

УДК: 51-7, 519.1, 519.6

Исследование достижимости цели в медицинском квесте

И. Н. Орлова^{1,а}, А. Н. Голубцова¹, В. А. Орлов^{2,3}, Н. В. Орлов⁴

¹Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева,
Россия, 660049, г. Красноярск, ул. Перенсона, д. 7

²Сибирский федеральный университет,
Россия, 660041, г. Красноярск, пр-кт Свободный, д. 79

³Институт физики им. Л. В. Киренского ФИЦ КНЦ СО РАН,
Россия, 660036, г. Красноярск, Академгородок, д. 50, стр. 38

⁴Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119234, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

E-mail: ^а bondhome@mail.ru

Получено 02.08.2024, после доработки — 15.11.2025.

Принято к публикации 18.11.2025.

В работе представлено экспериментальное исследование древовидной структуры, возникающей при медицинском обследовании. При каждой встрече с медицинским специалистом пациент получает некоторое количество направлений на консультации других специалистов или на анализы. Возникает дерево направлений, каждую ветвь которого должен пройти пациент. В зависимости от разветвленности дерева оно может быть как конечным (и в этом случае обследование может быть завершено), так и бесконечным, когда цель пациента не может быть достигнута. В работе как экспериментально, так и теоретически изучаются критические свойства перехода системы из леса конечных деревьев в лес бесконечных в зависимости от вероятностных характеристик дерева.

Для описания предлагается модель, в которой дискретная функция вероятности числа ветвей на узле повторяет динамику непрерывного гауссова распределения. Характеристики распределения Гаусса (математическое ожидание x_0 , среднеквадратичное отклонение σ) являются параметрами модели. В выбранной постановке задача относится к проблематике ветвящихся случайных процессов (ВСП) в неоднородной модели Гальтона – Ватсона.

Экспериментальное изучение проводится путем численного моделирования на конечных решетках. Построена фазовая диаграмма, определены границы областей различных фаз. Приведено сравнение с фазовой диаграммой, полученной из теоретических критериев для макросистем, установлено адекватное соответствие. Показано, что на конечных решетках переход является размытым.

Описание размытого фазового перехода проведено с помощью двух подходов. В первом (стандартном) подходе переход описывается с помощью так называемой функции включения, имеющей смысл доли одной из фаз в общем множестве. Установлено, что такой подход в данной системе неэффективен, поскольку найденное положение условной границы размытого перехода определяется только размером выбранной экспериментальной решетки и не несет объективного смысла.

Предлагается второй (оригинальный) подход, основанный на введении в рассмотрение параметра порядка, равного обратной средней высоте дерева, и анализа его поведения. Установлено, что динамика такого параметра порядка в сечениях $\sigma = \text{const}$ с очень небольшими различиями имеет вид распределения Ферми – Дирака (σ выполняет ту же функцию, что и температура для распределения Ферми – Дирака, x_0 – функцию энергии). Для параметра порядка подобрано эмпирическое выражение, введен и рассчитан аналог химического потенциала, который и имеет смысл характерного масштаба параметра порядка, то есть тех значений x_0 , при которых условно можно считать, что порядок сменяется беспорядком. Этот критерий положен в основу определения границы условного перехода в данном подходе. Установлено, что эта граница соответствует средней высоте дерева, равной двум поколениям. На основании обнаруженных свойств предложены рекомендации для медицинских учреждений, позволяющие контролировать обеспечение конечности траектории пациентов.

Рассмотренная модель и метод ее описания с помощью условно-бесконечных деревьев имеют приложение ко многим иерархическим системам. К таким системам можно отнести сети маршрутизации интернет-соединений, бюрократические сети, торговые, логистические сети, сети цитирования, игровые стратегии, задачи популяционной динамики и пр.

Ключевые слова: медицинское обследование, ветвящийся случайный процесс, модель Гальтона – Ватсона, размытые фазовые переходы, конечные системы, условно-бесконечные траектории, макросистема, функция включения, области почти чистых фаз, параметр порядка, химический потенциал, фазовая диаграмма, критическое поведение

UDC: 51-7, 519.1, 519.6

Research on the achievability of a goal in a medical quest

I. N. Orlova^{1,a}, A. N. Golubtsova¹, V. A. Orlov^{2,3}, N. V. Orlov⁴

¹Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V. P. Astafiev,
7 Perensona st., Krasnoyarsk, 660049, Russia

²Siberian Federal University,
79 Svobodny st., Krasnoyarsk, 660041, Russia

³Kirensky Institute of Physics, Federal Research Center KSC SB RAS,
50/38 Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russia

⁴Moscow State University named after M. V. Lomonosov,
1 Leninskiye Gory, Moscow, 119234, Russia

E-mail: ^a bondhome@mail.ru

Received 02.08.2024, after completion — 15.11.2025.

Accepted for publication 18.11.2025.

The work presents an experimental study of the tree structure that occurs during a medical examination. At each meeting with a medical specialist, the patient receives a certain number of areas for consulting other specialists or for tests. A tree of directions arises, each branch of which the patient should pass. Depending on the branching of the tree, it can be as final — and in this case the examination can be completed — and endless when the patient's goal cannot be achieved. In the work both experimentally and theoretically studied the critical properties of the transition of the system from the forest of the final trees to the forest endless, depending on the probabilistic characteristics of the tree.

For the description, a model is proposed in which a discrete function of the probability of the number of branches on the node repeats the dynamics of a continuous gaussian distribution. The characteristics of the distribution of the Gauss (mathematical expectation of x_0 , the average quadratic deviation of σ) are model parameters. In the selected setting, the task refers to the problems of branching random processes (BRP) in the heterogeneous model of Galton – Watson.

Experimental study is carried out by numerical modeling on the final grilles. A phase diagram was built, the boundaries of areas of various phases are determined. A comparison was made with the phase diagram obtained from theoretical criteria for macrosystems, and an adequate correspondence was established. It is shown that on the final grilles the transition is blurry.

The description of the blurry phase transition was carried out using two approaches. In the first, standard approach, the transition is described using the so-called inclusion function, which makes the meaning of the share of one of the phases in the general set. It was established that such an approach in this system is ineffective, since the found position of the conditional boundary of the blurred transition is determined only by the size of the chosen experimental lattice and does not bear objective meaning.

The second, original approach is proposed, based on the introduction of an parameter of order equal to the reverse average tree height, and the analysis of its behavior. It was established that the dynamics of such an order parameter in the $\sigma = \text{const}$ section with very small differences has the type of distribution of Fermi – Dirac (σ performs the same function as the temperature for the distribution of Fermi – Dirac, x_0 — energy function). An empirical expression has been selected for the order parameter, an analogue of the chemical potential is introduced and calculated, which makes sense of the characteristic scale of the order parameter — that is, the values of x_0 , in which the order can be considered a disorder. This criterion is the basis for determining the boundary of the conditional transition in this approach. It was established that this boundary corresponds to the average height of a tree equal to two generations. Based on the found properties, recommendations for medical institutions are proposed to control the provision of limb of the path of patients.

The model discussed and its description using conditionally-infinite trees have applications to many hierarchical systems. These systems include: internet routing networks, bureaucratic networks, trade and logistics networks, citation networks, game strategies, population dynamics problems, and others.

Keywords: medical examination, branching random process, Galton – Watson model, diffuse phase transitions, finite systems, conditionally-infinite trajectories, macrosystem, inclusion function, regions of almost pure phases, order parameter, chemical potential, phase diagram, critical behavior

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 6, pp. 1149–1179 (Russian).

Введение

Каждый, кто когда-либо проходил полномасштабное медицинское обследование, наверняка был свидетелем того, как выдаваемые направления на дополнительную диагностику, а также направления ко все более и более узким специалистам множатся, и возможность поставить итоговую точку в обследовании начинает представляться туманной. Часто такая ситуация лишает обследование актуальности и целесообразности.

Оказавшись однажды в ситуации разрастающегося дерева направлений, авторы заинтересовались вопросом о принципиальной возможности завершить обследование при определенных вероятностных характеристиках этого дерева. Действительно, если количество выдаваемых направлений n велико, ветви дерева множатся, а само дерево становится бесконечным. В другом пределе, если число направлений n в среднем меньше 1, дерево имеет шансы быть конечным. Таким образом, должна существовать граница между одним режимом и другим. Возникает задача о принципиальной достижимости первичной цели пациентом при медицинском обследовании, об условиях конечности этого дерева направлений. На этом этапе видно, что задача может описываться, например, на языке фазовых переходов или в терминах протекания: при определенных параметрах задачи дерево конечно, при достижении некоторых граничных условий — разрастается до бесконечности.

Как число направлений в среднем может быть меньше 1? Нетрудно представить такой тип обследований, когда на прием приходят практически здоровые люди или диагноз можно предположить сразу. Тогда ответы на все вопросы и возможное лечение они получают уже на первом приеме, без выдачи направлений к другим специалистам или на анализы. Таковы зачастую походы к педиатру с ребенком по поводу ОРВИ, профосмотры, многие консультации, особенно в частных медицинских центрах, посещение стоматолога и др. В этом случае ясно, что матожидание числа направлений больше нуля, но не превосходит 1.

Корректно ли говорить о возможности бесконечных деревьев в применении к медицинской траектории пациента? Во-первых, такая корона соответствует ситуации, когда вероятности выдачи большого числа дополнительных обследований велики. Это возможно в рамках каких-либо полномасштабных исследований, близких к научным. В реальности такая модель будет неплохо описывать ситуацию только на начальных этапах обследования. Далее такие траектории будут принудительно прерваны людьми, ибо бесконечные квесты неразумны, они лишают обследование смысла, возможности достигнуть цели, возможности в принципе решать проблемы за ограниченное время. Во-вторых, в реальности количество типов анализов и обследований в медицине велико, но конечно, поэтому в некоторый момент их полный объем будет исчерпан, количество выдаваемых направлений с некоторого момента будет уменьшаться, обратится в ноль, а дерево остановится в росте. Таким образом, ясно, что приведенные рассуждения и построенная на них модель имеют указанные ограничения (применимость на начальных этапах роста дерева). Однако в данной работе нас в большей степени интересуют свойства выбранной абстрактной математической модели, чем реалистичная модель медицинского обследования с большим количеством регулирующих параметров и граничными условиями. Мы выбираем для анализа модель, в которой множество типов анализов бесконечно.

Поставленная проблема принадлежит известному классу задач о ветвящихся случайных процессах (ВСП), сформулированных А. Н. Колмогоровым. Проблемы описания стохастических древовидных структур (ВСП) встречаются в разных областях. До настоящего времени спектр проблем ВСП является актуальным в математических науках [Афанасьев, 2016; Ватутин, Дьяконова, 2022; Лебедев, 2015; Дьяконова, 2011]. Приложения результатов исследований ВСП обширны: теория игр [Горелов, 2016], задачи экономики, управления и логистики [Li, 2017; Батурина, Лемперт, 2010; Толуев, Планковский, 2009], теория развития биологических систем, эволюции

популяций и эпидемий [Mitrofani, 2021; Durrett, 2015; Singh, 2014; Kimmel, Axelrod, 2002; Jacob, 2010; Неверова, Фрисман, 2015; Ватутин, Дьяконова, 2016; Калинкин, Мастихин, 2006], теория очередей и нейросетей [Corral López et al., 2022; Белорусов, 2011; Афанасьева, 2011; Гришечкин, 1994], физические и химические процессы [Corral et al., 2018; Grimmett, 2012; Рудой, 2007] и пр. Рассматриваемая система является еще одним примером известных в математике процессов Гальтона – Ватсона [Bertacchi et al., 2020], исходно описывающим рост генеалогического дерева. Критическое поведение в ВСП-системах исследовалось ранее в [Sun et al., 2022; Korchinski et al., 2021; Alley et al., 2014; Bollobas et al., 2007; Bollobas, Riordan, 2012; Koch, 2016; De Martino, 2010].

Какова возможная терминология? С точки зрения менеджмента медицинского обслуживания такой древовидный объект можно назвать медицинским квестом. С математической точки зрения возникающая структура является экспоненциальным деревом с непостоянным числом ветвей, задаваемым некоторым законом распределения. Как указано выше, такой объект возникает при рассмотрении ветвящихся случайных процессов (ВСП) и может называться стохастической древовидной структурой или просто стохастическим деревом (графом).

Экспоненциальность дерева в модели легко понять из следующих качественных рассуждений: прирост количества ветвей в любом поколении пропорционален числу ветвей в предыдущем, кроме того, зависимость среднего числа узлов $\langle N \rangle$ от номера поколения k ($k = 0, 1, \dots$) можно приблизительно описать показательной функцией: $\langle N \rangle \approx M_n^k$, где $M_n = \langle n \rangle$ — среднее число направлений, выходящих из узла (математическое ожидание). Строгое свойство экспоненциальности является следствием вида производящей функции ВСП Гальтона – Ватсона. Заметим, что в случае, если в модель будет добавлено условие конечности множества типов направлений, свойство экспоненциальности кроны пропадет: очевидно, при исчерпании этого множества для больших k количество оставшихся типов исследований начнет убывать и в некоторый момент обратится в ноль — дерево в такой модели конечно.

В работе мы ставим своей целью пройти по плоскости параметров распределения вероятностей числа ветвей и проанализировать над ней критические свойства системы — определить области фаз и их границы.

Методы

Математическая модель

Мы полагаем, что распределение вероятностей количества выдаваемых направлений каждым врачом должно обладать следующими свойствами. Во-первых, это дискретное распределение вероятностей — количество направлений n является целым числом ($0, 1, 2, 3, \dots$). Во-вторых, это распределение может иметь максимум, приходящийся на небольшие целые числа. Это зависит от возраста пациента, тяжести предполагаемого заболевания, медицинской специализации и других факторов. В общем случае ноль направлений, очевидно, не характеризуется максимумом вероятности, однако как частный случай это возможно. При увеличении параметра n поведение вероятности $P(n)$ должно быть убывающим. В-третьих, эта дискретная функция вероятности должна подчиняться условию нормировки. Это означает, что практически мы должны ограничиться конечным рядом для n разумной длины, и для этого набора применить условие нормировки. На основании перечисленных свойств функция вероятности количества выдаваемых направлений может иметь вид, показанный на рис. 1.

Далее необходимо найти дискретное распределение с указанными свойствами или подобрать такую непрерывную функцию $f(x)$, которой принадлежат значения дискретного распределения $P(n)$: $P(n) = f|_{x=n}$. Мы выбрали второй путь и в качестве такой непрерывной функции

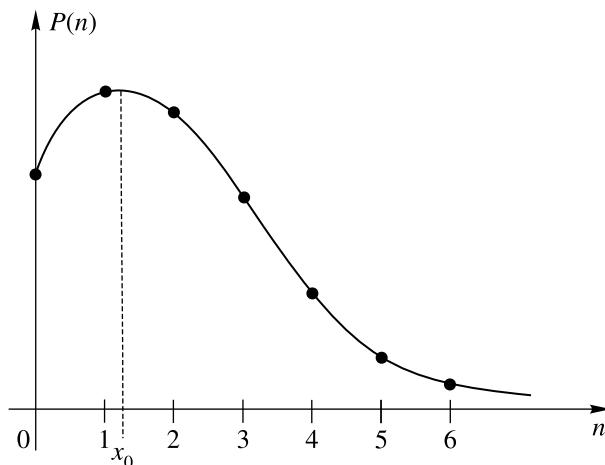


Рис. 1. Общий вид функции вероятности $P(n)$ количества направлений на узле

использовали функцию гауссового вида:

$$f(x) = C \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1)$$

Такой выбор кажется нам естественным, опирающимся на эмпирические свойства функции вероятности, указанные выше. В силу специфики компьютерного счета в нашей модели, профиль функции вероятности $P(n)$ не принципиален, важно, чтобы эта функция была локализована. Поэтому выбор пал на гауссово распределение, как одно из простейших и естественных, удовлетворяющих нашим требованиям.

