

УДК: 519.8

## **Влияние пространственного разрешения на оптимальность пути мобильного робота в двумерных решеточных моделях**

**П. В. Москалев<sup>a</sup>, М. М. Стебулянин, А. С. Мягков**

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»,  
Россия, 127055, г. Москва, Вадковский пер., д. 1

E-mail: <sup>a</sup> moskalefff@gmail.com

*Получено 28.10.2025, после доработки — 19.11.2025.  
Принято к публикации 21.11.2025.*

В данной работе исследуется влияние пространственного разрешения дискретизированного (решеточного) представления рабочего пространства на эффективность и корректность поиска оптимального пути в сложных условиях. Рассматриваются сценарии, характеризующиеся возможным наличием узких проходов, неоднородным распределением препятствий и зонами повышенных требований к безопасности в непосредственной окрестности от препятствий. Несмотря на широкое применение решеточных представлений рабочего пространства в робототехнике благодаря их совместимости с сенсорными данными и поддержке классических алгоритмов планирования траекторий, разрешение этих решеток оказывает существенное влияние как на достижимость цели, так и на показатели оптимального пути. Предлагается алгоритм, сочетающий анализ связности пространства, оптимизацию траектории и геометрическое уточнение безопасности. На первом этапе с помощью обобщения алгоритма Лиса (Leath) оценивается достичимость целевой точки путем выявления связной компоненты, содержащей стартовую позицию. При подтверждении достижимости целевой точки на втором этапе алгоритм A\* применяется к узлам данной компоненты для построения пути, минимизирующего одновременно как длину пути, так и риск столкновения. На третьем этапе для узлов, расположенных в зонах безопасности, осуществляется уточненная оценка расстояния до препятствий с помощью комбинации алгоритмов Гилберта – Джонсона – Кирти (GJK) и расширяющегося многогранника (EPA). Экспериментальный анализ позволил выявить нелинейную зависимость вероятности существования и эффективности оптимального пути от параметров решетки. В частности, снижение пространственного разрешения решетки повышает вероятность потери связности и недостичимости цели, а увеличение ее пространственного разрешения влечет рост вычислительной сложности без пропорционального улучшения характеристик оптимального пути.

**Ключевые слова:** мобильный робот, поиск оптимального пути, решеточная перколяция, перколяционный кластер, алгоритм Лиса, алгоритм A\*, алгоритм Гилберта – Джонсона – Кирти, алгоритм расширяющегося многогранника

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации — государственное задание в области научной деятельности FSFS-2024-0012.

UDC: 519.8

## **Impact of spatial resolution on mobile robot path optimality in two-dimensional lattice models**

**P. V. Moskalev<sup>a</sup>, M. M. Stebulyanin, A. S. Myagkov**

Moscow State University of Technology “STANKIN”,  
1 Vadkovsky lane, Moscow, 127055, Russia

E-mail: <sup>a</sup> moskalefff@gmail.com

*Received 28.10.2025, after completion – 19.11.2025.*

*Accepted for publication 21.11.2025.*

This paper examines the impact of the spatial resolution of a discretized (lattice) representation of the environment on the efficiency and correctness of optimal pathfinding in complex environments. Scenarios are considered that may include bottlenecks, non-uniform obstacle distributions, and areas of increased safety requirements in the immediate vicinity of obstacles. Despite the widespread use of lattice representations of the environment in robotics due to their compatibility with sensor data and support for classical trajectory planning algorithms, the resolution of these lattices has a significant impact on both goal reachability and optimal path performance. An algorithm is proposed that combines environmental connectivity analysis, trajectory optimization, and geometric safety refinement. In the first stage, the Leath algorithm is used to estimate the reachability of the target point by identifying a connected component containing the starting position. Upon confirmation of the target point's reachability, the A\* algorithm is applied to the nodes of this component in the second stage to construct a path that simultaneously minimizes both the path length and the risk of collision. In the third stage, a refined obstacle distance estimate is performed for nodes located in safety zones using a combination of the Gilbert–Johnson–Keerthi (GJK) and expanding polyhedron (EPA) algorithms. Experimental analysis revealed a nonlinear relationship between the probability of the existence and effectiveness of an optimal path and the lattice parameters. Specifically, reducing the spatial resolution of the lattice increases the likelihood of connectivity loss and target unreachability, while increasing its spatial resolution increases computational complexity without a proportional improvement in the optimal path's performance.

**Keywords:** mobile robot, optimal pathfinding, lattice percolation, percolation cluster, Leath algorithm, A\* algorithm, Gilbert–Johnson–Keerthi algorithm, expanding polytope algorithm

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 6, pp. 1131–1148 (Russian).

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation — state assignment in the field of scientific activity FSFS-2024-0012.

## 1. Введение

Планирование оптимальной траектории является фундаментальной задачей в робототехнике, автономном управлении транспортными средствами и роботизированных системах, требующей балансировки между точностью представления рабочего пространства и вычислительными ресурсами, доступными для выполнения алгоритмов навигации [Ericson, 2005; Gu, Cao, 2011; Goldstein et al., 2020]. Современные подходы, основанные на решеточных представлениях, позволяют интегрировать данные сенсоров с классическими алгоритмами поиска, такими как A\* и его модификации, что обеспечивает быструю обработку и интерпретацию рабочего пространства [Lingelbach, 2004].

Однако в последние годы все большее внимание уделяется гибридным алгоритмам, сочетающим преимущества дискретных и непрерывных методов. Так, подходы на основе оптимизации траекторий в непрерывном пространстве (например, CHOMP, CIAO, TrajOpt) позволяют устранять избыточную изломанность и обеспечивать гладкость траекторий, но зачастую требуют высоких вычислительных затрат [Ratliff et al., 2009; Schulman et al., 2014; Schoels et al., 2020]. В то же время методы на основе нейросетевых алгоритмов [Wang et al., 2020; Wang et al., 2022] демонстрируют значительное ускорение сходимости, но страдают от недостаточной интерпретируемости и зависимости от качества обучающих данных.

Тем не менее выбор оптимального разрешения при дискретизации рабочего пространства является критически важным, поскольку влияет на качество оптимального пути и вычислительную эффективность алгоритма [Ericson, 2005; Otte et al., 2009]. Особую актуальность рассматриваемая тема приобретает в условиях, где присутствуют узкие проходы и неоднородное распределение препятствий, создающие повышенные требования к безопасности передвижения. В таких сценариях даже незначительное несоответствие параметров дискретизации может привести к ошибкам в оценке связности рабочего пространства, что в свою очередь повлияет на достижимость целевых точек и безопасность траектории [Otte et al., 2007; Gaisbauer et al., 2018]. В данной работе предлагается новый подход, направленный на объединение топологического анализа связности, оптимизации траектории и геометрического уточнения зон безопасности, что позволяет адаптировать алгоритмическое решение к особенностям конкретного пространства.

В литературе можно наблюдать широкое применение решеточных представлений в задачах планирования траекторий. Исследования, посвященные полному покрытию пространства и оценке связности, указывают на важность выбора оптимальной дискретизации для правильно-го моделирования рабочего пространства [Gaisbauer et al., 2018; Zhang et al., 2024].

Сравнительный анализ в работах [Karaman, Frazzoli, 2011; Jeon et al., 2015] показывает, что даже асимптотически оптимальные методы, например RRT\*, могут оказаться неэффективными при низком разрешении окружения или при наличии узких коридоров. Эти особенности наиболее существенны в реальных приложениях, где время реакции и вычислительные ресурсы могут быть ограничены [Takemura, Ishigami, 2022]. В подобных случаях предпочтение отдается локально оптимальным, но более быстрым решениям, для которых корректная дискретизация становится ключевым фактором успешной реализации.

Более того, алгоритмы локальной оптимизации в том числе с прогнозированием динамических препятствий [Fox et al., 1997; Hahn, 2025] или потенциальными полями на основе нейросетей [Alhaddad et al., 2024], также зависят от качества глобального пути, который также часто строится на дискретной решетке. Таким образом, ошибки, внесенные на этапе дискретизации (например, нарушение связности рабочего пространства), не могут быть компенсированы даже продвинутыми алгоритмами.

