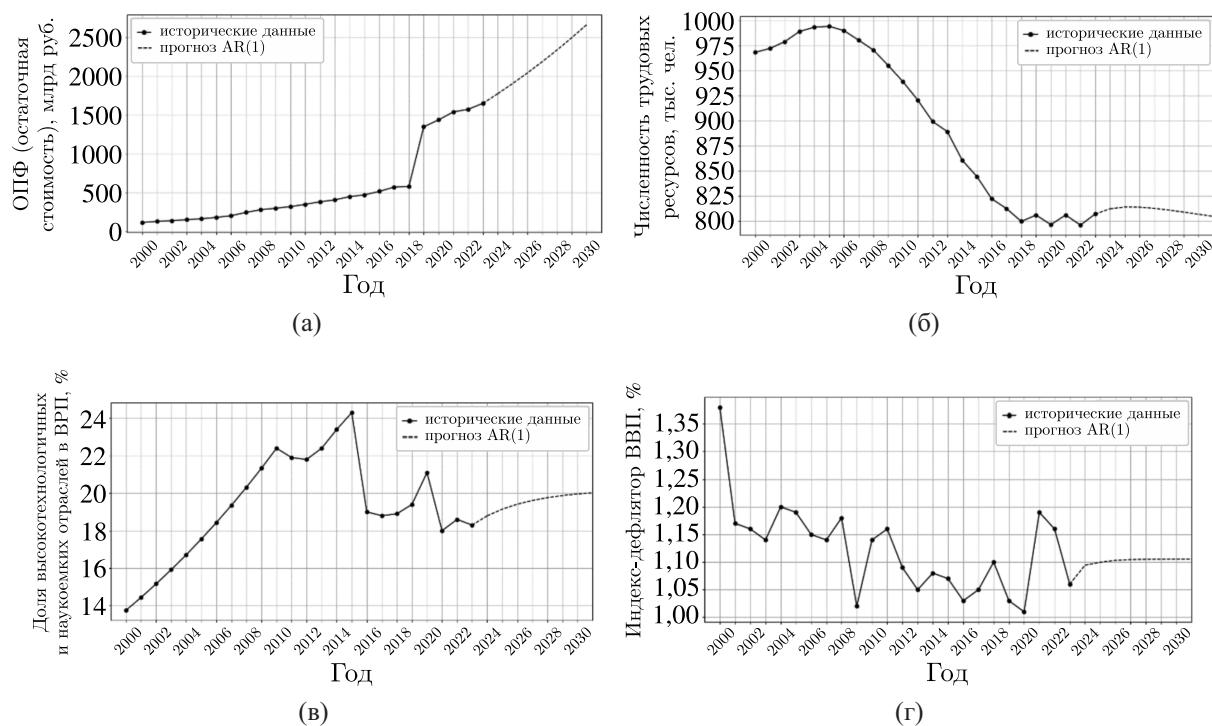


Рис. 3. Фактическая и прогнозная динамика факторов ВРП УР: а) производственный капитал; б) численность трудовых ресурсов; в) доля высокотехнологичных и наукоемких отраслей в ВРП; г) индекс-дефлятор валового внутреннего продукта

Анализ ошибок прогнозирования факторов по моделям авторегрессии первого порядка показывает, что наибольшая точность достигнута при моделировании индекса-дефлятора ВВП, как видно на рис. 3, г, для которого значение среднеквадратичной абсолютной ошибки составляет 3,76 %. В то же время для остаточной стоимости производственного капитала (рис. 3, а) этот показатель равен 6,74 %, для численности трудовых ресурсов (рис. 3, б) – 5,41 %, а для доли высокотехнологичных и наукоемких отраслей в ВРП (рис. 3, в) – 6,68 %.

Подчеркнем, что любой среднесрочный прогноз, включая представленный выше, носит условный, сценарный характер. Он основан на критическом предположении о сохранении в прогнозном периоде (2024–2030 гг.) тех же основных тенденций развития факторов ВРП, которые

наблюдались в ретроспективном периоде (2000–2023 гг.). Прогнозы факторов ВРП следует рассматривать как иллюстрацию их потенциальной траектории развития, а также они необходимы для демонстрации работоспособности нейросетевых моделей прогноза ВРП.