Отметим ряд случаев. Во-первых, отсутствие максимума у функции вероятности обеспечивается возможностью $x_0 < 0$. Во-вторых, при $\sigma = 0$ функция $f(x)$ становится δ -образной. В этом случае, если $x_0 = 0$, возникает дерево нулевой длины; при $x_0 = 1$ из каждого узла выходит одна связь, и дерево становится бесконечным. При $x_0 = 2$ из каждого узла выходят точно две связи: имеем двоичное дерево.

Функция $f(x)$ необходима нам в области положительных значений аргумента, параметры x_0 и σ определяют положение и вид этой кривой: x_0 — точка максимума функции, σ — параметр, регулирующий ширину кривой. Подчеркнем, что x_0 — действительное число (в отличие от n). Важным моментом является то, что нормировать нужно не функцию $f(x)$, а дискретную функцию вероятности $P(n)$. Это требует задать разумный верхний предел значений n : назовем этот параметр n_{\max} . Мы выбирали этот параметр, руководствуясь правилом трех сигм нормального распределения, здесь являющегося примерной оценкой: n_{\max} равно целой части от суммы $(x_0 + 3\sigma)$. В процессе работы программы параметры x_0 и σ будут меняться, что влечет за собой изменение n_{\max} . Это заставляет нас считать ветвящийся случайный процесс (ВСП) в рамках выбранных условий на всей плоскости параметров x_0 и σ *неоднородным*.

Таким образом, независимыми переменными модели выбраны характеристики непрерывной гауссовой функции. Задавая x_0 и σ , мы меняем наиболее вероятное количество направлений и разброс их значений и тем самым вид возникающего медицинского дерева. Для каждой пары независимых переменных x_0 и σ нормируем дискретную функцию вероятности $P(n)$ и на ее основе производим моделирование возникающего квеста. Для данной пары $\{x_0, \sigma\}$, определяющей вероятностные свойства узлов дерева, возможно огромное множество вариантов реализации дерева. Поэтому мы создаем статистический ансамбль с числом деревьев N_{trees} для каждой пары $\{x_0, \sigma\}$ и далее рассчитываем некоторые термодинамические средние, о которых подробно

расскажем ниже. Нормировочные соотношения:

$$\sum_{n=0}^{n_{\max}} P(n) = 1, \quad C = \left(\sum_{n=0}^{n_{\max}} \exp\left(\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \right)^{-1}. \quad (2)$$

Для функции $f(x)$, определенной на всей числовой прямой, x_0 являлось бы матожиданием, а σ — среднеквадратичным отклонением. Для дискретного распределения $P(n)$ матожидание M_n будет связано с x_0 некоторой возрастающей функцией. То же можно сказать о связи среднеквадратичного отклонения σ_n функции вероятности $P(n)$ и σ . Ниже мы рассчитали эти параметры M_n и σ_n для функции вероятности $P(n)$ и выяснили, что указанные связи далеки от простой пропорциональности (последний раздел, см. рис. 15, 16, 17), причем каждый из этих параметров зависит от обоих аргументов: $M_n(x_0, \sigma)$, $\sigma_n(x_0, \sigma)$.

Когда x_0 находится вблизи нуля и $P(n = 0)$ велико, высоки шансы, что дерево будет коротким. При увеличении x_0 дерево имеет тенденцию к неограниченному росту. Увеличение параметра σ позволяет реализовываться исходам с $n > 1$ и также способствует активному росту дерева. Таким образом, при малых значениях параметров x_0 и σ дерево конечно, при больших — бесконечно. Существуют критические значения этих параметров, при которых происходит переход. В результате компьютерного эксперимента на плоскости параметров $\{x_0, \sigma\}$ в работе найден ряд кривых, характеризующих этот переход по разным критериям.

Мы полагаем, что интенсивность роста кроны дерева, близость к фазовой границе определяются не только x_0 , но и σ . Именно поэтому на плоскости параметров (x_0, σ) мы ожидали нетривиальную фазовую диаграмму, на которой границы фаз не являются постоянными. Для второй пары параметров (M_n, σ_n) , близкой по смыслам к (x_0, σ) и связанной с ней существенно нелинейно, нельзя сказать, что близость к фазовой границе зависит как от M_n , так и от σ_n . Ниже обсуждается, что граница между областями конечных и бесконечных траекторий для ВСП Гальтона — Ватсона — это кривая, на которой $M_n = 1$, другими словами, факт вырождения зависит только от матожидания M_n . Среднеквадратичное отклонение σ_n влияет лишь на асимптотическое поведение числа узлов (см. предельные теоремы для ВСП). На плоскости параметров (M_n, σ_n) фазовая диаграмма будет выглядеть максимально просто, с фазовой границей в виде константы $M_n = 1$. Для практических целей медицинского менеджмента пара параметров (x_0, σ) , возможно, более органична, поскольку имеет простой прикладной смысл.

Можно ли привести экспериментальные данные в подтверждение выбранной модели? К сожалению, данных о статистике выдаваемых направлений на разных этапах обследования найти не удалось. Однако имеются косвенные данные, основанные на нормативных документах Министерства здравоохранения РФ. В частности, Приказом Минздрава № 1706 от 29.12.12 создана трехуровневая система здравоохранения в РФ и определена принадлежность медицинских специальностей к тому или иному звену. К первому звену (врачи, которые проводят первичный прием и выдают направления на анализы и направления к специалистам второго звена) относят шесть медицинских специальностей: терапевт, офтальмолог, отоларинголог, гинеколог, уролог, хирург (в частных медицинских центрах — семейный доктор широкого профиля). Количество более узких специалистов второго звена — 15. Третичное звено составляют специалисты высокотехнологичных медицинских организаций (стационары, специализированные медицинские центры, НИИ). Эти данные позволяют грубо оценить порядок среднего количества выдаваемых направлений как отношение числа специалистов последующего и предыдущего звена (2,5) (в предположении, что направления к узким специалистам 2-го звена не дублируются у врачей 1-го звена, и без учета направлений на анализы).

Подчеркнем, однако, что в данной работе авторов заинтересовали скорее свойства абстрактной математической модели с бесконечным числом звеньев и неограниченным множе-

ством типов обследований, чем свойства реальной медицинской траектории. Медицинский квест послужил лишь прототипом модели.

Моделирование ветвящегося случайного процесса

Как, имея набор вероятностей $P(n)$, осуществить моделирование движения по данной медицинской траектории в соответствии с этими направлениями? Если этих вероятностей только две (p и q , такие, что $p + q = 1$), то идея моделирования проста, она используется в моделировании методом Метрополиса в статистической физике. Суть метода в следующем. Представим себе область полной вероятности $p + q = 1$ какого-либо из исходов (A или B) в виде отрезка. Разобьем этот отрезок на области, равные p и q . Будем считать область размером p областью реализации события A , а оставшуюся область размером q — областью события B . Если случайно брошенная точка на этот отрезок попадет в область длиной p , то реализуется событие A , если в оставшийся кусок длиной q — событие B . Очевидно, в данном методе используется представление о геометрической вероятности. В нем доля всех исходов A действительно составляет p , исходов B — q . Этот же прием можно использовать для розыгрыша многовариантного выбора количества направлений с вероятностями $P(n)$. Имеем

$$P(0) + P(1) + P(2) + \dots + P(N_{\max}) = 1. \quad (3)$$

Аналогично разбиваем отрезок $(0, 1)$ на области, численно равные $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, \dots , $P(N_{\max})$, и бросаем точку на этот отрезок. В зависимости от того, в какой частичный отрезок упадет эта точка, то событие и считаем выпавшим.

Особенности эксперимента с конечными решетками

Моделирование ветвящегося процесса с произвольным числом ветвей на узле имеет свои ограничения. При больших x_0 и σ количество ветвей на узле может достигать 10 и выше, а это значит, что полное число ветвей в поколении k составляет порядка 10^k : имеем экспоненциальный рост числа ветвей (направлений) и узлов (врачей) с ростом k . В некоторый момент это количество превосходит все диапазоны целых переменных среды программирования, поэтому мы вынуждены ограничивать высоту дерева некоторым разумным k_{\max} : это верхняя граница числа поколений, в наших экспериментах она варьировалась в диапазоне $k_{\max} = 5 \div 18$. Таким образом, при моделировании мы работаем с конечными решетками длиной k_{\max} , а следовательно, идентификация бесконечного дерева сталкивается с объективными трудностями.

Действительно, как на конечной решетке экспериментально отличить конечное дерево от бесконечного? Очевидно, это нонсенс, это в принципе невозможно. Однако здесь доступен наивный метод — отслеживать тенденцию к неограниченному росту по факту достижения или недостижения некоторой границы. Положим следующее: дерево имеет тенденцию к неограниченному росту, если оно достигает некоторой немалой границы k_{\max} и продолжает рост (то есть имеет потомков в этом поколении). Такие деревья будем называть *условно-бесконечными*. Очевидно, что с помощью такой процедуры мы не сможем отличить реально бесконечные деревья от просто очень высоких (длинных).

Более детально эти критерии определены нами таким образом: дерево считаем условно-бесконечным (длинным), если в поколении k_{\max} дерево имеет ветви-направления, то есть продолжает расти, и конечным, если оно вырождается (останавливается в росте) в любом из поколений $k \leq k_{\max}$, то есть не имеет ветвей в поколении $k_{\max} + 1$ или раньше. На рис. 2 показаны примеры конечных (не достигших границы $k_{\max} = 5$) деревьев с указанием значений x_0 и σ . На рис. 3 показаны примеры реализации условно-бесконечных (длинных) деревьев, достигших границы $k_{\max} = 5$ и продолжающих рост.

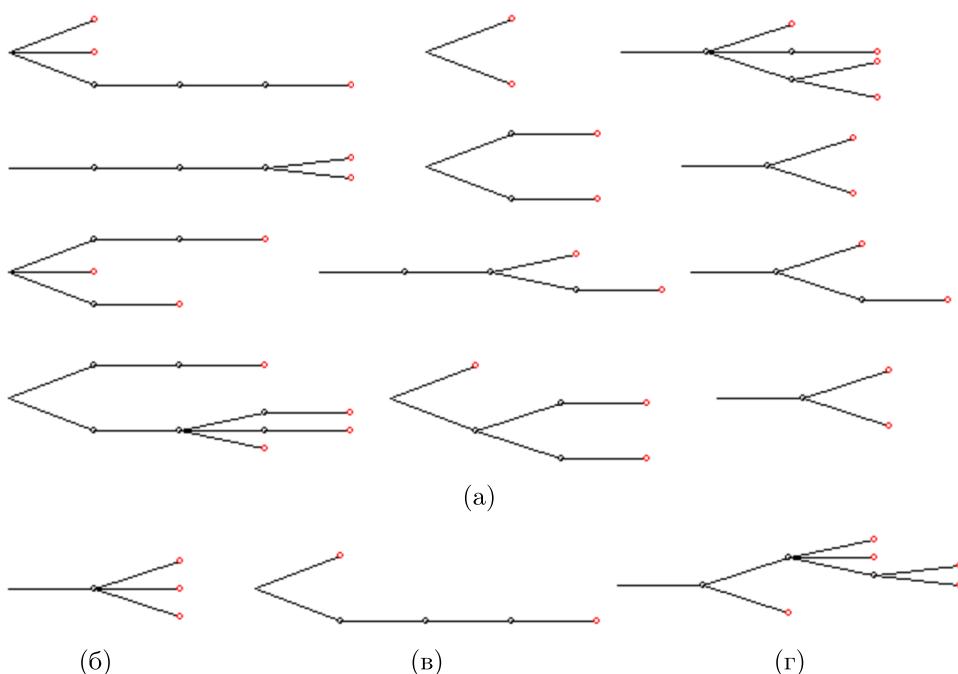


Рис. 2. Варианты конечных деревьев при ограничении числа поколений $k_{\max} = 5$. Все деревья получены при $\sigma = 1$: а) $x_0 = 0,1$; б) $x_0 = 0,3$; в) $x_0 = 0,5$; г) $x_0 = 0,3$

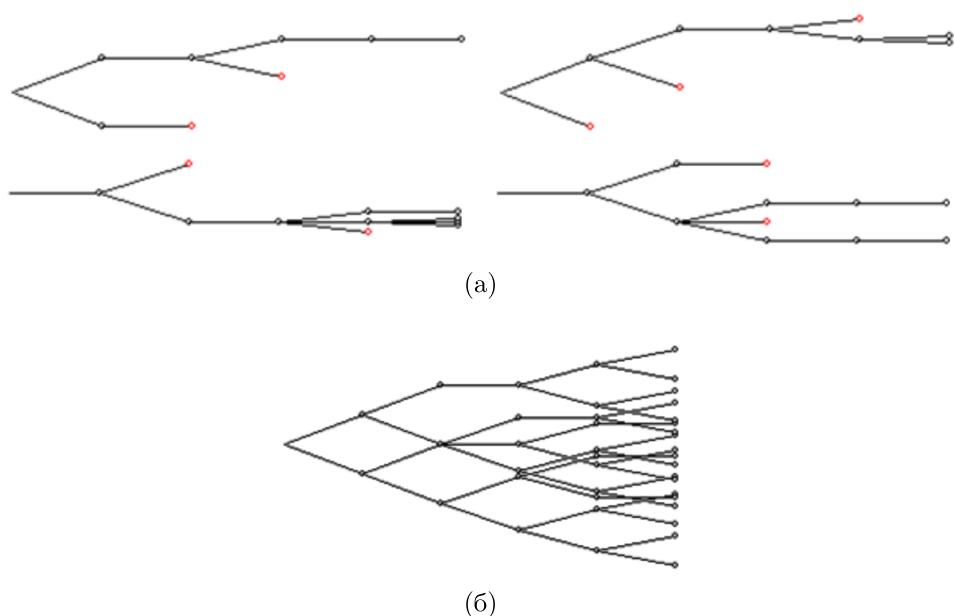


Рис. 3. Примеры условно-бесконечных деревьев, полученных при а) $x_0 \approx 1,5$ и $\sigma \approx 0,2$; б) $x_0 \approx 0,3$ и $\sigma \approx 1,0$

Выбор термодинамических параметров для идентификации критического поведения

Для идентификации фазового перехода необходимо выбрать соответствующий макропараметр. Для этой роли проверялись различные параметры: средняя высота дерева, вероятность достижения границы, параметр порядка. В результате наиболее подходящей для этой цели признана вероятность достижения границы. При одних и тех же значениях параметров x_0 и σ может

возникнуть как конечное, так и условно-бесконечное (длинное) дерево, поскольку это процесс вероятностный. В процессе моделирования для каждой пары x_0 и σ разыгрывается N_{trees} деревьев с соответствующими вероятностными свойствами и среди этого множества подсчитывается количество тех деревьев N_∞ , которые достигли верхней границы дерева k_{\max} , и доля, которую эта часть составляет от всех деревьев. Указанная доля является оценкой вероятности достижения верхней границы или вероятности возникновения условно-бесконечного дерева при данных σ и x_0 :

$$P_\infty = \frac{N_\infty}{N_{\text{trees}}}. \quad (4)$$

Удовлетворительное качество функции $P_\infty(x_0)$ при некотором значении σ получается для ансамбля из порядка $N_{\text{trees}} = 10\,000$ деревьев.