Классический алгоритм A\* [Hart et al., 1968], адаптированный для работы с решетками, демонстрирует высокую эффективность при условии корректной валидации эвристических функ-

ций, однако его производительность существенно зависит от размеров ячеек [Gu, Cao, 2011; Goldstein et al., 2020].

Кроме того, исследования, ориентированные на динамическое планирование траекторий для автономных транспортных средств, показывают, что использование детализированных решеточных моделей помогает корректно предсказывать движения объектов и предотвращать аварийные ситуации, однако это приводит к существенному росту вычислительной нагрузки [Otte et al., 2007; Otte et al., 2009]. Дополнительное внимание уделяется методам, направленным на валидацию параметров безопасности, например основанным на применении комбинаций алгоритмов Гилберта – Джонсона – Кирти (GJK) и расширяющегося многогранника (EPA) для оценки минимальных расстояний от робота до препятствий, что существенно улучшает характеристики построенных маршрутов в условиях высокого риска столкновений [Gilbert et al., 1988; Ericson, 2005].

Важным аспектом является анализ компромисса между качеством найденного пути и вычислительными затратами. Ряд исследований демонстрирует, что увеличение разрешения решетки с какого-то момента уже не приводит к оптимизации траектории, а лишь увеличивает вычислительную трудоемкость задачи, для компенсации которой обычно требуется разработка адаптивных методов дискретизации [Ferguson, Stentz, 2006; Radhakrishnan, Gueaieb, 2024]. На фоне этого в ряде работ, посвященных интеграции различных алгоритмических подходов в гибридных системах управления, подчеркивается, что для достижения оптимального баланса необходимо учитывать как топологические, так и геометрические характеристики моделируемого пространства [Gu, Cao, 2011; Bandi, Thalmann, 2000].

В отличие от полностью непрерывных методов, в том числе требующих итеративной оптимизации или стохастических подходов [Ratliff et al., 2009; Schulman et al., 2014; Wang et al., 2020; Белотелов, Дарьина, 2025], наш подход опирается на топологические свойства модели. Использование обобщения для алгоритма Лиса [Leath, 1976; Москалев, 2013; Moskalev, 2019] позволяет формализовать решаемую задачу в виде задачи решеточной переколации, что дает строгий критерий достижимости цели при заданном разрешении. Такой подход перекликается с современными тенденциями анализа структуры конфигурационного пространства, например в работах по оптимальному размещению препятствий [Zhou et al., 2025], где также рассматриваются стохастические и геометрические аспекты проходимости.

Алгоритм A\*, дополненный стоимостями, учитывающими зоны безопасности, обеспечивает гибкость при формировании компромисса между длиной пути и безопасностью, что созвучно алгоритмам поиска пути с учетом рисков [Zhou et al., 2025; Gao et al., 2024].

Использование алгоритмов GJK и EPA на этапе валидации траектории обеспечивает согласованность дискретной модели с непрерывным физическим пространством [Ericson, 2005]. Это особенно важно при интеграции предложенного метода в гибридные архитектуры, сочетающие глобальную решеточную и локальную непрерывную оптимизацию [Tajbakhsh et al., 2024].

Целью настоящего исследования является анализ влияния пространственного разрешения решеточного представления рабочего пространства на корректность и эффективность поиска оптимального пути в сложных условиях, характеризующихся наличием узких проходов, неоднородностью препятствий и зонами с повышенными требованиями к безопасности (зонами безопасности). Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи.

1. Выполнить дискретизацию с заданным пространственным разрешением рабочей области физического пространства в виде взвешенной квадратной решетки с единичной евклидовой окрестностью.
2. Реализовать оценку топологической связности двумерной решеточной модели рабочей области, определяющей существование пути между стартовой и целевой точками.

3. Реализовать построение оптимального пути, адаптированного для минимизации длины и риска столкновений на однородной решетке.
4. Реализовать метод геометрической валидации для детальной решеточной аппроксимации оптимального пути зонах безопасности вблизи препятствий.
5. Провести анализ зависимости вероятности существования и эффективности оптимального пути от пространственного разрешения и количества препятствий на решеточной модели рабочего пространства.

## 2. Алгоритмы и методы моделирования

Рассматривается задача построения оптимального пути для круглого мобильного робота радиусом  $r_b \geq 0$  в квадратной области  $\Omega = [0, L] \times [0, L] \subset \mathbb{R}^2$ , содержащей  $K \in \mathbb{N}$  эллиптических препятствий  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) с зонами безопасности вокруг них радиусом  $r_s \geq r_b \geq 0$ . Алгоритм включает последовательные этапы: а) дискретизация области; б) топологический анализ связности; в, г) поиск оптимального пути и его валидацию в зонах безопасности.

### 2.1. Дискретизация рабочей области

Пусть модель рабочей области содержит  $K$  препятствий

$$O = \bigcup_{k=1}^K E_k \subset \Omega, \quad (1)$$

каждое из которых представляет собой эллипс  $E_k$ , заданный своими равномерно распределенными параметрами: центром  $(x_k, y_k) \sim \mathcal{U}[0, L] \subset \Omega$ , полуосами  $a_k, b_k \sim \mathcal{U}[a_{\min}, a_{\max}]$  при  $0 < a_{\min} \leq a_{\max}$  и углом их поворота  $\theta_k \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$  относительно базового направления.

Среди совокупности препятствий (1) в модели рабочей области перемещается круглый мобильный робот радиусом  $r_b \geq 0$ :

$$\mathcal{R}(\mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|_2 \leq r_b \right\}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{p} \in \Omega$  — положение центра робота.

Для корректного учета размеров робота (2) выполним переход из физического пространства в конфигурационное, где робот становится точкой, а препятствия увеличиваются на  $r_b$  с помощью суммы Минковского:

$$O^C = O \oplus B(r_b) = \{\mathbf{p} \in \Omega \mid \mathcal{R}(\mathbf{p}) \cap O \neq \emptyset\}, \quad (3)$$

где  $O^C$  — множество всех положений центра робота, при которых он пересекается с препятствиями;  $B(r_b) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq r_b\}$  — круг радиусом  $r_b$ . Тогда зону безопасности в конфигурационном пространстве можно определить как

$$\mathcal{S}^C = \left\{ \mathbf{p} \in \Omega \setminus O^C \mid d_2(\mathbf{p}, O^C) \leq r_s \right\}, \quad (4)$$

где  $\mathcal{S}^C$  — евклидова  $r_s$ -окрестность  $O^C$ , где робот не сталкивается с препятствиями, но достаточно близок к ним;  $d_2(\mathbf{p}, A) = \min_{\mathbf{q} \in A} \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_2$  — евклидово расстояние между вектором  $\mathbf{p}$  и множеством  $A$  в конфигурационном пространстве.

Рабочая область покрывается равномерной квадратной решеткой с шагом  $h$ , определяющим число узлов:

$$\frac{L}{h} = N - 1 \in \mathbb{N}, \quad N \geq 2. \quad (5)$$

Тогда множество узлов соответствует целочисленной решетке:

$$\mathcal{G} = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq N-1\}, \quad (6)$$

для которой физические координаты узла  $u = (i, j)$  определяются как  $\mathbf{p}_u = (ih, jh)$ .

Каждому узлу квадратной решетки  $\mathcal{G}$  присваивается вес:

$$w(u) = \begin{cases} 1, & \mathbf{p}_u \notin O^C \cup S^C, \\ 2, & \mathbf{p}_u \in S^C, \\ +\infty, & \mathbf{p}_u \in O^C. \end{cases} \quad (7)$$

Будем рассматривать решетку (6) с единичной евклидовой окрестностью: для любого узла  $u = (i, j) \in \mathcal{G}$  его окрестность  $N(u)$  включает все узлы  $v = (i', j') \in \mathcal{G}$ , такие, что

$$\max(|i - i'|, |j - j'|) = 1, \quad (i', j') \neq (i, j). \quad (8)$$

Для каждого узла  $v \in N(u)$  стоимость перехода  $c(u, v)$  по ребру определяется следующим образом:

$$c(u, v) = \begin{cases} d_2(u, v) + \beta \cdot \mathbb{I}\{w(v) = 2\}, & w(u) < +\infty \wedge w(v) < +\infty, \\ +\infty, & w(u) \rightarrow +\infty \vee w(v) \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\beta \geq 0$  — штрафной параметр за вход в зону безопасности,  $\mathbb{I}\{\cdot\}$  — индикатор события,  $d_2(u, v)$  — евклидово расстояние между узлами  $u$  и  $v$  в конфигурационном пространстве:

$$d_2(u, v) = \begin{cases} 1, & |i - i'| + |j - j'| = 1, \\ \sqrt{2}, & |i - i'| + |j - j'| = 2, \\ +\infty, & w(u) + w(v) \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (10)$$

Последнее условие в (10) означает, что если хотя бы один из узлов  $u$  или  $v$  заблокирован, то переход между ними считается недопустимым.