Напомним, что для прогнозирования динамики ВРП УР была выбрана нейросетевая модель BA-LSTM, которая в ходе сравнительного анализа с другими сетями GA-BPNN и PSO-Elman показала лучшие результаты. На рис. 4, *а* и 4, *б* представлены графики прогнозов ВРП УР по модели BA-LSTM в текущих ценах и в ценах 2023 года соответственно.

На рис. 4, *а* видно, что прогнозируемая величина ВРП УР в текущих ценах к 2030 году составит 1264,4 млрд руб. Это соответствует росту относительно величины 2023 года с 957,4 млрд руб. примерно на 32,0 % за семь лет, что в среднем составляет +4,6 % в год.

В то же время на рис. 4, *б* показано, что прогноз ВРП УР в ценах 2023 года составит 1131 млрд руб., что на 18,05 % больше уровня 2023 года, т. е. среднегодовой темп роста +2,5 %.

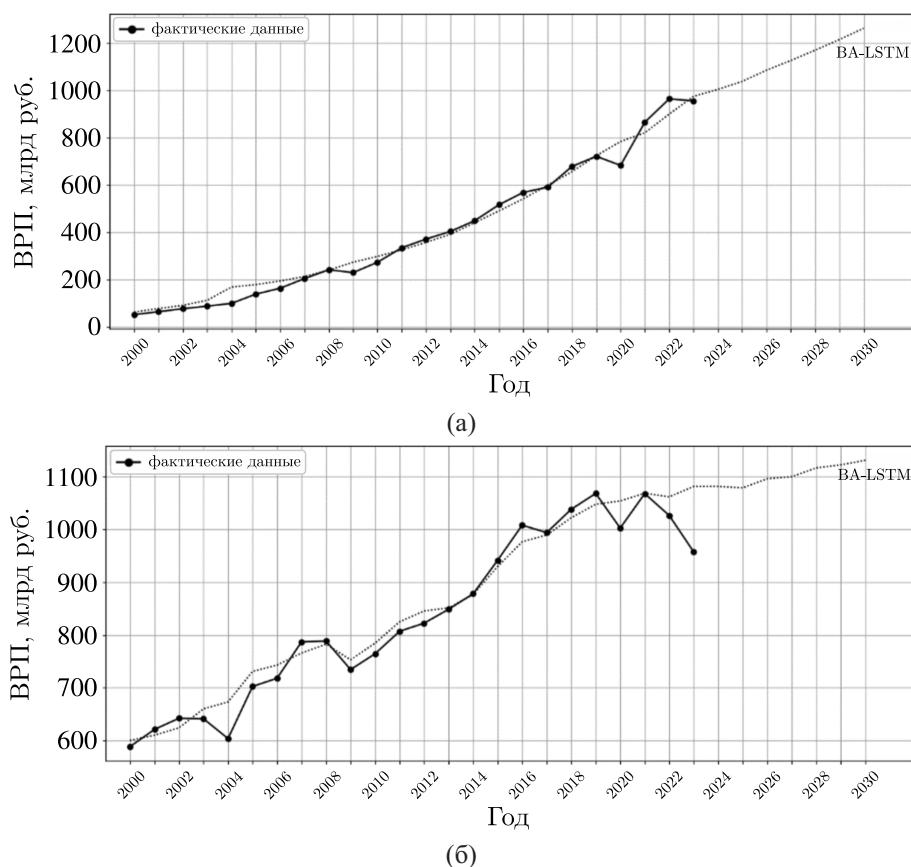


Рис. 4. Фактическая и прогнозная динамика ВРП УР по нейросетевой модели BA-LSTM до 2030 года: а) в текущих ценах; б) в ценах 2023 года

5. Заключение

Данное исследование показало высокую эффективность модели BA-LSTM в прогнозировании валового регионального продукта Удмуртской Республики на основе данных за период 2000–2023 гг. Модель BA-LSTM продемонстрировала достаточно высокие показатели качества прогноза в текущих ценах, достигнув $R^2 = 0,92$ и $MAPE = 7,52\%$ для обучающих данных. Аналогичным образом она сохранила сильные прогностические способности в сопоставимых ценах 2023 года: $R^2 = 0,94$, $MAPE = 3,87\%$. Высокая точность BA-LSTM как в текущих ценах, так

и в сопоставимых ценах 2023 года в сравнении с результатами других моделей свидетельствует о высокой стабильности и надежности модели.