В рассматриваемой системе в силу ее специфики необходимо также четко определить, что является фазами в системе и что собой представляет сама термодинамическая система:

система:	статистический ансамбль из N_{trees} деревьев
фаза 1:	подсистема конечных деревьев
фаза 2:	подсистема условно-бесконечных деревьев

Напомним, что под условно-бесконечными деревьями мы понимаем деревья с высотой кроны большей, чем высота экспериментальной решетки. В это множество будут входить как длинные деревья, так и бесконечные.

Результаты и обсуждение

Фазовый переход

На рис. 4 показан вид функции $P_\infty(x_0)$ при двух значениях параметра σ ($\sigma = 0,015; 0,5$). Как и ожидалось, функция вероятности бесконечной траектории в зависимости от x_0 имеет переходный характер. В пределе $\sigma \rightarrow 0$ она представляет собой прямоугольную ступеньку в точке $x_0 = 0,5$ от значения 0 к значению 1 (рис. 4, а). При увеличении σ ступенька постепенно размывается (рис. 4, б). Такое поведение вероятности соответствует существованию фазового перехода в системе. В нижней части рис. 4 для указанных значений σ показан вид функции $f(x)$, для которой σ определяет ширину распределения.

Особенностью размытия ступеньки при увеличении σ является то, что при небольших σ функция по-прежнему наверняка переходит от значения $P_\infty = 0$ (фаза конечных квестов) к значению $P_\infty = 1$ (фаза условно-бесконечных (длинных) квестов). Наличие промежуточных значений вероятности бесконечного квеста говорит о возникновении области, в которой указанные фазы будут сосуществовать в отношении, определяемом значением $P_\infty(x_0, \sigma)$. Эта область — область размытия фазового перехода. Отметим, что если следовать канонам определения точки фазового перехода, то надо признать, что настоящий фазовый переход наблюдается только при $\sigma = 0$, при других σ фазовый переход относится к типу размытых фазовых переходов.

При $\sigma \neq 0$ поведение термодинамических величин в рассматриваемой системе аналогично поведению в конечных системах или системах с примесями [Малыгин, 2001]. Согласно классификации, приведенной в [Малыгин, 2001], в данной системе наблюдается размытый фазовый переход промежуточного рода между 1-м и 2-м.

Динамика функции $P_\infty(x_0, \sigma)$ при увеличении параметра σ представлена на рис. 5. На рис. 6, а, б показаны ключевые линии уровня функции $P_\infty(x_0, \sigma)$ (получено для статистического ансамбля из 20 000 деревьев). Линии уровня этой функции позволят определить области реализации различных типов траекторий. Какова эта интерпретация?

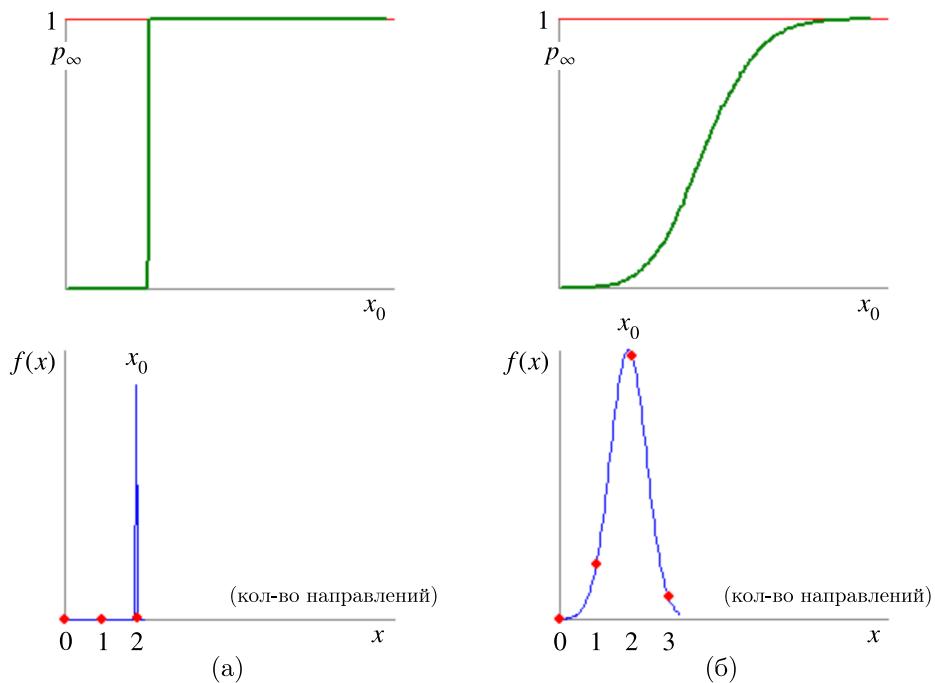


Рис. 4. Переходный характер вероятности условно-бесконечного квеста (верхние графики) для а) $\sigma = 0,015$ и б) $\sigma = 0,5$. На нижних графиках показаны соответствующие этим значениям σ распределения вероятностей числа выдаваемых направлений $P(n)$ (σ — среднеквадратичное отклонение гауссовой функции $f(x)$, $f(x = n) = P(n)$). Графики получены для ансамбля $N_{\text{trees}} = 10^4$ деревьев

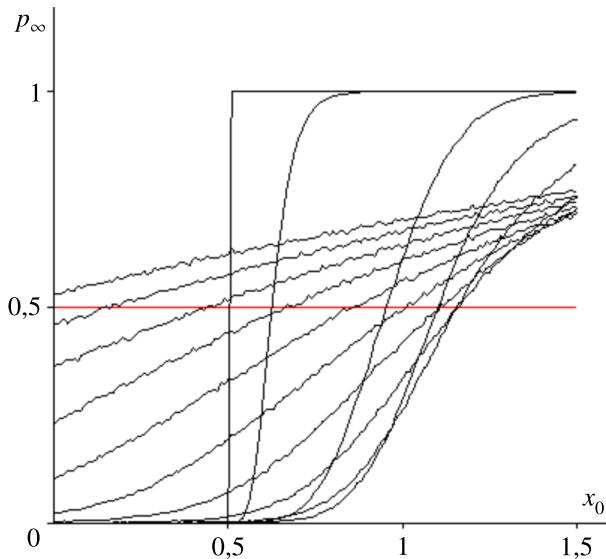


Рис. 5. Эволюция вероятности условно-бесконечного квеста $p_\infty(x_0, \sigma)$ для $\sigma = 0,005 \div 2,405$ с шагом 0,2. Размер статистического ансамбля $N_{\text{trees}} = 20\,000$, $k_{\max} = 15$

На рис. 6, а вблизи начала координат (малые x_0 и σ) отображена область, в которой вероятность бесконечного квеста равна нулю с точностью ε : $P_\infty(x_0, \sigma) < \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-4}$. В этой области цель достижима, медицинское обследование конечно, это область конечной фазы с невысокими деревьями (высота не превосходит размер решетки). На рис. 6, б она обозначена цифрой I.

В остальных областях плоскости (x_0, σ) вероятность возникновения условно-бесконечного дерева имеет отличные от нуля существенные значения. Условно-бесконечные — это длинные

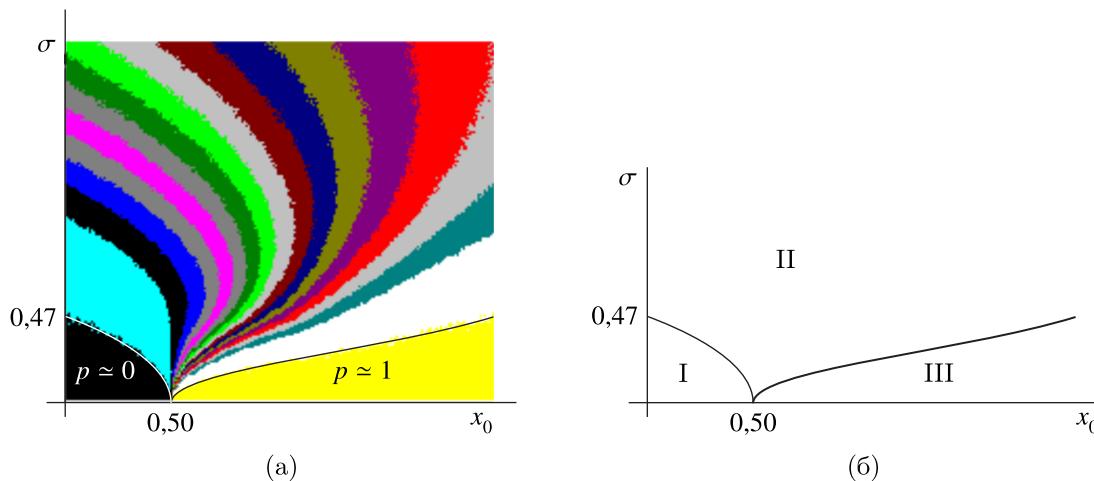


Рис. 6. Изолинии функции $p_\infty(x_0, \sigma)$ с шагом $\frac{1}{16}$, получено при 20 000 деревьев (а). Предварительная фазовая диаграмма (б)

(с высотой больше размера решетки) и собственно бесконечные. Эти два типа должны разместиться в оставшейся части плоскости. В рамках эксперимента на конечных решетках невозможно отличить длинные от бесконечных, как говорилось выше. Рассматриваемая область разбивается на область, в которой $P_\infty(x_0, \sigma)$ принимает промежуточные между 0 и 1 значения (это значит, что здесь встречаются как короткие, так и длинные (условно-бесконечные) деревья) и область, в которой она равна 1 с погрешностью ε . Последнее означает, что встречаются только условно-бесконечные деревья. Можно выдвинуть гипотезу, что в области III на рис. 6, б реализуются собственно бесконечные деревья, в промежуточной — длинные, с плавно меняющейся средней высотой кроны. В дальнейшем эта гипотеза будет подтверждена с помощью теоретического критерия бесконечности ВСП Гальтона–Ватсона, а также косвенно — с помощью параметра порядка, равного обратной средней высоте дерева. Параметр порядка, как будет видно ниже, в промежуточной области ведет себя плавно, что и соответствует плавно меняющейся средней высоте дерева. Заметим, что для менеджмента медицинского обследования как длинные, так и бесконечные траектории — плохо, поскольку соответствуют невозможности в реальности завершить обследование. Для промежуточной области II на рис. 6, б уместным будет название «смешанный лес», поскольку дробная вероятность условно-бесконечного квеста означает наличие как коротких, так и длинных деревьев. Собственно бесконечных деревьев в промежуточной области нет, ибо в противном случае это обратило бы среднюю длину дерева в бесконечность и параметр порядка — в ноль, кроме того, это также следует из теоретического критерия бесконечности ВСП Гальтона–Ватсона: бесконечные деревья возникают только в области, в которой матожидание числа ветвей больше 1 (обсуждается в последнем разделе работы). На рис. 6, б показана предварительная фазовая диаграмма системы с указанием фаз (I, II, III), построенная по этим результатам. Далее она будет уточнена с учетом теоретического критерия.

Заметим: на рис. 5, 6 видно, что переход от конечной фазы I сразу к бесконечной III реализуется только при $\sigma = 0$, при любых конечных σ переход размыается областью сосуществования фаз II тем большей ширины, чем больше σ . Точкой резкого перехода при $\sigma = 0$ является $x_0 = 0,5$. Границей области конечных квестов на оси σ (при $x_0 = 0$) является $\sigma \approx 0,47$ (получено для ансамбля $N_{\text{trees}} = 1 \times 10^5$).

Необходимость выбрать фиксированное малое ε для определения границы конечной фазы с помощью условия $P_\infty(x_0, \sigma) < \varepsilon$ продиктована следующим. Функция $P_\infty(x_0, \sigma)$ представляет собой идеальную ступеньку только в пределе $\sigma = 0$, как видно, например, из рис. 5. При малом $\sigma \neq 0$ функция равна нулю, очевидно, только в точке $x_0 = 0$, дальше это плавная функция без

изломов, все еще визуально имеющая вид прямоугольной ступеньки, то есть идущая как угодно близко к нулю в области $x_0 < 0,5$, однако нулю уже не равная. Физически такое малое отличие от нуля для вероятности приводит, как известно, к понятию «физически никогда», то есть, несмотря на отличную от нуля вероятность, физически тем не менее невозможно обнаружить в такой системе условно-бесконечные траектории, поэтому конечная фаза при таких малых вероятностях сохраняется. Такая же ситуация — на границе бесконечной фазы. Уровень $P_\infty(x_0, \sigma) = 1$ считаем достигнутым при выполнении условия $P_\infty(x_0, \sigma) > 1 - \varepsilon$. Границы конечной и бесконечной фаз в этом смысле являются условными. Такая практика определения границ чистых фаз является общепринятой в теории размытых фазовых переходов.

В литературе указываются следующие причины размытия (см., например, [Аманбаева, 2007]): 1) конечность системы; 2) флуктуации, многостадийность величин в области ФП; 3) крупномасштабная неоднородность системы; 4) влияние полей; 5) поверхностные эффекты. Как с очевидностью следует из описания выше, в рассматриваемой модели ВСП причиной размытия фазового перехода является конечность системы (решетки).

Описание размытого фазового перехода на языке функции включения (стандартный подход)

В работах [Терехов, 2023; Ролов, Юркевич, 1983; Алиев, 2007; Аманбаева, 2007] указывается, что для описания размытых фазовых переходов достаточно рассмотреть функцию включения L , являющуюся относительной долей одной из фаз во всей системе, а также долю другой фазы ($1 - L$) и производные этих функций по параметру перехода. Относительные доли фаз при таких переходах ведут себя как ступени с уровня 0 на уровень 1 или наоборот с той или иной степенью размывания, функция-производная имеет достаточно острый максимум.