В результате дискретная модель рабочей области задается как взвешенный неориентированный граф:

$$\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{E}, w, d_2), \quad (11)$$

где  $\mathcal{G}$  — множество узлов решетки,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$  — множество допустимых ребер решетки,  $w: \mathcal{G} \rightarrow \{1, 2, +\infty\}$  — веса узлов решетки (7), соответствующие топологии рабочей области,  $d_2: \mathcal{E} \rightarrow \{1, \sqrt{2}, +\infty\}$  — веса ребер решетки (9) в евклидовой метрике, соответствующие топологии рабочей области (11).

## 2.2. Топологический анализ связности

На первом этапе проводится оценка связности решетки, чтобы определить, существует ли путь между стартовой и целевой точками при заданном разрешении решетки. Для этого можно воспользоваться алгоритмом Лиса, позволяющим итеративно исследовать соседние ячейки и сформировать связную компоненту  $C$ , включающую в себя стартовый узел  $s \in C$ . Если целевой узел также принадлежит связной компоненте  $t \in C$ , то условие достижимости считается выполненным. Такой подход позволяет выявлять случаи, когда погрешности дискретизации приводят к нарушению связности между областями конфигурационного пространства [Lingelbach, 2004; Otte et al., 2009].

**Algorithm 1.** Топологический анализ связности в конфигурационном пространстве

**Require:** Стартовый узел  $s$ , весовая матрица  $w$ , размер  $N$

**Ensure:** Связная компонента  $C$  или  $\emptyset$

```

1: if  $w(s) = +\infty$  then
2:   return  $\emptyset$ 
3: end if
4:  $C \leftarrow \{s\}$ ,  $Q \leftarrow \text{QUEUE}([s])$ 
5: while  $Q$  не пуста do
6:    $u \leftarrow Q.\text{DEQUEUE}()$ 
7:   for all  $v \in \text{NEIGHBORS8}(u)$  do
8:     if  $v \notin C$  and  $w(v) < +\infty$  then
9:        $C \leftarrow C \cup \{v\}$ 
10:       $Q.\text{ENQUEUE}(v)$ 
11:    end if
12:  end for
13: end while
14: return  $C$ 
```

**Algorithm 2.** Вспомогательная функция  $\text{NEIGHBORS8}(u = (i, j))$ 

```

1:  $\mathcal{N} \leftarrow []$ 
2: for  $d_i \in \{-1, 0, 1\}$  do
3:   for  $d_j \in \{-1, 0, 1\}$  do
4:     if  $(d_i, d_j) \neq (0, 0)$  then
5:        $i' \leftarrow i + d_i$ ,  $j' \leftarrow j + d_j$ 
6:       if  $0 \leq i' < N$  and  $0 \leq j' < N$  then
7:          $\mathcal{N}.\text{APPEND}((i', j'))$ 
8:       end if
9:     end if
10:   end for
11: end for
12: return  $\mathcal{N}$ 
```

Оригинальный алгоритм Лиса [Leath, 1976] был разработан для выделения связного подмножества узлов на псевдослучайно-взвешенной однородной решетке. Псевдокод модифицированного алгоритма Лиса представлен в листингах 1 и 2 и для детерминированной решетки реализует обход в ширину (BFS) с ограничением на принадлежность к допустимому подмножеству узлов  $\mathcal{G}_f = \{u \in \mathcal{G} \mid w(u) < +\infty\}$ .

При малой плотности препятствий (ниже порога перколяции) содержащая  $s$  компонента связности  $C(s)$  обычно совпадает с допустимым подмножеством узлов  $\mathcal{G}_f$ , то есть алгоритм выявляет связное подмножество узлов решетки, включая зоны безопасности, но исключая препятствия. Это позволяет анализировать для решетки: а) формирование сквозных путей (через перколяцию между границами решетки); б, в) формирование заблокированных компонент решетки, их распределение по размерам и прочие характеристики.

Данный алгоритм обеспечивает корректную оценку глобальной связности стартовой и целевой точек с учетом размеров робота при верхних оценках временной и пространственной сложностей порядка  $O(N^2)$ . Если  $t \notin C(s)$ , то искомого пути не существует и алгоритм завершается.

### 2.3. Поиск оптимального пути

После подтверждения связности стартового и целевого узлов решетки  $t \in C(s)$  осуществляется построение оптимального маршрута с использованием алгоритма A\* [Hart et al., 1968]. В предлагаемой модификации традиционная эвристическая функция дополняется весовыми коэффициентами, зависящими от расстояния до ближайших препятствий, что позволяет учитывать риск столкновения. Такой подход обеспечивает построение пути, минимизирующего как его длину, так и потенциальный риск столкновения, что критически важно в зонах с высокой плотностью препятствий [Gu, Cao, 2011; Goldstein et al., 2020]. Ограничение поиска лишь подмножеством узлов связной компоненты, выделенной на первом этапе, позволяет уменьшить область поиска и, следовательно, снизить вычислительную нагрузку при повышении пространственного разрешения.

Алгоритм решает задачу поиска пути минимальной стоимости из стартового узла  $s = (0, 0)$  в целевой узел  $t = (N - 1, N - 1)$ , при условии, что для узла допустимы  $w(s) < +\infty$  и  $w(t) < +\infty$ .

В качестве эвристической функции используется евклидово расстояние между физическими координатами узлов:

$$e(u) = h \cdot \sqrt{(N - 1 - i)^2 + (N - 1 - j)^2}. \quad (12)$$

Эвристика (12) является допустимой (не переоценивающей стоимость пути в непрерывном рабочем пространстве) и согласованной (удовлетворяющей условию монотонности  $e(u) \leq c(u, v) + e(v)$  для всех допустимых ребер), что гарантирует оптимальность найденного решения и отсутствие необходимости повторного анализа узлов.

Алгоритм реализует поиск в конфигурационном пространстве с использованием очереди с приоритетом (Open Set), упорядоченной по значению функции  $f(u) = g(u) + e(u)$ , где  $g(u)$  — наименьшая известная стоимость пути от  $s$  до  $u$ . На каждой итерации из очереди извлекается узел с минимальным  $f$ , после чего обновляются оценки стоимости для всех его проходимых соседей. Процесс завершается при извлечении целевого узла  $t$  или опустошении очереди.

Псевдокод алгоритма представлен в листинге 3. Предлагаемая модификация сохраняет все теоретические гарантии оригинального A\*, включая полноту (если путь существует, то он будет найден) и оптимальность (найденный путь имеет минимальную стоимость среди всех допустимых путей на решетке  $\mathcal{G}$ ).

Таким образом, предложенная модификация алгоритма A\* обеспечивает геометрически обоснованный и безопасный поиск оптимального маршрута в дискретном конфигурационном пространстве, учитывающий как физические размеры робота, так и предпочтения к избеганию зон с повышенными требованиями к безопасности в окрестности препятствий.

### 2.4. Валидация оптимального пути

На заключительном этапе алгоритма выполняется геометрическая валидация найденного дискретного пути  $P^* = (u_0, u_1, \dots, u_M)$ , полученного с помощью модифицированного алгоритма A\*. Цель данного этапа — подтвердить метрическую безопасность траектории в непрерывном рабочем пространстве, компенсируя потенциальные погрешности, внесенные дискретизацией и повышенным риском столкновений в зонах безопасности.