Анализ полученных результатов показал, что в прогнозном периоде до 2030 года в Удмуртской Республике ожидается ежегодное увеличение ВРП +4,6 % в текущих ценах или +2,5 % в сопоставимых ценах 2023 года. К 2030 году прогнозируется величина ВРП Удмуртской Республики на уровне 1264,5 млрд руб., что на 32,1 % больше уровня 2023 года.

Основным ограничением полученного прогноза ВРП до 2030 года является его зависимость от прогнозных значений факторов, построенных на экстраполяции исторических трендов данных. В условиях неопределенности и потенциальных структурных изменений в экономике актуальность прогноза факторов по авторегрессионным моделям может снижаться. Направлением дальнейших исследований являются разработка и интеграция в модель сценарных прогнозов факторов, учитывающих возможные изменения макроэкономической политики, технологические сдвиги и внешнеэкономическую конъюнктуру.

Отметим, что модель BA-LSTM является наиболее эффективным подходом для моделирования ВРП в данном исследовании, демонстрируя как высокую точность, так и возможности настройки. Необходимо продолжить изучение возможностей этой модели, особенно в сочетании с большими наборами данных и новыми достижениями в области применения нейросетевых технологий, чтобы еще больше улучшить ее прогностические характеристики. Также перспективой дальнейших исследований является не только улучшение архитектур нейронных сетей, но и проведение анализа чувствительности обученных моделей для количественной оценки влияния каждого фактора на прогноз ВРП.

Несмотря на то что данное исследование сфокусировано на Удмуртской Республике, предложенная методология обладает высокой степенью универсальности и может быть адаптирована для анализа и прогнозирования ВРП других субъектов РФ. Ключевым условием успешного переноса является доступность сопоставимых исходных данных за репрезентативный временной период: величины производственного капитала (основных фондов), среднегодовой численности трудовых ресурсов, доли продукции высокотехнологичных и наукоемких отраслей в ВРП, индекс-дефлятора ВРП (или ВВП).

Учитывая, что использованные нейросетевые модели (LSTM, BPNN, Elman) и эвристические алгоритмы (BA, GA, PSO) являются общими и не привязаны к специфике конкретного региона, основная задача при переносе методологии будет заключаться в корректной предобработке новых данных и, возможно, настройке гиперпараметров моделей под особенности временного ряда региона. Таким образом, проведенное исследование может служить работоспособным методологическим шаблоном для построения прогнозных систем регионального развития.

Список литературы (References)

Айвазян С. А. Методы эконометрики. — М.: Магистр, ИНФРА-М, 2022.

Aivazyan S. A. Metody ekonometriki [Methods of econometrics]. — Moscow: Magister, INFRA-M, 2022 (in Russian).

Безручко Б. П., Смирнов Д. А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. — Саратов: Колледж, 2015.

Bezruchko B. P., Smirnov D. A. Matematicheskoe modelirovanie i khaoticheskie vremennye ryady [Mathematical modeling and chaotic time series]. — Saratov: College, 2015 (in Russian).

Вавилова Д. Д., Зерари Р. Анализ, моделирование и прогнозирование динамики валового регионального продукта на основе производственной функции // Экономика. Информатика. — 2024. — Т. 51, № 1. — С. 5–17. — DOI: 10.52575/2712-746X-2024-51-1-5-17

Vavilova D. D., Zerari R. Analiz, modelirovanie i prognозirovanie dinamiki valovogo regional'nogo produkta na osnove proizvodstvennoy funktsii [Analysis, modeling and forecasting of the gross regional product dynamics based on the production function] // Ekonomika. Informatika. — 2024. — Vol. 51, No. 1. — P. 5–17. — DOI: 10.52575/2712-746X-2024-51-1-5-17 (in Russian).