В случае если описывается фазовый переход по температуре, температурой размытого фазового перехода принято считать такую точку, в которой относительные доли фаз равны $\frac{1}{2}$, при этом, как показано в [Алиев, 2007], эта точка совпадает с точкой максимума производной функции включения. Как нетрудно видеть, выбранная нами вероятность условно-бесконечного квеста является как раз такой относительной долей условно-бесконечной компоненты во всем статистическом ансамбле деревьев при данных значениях x_0 и σ :

$$P_\infty(x_0, \sigma) \equiv L.$$

Согласно [Алиев, 2007] скорость перехода $\frac{dL}{dt}$ по параметру перехода t должна быть пропорциональна долям обеих фаз в системе:

$$\frac{dL}{dt} = A(L) \cdot L \cdot (1 - L). \quad (5)$$

В рассматриваемой системе параметром перехода является $t = x_0$. Для $L(t)$ из (5) получено

$$L(t) = \frac{1}{1 + \exp(F(t))}, \quad \text{где} \quad F(t) = - \int A(t) dt. \quad (6)$$

В точке фазового перехода $F(t_0) = 0$, откуда $L(t_0) = 1 - L(t_0) = \frac{1}{2}$, то есть половина системы находится в фазе 1, половина — в фазе 2.

Такая условная граница фаз рассчитана нами по результатам компьютерного эксперимента, она показана на фазовой диаграмме на рис. 7 (линия $p_\infty = \frac{1}{2}$). На этой границе, согласно эксперименту, в среднем половина деревьев — конечные, короткие, половина — длинные, с длиной больше размера решетки. Размер решетки в эксперименте был $k_{\max} = 15$. Следовательно, до этой линии длинных, с $l > 15$, меньше, чем коротких, очень приблизительно можно сказать, что

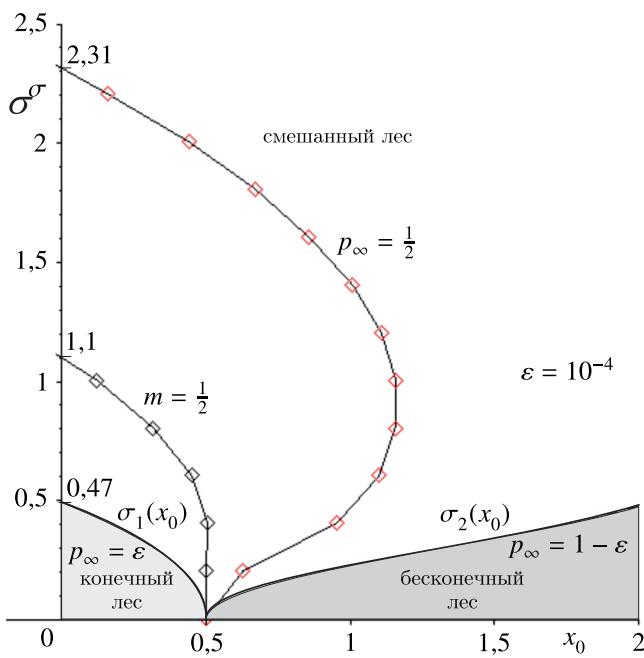


Рис. 7. Фазовая диаграмма системы, полученная экспериментально. Показана граница размытого фазового перехода ($p_\infty = \frac{1}{2}$ при $k_{\max} = 15$), области почти чистых фаз (конечных и бесконечных деревьев). Показана также линия, на которой параметр порядка равен $\frac{1}{2}$ (линия $x_0 = \mu$ ($m = \frac{1}{2}$), обсуждается ниже). Получено для статистического ансамбля из 20 000 деревьев. Ниже в работе диаграмма будет скорректирована путем использования теоретических критериев конечности ВСП Гальтона – Ватсона

здесь высота деревьев меньше 15 поколений, после этой линии — больше 15. На этом же рисунке показана линия, на которой параметр порядка равен $\frac{1}{2}$ ($m = \frac{1}{2}$). Этот подход обсуждается ниже, в следующем разделе. На этой границе средняя высота дерева равна 2.

В теории размытых фазовых переходов помимо точки условного перехода t_0 вводятся также критические значения t_1 и t_2 , отделяющие области почти чистых фаз ($t < t_1$ и $t > t_2$) и область смеси фаз ($t \in (t_1, t_2)$). Диапазон $t < t_1$ — область реализации 1-й фазы, $t > t_2$ — область второй, $t_1 < t < t_2$ — область существования фаз. В данной задаче границы почти чистых фаз на фазовой диаграмме (рис. 7) — это кривые $\sigma_1(x_0)$ и $\sigma_2(x_0)$. Таким образом, представления авторов о системе находятся в полном согласии с устоявшейся теорией размытых фазовых переходов, в том числе и в части использования термина почти чистых фаз: почти чистая — в той же степени, в какой выбранные условные границы чистых фаз $p_\infty = 10^{-4}$ и $p_\infty = 1 - 10^{-4}$ соответствуют $p_\infty = 0$ и $p_\infty = 1$, то есть речь идет о понятиях «физического никогда» и «физического всегда».

Описание размытого фазового перехода на языке параметра порядка

В какой-то степени фазовый переход из леса конечных деревьев в лес бесконечных можно отнести к типу «порядок–беспорядок». Поэтому естественно для упорядоченной фазы задаться вопросом о том, что собой представляет параметр порядка.

В качестве параметра порядка m разумно выбрать величину, обратную средней высоте дерева $\langle l \rangle$ (среднему числу поколений): $m = \langle l \rangle^{-1}$. Минимальное число поколений на дереве равно единице и соответствует одному начальному узлу. В результате моделирования получено семейство функций, соответствующих различным σ (см. рис. 8). Такое поведение параметра порядка в рассматриваемой системе напоминает поведение в конечных антиферромагнитных си-

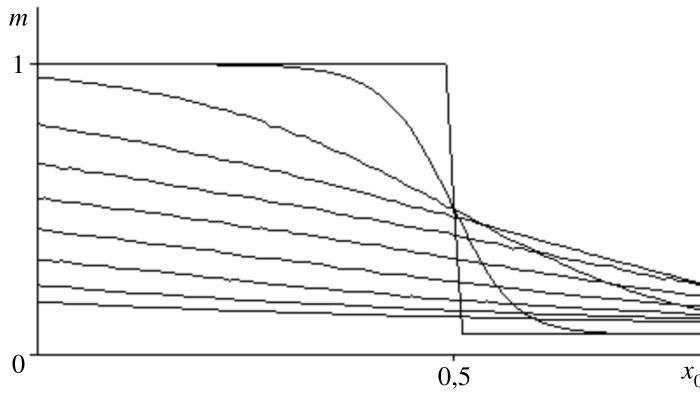


Рис. 8. Экспериментальная зависимость параметра порядка $m(x_0)$ при разных значениях σ (от 0,005 до 1,805 с шагом 0,2). Усреднение произведено в статистическом ансамбле из $N_{\text{trees}} = 2 \cdot 10^4$ деревьев при $k_{\max} = 15$. В пределе бесконечного дерева ($k_{\max} \rightarrow \infty$) функция при $x_0 \rightarrow \infty$ стремится к нулю

стемах [Гехт, Бондаренко, 1998]. Характерный вид этих функций подобен распределению Ферми при различных температурах: $\bar{n}(\varepsilon) = \left(\exp \left(\frac{\varepsilon - \mu}{\tau} \right) + 1 \right)^{-1}$.

Таким образом, параметр порядка, вероятнее всего, описывается функцией вида $m_F = \left(\exp \left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma} \right) + 1 \right)^{-1}$ или функцией, отличающейся от данной наличием коэффициентов в показателе экспоненты. Параметр σ играет роль фундаментальной температуры τ , x_0 — энергии частицы ε , аналог химического потенциала μ обладает свойством $m_F(x_0 = \mu) = \frac{1}{2}$.

Для установления соответствия поведения параметра порядка m предложенной функции m_F было проанализировано поведение показателя экспоненты. Для этого построена зависимость функции $y = \sigma \ln \left(\frac{1}{m} - 1 \right)$ от $x = x_0$, результаты приведены на рис. 9. В случае полного совпадения экспериментального параметра порядка m и предлагаемой функции m_F в этих осях должны возникнуть линейные зависимости $y = x_0 - \mu$, для которых $-\mu$ является начальным значением функции. Как следует из рисунка, экспериментальные значения m для различных σ действительно достаточно хорошо аппроксимируются прямыми. Однако, во-первых, заметны отклонения от линейности, особенно при малых σ , — эти отклонения имеют характер выхода на горизонтальную асимптоту. Ниже будет показано, что этот эффект обусловлен условно-бесконечными деревьями, используемыми в алгоритме. Во-вторых, наклон прямых несколько меняется при смене σ . Поэтому в показателе экспоненты нельзя обойтись только комбинацией $x_0 - \mu$, должен фигурировать угловой коэффициент прямой. Ввести этот коэффициент можно двумя способами: $m_1 = \left(\exp \left(\frac{C(x_0 - \mu)}{\sigma} \right) + 1 \right)^{-1}$ или $m_2 = \left(\exp \left(\frac{Cx_0 - \mu}{\sigma} \right) + 1 \right)^{-1}$. Мы остановили выбор на функции m_1 , поскольку она сохраняет смысл μ как точки x_0 , в которой параметр порядка m равен $\frac{1}{2}$.

Параметры прямых на рис. 9 определяются методом наименьших квадратов. При этом аналог химического потенциала μ есть

$$\mu = -\frac{b}{C}, \quad (7)$$

где b — начальное значение линейной функции, C — угловой коэффициент. Функция $\mu(\sigma)$, значения которой получены с помощью этой формулы (7), имеющей смысл тех x_0 , в которых $m = \frac{1}{2}$, имеет вид, представленный на рис. 10. Если сравнивать с распределением Ферми, такой вид химического потенциала $\mu(\sigma)$ в данной задаче имеет тот же вид, что и $\mu(\tau)$ в фермionных системах. Положение этой линии $\mu(\sigma)$ на фазовой плоскости показано на рис. 7 (кривая с обозначением $m = \frac{1}{2}$). Поведение параметра C оказывается также нелинейным, более того, немонотонным.

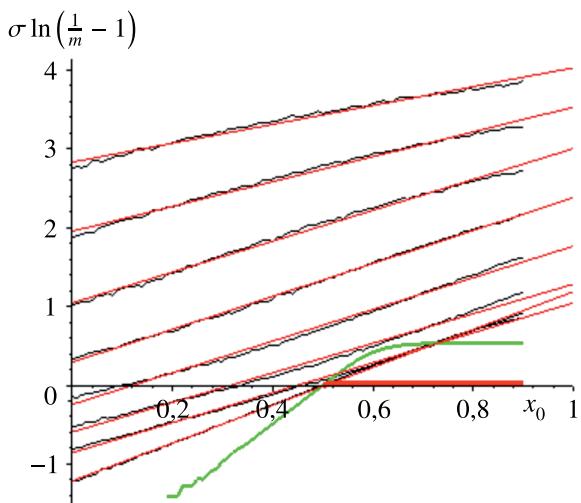


Рис. 9. Поведение показателя экспоненты предполагаемой функции m_F и применение метода наименьших квадратов для определения коэффициентов линейной зависимости

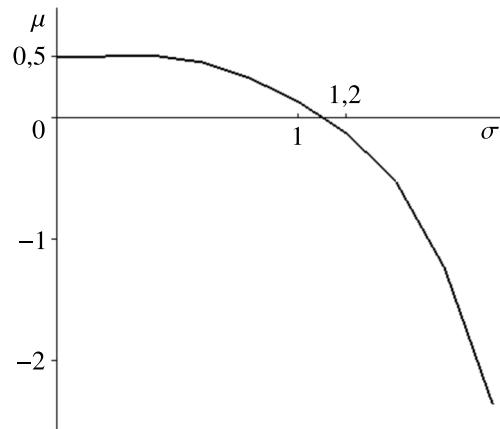


Рис. 10. Поведение аналога химического потенциала $\mu(\sigma)$

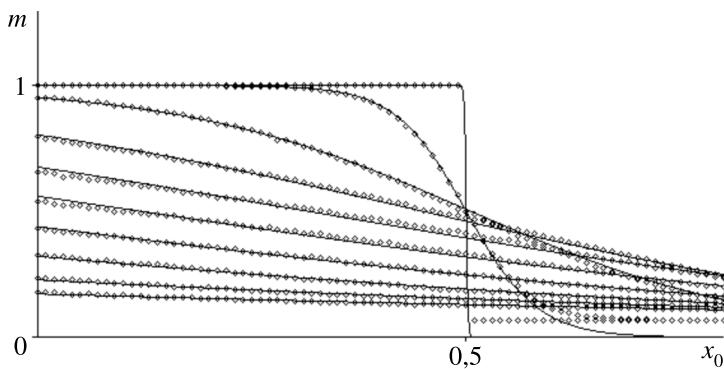


Рис. 11. Семейство квазифермьевских функций, найденных самосогласованно в сравнении с экспериментальными зависимостями параметра порядка $m(x_0)$ при различных σ . Получено при $N_{\text{trees}} = 2 \cdot 10^4$ и $k_{\max} = 15$

Подстановка найденных самосогласованно параметров $\mu(\sigma)$ и $C(\sigma)$ при соответствующих σ в квазифермьевскую функцию дает результат, представленный на рис. 11. Налицо удовлетворительное совпадение подобранных функций с экспериментальными зависимостями.

Покажем, что отклонения от линейности в показателе экспоненты (рис. 9) обусловлены условно-бесконечными деревьями, используемыми в алгоритме. Как было отмечено выше, при малых σ эти отклонения значительны, функция выходит на горизонтальную асимптоту. Действительно, при $k_{\max} = 15$ асимптотическое значение функции m на рис. 11 должно быть равно $m(x_0 \rightarrow \infty) = \frac{1}{\langle l \rangle} = \frac{1}{k_{\max}} \approx 0,067$, что и наблюдается в результатах. На осях рис. 9 асимптотически должна возникать константа $y = \sigma \ln(15 - 1) = \sigma \ln(14)$. В частности, для $\sigma = 0,205$ (второй график снизу, с выраженной горизонтальной асимптотой) величина асимптотической константы должна составлять 0,541. Именно это значение наблюдается на графике. Таким образом, выход на горизонтальную асимптоту обусловлен условно-бесконечными деревьями, использованными при моделировании. В случае если $k_{\max} \rightarrow \infty$, указанная функция $y = \sigma \ln\left(\frac{1}{m} - 1\right) = \sigma \ln(\langle l \rangle - 1)$ на рис. 9 будет стремиться к бесконечности.