Валидация ограничивается узлами пути, принадлежащими зонам безопасности в конфигурационном пространстве, то есть таким  $u_m \in P^*$ , для которых  $w(u_m) = 2$ . Для каждого такого узла вычисляется точное евклидово расстояние между телом робота и эллиптическими препятствиями в физическом пространстве.

Пусть  $\mathbf{p}_m = (i_m h, j_m h)$  — физические координаты центра робота, соответствующие узлу  $u_m = (i_m, j_m)$ . Робот в физическом пространстве моделируется как круг:

$$\mathcal{R}(\mathbf{p}_m) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_m\|_2 \leq r_b \right\}, \quad (13)$$

**Algorithm 3.** Поиск оптимального пути в конфигурационном пространстве

**Require:**  $N, w, s = (0, 0), t = (N - 1, N - 1)$ , штраф  $\beta \geq 0$

**Ensure:** Оптимальный путь  $P^*$  или  $\emptyset$

```

1: if  $w(s) = +\infty$  or  $w(t) = +\infty$  then
2:   return  $\emptyset$ 
3: end if
4: Инициализировать  $g[\cdot] \leftarrow +\infty, f[\cdot] \leftarrow +\infty$ , parent
5:  $g[s] \leftarrow 0, f[s] \leftarrow e(s)$ 
6: open  $\leftarrow$  очередь с приоритетом, closed  $\leftarrow \emptyset$ 
7: open.insert( $s, f[s]$ )
8: while open не пуст do
9:    $u \leftarrow$  open.pop_min()
10:  if  $u = t$  then
11:    return ReconstructPath(parent,  $s, t$ )
12:  end if
13:  closed  $\leftarrow$  closed  $\cup \{u\}$ 
14:  for all  $v \in \text{NEIGHBORS8}(u)$  do
15:    if  $w(v) = +\infty$  or  $v \in \text{closed}$  then continue
16:    end if
17:     $d \leftarrow 1$  if «ребро осевое», else  $\sqrt{2}$ 
18:    cost  $\leftarrow d + (\beta \text{ if } w(v) = 2 \text{ else } 0)$ 
19:    tentative_g  $\leftarrow g[u] + \text{cost}$ 
20:    if tentative_g  $< g[v]$  then
21:      parent[v]  $\leftarrow u, g[v] \leftarrow \text{tentative\_g}$ 
22:       $f[v] \leftarrow g[v] + e(v)$ 
23:      Обновить  $v$  в open
24:    end if
25:  end for
26: end while
27: return  $\emptyset$ 

```

где  $r_b > 0$  — заданный радиус робота. Препятствия  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) представляют собой эллипсы, заданные аналитически.

Для каждой пары  $(\mathcal{R}(\mathbf{p}_m), E_k)$  вычисляется евклидово расстояние:

$$d_{m,k} = d_2(\mathcal{R}(\mathbf{p}_m), E_k) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{p}_m), \mathbf{y} \in E_k} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2. \quad (14)$$

Расстояние (14) определяется с помощью комбинации алгоритмов Гилберта–Джонсона–Кирти (GJK) и расширяющегося многогранника (EPA), которые в случае пересечения тел возвращают  $d_{m,k} = 0$ , в противном случае — вычисляют минимальное расстояние и направление разделения с точностью представления форм робота и препятствий в физическом пространстве [Gilbert et al., 1988; Ericson, 2005].

Минимальное расстояние от робота до любого препятствия в положении  $\mathbf{p}_m$  определяется как

$$d_m = \min_{k=1, 2, \dots, K} d_{m,k}. \quad (15)$$

Полученное в соответствии с (15) значение сравнивается с требуемым безопасным зазором  $d_{\min} \geq 0$  (например,  $d_{\min} = \frac{r_s}{4}$ , если зона безопасности была определена как  $r_s$ -окрестность

в физическом пространстве). Если для любого проверяемого узла выполняется  $d_m < d_{\min}$ , путь считается небезопасным, и алгоритм возвращает отрицательный результат.

Псевдокод процедуры валидации представлен в листинге 4. Благодаря выпуклости круга и эллипса комбинация GJK+EPA сходится за небольшое (обычно не более 20) число итераций в двумерном случае. Этот этап обеспечивает гарантию соблюдения заданного безопасного расстояния в физическом пространстве.

---

**Algorithm 4.** Валидация оптимального пути в физическом пространстве

---

**Require:** Путь  $P^*$ , препятствия  $\{E_k\}$ , параметры  $r_b$  и  $d_{\min}$

**Ensure:** Безопасен ли путь?

```

1: for all  $u_m \in P^*$  such that  $w(u_m) = 2$  do
2:    $\mathbf{p} \leftarrow (u_m.i \cdot \Delta, u_m.j \cdot \Delta)$ 
3:    $d_{\min} \leftarrow +\infty$ 
4:   for  $k = 1$  to  $K$  do
5:      $d \leftarrow \text{GJK-EPA-DISTANCE}(\mathcal{R}(\mathbf{p}, r_b), E_k)$ 
6:      $d_{\min} \leftarrow \min(d_{\min}, d)$ 
7:   end for
8:   if  $d_{\min} < d_{\min}$  then
9:     return false
10:  end if
11: end for
12: return true

```

---

### 3. Результаты вычислительных экспериментов

Для эмпирической оценки влияния пространственного разрешения решеточной модели на корректность и эффективность поиска оптимального пути была разработана серия вычислительных экспериментов, включающая генерацию тестовых сценариев, настройку параметров квадратной решетки и количественный анализ полученных результатов.

#### 3.1. Тестовые сценарии и параметры решетки

В качестве базовой области использовалась квадратная рабочая зона  $\Omega = [0, L] \times [0, L]$  с  $L = 10$  м. Внутри области случайным образом размещались  $K$  эллиптических препятствий  $E_k$ , где  $K$  варьировалось в диапазоне от 10 до 100 с шагом 10, что позволило исследовать поведение алгоритма как в условиях низкой, так и высокой плотности препятствий. Центры препятствий  $(x_k, y_k)$  генерировались независимо из равномерного распределения  $\mathcal{U}[0, L]$ . Полусоси  $a_k, b_k$  выбирались из интервала  $[a_{\min}, a_{\max}] = [0,3; 0,6]$  м, а ориентация  $\theta_k$  – из  $\mathcal{U}[0, 2\pi]$ . Радиус мобильного робота фиксировался на уровне  $r_b = 0,15$  м, а радиус зоны безопасности – на уровне  $r_s = 0,3$  м.

Для каждого значения  $K$  генерировалось по 300 независимых конфигураций препятствий, что обеспечивало приемлемую статистическую репрезентативность результатов. Стартовая и целевая точки фиксировались в противоположных углах области, чтобы максимизировать сложность оптимального пути и вероятность его пересечения со сложными препятствиями:  $s = (\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$  м,  $t = 10 - s$  м.

Пространственное разрешение задавалось шагом узлов  $h$  решетки, который принимал значения из множества  $h \in \left\{ \frac{100}{49}, \frac{100}{37}, \dots, 25 \right\}$  см, что соответствовало размерам решетки  $N = \frac{L}{h} + 1 \in \{41, 51, 71, 91, 121, 161, 211, 281, 371, 491\}$ . Для каждого размера решетки  $N$  с учетом

физических размеров и расположения препятствий оценивались относительные доли занятых  $p$  и свободных узлов  $q = 1 - p \in \{0,02; 0,04; \dots; 0,7; 0,8; 0,9; 1\}$ .

Для каждой комбинации  $(h, q)$  генерировалось по 300 независимых реализаций, к каждой из которых применялся предложенный алгоритм.

1. Топологический анализ связности решетки с использованием модифицированного алгоритма Лиса.
2. Поиск оптимального пути на решетке с использованием модифицированного алгоритма A\* со штрафом  $\beta = 0,5$ .
3. Валидация оптимального пути в зонах безопасности с помощью алгоритмов GJK+EPA при пороговом значении  $d_{\min} = \frac{r_s}{2} = 0,15$  м.

Примеры построения оптимального пути для двух подобных реализаций с идентичными препятствиями и различным пространственным разрешением решетки показаны на рис. 1, а, б.