- Вавилова Д.Д., Кетова К.В. Информационно-аналитическая система анализа региональных социально-экономических процессов на основе комплексного использования динамических моделей различных типов // Прикладная информатика. — 2023. — Т. 18, № 4 (106). — С. 97–110. — DOI: 10.37791/2687-0649-2023-18-4-97-110*
- Vavilova D. D., Ketova K. V. Informatsionno-analiticheskaya sistema analiza regional'nykh sotsial'no-ekonomicheskikh protsessov na osnove kompleksnogo ispol'zovaniya dinamicheskikh modelei razlichnykh tipov [Information and analytical system for the analysis of regional socio-economic processes based on the integrated use of dynamic models of various types] // Prikladnaya informatika. — 2023. — Vol. 18, No. 4 (106). — P. 97–110. — DOI: 10.37791/2687-0649-2023-18-4-97-110 (in Russian).*
- Валентей С.Д., Бахтизин А.Р., Борисова С.В., Кольчугина А.В., Лыкова Л.Н. Тренды развития субъектов Российской Федерации в 2022–2023 годах. — М.: Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, 2024. — DOI: 10.21686/regions/6.2024*
- Valentey S. D., Bakhtizin A. R., Borisova S. V., Kolchugina A. V., Lykova L. N. Trendi razvitiya subyektov Rossiyskoy Federatsii v 2022–2023 godakh [Development trends in the constituent entities of the Russian Federation in 2022–2023]. — Moscow: Rossiyskiy ekonomicheskiy universitet im. G. V. Plekhanova, 2024. — DOI: 10.21686/regions/6.2024 (in Russian).*
- Дубовик М.В., Дмитриев С.Г. Корреляционный анализ валового регионального продукта и отраслей региональной экономики // Вестник Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова. — 2022. — Т. 19, № 3 (123). — С. 109–118. — DOI: 10.21686/2413-2829-2022-3-109-118*
- Dubovik M. V., Dmitriev S. G. Korrelyatsionnyy analiz valovogo regional'nogo produkta i otriasley regional'noy ekonomiki [Correlation analysis of gross regional product and industries of regional economy] // Vestnik Rossiyskogo ekonomicheskogo universiteta imeni G. V. Plekhanova. — 2022. — Vol. 19, No. 3 (123). — P. 109–118. — DOI: 10.21686/2413-2829-2022-3-109-118 (in Russian).*
- Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики. — СПб., 2023.*
- Krass M. S., Chuprynov B. P. Matematicheskie metody i modeli dlya magistrantov ekonomiki [Mathematical methods and models for economics majors]. — St. Petersburg, 2023 (in Russian).*
- Кудров А. В. Влияние экономической сложности и отраслевой специализации на валовый региональный продукт регионов РФ // Бизнес-информатика. — 2023. — Т. 17, № 4. — С. 25–40. — DOI: 10.17323/2587-814X.2023.4.25.40*
- Kudrov A. V. Vliyaniye ekonomicheskoy slozhnosti i otriaslevoy spetsializatsii na valovyy regional'nyy produkt regionov RF [The impact of economic complexity and industry specialization on the gross regional product of Russian regions] // Biznes-informatika. — 2023. — Vol. 17, No. 4. — P. 25–40. — DOI: 10.17323/2587-814X.2023.4.25.40 (in Russian).*
- Кутышкин А. В. Моделирование динамики валового регионального продукта // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. — 2021. — Т. 21, № 2. — С. 104–113. — DOI: 10.14529/ctcr210210*
- Kutyshevkin A. V. Modelirovaniye dinamiki valovogo regionalnogo produkta [Modeling the dynamics of gross regional product] // Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Kompyuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika. — 2021. — Vol. 21, No. 2. — P. 104–113. — DOI: 10.14529/ctcr210210 (in Russian).*
- Магнушевская И. Г. Влияние частных региональных потенциалов на валовой региональный продукт // Транспортное дело России. — 2023. — № 4. — С. 3–7. — DOI: 10.52375/20728689_2023_4_3*
- Magnushhevskaya I. G. Vliyanie chastnykh regional'nykh potentsialov na valovoy regional'nyy produkt [Influence of private regional potentials on gross regional product] // Transportnoye delo Rossii. — 2023. — No. 4. — P. 3–7. — DOI: 10.52375/20728689_2023_4_3 (in Russian).*
- Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Удмуртской Республике. — [Электронный ресурс]. — <https://18.rosstat.gov.ru/folder/51922> (дата обращения: 12.05.2025).*
- Territorial body of the Federal State Statistics Service in the Udmurt Republic. — [Electronic resource]. — <https://18.rosstat.gov.ru/folder/51922> (accessed: 12.05.2025).*
- Тетин И. А. Инструментальное средство для определения эффективной стратегии страховой компании в условиях цикла андеррайтинга // Вестник Томского государственного университета. Экономика. — 2018. — № 41. — С. 192–209.*
- Tetin I. A. Instrumentarnoe sredstvo dlya opredeleniya effektivnoy strategii strakhovoy kompanii v usloviyakh tsikla anderrayingtinga [Program for determination the effective strategy of insurance company under underrating cycle] // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Ekonomika. — 2018. — No. 41. — P. 192–209 (in Russian).*
- Aliyu A. A., Imam Ya. B., Ali U., Ahmad A., Abdulrahman L. M. An optimized deep learning method for software defect prediction using whale optimization algorithm // Scientific and Technical Journal*