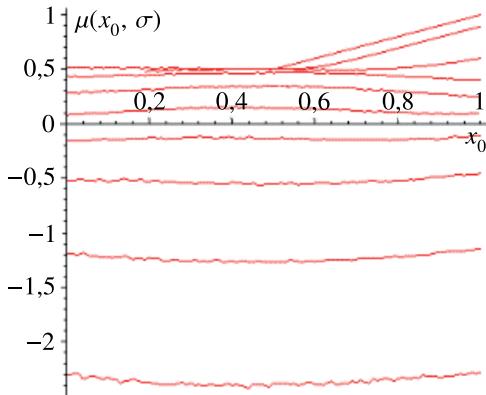


Рис. 12. Точное поведение параметра μ как функции x_0 и σ

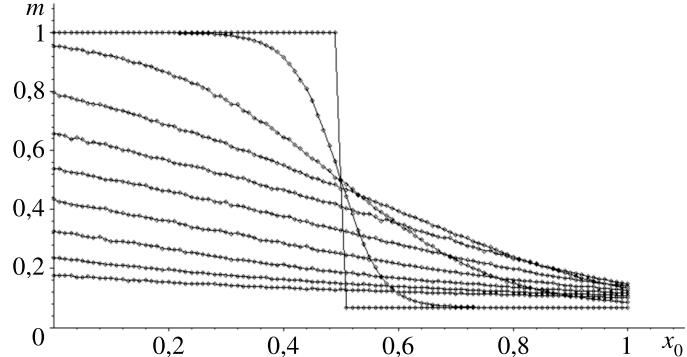


Рис. 13. Совпадение экспериментальных значений параметра порядка m и квазифермиевской функции m_F после подстановки значений $\mu(x_0, \sigma)$

Мы установили, что параметр μ даже при фиксированном σ не остается постоянным, особенно при малых σ , являясь, таким образом, в общем случае функцией параметров x_0 и σ : $\mu = \mu(x_0, \sigma)$. Результат этих вычислений приведен на рис. 12. Подстановка найденных значений $\mu(x_0, \sigma)$ в квазифермиевскую функцию m_F приводит к тождественному совпадению с экспериментальной функцией m (рис. 13).

Такое поведение параметра порядка $m = \langle l \rangle^{-1}$ показывает, что средняя высота дерева растет с ростом x_0 экспоненциально:

$$\langle l \rangle = \exp\left(\frac{C(x_0 - \mu)}{\sigma}\right) + 1. \quad (8)$$

Минимальное значение, равное 1, соответствует визиту к первому врачу.

В случае когда идет речь о ферми-системах, значение химпотенциала при данной температуре можно определить как энергию уровня, заселенного ровно наполовину, или, иначе, — как аргумент, соответствующий полувысоте функции распределения Ферми: $\bar{N}(\varepsilon = \mu, \tau) = \frac{1}{2}$. В данной задаче ситуация аналогична для параметра порядка: $m(x_0 = \mu, \sigma) = \frac{1}{2}$. Таким образом, функция параметра порядка имеет характерный масштаб, общепринятым способом определения которого является координата, в которой функция достигает своей полувысоты — хим势ential (аналог). Этот характерный масштаб параметра порядка также может знаменовать переход от порядка к беспорядку, служить условной границей размытого фазового перехода. Таким образом, это второй подход к определению условной границы размытого фазового перехода. На фазовой диаграмме (рис. 7) показана граница размытого перехода, полученная таким способом. Она обозначена как $m = \frac{1}{2}$. На кривой параметр порядка равен $\frac{1}{2}$, кривая показывает положение аналога химического потенциала в системе. Очевидно, это та же кривая, что и на рис. 10, только с перевернутыми осями координат. Дополнительный смысл этой границе можно придать с помощью понятия средней высоты дерева: учитывая связь $m = \frac{1}{\langle l \rangle}$, имеем, что на этой границе средняя высота дерева в «лесу» равна двум. Следовательно, в области под этой кривой средняя высота деревьев не превосходит 2, над этой кривой — от 2 до бесконечности.

Напомним, что вторая условная граница фазового перехода, определенная с помощью функции включения, имеет следующий смысл: на этой границе конечные и условно-бесконечные деревья в ансамбле имеют равные доли (50 : 50). Условно-бесконечные — деревья с высотой больше размера решетки. Поскольку для получения этой фазовой диаграммы использовалась решетка с $k_{\max} = 15$, то, повторимся, на этой линии в среднем половина тех, чья высота меньше 15 поколений, и половина тех, для которых высота от 15 и выше. Грубо можно сказать, что на этой

линии средняя высота деревьев примерно равна 15, под ней — меньше 15, над ней — больше 15 (на самом деле больше, поскольку большие значения дают больший вклад в среднее). Точнее, эта линия отражает медианные свойства в том смысле, как указано выше. Такой выбор размера решетки обусловлен следующим. В стремлении идентифицировать как можно точнее возникающие бесконечные траектории, мы выбирали максимальные доступные размеры решеток. Но из-за экспоненциального роста объема кроны этот предельный размер невелик: $k_{\max} = 15 \div 18$. Если бы целью было получить совпадающие фазовые границы разными способами, то следовало бы тогда выбрать размер решетки, равным $k_{\max} = 2$. Но когда речь идет об идентификации бесконечных траекторий, такой размер кажется несерьезным. Потребовались анализ системы с разных сторон и немало времени, чтобы понять, что движение по этой фазовой диаграмме от фазы конечных и очень коротких траекторий к фазе бесконечных — это движение, связанное исключительно с монотонным ростом средней высоты дерева. Поэтому необходимо понимать, что положение кривой $p_\infty = \frac{1}{2}$, на которой функция включения (вероятность условно-бесконечного квеста) равна $\frac{1}{2}$, определяется исключительно размером выбранной экспериментальной решетки: чем меньше размер решетки, тем ближе будет лежать эта кривая к началу координат.

Отметим также, что кривые на рис. 8, функция $m_1(x_0, \sigma)$ показывают, что параметр порядка монотонно убывает от 1 (вблизи начала координат плоскости (x_0, σ)) до 0 (при большом удалении от начала координат). Это значит, что средняя высота дерева $\langle l \rangle$ в этом же движении от начала координат монотонно растет от 1 до бесконечности. При небольшом удалении от начала координат средняя высота меньше бесконечности (конечна) (поскольку $m \neq 0$), что и подтверждает, что в этих промежуточных областях бесконечных деревьев нет, есть деревья той или иной конечной высоты.

Ниже будет предпринят еще один подход к определению фазовых границ, основанный на теоретической классификации ВСП Гальтона–Ватсона по величине математического ожидания числа ветвей на узле. Классификация следующая: если m — матожидание числа ветвей, то при $m < 1$ ($= 1$) ВСП Гальтона–Ватсона является докритическим (критическим) соответственно, при этом ветвление случайного процесса в некоторый момент прекращается с вероятностью 1, то есть рост дерева когда-нибудь останавливается (ВСП вырождается). При $m > 1$ ВСП Гальтона–Ватсона является надkritическим: ветвление продолжается неограниченно долго, дерево бесконечно.

В каком соотношении должны быть фазовые диаграммы, полученные в результате экспериментов на конечной решетке, и диаграмма, полученная с помощью теоретического критерия? Предварительно ясно, что теоретическая диаграмма описывает свойства бесконечной решетки, то есть предельный случай нашей модели. Что меняется принципиально? Например, в эксперименте на конечной решетке мы никаким образом не можем корректно с точки зрения термодинамики определить среднюю высоту деревьев (тем самым и параметр порядка), поскольку множество значений неполно. Вероятность условно-бесконечного дерева вообще теряет смысл в макросистеме, и такой подход тоже. В макросистеме нужно рассматривать вероятность не условно-бесконечных, а собственно бесконечных деревьев, и эта вероятность, согласно теоретическому критерию, скачком обратится в 1 на границе, на которой матожидание числа ветвей равно 1. Поэтому бессмысленно пытаться уравнять между собой эти две диаграммы. Однако правильно ожидать их морфологическое родство. Теоретическая диаграмма и ее сравнение с экспериментальной диаграммой для конечной решетки обсуждаются в последнем разделе работы.

Экспоненциальность дерева направлений

Выше было отмечено, что ВСП Гальтона–Ватсона в любых режимах (докритическом, критическом, надkritическом) характеризуется экспоненциальной динамикой роста кроны с ростом

номера поколения k . В теории это утверждение доказывается с помощью производящей функции. Качественно это свойство также легко понять. Во введении приведен один из вариантов таких качественных рассуждений, здесь приведем еще один.

Мощность кроны в данном поколении — это количество узлов (врачей) в нем, равное количеству направлений в предыдущем поколении. Это величины случайные (с. в.), и для анализа удобнее средние значения $\bar{N}^{\text{us}}(k)$. Количество выдаваемых направлений на узле ограничено параметром n_{\max} , поэтому максимальное число узлов $N_{\max}^{\text{us}}(k)$ в поколении k ведет себя так:

$$N_{\max}^{\text{us}}(1) = 1, \quad N_{\max}^{\text{us}}(2) = n_{\max}, \quad N_{\max}^{\text{us}}(3) = n_{\max}^2, \quad \dots, \quad N_{\max}^{\text{us}}(k) = n_{\max}^{k-1}, \quad \dots$$

Реальные значения случайной величины $N^{\text{us}}(k)$ (число узлов в поколении k) меньше максимальных значений, однако ясно, что для средних значений аналогичная пропорциональность сохранится:

$$\bar{N}^{\text{us}}(k) = C \bar{n}^{k-1}, \quad (9)$$

где C — некоторая константа, \bar{n} — среднее число направлений, выдаваемых каждым доктором. В осях $(k, \ln(\bar{N}^{\text{us}}(k)))$ зависимость (9) является прямой с тангенсом наклона $\ln(\bar{n})$. На рис. 14, а, б мы проиллюстрировали экспоненциальный рост кроны в выбранной модели (прямые проведены с помощью метода наименьших квадратов). В обоих случаях выбраны надкритические системы ($x_0 \approx 2$, см. фазовую диаграмму на рис. 22), в которых ветвление не вырождается, и количество точек вдоль оси k может быть любым. В случае а) показана зависимость при малом σ (почти дельтаобразное распределение), в случае б) — для широкого распределения ($\sigma = 2,00$). Уточним, что здесь показаны зависимости для самой случайной величины числа узлов в поколении k (не для средних значений). По этой причине на рисунке б) при большом разбросе значений n на узле мы наблюдаем существенные флуктуации с. в., а на рисунке а) с почти дельтаобразной функцией вероятности при $x_0 \approx 2$, имея фактически двоичное дерево, наблюдаем визуальное отсутствие флуктуаций. Таким образом, результаты моделирования подтверждают экспоненциальную зависимость $\bar{N}^{\text{us}}(k)$.

Определение тангенса угла наклона прямых на рис. 14 позволяет независимо определять среднее число направлений из каждого узла. На рис. 14, а, б отмечено, что при $\operatorname{tg} \alpha = 0,69$ среднее число направлений равно 2, при $\operatorname{tg} \alpha = 1,00$ среднее число направлений $\bar{n} = 2,72$.

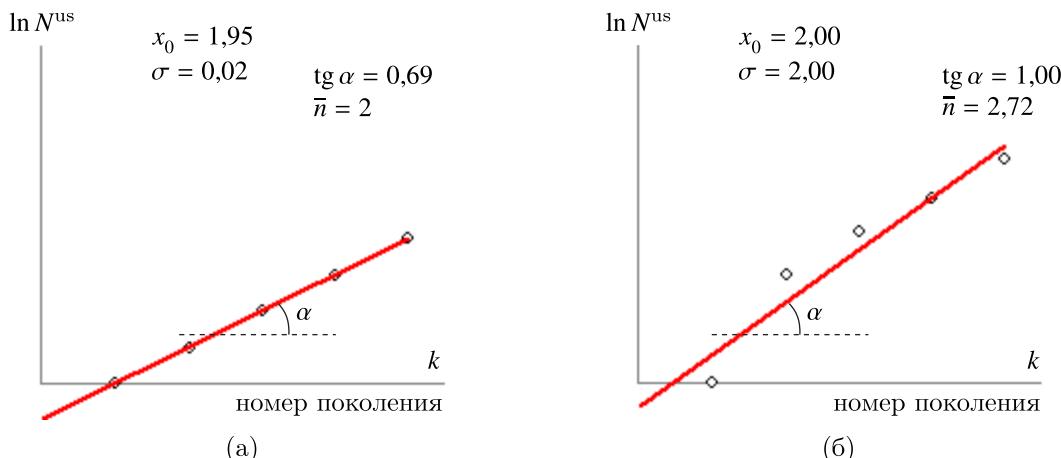


Рис. 14. Зависимость числа узлов от поколения: при малых σ (а), при больших σ (б)

Математическое ожидание и дисперсия

Важнейшим познавательным интересом работы является ответ на вопрос: при каком среднем числе направлений на узле дерево становится бесконечным? Для ответа на этот вопрос необходимы данные о фазовой границе как функции реального матожидания числа направлений. Такой подход — экспериментальный, и он возник в нашей работе первым. Однако здесь также возможно использование известных теоретических критериев для ВСП Гальтона–Ватсона. Такой подход наиболее точен, и он также обсуждается ниже. В обоих случаях нам необходима информация о поведении математического ожидания M_n дискретного распределения числа ветвей над всей плоскостью параметров (x_0, σ) .

Моменты M_n и σ_n дискретного распределения $P(n)$ находим по определению:

$$M_n = \sum_n nP(n), \quad D_n = \sum_n (n - M_n)^2 P(n), \quad \sigma_n = \sqrt{D_n}. \quad (10)$$

Расчет этих величин никак не связан с экспериментом на конечных решетках, он выполняется теоретически, это свойство самого выбранного распределения вероятностей. Результаты такого расчета для каждой пары независимых (x_0, σ) приведены на рис. 15, а, б. Выше указывалось, что мы ожидаем, что параметр x_0 будет пропорционален реальному матожиданию числа направлений M_n , а параметр σ гауссовой функции — среднеквадратичному отклонению дискретного распределения σ_n . Однако результаты на рис. 15 говорят о том, что в соответствующих сечениях этих поверхностей линейных зависимостей нет. Сечения приведены на рис. 16 и 17: на рис. 16 — зависимости M_n и σ_n от x_0 при различных σ , на рис. 17 — зависимость среднеквадратичного отклонения σ_n дискретного распределения от параметра σ . В обоих случаях указанные зависимости далеки от простой пропорциональности, однако являются монотонно возрастающими.