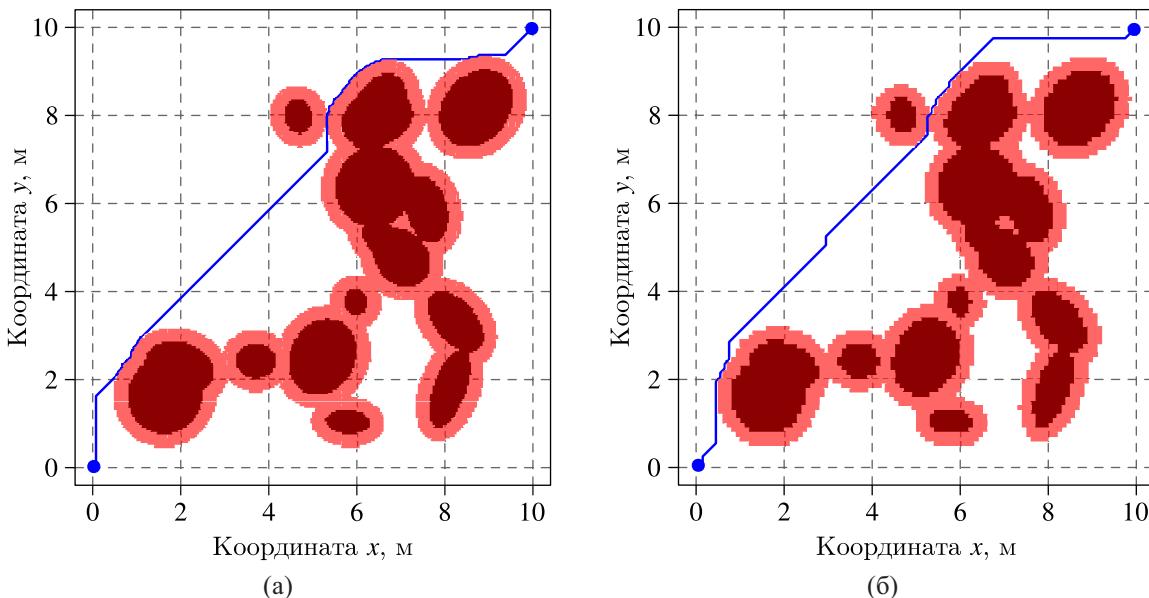


Рис. 1. Примеры построения оптимального пути на решетках при  $K = 16$  препятствий и различных значениях шага узлов решетки  $h$ : а) при  $h_1 = 5$  см; б) при  $h_2 = 10$  см

### 3.2. Измеряемые метрики

Для каждой комбинации модельных параметров и пространственного разрешения фиксировались следующие метрики.

1. Вероятность существования связного пути  $P(h, q)$ , определяемая по доле сценариев, в которых целевая точка была достижима (то есть  $t \in C(s)$  и путь прошел валидацию).
2. Стоимость оптимального пути  $C(h, q)$ , определяемая суммарной стоимостью пути с учетом штрафов в зонах безопасности.
3. Эффективность оптимального пути  $E(h, q) = \frac{C_1(h)}{C(h, q)}$ , определяемая отношением стоимости кратчайшего пути  $C_1(h) = C(h, q = 1)$ , полученного на свободной от препятствий решетке с текущим значением шага узлов  $h$ , к стоимости оптимального пути  $C(h, q)$ , полученного на той же решетке с препятствиями  $q \leq 1$ .

Для каждой пары  $(h, q)$  оценивались выборочные средние для указанных метрик. Анализ зависимости проводился с использованием статистических моделей нелинейной регрессии и визуализации для формирования эмпирических гипотез о влиянии пространственного разрешения на указанные метрики. Особое внимание уделялось анализу поведения системы в окрестности возможного порога перекола, где можно предположить экстремальные значения градиентов функций  $\nabla P(h, q)$  и  $\nabla E(h, q)$ .

Вычислительные эксперименты проводились в среде Python 3.13 с использованием библиотек NumPy, SciPy и собственных реализаций описанных выше алгоритмов.

### 3.3. Аппроксимация измеряемых метрик

На рис. 2, а, б показаны сечения поверхности  $P(q, h)$ , соответствующие вероятности существования связного пути, при фиксированных значениях параметров  $q = \text{const}$  или  $h = \text{const}$ . Статистический анализ данных, построение регрессионных моделей и визуализация проводились в системе R с использованием библиотек из репозиториев CRAN.

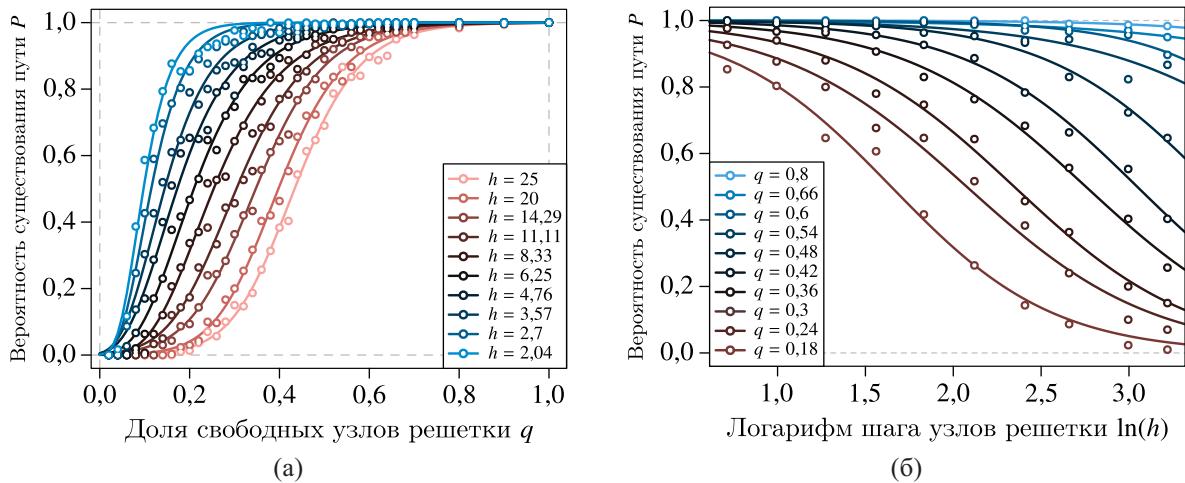


Рис. 2. Вероятность существования связного пути от: а) доли свободных узлов  $q$  при различных значениях шага  $h$  решетки  $P(q | h)$ ; б) логарифма шага  $h$  при различных значениях доли свободных узлов  $q$  решетки  $P(h | q)$

Семейство функций вероятностей существования связного пути  $P(q | h)$  в сечениях  $h = \text{const}$  удовлетворительно аппроксимируется с помощью обобщенной асимметричной логистической функции:

$$P_{1,i} = \frac{1}{\left(1 + e^{-b_{10}(q_i - b_{11})}\right)^{b_{12}}} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, 38, \quad (16)$$

где  $b_1 = (b_{10}, b_{11}, b_{12})$  — вектор параметров, оцениваемый при минимизации суммы квадратов отклонений  $\sum_{i=1}^{38} \varepsilon_i^2 \rightarrow \min$  с помощью реализации алгоритма Левенберга — Марквардта, реализованного в функции `gsl_nls()` из одноименного пакета `gslnls` [Chau, 2021].

Для аппроксимации семейства функций вероятности существования связного пути  $P(h | q)$  в сечениях  $q = \text{const}$  можно использовать более простую степенную функцию вида

$$P_{2,j} = 1 - \frac{1}{1 + e^{-b_{20}(\ln h_j - b_{21})}} + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, 10, \quad (17)$$

где  $b_2 = (b_{20}, b_{21})$  — вектор параметров, оцениваемый при минимизации суммы квадратов отклонений  $\sum_{j=1}^{10} \varepsilon_j^2 \rightarrow \min$  аналогично предыдущей модели.

На рис. 3, а, б показаны сечения поверхности  $E(q, h)$ , соответствующие эффективности оптимального пути, при фиксированных значениях  $q$  и  $h$ , аналогичных ранее используемым при построении рис. 1.