- of Information Technologies, Mechanics and Optics. — 2024. — Vol. 24, No. 2. — P. 222–229. — DOI: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-222-229
- Arthur C.K., Temeng V.A., Ziggah Y.Y.* Performance evaluation of training algorithms in backpropagation neural network approach to blast-induced ground vibration prediction // *Ghana Mining J.* — 2020. — Vol. 20. — P. 20–33. — DOI: 10.4314/gm.v20i1.3
- Cicceri G., Inserra G., Limosani M.* A machine learning approach to forecast economic recessions — An Italian case study // *Mathematics*. — 2020. — No. 8. — P. 241. — DOI: 10.3390/math8020241
- Gandomi A.H., Yang X.-S., Alavi A.H., Talatahari S.* Bat algorithm for constrained optimization tasks // *Neural Computing and Applications*. — 2012. — Vol. 22, No. 6. — P. 1239–1255.
- Gjylapi D., Kasemi V.* A neuro-genetic model in GDP forecasting: case study Albania. — [Electronic resource]. — 2013. — <https://core.ac.uk/download/pdf/268079728.pdf> (accessed: 12.05.2025).
- Hamiane S., Ghanou Y., Khalifi H., Telmem M.* Comparative analysis of LSTM, ARIMA, and hybrid models for forecasting future GDP // *Ingénierie des Systèmes d'Information*. — 2024. — Vol. 29, No. 3. — P. 853–861. — DOI: 10.18280/isi.290306
- Hamiane S., Khalifi H., Ghanou Y., Casalino G.* Forecasting the gross domestic product using LSTM and ARIMA // *IEEE International Conference on Technology Management, Operations and Decisions*. — Morocco, 2023. — P. 1–6. — DOI: 9.1109/ICTMOD59086.2023.10438159
- Ketova K. V., Vavilova D. D.* Neural network forecasting algorithm as a tool for assessing human capital trends of the socio-economic system // *Economic and Social Changes: Facts, Trends, Forecast*. — 2020. — Vol. 13, No. 6. — P. 117–133. — DOI: 10.15838/esc.2020.6.72.7
- Lai H.* A comparative study of different neural networks in predicting gross domestic product // *Journal of Intelligent Systems*. — 2022. — Vol. 31, No. 1. — P. 601–610. — DOI: 10.1515/jisys-2022-0042
- Liu H., Tian H.Q., Liang X.F., Li Y.F.* Wind speed forecasting approach using secondary decomposition algorithm and Elman neural networks // *Appl. Energ.* — 2015. — Vol. 157. — P. 183–194.
- Nguyen V.H., Tran N.N.* Combining dynamic and static host intrusion detection features using variational Long Short-Term Memory recurrent autoencoder // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. — 2024. — Vol. 20, No. 1. — P. 34–51. — DOI: 10.21638/11701/spbu10.2024.104
- Raghavan S., Sarwesh P., Marimuthu C., Chandrasekaran K.* Bat algorithm for scheduling workflow applications in cloud // *International Conference on Electronic Design, Computer Networks and Automated Verification*. — Shillong, India, 2015. — P. 139–144.
- ReLU activation function in deep learning. — 2025. — [Electronic resource]. — <https://www.geeksforgeeks.org/deep-learning/relu-activation-function-in-deep-learning/> (accessed: 12.05.2025).
- Shams M. Y., Tarek Z., El-kenawy E.-S.M., Eid M.M., Elshewey A.M.* Predicting gross domestic product (GDP) using a PC-LSTM-RNN model in urban profiling areas // *Comput. Urban Sci.* — 2024. — Vol. 4, No. 3. — DOI: 10.1007/s43762-024-00116-2
- Sundermeyer M., Ney H., Schluter R.* From feedforward to recurrent LSTM neural networks for language modeling // *IEEE/ACM Trans Audio Speech*. — 2015. — Vol. 23. — P. 517–529.
- Xu Z., Wang X., Jin Y.* Regional GDP prediction based on improved BP neural network model // *International Journal of Multimedia and Ubiquitous Engineering*. — 2014. — Vol. 9, No. 4. — P. 51–62. — DOI: 10.14257/ijmue.2014.9.4.06