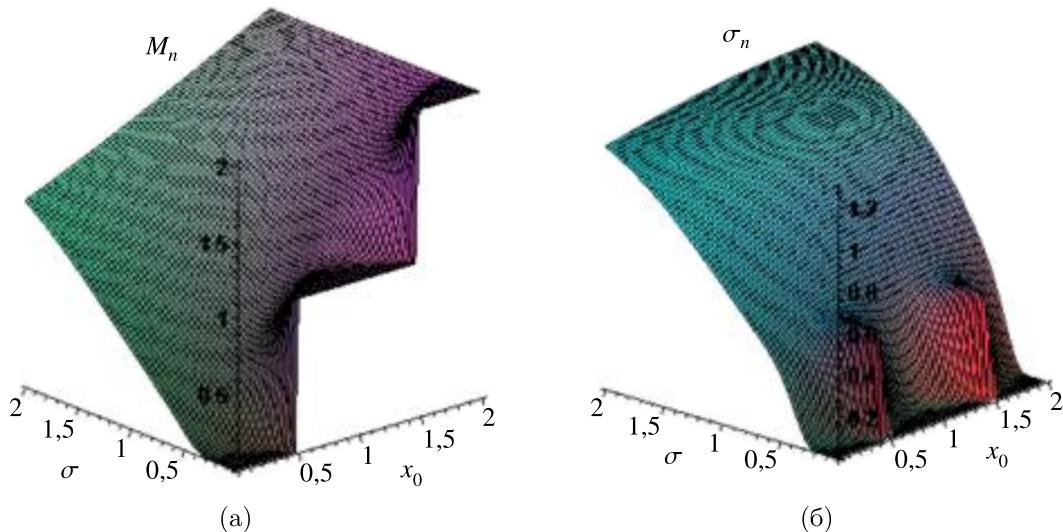


Рис. 15. Математическое ожидание M_n (а) и среднеквадратичное отклонение σ_n (б) дискретного распределения как функции параметров x_0 и σ

Рисунок 15, а дает ответ на ключевой вопрос работы об условиях конечности медицинского обследования. Дело в том, что впервые медицинский квест в условиях задачи становится бесконечным в момент, когда $x_0 = 0,5$ при $\sigma = 0$. Мы наблюдаем это экспериментально в приложении, и судить об этом читатель может по рис. 4, а: в этот момент вероятность бесконечного квеста (функция включения) прямоугольной ступенькой переходит с уровня 0

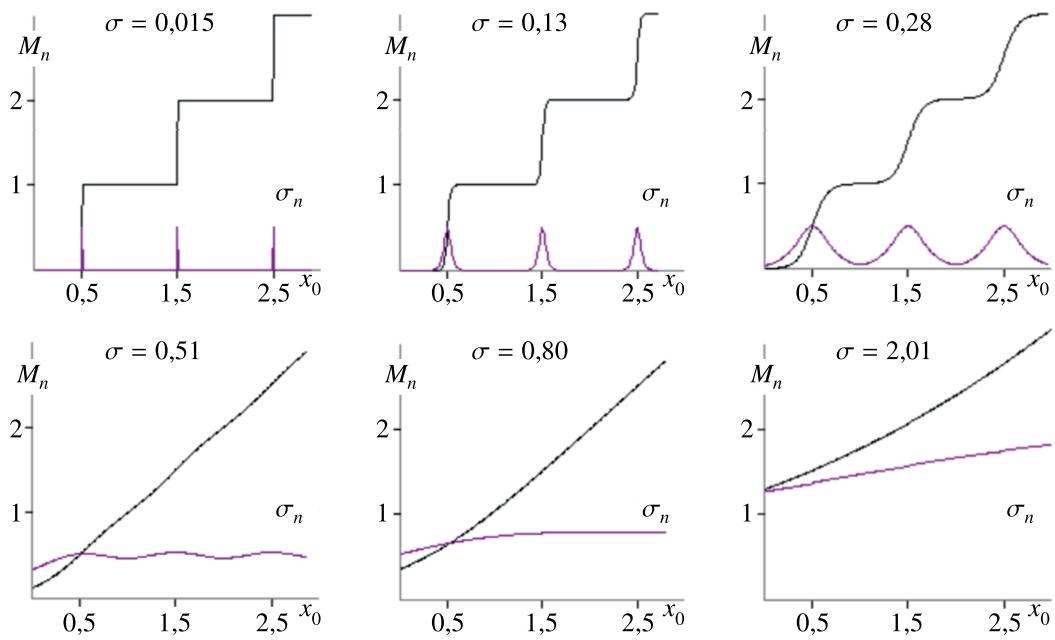


Рис. 16. Зависимости математического ожидания M_n и нормального отклонения σ_n от параметра x_0 в сечениях $\sigma = \text{const}$

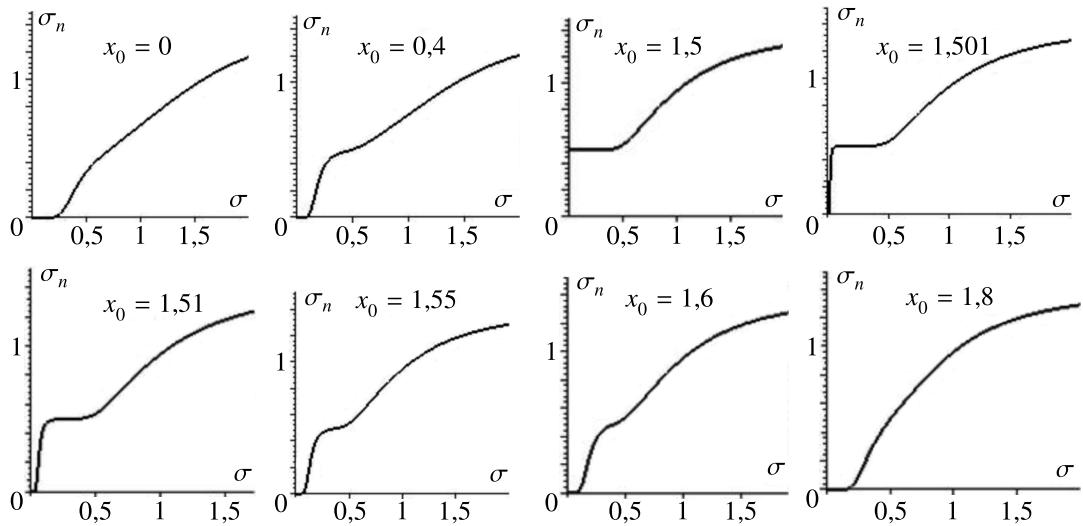


Рис. 17. Зависимость нормального отклонения σ_n от параметра σ в сечениях $x_0 = \text{const}$

на уровень 1, все медицинские траектории становятся неограниченными. Почему это происходит именно в этот момент, дает ответ полученная поверхность математического ожидания $M_n(x_0, \sigma)$ на рис. 15, а. На этом рисунке видно, что в этот момент математическое ожидание числа потомков-направлений становится равно единице — в точном соответствии с классификацией ВСП Гальтона — Ватсона по степени вырождения процесса. Выше эта классификация была приведена (ВСП Гальтона — Ватсона становится неограниченным, если матожидание числа ветвей больше единицы; при меньших значениях матожидания ВСП вырождается с вероятностью 1, то есть дерево конечно). Впервые соответствие этой классификации мы наблюдаем именно в этой точке ($\sigma = 0, x_0 = 0,5$). Это свойство интуитивно ожидаемо, более того, представление об этом помогало нам построить математическую модель уже на начальном этапе (см. введение). Теперь мы получаем экспериментальное подтверждение этому свойству.

Таким образом, ответ на вопрос о том, при каком среднем числе направлений траектория становится бесконечной, может дать, например, теоретическая классификация: при $m > 1$ мы получаем гарантированно бесконечные траектории. Однако здесь существуют два аспекта, о которых следует сказать. Первый: указанные условия бесконечности ВСП Гальтона – Ватсона сформулированы для теоретического случая, когда число поколений действительно может стремиться к бесконечности, когда в пространстве этих поколений возникает бесконечная решетка, эквивалентная термодинамическому пределу. В эксперименте мы не имеем возможности переходить к такому термодинамическому пределу, и результаты, которые мы получаем, – это результаты для малых конечных систем. Известно, что в термодинамическом пределе свойства систем могут принципиально отличаться от свойств конечных систем. Поэтому некорректно пытаться уравнять результаты для конечных и бесконечных решеток. Любой параметр, полученный для конечной системы, содержит в своем значении флуктуацию порядка $\frac{1}{\sqrt{N}}$ в относительном смысле, где N – размер системы (здесь – число поколений), и для малых систем эти отклонения огромны.

Второй аспект – следующий. Так ли уж именно бесконечные траектории нам важны? Для практических целей конечные, но очень длинные траектории также неудовлетворительны, как и бесконечные. Поэтому в медицинской практике важно иметь критерий, в какой момент с выдачей большого числа направлений разумнее остановиться.

Для ответа на все эти вопросы необходимо сопоставить имеющиеся фазовые границы, полученные экспериментально, со значением матожидания M_n . Например, рассмотрим полученную экспериментально границу с областью бесконечных деревьев (рис. 7, крайняя правая ветвь). Имея в виду классификацию ВСП по свойству конечности, мы ожидаем на этой границе значение $M_n = 1$. Для сравнения нам удобнее на поверхности M_n найти линии уровня со значением 1 и затем сопоставить их с полученной экспериментально границей с областью бесконечной фазы. Таким образом, с этого момента мы используем теоретический критерий $M_n = 1$ для определения границ с областью бесконечных деревьев, затем мы сопоставим границы, полученные теоретически для макросистем и экспериментально для конечных решеток.

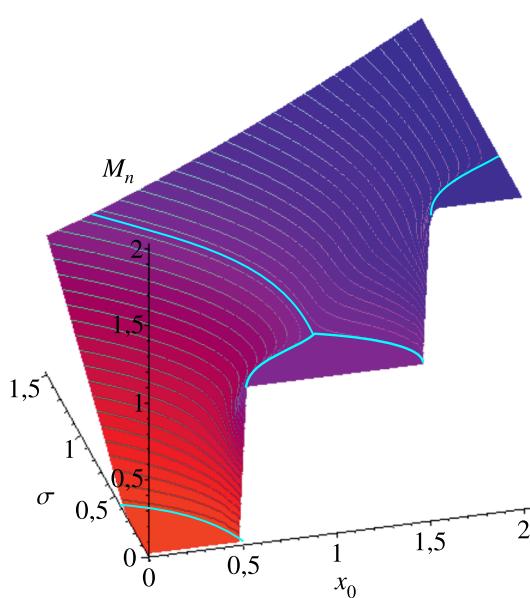


Рис. 18. Поверхность M_n с линиями уровня $M_n = (0,1; 1; 2)$

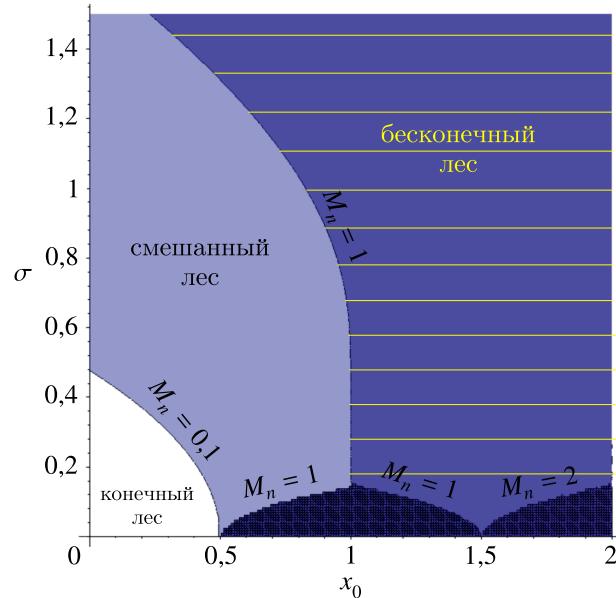


Рис. 19. Теоретическая фазовая диаграмма для макросистемы – проекции ключевых линий уровня матожидания на плоскость параметров (x_0, σ)

На рис. 18 показана поверхность M_n с нанесенными на ней линиями уровня: $M_n = 0,1$, $M_n = 1$, $M_n = 2$. На рис. 19 показаны те же линии в проекции на плоскость параметров (x_0, σ) . Видно, что линии $M_n = 0,1$ и $M_n = 1$ вблизи начала координат визуально выглядят так же, как экспериментально полученные границы конечной и бесконечной фаз (рис. 6, б, 7, 20). Для подтверждения мы сопоставим ниже эти две диаграммы друг с другом (рис. 21 — наложение экспериментальной и теоретической диаграмм). Другие линии уровня (вдали от начала координат), очевидно, дополняют и корректируют наше представление об истине. В частности, кривая $M_n = 1$, идущая в центре диаграммы сначала вертикально: моделирование и экспериментальные расчеты не позволили выявить наличие этой границы. Почему? Как выше было указано, сравнение результатов для бесконечной системы (неограниченное число поколений, теоретический критерий $M_n = 1$) и конечной (в эксперименте) не вполне корректно, эти результаты не должны совпадать. Количество поколений в эксперименте было всего $15 \div 18$ из-за экспоненциального роста кроны.

Сравнение экспериментальной и теоретической диаграмм, интерпретация результатов

Связь между средним числом направлений и фактом конечности или бесконечности дерева интуитивно очевидна, она присутствовала при построении модели. Формально это связь между M_n и p_∞ . Поэтому мы продолжаем сравнивать экспериментальные фазовые границы, полученные как линии уровня p_∞ , со значениями матожидания M_n . В частности, результаты для M_n вблизи области конечных квестов подтверждают предположения о связи ее с p_∞ (рис. 20). Действительно, вблизи начала координат функция $M_n(x_0, \sigma)$ равна или почти равна нулю, и граница этой области имеет ту же форму, что и кривая фазовых переходов, это хорошо видно на рис. 18. На рис. 20 показаны несколько линий уровня M_n в этой области, все они имеют сходный вид с кривой фазового перехода, которая была найдена как линия уровня вероятности p_∞ , а именно $p_\infty = \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-4}$. Каждая из этих линий показывает с той или иной точностью границу области почти чистой фазы конечных квестов. Это значит, что вдоль границы области фазы конечных деревьев матожидание M_n примерно равно нулю.

Критерии типа $p_\infty = \varepsilon$ или $p_\infty = 1 - \varepsilon$ определяют положение границы с погрешностью ε , то есть довольно условно. Об этом можно судить по рис. 20, 21. Например, на рис. 20 видно, что граница области конечных деревьев сильно зависит от точности, которую мы выберем. Аналогично следует относиться к границе с областью бесконечных деревьев, определенной экспериментально: ее положение также сильно зависит от выбранной точности. Теоретический критерий для границы с бесконечной фазой ($M_n = 1$) этим недостатком не обладает. На рис. 21 кривые A и B — границы с областью бесконечных деревьев, определенные с помощью теоретического критерия ($M_n = 1$, кривая A) и экспериментально как линия уровня $p_\infty = 1 - \varepsilon$ (кривая B) соответственно. Экспериментальная кривая B показывает положение границы условно, поскольку определена с точностью ε , это во-первых. Во-вторых, как указывалось выше, экспериментальная диаграмма получена для конечной системы и является приближением диаграммы для макросистемы, они не должны совпадать. Предельным положением таких кривых B , определенных экспериментально с заданной точностью, является при $N \rightarrow \infty$ положение теоретической кривой A . Такое хорошее совпадение двух фазовых границ, полученных в рамках двух разных подходов — экспериментально для конечных систем и теоретически для бесконечных, — убеждает нас, с одной стороны, в истинности теоретической фазовой диаграммы, полученной как семейство проекций ключевых линий уровня матожидания, а с другой — в удовлетворительной корректности выбранного экспериментального метода, по крайней мере при небольшом удалении от начала координат.