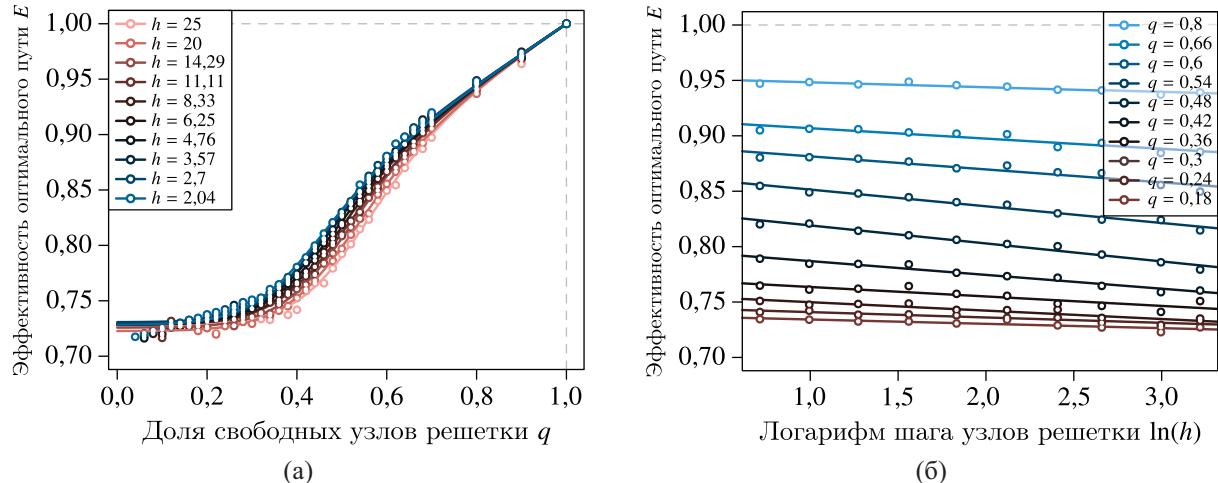


Рис. 3. Эффективность оптимального пути от: а) доли свободных узлов  $q$  при различных значениях шага  $h$  решетки  $E(q | h)$ ; б) логарифма шага  $h$  при различных значениях доли свободных узлов  $p$  решетки  $E(h | q)$

Семейство функций эффективности оптимального пути  $E(q | h)$  в сечениях  $h = \text{const}$  удовлетворительно аппроксимируется с помощью линейно-логистической функции:

$$E_{1,i} = c_{10} + \frac{c_{11}x}{1 + e^{-c_{12}(q_i - c_{13})}} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, 38, \quad (18)$$

где  $c_1 = (c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13})$  — вектор параметров, оцениваемый при минимизации суммы квадратов отклонений  $\sum_{i=1}^{38} \varepsilon_i^2 \rightarrow \min$  аналогично предыдущим моделям.

Для аппроксимации семейства функций эффективности оптимального пути  $E(h | q)$  в сечениях  $q = \text{const}$  можно использовать логарифмическую функцию вида

$$E_{2,j} = c_{20} + c_{21} \ln h_j + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, 10, \quad (19)$$

где  $c_2 = (c_{20}, c_{21})$  — вектор параметров, оцениваемый при минимизации суммы квадратов отклонений  $\sum_{j=1}^{10} \varepsilon_j^2 \rightarrow \min$  аналогично предыдущим моделям.

#### 4. Обсуждение результатов

Для показанных на рис. 2, а графиков аппроксимаций (16) в сечениях функции вероятности существования связного пути  $P(q | h)$  при фиксированных  $h = \text{const}$  наблюдаются вполне типичные для переколяционных моделей возрастающие асимметричные сигмоидные кривые, описывающие переход от  $P(q \rightarrow 0) \rightarrow 0$  к  $P(q \rightarrow 1) \rightarrow 1$ , для которых можно отметить следующие закономерности.

1. С ростом доли свободных узлов  $q_2 > q_1$  функция вероятности существования связного пути монотонно возрастает:  $P(q_2 | h) > P(q_1 | h)$ , причем чем меньше шаг узлов решетки  $h_2 < h_1$ , тем более быстрый рост наблюдается:  $\max_q \frac{\partial P(q|h_2)}{\partial q} > \max_q \frac{\partial P(q|h_1)}{\partial q}$ .
2. Для каждого значения  $h$  существует критическое значение доли свободных узлов  $q_c(h)$ , при котором производная функции  $P(q | h)$  достигает максимума:  $\frac{\partial P(q|h)}{\partial q} \rightarrow \max$ .
3. Увеличение шага узлов решетки  $h_2 > h_1$  влечет за собой увеличение критической доли свободных узлов:  $q_c(h_2) > q_c(h_1)$ .
4. Увеличение шага узлов решетки ( $h_2 > h_1$ ) также влечет за собой увеличение радиуса  $\varepsilon$ -окрестности критических значений доли свободных узлов:  $\varepsilon_c(h_2) > \varepsilon_c(h_1)$ , в которой функция  $P(q | h)$  значимо отличается от тривиальных значений:  $0 < P(q | h) < 1$ .

На рис. 2, б показаны графики аппроксимаций (17) в сечениях функции вероятности существования связного пути  $P(\ln h | q)$  при фиксированных  $q = \text{const}$ , на которых наблюдаются также вполне типичные для переколационных моделей убывающие сигмоидные кривые, описывающие переход от  $P(h \rightarrow 0) \rightarrow 1$  к  $P(h \rightarrow L) \rightarrow 0$  со следующими закономерностями.

1. С ростом шага узлов решетки  $h_2 > h_1$  функция вероятности существования связного пути монотонно убывает:  $P(h_2 | q) < P(h_1 | q)$ , причем чем больше доля свободных узлов решетки  $q_2 > q_1$ , тем более медленный спад наблюдается:  $\max_h \frac{\partial P(h|q_2)}{\partial h} > \max_h \frac{\partial P(h|q_1)}{\partial h}$ .
2. Для каждого значения  $q$  существует критическое значение шага узлов  $h_c(q)$ , при котором производная функции  $P(h | q)$  достигает минимума  $\frac{\partial P(h|q)}{\partial h} \rightarrow \min$ .
3. Увеличение доли свободных узлов ( $q_2 > q_1$ ) влечет за собой увеличение критического шага узлов решетки:  $h_c(q_2) > h_c(q_1)$ .
4. Увеличение доли свободных узлов решетки ( $q_2 > q_1$ ) также влечет за собой увеличение радиуса  $\varepsilon$ -окрестности критических значений шага узлов решетки:  $\varepsilon_c(q_2) > \varepsilon_c(q_1)$ , в которой функция  $P(h | q)$  значимо отличается от тривиальных значений:  $0 < P(h | q) < 1$ .

Для показанных на рис. 3, а графиков аппроксимаций (18) в сечениях функции эффективности оптимального пути  $E(q | h)$  при фиксированных  $h = \text{const}$  наблюдаются вполне типичные для некоторых переколационных моделей обобщенные сигмоидные кривые, описывающие переход от минимальных постоянных значений  $E(q \rightarrow 0) \rightarrow E_0 > 0$  к проходящим через точку  $(1, 1)$  возрастающим прямым  $E(q \rightarrow 1) \rightarrow (1 - E_0)q$ , для которых можно отметить следующее.

1. Для каждого значения  $h$  существует первое критическое значение доли свободных узлов, ниже которого ( $q < q_{c1}(h)$ ) функция эффективности оптимального пути падает до нуля:  $E(q \rightarrow 0 | h) \rightarrow 0$ .
2. Увеличение шага узлов решетки ( $h_2 > h_1$ ) влечет за собой увеличение первой критической доли свободных узлов:  $q_{c1}(h_2) > q_{c1}(h_1)$ .
3. Для каждого значения  $h$  существует второе критическое значение доли свободных узлов, при котором ( $q \rightarrow q_{c2}(h)$ ) производная функции  $E(q | h)$  достигает максимума:  $\frac{\partial E(q|h)}{\partial q} \rightarrow \max$ .
4. Увеличение шага узлов решетки ( $h_2 > h_1$ ) влечет за собой увеличение второй критической доли свободных узлов:  $q_{c2}(h_2) > q_{c2}(h_1)$ .

На рис. 3, б показаны графики аппроксимаций (19) в сечениях функции эффективности оптимального пути  $E(\ln h \mid q)$  при фиксированных  $q = \text{const}$ , на которых наблюдаются прямые в полулогарифмическом масштабе убывающие линии со следующими закономерностями.

1. Для каждого значения  $q$  существует критическое значение шага решетки  $h_c(q)$ , выше которого функция эффективности оптимального пути  $E(h \rightarrow L \mid q) \rightarrow 0$  падает до нуля.
2. Увеличение шага узлов решетки ( $h_2 > h_1$ ) влечет за собой незначительное снижение эффективности оптимального пути:  $E(h_2 \mid q) < E(h_1 \mid q)$ , тем меньшее, чем ближе доля свободных узлов к тривидальным значениям:  $q \rightarrow 0 \vee q \rightarrow 1$ .

Выявленные эмпирические закономерности, в частности убывание вероятности существования связного пути при увеличении шага узлов решетки и насыщение эффективности пути при его уменьшении, находят подтверждение и в других направлениях современного оптимизации.

Так, в работе [Takemura, Ishigami, 2022] предложена методика, основанная на анализе скорости роста качества траектории, которая также выявляет закон убывающей отдачи: после определенного порога увеличение вычислительных затрат не приводит к пропорциональному росту качества траектории. Наши результаты согласуются с этим наблюдением: при малых значениях шага  $h$  дальнейшее повышение разрешения почти не улучшает эффективность пути  $E(h \mid q)$ , но существенно увеличивает сложность поиска. Это подтверждает целесообразность выбора субоптимального, но вычислительно эффективного разрешения в реальных приложениях.

Более того, в исследованиях на основе нейросетевых алгоритмов оптимизации траектории [Wang et al., 2020; Wang et al., 2022; Chen, Lin, 2023] также отмечается, что не всякая детализация карты одинаково эффективна: обученные модели выделяют перспективные области и игнорируют избыточную информацию в свободных зонах. Таким образом, наш подход косвенно демонстрирует, что при высоком разрешении большинство узлов в свободном пространстве не вносят вклада в улучшение траектории, что открывает возможности для локальной адаптивной дискретизации, подобной используемой в алгоритме Field D\* [Ferguson, Stentz, 2006].

Интересно отметить, что эффект потери связности на грубых решетках особенно критичен для узких проходов, что согласуется с наблюдениями в работе [Karaman, Frazzoli, 2011]: даже асимптотически оптимальные методы, такие как RRT\*, могут не обнаружить путь, если пространственное разрешение недостаточно для корректного представления топологии. Таким образом, топологический анализ связности с помощью обобщения алгоритма Лиса может быть вполне эффективным препроцессором для подобных алгоритмов, так как позволяет заранее оценить, достаточно ли детализирована модель рабочего пространства для решения задачи оптимизации в принципе.

## 5. Выводы и заключение

На основании проведенного статистического анализа можно сформулировать следующие выводы.

1. При возрастании шага узлов решетки ( $h \rightarrow L$ ) вероятности существования связных путей на решетке убывают:  $P(h \mid q) \rightarrow 0$ , причем чем меньше доля свободных узлов решетки:  $q \rightarrow 0$ , тем при меньших значениях  $h$  становится значимым этот процесс.
2. Все аппроксимирующие кривые в сечениях  $P(q \mid h)$  имеют сигмоидную форму, что указывает на наличие в конфигурационном пространстве аналога геометрического фазового перехода. Радиус окрестности этого перехода на конечных решетках зависит от размера системы, но чем больше размер системы (то есть чем меньше  $h$ ), тем при меньших значениях  $q$  и в меньшей окрестности  $q_c(h)$  происходит этот фазовый переход.

3. Эффективность оптимального пути  $E(h | q)$  на незаполненных решетках (при  $q \rightarrow 1$ ) высокого разрешения (при  $h \rightarrow 0$ ) близка к 1: оптимальный путь совпадает с кратчайшим евклидовым расстоянием. При падении доли свободных узлов решетки эффективность оптимального пути вначале падает до уровня 0,72–0,73 из-за необходимости обхода препятствий, а затем до 0 из-за падения вероятности существования связного пути.

В заключение отметим, что, хотя функции  $P(q | h)$  и  $E(q | h)$  описывают разные аспекты предложенной модели — существование связного пути и его эффективность, они взаимосвязаны. В частности, пороговые значения  $q_c \in (0,1; 0,4)$  для функции  $P(q | h)$  находятся в левой окрестности интервала  $q \in (0,2; 0,5)$  резкого возрастания функции  $E(q | h)$ . Это означает, что рост вероятности существования связного пути и рост его эффективности происходят согласованно — при достижении критической плотности свободных узлов решетки.

Полученные результаты подчеркивают роль дискретной аппроксимации рабочего пространства при разработке алгоритмов управления мобильными роботами. Эта проблема актуальна как для классических решеточных алгоритмов, так и для их гибридных вариантов, сочетающих глобальную и локальную оптимизацию. Наша работа показывает, что выбор пространственного разрешения решетки напрямую влияет на это представление, а следовательно, и на работоспособность всего гибридного алгоритма. Кроме того, результаты могут быть использованы для формирования адаптивных алгоритмов дискретизации в реальном времени. Например, в условиях ограниченных ресурсов [Takemura, Ishigami, 2022] можно либо выбирать разрешение, близкое к точке насыщения по эффективности, либо динамически увеличивать детализацию только в зонах узких проходов и высокой плотности препятствий [Gao et al., 2024; Zhou et al., 2025].

В качестве направлений для дальнейшего развития представленного исследования можно выделить анализ влияния коррелированных распределений препятствий на вероятность и эффективность оптимального пути. Также представляет интерес расширение подхода на трехмерные решетки и динамические среды, включая применение в подводной робототехнике [Zong et al., 2024; Qiu et al., 2025] и в многоагентных системах [Liu et al., 2023; Andreychuk et al., 2022].

## Список литературы (References)

- Белотелов В. Н., Дарьина А. Н. Метод поиска касательных в задаче быстродействия для колесного мобильного робота // Компьютерные исследования и моделирование. — 2025. — Т. 17, № 3. — С. 401–421. — DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-3-401-421*  
*Belotelov V.N., Daryina A. N. Metod poiska kasatel'nykh v zadache bystrodeistviya dlya kolesnogo mobil'nogo robota [Tangent search method in time optimal problem for a wheeled mobile robot] // Computer Research and Modeling. — 2025. — Vol. 17, No. 3. — P. 401–421 (in Russian).*
- Москалев П. В. Структура моделей перkolации узлов на трехмерных квадратных решетках // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 4. — С. 607–622. — DOI: 10.20537/2076-7633-2013-5-4-607-622*  
*Moskalev P. V. Struktura modelei perkolyatsii uzlov na trekhmernykh kvadratnykh reshetkakh [The structure of site percolation models on three-dimensional square lattices] // Computer Research and Modeling. — 2013. — Vol. 5, No. 4. — P. 607–622 (in Russian).*
- Alhaddad M., Mironov K., Staroverov A., Panov A. Neural potential field for obstacle-aware local motion planning // 2024 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). — 2024. — P. 9313–9320. — DOI: 10.1109/icra57147.2024.10611635*
- Andreychuk A., Yakovlev K., Surynek P., Atzmon D., Stern R. Multi-agent pathfinding with continuous time // Artificial Intelligence. — 2022. — Vol. 305. — P. 103662. — DOI: 10.1016/j.artint.2022.103662*
- Bandi S., Thalmann D. Path finding for human motion in virtual environments // Computational Geometry. — 2000. — Vol. 15, No. 1–3. — P. 103–127. — DOI: 10.1016/s0925-7721(99)00046-2*