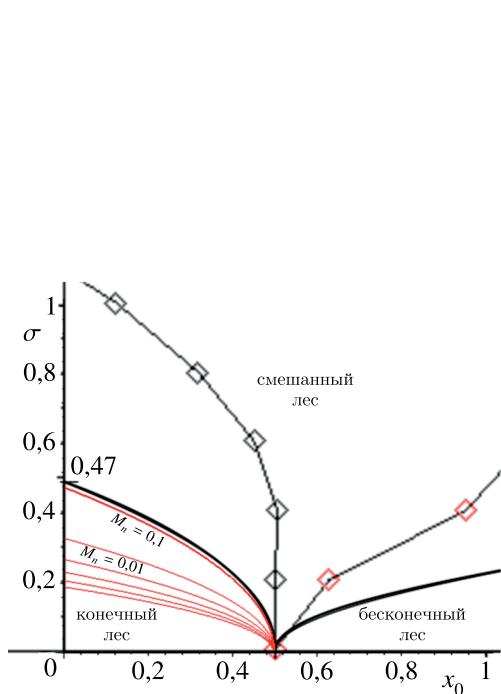


Рис. 20. Область фазовой плоскости вблизи начала координат с дополнительными линиями уровня матожидания $M_n = 10^{-1} \div 10^{-6}$

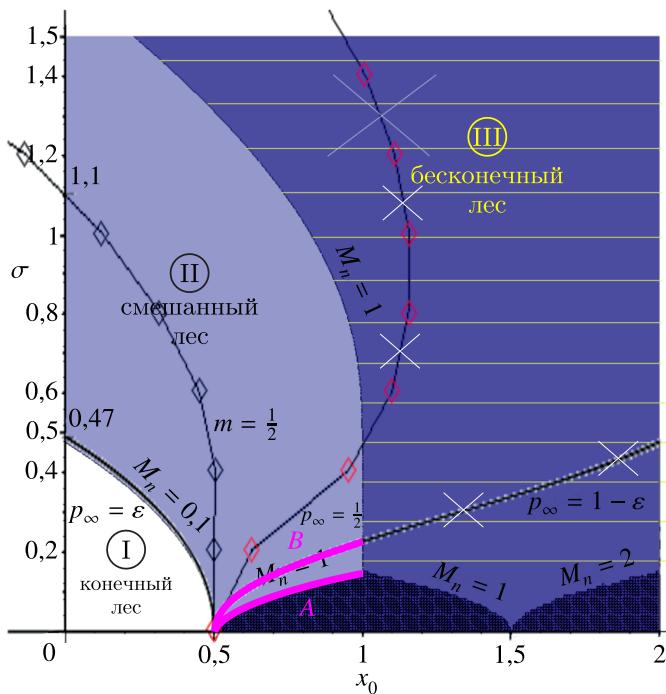


Рис. 21. Сравнение фазовых диаграмм конечных систем, полученных экспериментально, и бесконечных, полученных с помощью теоретического критерия. Крестиками показаны кривые или их части, которые для макросистемы теряют актуальность

На диаграмме сравнения (рис. 21) можно видеть, как сильно кривая функции включения $p_\infty = \frac{1}{2}$ в конечной системе входит в «запрещенную» область $M_n > 1$. Топологически эта кривая имеет тенденцию идти вдоль ближайшей линии $M_n = 1$, вероятно, в процессе $N \rightarrow \infty$ она все таки окажется в разрешенной области $M_n < 1$. Однако в этом виде, полученная для малой конечной системы ($k_{\max} = 15 \div 18$), она отражает неверную динамику, и для практических нужд ей пользоваться нельзя. Вообще по итогам данного исследования можно сделать вывод, что стандартный подход к описанию размытого фазового перехода с помощью функции включения p_∞ в принятой модели фактически бесполезен, поскольку положение кривой $p_\infty = \frac{1}{2}$ зависит только от размера экспериментальной решетки, отражает медианное значение числа поколений на дереве и грубо — среднее (см. подробно выше).

А вот определение условной границы размытого фазового перехода как $m = \frac{1}{2}$ (это место является характерным масштабом функции параметра порядка в общепринятом смысле — точка перегиба, аналог химического потенциала) представляется, с одной стороны, корректным теоретической фазовой диаграмме, с другой — разумно для прикладных медицинских задач отделяет область коротких траекторий от длинных (на границе средняя высота дерева равна 2). Необходимо отметить, что при увеличении размера решетки вид функции m будет меняться, особенно вдали от начала координат. Это связано с тем, что чем меньше размер экспериментальной решетки, тем больше во множестве высот «вырезаны» большие и очень большие значения, а значит, экспериментальная средняя высота дерева оказывается заниженной, а параметр порядка, соответственно, — завышенным. Это значит, что правильные экспериментальные границы будут лежать немного ближе к началу координат.

Каков же ответ на ключевой вопрос о том, при каких вероятностных характеристиках дерева траектория пациента конечна? Полученная фазовая диаграмма сложна, но ответ должен

быть качественным и простым, понятным пользователю этих услуг. Мы знаем ответ о принципиальной теоретической конечности траектории (до границы $M_n = 1$), но такой ответ вряд ли подойдет для практической задачи разумного ограничения объема мед. обследования. Обратимся к фазовой плоскости. В области I (*конечный лес*) на рис. 21 все траектории конечны. Но здесь матожидание числа ветвей не превосходит 0,1, то есть, например, только 10 % пациентов или меньше получают одно направление на дальнейшее исследование или анализ. Для реального медицинского процесса это очень мало, в реальности направлений выдается больше. Но не забываем, что I — это область, в которой мы получаем гарантированно конечную и короткую траекторию (вероятность возникновения условно-бесконечной траектории почти равна нулю). Ожидаемо, что это достигается малым числом направлений. Область III (*бесконечный лес*) — область значений параметров, в которой мы получаем гарантированно бесконечную траекторию.

И наконец, есть область II (*смешанный лес*), в которой компьютерный эксперимент на конечной решетке говорит о наличии в лесу, в зависимости от значений параметров (x_0, σ) , той или иной доли условно-бесконечных деревьев, высота которых не вмещается в размер экспериментальной решетки. На самом деле теоретический критерий нам сообщает, что в области до границы $M_n = 1$ бесконечных деревьев нет, все они могут быть разной высоты, в том числе произвольно большой, однако все они гарантированно конечны. Мы определяем условную границу перехода из леса конечных деревьев в лес бесконечных, как те точки, в которых параметр порядка становится равен $\frac{1}{2}$ ($m = \frac{1}{2}$, аналог химического потенциала). В области до этой границы значения параметра порядка m существенны по величине, а именно больше $\frac{1}{2}$, что соответствует средней высоте дерева $\langle l \rangle \leq 2$. Это значит, что в этой области вклад высоких деревьев пренебрежимо мал. Это позволяет качественно считать эту фазу упорядоченной. Далее на этой границе с параметром порядка происходит качественные изменения: претерпевая перегиб, функция m уходит в область своих малых значений (рис. 8), демонстрируя характерный размер, масштаб своего аргумента x_0 при данном σ . Этот масштаб, как указывалось выше, и есть аналог химического потенциала μ в ферми-системах. В упорядоченной фазе вероятность встретить условно-бесконечное, то есть очень длинное, дерево математически не ноль, однако физически это событие очень редкое. После перехода этой границы события появления условно-бесконечных траекторий становятся все чаще, эта вероятность не мала, и можно говорить о возникновении неупорядоченной фазы, в которой довольно часто можно встретить неудобные для медицинского обследования условно-бесконечные траектории. Поэтому, отвечая коротко на ключевой вопрос об условиях конечности дерева, можно резюмировать: необходимо оставаться в области до границы $m = \frac{1}{2}$ (заштрихованная область упорядоченной фазы на рис. 22). Практически это можно контролировать выполнением условия $\langle l \rangle \leq 2$. Другой вариант контролировать это — отслеживать среднее число выдаваемых направлений (матожидание M_n). Мы дополнительно выяснили, что на границе $m = \frac{1}{2}$ матожидание M_n также равно 0,5, см. рис. 22 (параметр порядка m и матожидание M_n — две разные функции, однако в этой области линии уровня у них совпадают; в области больших σ на рис. 22 расхождение мы относим к погрешностям экспериментального расчета точек $m = \frac{1}{2}$ для условно-бесконечных деревьев). $M_n \leq \frac{1}{2}$ может достигаться тем, например, что половине или меньшему числу пациентов нужно выдавать не более одного направления на дополнительные консультации или анализы. В случае превышения отмеченных показателей ($M_n > \frac{1}{2}, \langle l \rangle > 2, m < \frac{1}{2}$) множество обследований начнет соответствовать неупорядоченной фазе, в которой с той или иной вероятностью будут возникать условно-бесконечные (длинные) траектории, при которых обследование в реальности завершить трудно или невозможно.

Подчеркнем: ответ о настоящей принципиальной расходимости траектории, который для нас представлял главный интерес, по крайней мере на начальном этапе, может дать только теоретический критерий, в рамках экспериментов с конечными решетками этот ответ получить нельзя. Однако моделирование на конечных решетках имеет свои возможности: оно позволя-

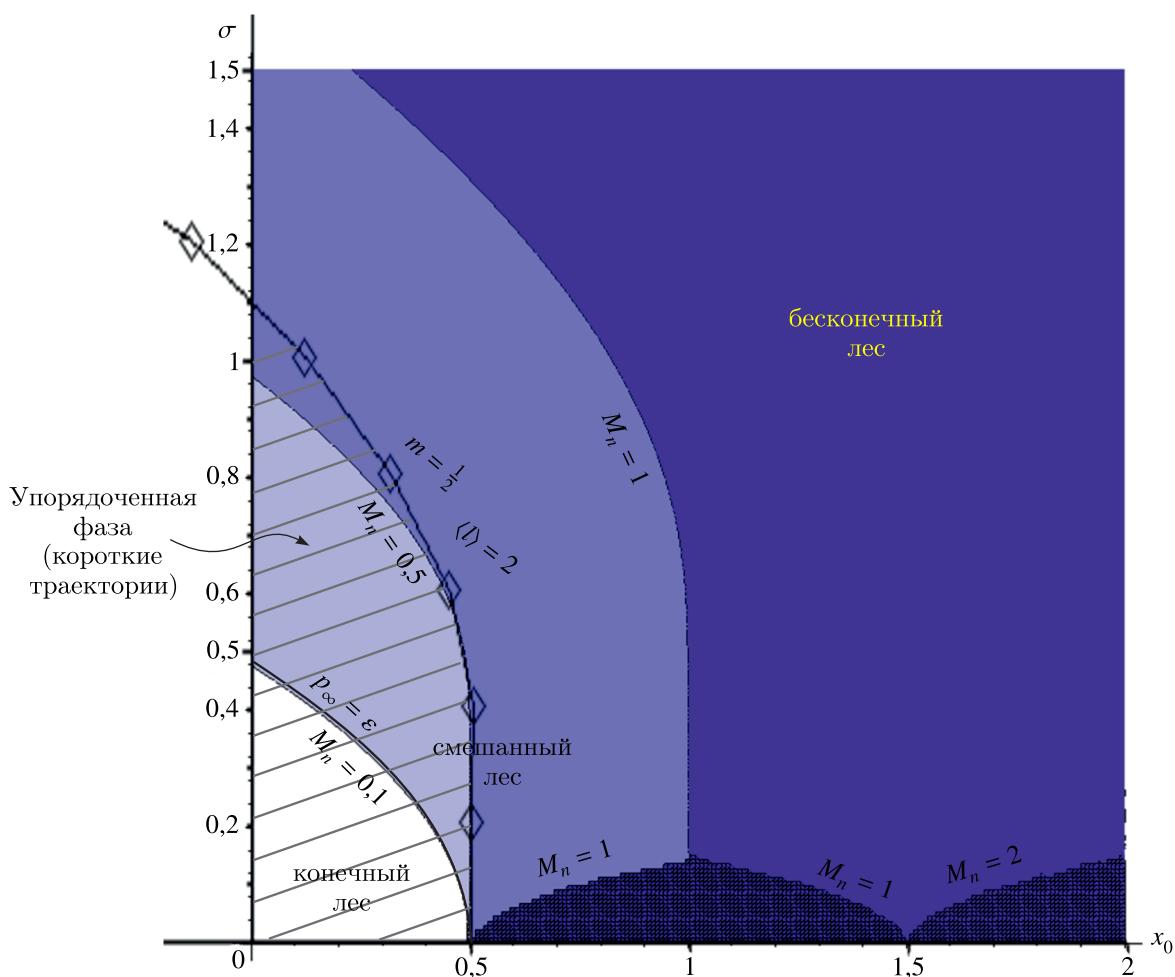


Рис. 22. Фазовая диаграмма, скорректированная с учетом всех поправок, с дополнительной линией уровня $M_n = 0,5$

ет пронаблюдать критическое поведение, выяснить некоторые его свойства. Например, в рамках данной работы в экспериментах с конечными решетками для прикладных медицинских целей мы получили удовлетворительный инструмент для определения момента перехода от конечных и коротких траекторий к длинным и дающим незавершаемые обследования — характерный масштаб введенного параметра порядка. Кроме того, мы убедились, что стандартный подход к описанию размытого фазового перехода с помощью функции включения в данной системе фактически бесполезен, поскольку положение кривой условного перехода зависит от размера экспериментальной решетки и просто отражает примерную экспериментальную среднюю высоту дерева.

Заключение

Показано, что процедура медицинских обследований может быть описана в двухпараметрической модели неоднородного ветвящегося случайного процесса Гальтона–Ватсона. Параметрами модели выступают характеристики гауссовой функции, аппроксимирующую дискретное распределение количества выдаваемых направлений медицинскими специалистами.

В процессе численного моделирования на конечных решетках выявлен критический характер перехода от фазы конечных траекторий к фазе бесконечных при вариации параметров модели. Данный переход является размытым и относится к классу фазовых переходов промежуточного рода между 1-м и 2-м типами. Установлено, что размывание перехода обусловлено

конечностью системы. Построена фазовая диаграмма в пространстве параметров модели, на которой показаны область реализации фазы конечных и коротких деревьев, фазы бесконечных деревьев и область, в которой реализуются конечные, но длинные деревья, соответствующие незавершаемым в реальности обследованиям.

Для определения условной границы перехода проанализированы два способа. Показано, что стандартный способ, использующий функцию включения фаз, в используемой модели неэффективен. Предложены оригинальный способ определения этой границы с помощью параметра порядка, а также удовлетворительный критерий для организации гарантированно конечных завершаемых медицинских обследований.

В заключение отметим другие сферы, в которых рассмотренная модель и подход к описанию с помощью условно-бесконечных траекторий могут оказаться полезными, применимыми. Коротко эти сферы применения можно назвать иерархическими системами, имеющими зачастую архитектуру односвязных деревьев. Современная научная эпоха во многом проходит под флагом сетевой топологии. Прямую аналогию с рассмотренной задачей, включая проблему достижимости цели, имеет, например, проблема прохождения по сети бюрократических шагов при оформлении различного рода документов. Таковы сети ссылок/цитирования; торговые сети, сети доставки на маркетплейсах, логистические системы; конкурсные траектории в различных перечневых системах. Рассмотренная модель имеет очевидное приложение к игровым компьютерным стратегиям, популяционным моделям, задачам о генеалогическом дереве, протекательным задачам. Отметим также задачу о прохождении информационного пакета по сети маршрутизации при установлении интернет-соединения. В ней аналогично возникает проблема достижимости пакетом сервера на определенном уровне иерархии, имеется ненулевая вероятность обрыва траектории-запроса и др.

Авторы выражают благодарность рецензенту работы за ценные замечания, позволившие расставить правильные акценты, определить соотношение между моделью и реальностью и послужившие повышению качества работы.