- Chau J.* gslnls: GSL multi-start nonlinear least-squares fitting. — Version 1.4.2. — CRAN: Contributed Packages, 2021. — DOI: 10.32614/cran.package.gslnls
- Chen B.-H., Lin P.-C.* Deep imitation learning for optimal trajectory planning and initial condition optimization for an unstable dynamic system // Advanced Intelligent Systems. — 2023. — Vol. 6, No. 1. — P. 2300379. — DOI: 10.1002/aisy.202300379
- Ericson C.* Real-time collision detection. — Morgan Kaufmann Publishers, 2005. — 633 p. — <https://realtimecollisiondetection.net>
- Ferguson D., Stentz A.* Using interpolation to improve path planning: The Field D\* algorithm // Journal of Field Robotics. — 2006. — Vol. 23, No. 2. — P. 79–101. — DOI: 10.1002/rob.20109
- Fox D., Burgard W., Thrun S.* The dynamic window approach to collision avoidance // IEEE Robotics & Automation Magazine. — 1997. — Vol. 4, No. 1. — P. 23–33. — DOI: 10.1109/100.580977
- Gaisbauer F., Agethen P., Lunde R., Rukzio E.* Iterative path adaption (IPA): Predictive trajectory-estimation using static pathfinding algorithms // Procedia CIRP. — 2018. — Vol. 67. — P. 24–29. — DOI: 10.1016/j.procir.2017.12.170
- Gao H., Pengying W., Yao S., Zhou K., Ji M., Liu H., Liu C.* Probabilistic visibility-aware trajectory planning for target tracking in cluttered environments // 2024 American Control Conference (ACC). — 2024. — P. 594–600. — DOI: 10.23919/acc60939.2024.10644293
- Gilbert E. G., Johnson D. W., Keerthi S. S.* A fast procedure for computing the distance between complex objects in three-dimensional space // IEEE Journal on Robotics and Automation. — 1988. — Vol. 4, No. 2. — P. 193–203. — DOI: 10.1109/56.795
- Goldstein R., Breslav S., Walmsley K., Khan A.* SpaceAnalysis: a tool for pathfinding, visibility, and acoustics analyses in generative design workflows // Proceedings of the 11th Annual Symposium on Simulation for Architecture and Urban Design. — San Diego, CA, USA: Society for Computer Simulation International. — 2020. — <https://simaud.org/2020/proceedings/2.pdf>
- Gu J., Cao Q.* Path planning for mobile robot in a 2.5-dimensional grid-based map // Industrial Robot: An International Journal. — 2011. — Vol. 38, No. 3. — P. 315–321. — DOI: 10.1108/01439911111122815
- Hahn B.* Enhancing obstacle avoidance in dynamic window approach via dynamic obstacle behavior prediction // Actuators. — 2025. — Vol. 14, No. 5. — P. 207. — DOI: 10.3390/act14050207
- Hart P. E., Nilsson N. J., Raphael B.* A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths // IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics. — 1968. — Vol. 4, No. 2. — P. 100–107. — DOI: 10.1109/TSSC.1968.300136
- Jeon J. H., Karaman S., Frazzoli E.* Optimal sampling-based feedback motion trees among obstacles for controllable linear systems with linear constraints // 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). — 2015. — P. 4195–4201. — DOI: 10.1109/icra.2015.7139777
- Karaman S., Frazzoli E.* Sampling-based algorithms for optimal motion planning // The International Journal of Robotics Research. — 2011. — Vol. 30, No. 7. — P. 846–894. — DOI: 10.1177/0278364911406761
- Leath P. L.* Cluster size and boundary distribution near percolation threshold // Physical Review B. — 1976. — Vol. 14, No. 11. — P. 5046–5055. — DOI: 10.1103/PhysRevB.14.5046
- Lingelbach F.* Path planning using probabilistic cell decomposition // IEEE International Conference on Robotics and Automation. — Proceedings. ICRA'04. — 2004. — Vol. 1. — P. 467–472. — DOI: 10.1109/robot.2004.1307193
- Liu W., Wang J., Zhang K., Yu H., Zheng Z., Lu G.* HG-CBS planner: Heuristic group-based motion planning for multi-robot // 2023 IEEE 18th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA). — 2023. — P. 687–692. — DOI: 10.1109/iciea58696.2023.10241787

- Moskalev P. V.* SPSL: Site Percolation on Square Lattices. — Version 0.1.9. — CRAN: Contributed Packages, 2019. — DOI: 10.32614/cran.package.spsl
- Otte M. W., Richardson S. G., Mulligan J., Grudic G.* Local path planning in image space for autonomous robot navigation in unstructured environments // International Conference on Intelligent Robots and Systems. — 2007. — P. 2819–2826. — DOI: 10.1109/iros.2007.4399343
- Otte M. W., Richardson S. G., Mulligan J., Grudic G.* Path planning in image space for autonomous robot navigation in unstructured environments // Journal of Field Robotics. — 2009. — Vol. 26, No. 2. — P. 212–240. — DOI: 10.1002/rob.20274
- Qiu H., Yu W., Zhang G., Xia X., Yao K.* Multi-robot collaborative 3D path planning based on game theory and particle swarm optimization hybrid method // The Journal of Supercomputing. — 2025. — Vol. 81, No. 3. — P. 487. — DOI: 10.1007/s11227-025-06960-1
- Radhakrishnan S., Gueaieb W.* A state-of-the-art review on topology and differential geometry-based robotic path planning—part I: planning under static constraints // International Journal of Intelligent Robotics and Applications. — 2024. — Vol. 8, No. 2. — P. 435–454. — DOI: 10.1007/s41315-024-00330-5
- Ratliff N., Zucker M., Bagnell J. A., Srinivasa S.* CHOMP: Gradient optimization techniques for efficient motion planning // 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation. — 2009. — P. 489–494. — DOI: 10.1109/robot.2009.5152817
- Schoels T., Palmieri L., Arras K. O., Diehl M.* An NMPC approach using convex inner approximations for online motion planning with guaranteed collision avoidance // 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). — 2020. — P. 3574–3580. — DOI: 10.1109/icra40945.2020.9197206
- Schulman J., Duan Y., Ho J., Lee A., Awwal I., Bradlow H., Pan J., Patil S., Goldberg K., Abbeel P.* Motion planning with sequential convex optimization and convex collision checking // The International Journal of Robotics Research. — 2014. — Vol. 33, No. 9. — P. 1251–1270. — DOI: 10.1177/0278364914528132
- Tajbakhsh A., Biegler L. T., Johnson A. M.* Conflict-based model predictive control for scalable multi-robot motion planning // 2024 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). — 2024. — P. 14562–14568. — DOI: 10.1109/icra57147.2024.10611078
- Takemura R., Ishigami G.* Computationally efficient and sub-optimal trajectory planning framework based on trajectory-quality growth rate analysis // Frontiers in Robotics and AI. — 2022. — Vol. 9. — P. 994437. — DOI: 10.3389/frobt.2022.994437
- Wang J., Chi W., Li C., Wang C., Meng M. Q.-H.* Neural RRT\*: Learning-based optimal path planning // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. — 2020. — Vol. 17, No. 4. — P. 1748–1758. — DOI: 10.1109/tase.2020.2976560
- Wang J., Jia X., Zhang T., Ma N., Meng M. Q.-H.* Deep neural network enhanced sampling-based path planning in 3D space // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. — 2022. — Vol. 19, No. 4. — P. 3434–3443. — DOI: 10.1109/tase.2021.3121408
- Zhang W., Li J., Yu W., Ding P., Wang J., Zhang X.* Algorithm for UAV path planning in high obstacle density environments: RFA-Star // Frontiers in Plant Science. — 2024. — Vol. 15. — DOI: 10.3389/fpls.2024.1391628
- Zhou L., Ceyhan E., Charyev P.* Adversarial obstacle placement with spatial point processes for optimal path disruption // ISPRS International Journal of Geo-Information. — 2025. — Vol. 14, No. 10. — P. 374. — DOI: 10.3390/ijgi14100374
- Zong C., Du Q., Chen J., Shan Y., Wu Y., Sha Z.* A design of three-dimensional spatial path planning algorithm based on vector field histogram // Sensors. — 2024. — Vol. 24, No. 17. — P. 5647. — DOI: 10.3390/s24175647