Список литературы (References)

- Алиев С. А. Размытие фазовых переходов в полупроводниках и высокотемпературных сверхпроводниках. – Баку: Элм, 2007.*
Aliyev S. A. Razmytie fazovykh perekhodov v poluprovodnikakh i vysokotemperaturnykh sverkhprovodnikakh [Blurring of phase transitions in semiconductors and high-temperature superconductors]. – Baku: Elm, 2007 (in Russian).
- Аманбаева Г. М. Макрокинетика сверхпластичности промышленных алюминиевых сплавов: дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. – Бишкек, 2007.*
Amanbaeva G. M. Makrokinetika sverkhplastichnosti promyshlennykh alyuminievykh splavov [Macrokinetics of superplasticity of industrial aluminum alloys]: diss. na soiskanie uchenoi stepeni kandidata fiz.-mat. nauk. – Bishkek, 2007 (in Russian).
- Афанасьев В. И. О невозвратном случайному блуждании в случайной среде // Дискретная математика. – 2016. – Т. 28, № 4. – С. 6–28.*
Afanasyev V. I. On the non-recurrent random walk in a random environment // Discrete Mathematics and Applications. – 2018. – Vol. 28, No. 3. – P. 139–156. – DOI: 10.1515/dma-2018-0014 (Original Russian paper: Afanasyev V. I. O nevozvratnom sluchaynom bluzhdanii v sluchaynoy srede // Diskretnaya matematika. – 2016. – Vol. 28, No. 4. – P. 6–28.)
- Афанасьева Л. Г., Белорусов Т. Н. Предельные теоремы для систем с нетерпеливыми клиентами в условиях высокой загрузки // Теория вероятностей и ее применение. – 2011. – Т. 56, № 4. – С. 788–796.*
Afanasyeva L. G., Belorusov T. N. Limit theorems for systems with impatient customers under high load conditions // Theory of Probability and Its Applications. – 2012. – Vol. 56, No. 4. – P. 674–682. – DOI: 10.4213/tvp4423 (Original Russian paper: Afanasyeva L. G., Belorusov T. N. Predel'nyye vyvody dlya sistem s neterpelivymi kliyentami v usloviyah vysokoy nagruzki // Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniye. – 2011. – Vol. 56, No. 4. – P. 788–796.)

- Батурина В. А., Лемперт А. А.* Метод улучшения для дискретной управляемой системы с сетевой структурой // Управление большими системами. — Специальный выпуск 30.1 «Сетевые модели в управлении». — М.: ИПУ РАН, 2010.
Baturin V.A., Lempert A.A. Metod uluchsheniya dlya diskretnoy upravlyayemoy sistemy c setevoy strukturoy [An improvement method for a discrete managed system with a network structure] // Upravleniye bol'shimi sistemami. — Spetsial'nyy vypusk 30.1 “Setevyye modeli v upravlenii”. — Moscow: IPU RAN, 2010 (in Russian).
- Белорусов Т. Н.* Эргодичность многоканальной системы обслуживания с возможностью неприсоединения к очереди // Теория вероятностей и ее применение. — 2011. — Т. 56, № 1. — С. 145–152.
Belorusov T.N. Ergodicity of a multichannel queueing system with balking // Theory of Probability and Its Applications. — 2012. — Vol. 56, No. 1. — P. 120–126. — DOI: 10.1137/S0040585X9798525X (Original Russian paper: *Belorusov T.N.* Ergodichnost' mnogokanal'noy sistemy obsluzhivaniya s uchetom neprisoyedineniya k ocheredi // Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniye. — 2011. — Vol. 56, No. 1. — P. 145–152.)
- Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е.* Критические ветвящиеся процессы, эволюционирующие в неблагоприятной случайной среде // Дискретная математика. — 2022. — Т. 34, № 3. — С. 20–33.
Vatutin V.A., Dyakonova E. E. Critical branching processes evolving in an unfavorable random environment // Discrete Mathematics and Applications. — 2024. — Vol. 34, No. 3. — P. 175–186. — DOI: 10.1515/dma-2024-0014 (Original Russian paper: *Vatutin V.A., D'yakonova E. E.* Kriticheskiye vetyashchiyesya protsessy, evolyutsioniruyushchiye v neblagopriyatnoy sluchaynoy srede // Diskretnaya matematika. — 2022. — Vol. 34, No. 3. — P. 20–33.)
- Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е.* Много ли семейств живет долго? // Теория вероятностей и ее применение. — 2016. — Т. 61, № 4. — С. 709–732.
Vatutin V.A., Dyakonova E. E. How many families survive for a long time? // Theory of Probability and Its Applications. — 2017. — Vol. 61, No. 4. — P. 692–711. — DOI: 10.1137/S0040585X97T988381 (Original Russian paper: *Vatutin V.A., D'yakonova E. E.* Mnogo li semeystv zhivet dolgo? // Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniye. — 2016. — Vol. 61, No. 4. — P. 709–732.)
- Гекхт Р. С., Бондаренко И. Н.* Магнитное упорядочение и фазовые переходы в планарных антиферромагнитных системах с решеткой Кагоме // ЖЭТФ. — 1998. — Т. 113, № 6. — С. 2209–2220.
Gekht R.S., Bondarenko I.N. Magnetic ordering and phase transitions in planar antiferromagnetic systems with a Kagome lattice // JETP. — 1998. — Vol. 86, No. 10. — P. 1209–1215. (Original Russian paper: *Gekht R.S., Bondarenko I.N.* Magnitnoye uporyadocheniye i fazovye perekhody v planarnykh antiferromagnitnykh sistemakh s reshetkoy Kagome // ZhETF. — 1998. — Vol. 113, No. 6. — P. 2209–2220.)
- Горелов М. А.* Иерархические игры с неопределенными факторами // Управление большими системами. — 2016. — № 59. — С. 6–22.
Gorelov M.A. Iyerarkhicheskiye igry s neopredelennymi faktorami [Hierarchical games with uncertain factors] // Management of large systems. — 2016. — No. 59. — P. 6–22 (in Russian).
- Гришечкин С. А.* Очереди и ветвящиеся процессы // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 1994. — Т. 1, № 4. — С. 556–560.
Grishechkin S.A. Ocheredi i vetyashchiyesya protsessy [Queues and branching processes] // Review of Applied and Industrial Mathematics. — 1994. — Vol. 1, No. 4. — P. 556–560 (in Russian).
- Дьяконова Е. Е.* Многотипные ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в марковской случайной среде // Теория вероятности и ее применение. — 2011. — Т. 56, № 3. — С. 592–601.
Dyakonova E. E. Multitype Galton–Watson branching processes in Markovian random environment // Theory of Probability and Its Applications. — 2012. — Vol. 56, No. 3. — P. 508–517. — DOI: 10.1137/S0040585X97985558 (Original Russian paper: *D'yakonova E. E.* Mnogotipnye vetyashchiyesya protsessy Gal'tona–Vatsona v markovskoy sluchaynoy srede // Teoriya vozmozhnosti i yeye primeneniye. — 2011. — Vol. 56, No. 3. — P. 592–601.)
- Дьяконова Е. Е.* Редуцированные многотипные критические ветвящиеся процессы в случайной среде // Дискретная математика. — 2016. — Т. 28, № 4. — С. 58–79.
Dyakonova E. E. Reduced multitype critical branching processes in random environment // Discrete Mathematics and Applications. — 2018. — Vol. 28, No. 1. — P. 7–22. — DOI: 10.1515/dma-2018-0002 (Original Russian paper: *D'yakonova E. E.* Redutsirovannyye mnogotipnye intensivno vetyashchiyesya protsessy v sluchaynoy srede // Diskretnaya matematika. — 2016. — Vol. 28, No. 4. — P. 58–79.)
- Калинкин А. В., Мастихин А. В.* Марковский процесс эпидемии Вейса и ветвящиеся процессы // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2006. — № 2. — С. 3–16.
Kalinkin A.V., Mastikhin A.V. Markovskiy protsess epidemii Veysa i vetyashchiyesya protsessy [Weiss's Markov epidemic process and branching processes] // Bauman Moscow State Technical University Bulletin. Natural Sciences Series. — 2006. — No. 2. — P. 3–16 (in Russian).
- Лебедев А. В.* Неклассические задачи стохастической теории экстремумов: дисс. на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. — М., 2015.

- Lebedev A. V. Neklassicheskie zadachi stokhasticheskoi teorii ekstremumov [Non-classical problems of stochastic extremum theory]. — Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences. — Moscow, 2015 (in Russian).*
- Малыгин Г. А. Размытые мартенситные переходы и пластичность кристаллов с эффектом памяти формы // УФН. — 2001. — Т. 171, № 2. — С. 187–212.*
- Maligin G. A. Diffuse martensitic transitions and the plasticity of crystals with a shape memory effect // Physics-Uspkhi. — 2001. — Vol. 44. — P. 174. — DOI: 10.1070/pu2001v044n02ABEH000760 (Original Russian paper: Malygin G. A. Razmytye martenositnye perekhody i plastichnost' kristallov s effektom pamyati formy // UFN. — 2001. — Vol. 171, No. 2. — P. 187–212.)*
- Неверова Г. П., Фрисман Е. Я. Математическое моделирование динамики локальных однородных популяций с учетом эффектов запаздывания // Математическая биология и биоинформатика. — 2015. — Т. 10, № 2. — С. 309–324.*
- Neverova G. P., Frisman E. Ya. Matematicheskoye modelirovaniye dinamiki lokal'nykh odnorodnykh populyatsiy s uchetom faktorov zapazdyvaniya [Dynamic regimes of local homogeneous population with delayed density dependence] // Mathematical biology and bioinformatics. — 2015. — Vol. 10, No. 2. — P. 309–324. — DOI: 10.17537/2015.10.309 (in Russian).*
- Ролов Б. Н., Юркевич В. Э. Физика размытых фазовых переходов. — Издательство Ростовского университета, 1983. — 320 с.*
- Rolov B. N., Yurkevich V. E. Fizika razmytykh fazovykh perekhodov [Physics of blurred phase transitions]. — Izdatel'stvo Rostovskogo universiteta, 1983. — 320 p. (in Russian).*
- Рудой Ю. Г. Случайные блуждания и аномальная диффузия Леви – Хинчина в физической химии полимеров // 2-й Всероссийский семинар «Наука – фундамент решения технологических проблем развития России»: сборник статей. — Яльчик, 2007. — С. 74–101.*
- Rudoy Yu. G. Sluchaynye bluzhdaniya i anomala'naya diffuziya Levi – Khinchina v fizicheskoy khimii polimerov [Random walks and anomalous Levy – Khinchin diffusion in the physical chemistry of polymers] // 2 Vserossiyskiy seminar "Nauka – fundament resheniya tekhnologicheskikh problem razvitiya Rossii": sbornik statey. — Yal'chik, 2007. — P. 74–101 (in Russian).*
- Терехов С. В. Эквивалентность теоретических моделей на примере размытого фазового перехода в аморфных сплавах // Физика и техника высоких давлений. — 2023. — Т. 33, № 1. — С. 58–64.*
- Terehov S. V. Ekquivalentnost' teoretticheskikh modelei na primere razmytogo fazovogo perekhoda v amorfnykh splavakh [Equivalence of theoretical models using the example of a diffuse phase transition in amorphous alloys] // Fizika i tekhnika vysokikh davlenii. — 2023. — Vol. 33, No. 1. — P. 58–64 (in Russian).*
- Толуев Ю. И., Планковский С. И. Моделирование и симуляция логистических систем: курс лекций для высших технических учебных заведений. — Киев: Миллениум, 2009. — 85 с.*
- Toluyev Yu. I., Plankovskiy S. I. Modelirovaniye i simulyatsiya logisticheskikh sistem: kurs lektsiy dlya vysshikh tekhnicheskikh uchebnykh zavedeniy [Modeling and simulation of logistics systems. Lecture course for higher technical education institutions]. — Kiyev: Millenium, 2009. — 85 p. (in Russian).*
- Bertacchi D., Rodriguez P., Zucca F. Galton – Watson processes in varying environment and accessibility percolation // Brazilian Journal of Probability and Statistics. — 2020. — Vol. 34, No. 3. — P. 613–628. — DOI: 10.1214/19-BJPS434*
- Bollobas B., Janson S., Riordan O. The phase transition in inhomogeneous random graphs. — Wiley Periodicals, Inc., 2007.*
- Bollobas B., Riordan O. A simple branching process approach to the phase transition in $G_{n,p}$ // The electronic journal of combinatorics. — 2012. — Vol. 19, No. 4. — P. 21. — DOI: 10.37236/2588*
- Corral A., Garcia-Millan R., Moloney N., Font-Clos F. Phase transition, scaling of moments, and order-parameter distributions in Brownian particles and branching processes with finite-size effects // Phys. Rev. E. — 2018. — Vol. 97. — P. 062156. — DOI: 10.1103/PhysRevE.97.062156*
- Corral López R., Buendía V., Muñoz M. A. Excitatory-inhibitory branching process: A parsimonious view of cortical asynchronous states, excitability, and criticality // Phys. Rev. Research. — 2022. — Vol. 4. — P. L042027. — DOI: 10.1103/PhysRevResearch.4.L042027*
- De Martino D. Phase transitions on heterogeneous random graphs: some case studies — [Electronic resource]. — <https://arxiv.org/abs/1010.5441> (accessed: 12.01.2025).*
- Durrett R. Branching process models of cancer. — Durham, USA: Springer Cham, 2015.*
- Grimmett G. R. Probability on graphs. Random processes on graphs and lattices. — Statistical Laboratory University of Cambridge, 2012.*

- Jacob Ch.* Branching processes: their role in epidemiology // Int. J. Environ. Res. Public Health. — 2010. — Vol. 7. — P. 1186–1204. — DOI: 10.3390/ijerph7031204
- Kimmel M., Axelrod D. E.* Branching processes in biology. — New York: Springer-Verlag Inc. press, 2002. — 230 p.
- Koch C. J.* Phase transition phenomena in random graphs and hypergraphs. — Doctoral Thesis. — Graz: Institute of Discrete Mathematics, 2016.
- Korchinski D. J., Orlandi J. G., Son S.-W., Davidsen J.* Criticality in spreading processes without timescale separation and the critical brain hypothesis // Phys. Rev. X. — 2021. — Vol. 11. — P. 021059. — DOI: 10.1103/PhysRevX.11.021059
- Lalley S. P., Perkins E. A., Zheng X.* A phase transition for measure-valued SIR epidemic processes // The Annals of Probability. — 2014. — Vol. 42, No. 1. — P. 237–310. — DOI: 10.1214/13-AOP846
- Li Z.* Branching processes and applications in macroeconomy. — Lakehead University Thunder Bay, Ontario press, 2017.
- Mitrofani I.* Applications on branching processes. — University of the Aegean press, 2021.
- Singh S.* Branching processes in disease epidemics. — Dissertation. — Cornell University press, 2014.
- Sun H., Kryven I., Bianconi G.* Critical time-dependent branching process modelling epidemic spreading with containment measures // J. Phys. A: Math. Theor. — 2022. — Vol. 55. — P. 224006. — DOI: 10.1088/1751-8121/ac65c3