КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2025 Т. 17 № 6 С. 1105–1118
DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-6-1105-1118

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

УДК: 519.688

Определение характеристик случайного процесса путем сравнения со значениями на основе моделей законов распределения

О. А. Сафарьян

Донской государственный технический университет,
Россия, 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1

E-mail: safari_2006@mail.ru

Получено 07.07.2025, после доработки — 13.11.2025.
Принято к публикации 18.11.2025.

Эффективность систем связи и передачи данных (ССиПД), являющихся неотъемлемой составляющей современных систем практически в любой области науки и техники, во многом зависит от стабильности частоты формируемых сигналов. Формируемые в ССиПД сигналы могут рассматриваться как процессы, частота которых изменяется под действием совокупности внешних воздействий. Изменение частоты сигналов приводит к уменьшению отношения «сигнал/шум» (ОСШ) и, соответственно, ухудшению характеристик ССиПД, таких как вероятность битовой ошибки, пропускная способность. Описание таких изменений частоты сигналов наиболее удобно рассматривать как случайные процессы, аппарат которых находит широкое применение при построении математических моделей, описывающих функционирование систем и устройств в различных областях науки и техники. При этом во многих случаях характеристики случайного процесса, такие как закон распределения, математическое ожидание и дисперсия, могут являться неизвестными или известными с погрешностями, не позволяющими получить приемлемые по точности оценки параметров сигналов. В статье предлагается алгоритм решения задачи по определению характеристик случайного процесса (частоты сигнала) на основе набора отсчетов его частоты, позволяющих определить выборочное среднее, выборочную дисперсию и закон распределения отклонений частоты в генеральной совокупности. Основой данного алгоритма является сравнение измеренных на некотором временном интервале значений наблюдаемого случайного процесса с набором того же количества случайных значений, сформированных на основе модельных законов распределения. В качестве модельных законов распределения могут рассматриваться законы распределения, принятые на основе математических моделей этих систем и устройств или соответствующие аналогичным системам и устройствам. В качестве математического ожидания и дисперсии при формировании набора случайных значений для принятого модельного закона распределения принимаются выборочные среднее значение и дисперсия, полученные по результатам измерений наблюдаемого случайного процесса. Особенность алгоритма заключается в проведении сравнения упорядоченных по возрастанию или убыванию измеренных значений наблюдаемого случайного процесса и сформированных наборов значений в соответствии с принятыми моделями законов распределения. Приведены результаты математического моделирования, иллюстрирующие применение данного алгоритма.

Ключевые слова: случайный процесс, характеристики случайного процесса, выборочное среднее значение, выборочная дисперсия, корреляция упорядоченных наборов отсчетов случайных значений

© 2025 Ольга Александровна Сафарьян
Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2025 VOL. 17 NO. 6 P. 1105–1118
DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-6-1105-1118

NUMERICAL METHODS AND THE BASIS FOR THEIR APPLICATION

UDC: 519.688

Determining the characteristics of a random process by comparing them with values based on models of distribution laws

O. A. Safaryan

Don State Technical University,
1 Gagarina pl., Rostov-on-Don, 344003, Russia

E-mail: safari_2006@mail.ru

Received 07.07.2025, after completion — 13.11.2025.
Accepted for publication 18.11.2025.

The effectiveness of communication and data transmission systems (CSiPS), which are an integral part of modern systems in almost any field of science and technology, largely depends on the stability of the frequency of the generated signals. The signals generated in the CSiPD can be considered as processes, the frequency of which changes under the influence of a combination of external influences. Changing the frequency of the signals leads to a decrease in the signal-to-noise ratio (SNR) and, consequently, a deterioration in the characteristics of the signal-to-noise ratio, such as the probability of a bit error and bandwidth. It is most convenient to consider the description of such changes in the frequency of signals as random processes, the apparatus of which is widely used in the construction of mathematical models describing the functioning of systems and devices in various fields of science and technology. Moreover, in many cases, the characteristics of a random process, such as the distribution law, mathematical expectation, and variance, may be unknown or known with errors that do not allow us to obtain estimates of the signal parameters that are acceptable in accuracy. The article proposes an algorithm for solving the problem of determining the characteristics of a random process (signal frequency) based on a set of samples of its frequency, allowing to determine the sample mean, sample variance and the distribution law of frequency deviations in the general population. The basis of this algorithm is the comparison of the values of the observed random process measured over a certain time interval with a set of the same number of random values formed on the basis of model distribution laws. Distribution laws based on mathematical models of these systems and devices or corresponding to similar systems and devices can be considered as model distribution laws. When forming a set of random values for the accepted model distribution law, the sample mean value and variance obtained from the measurement results of the observed random process are used as mathematical expectation and variance. The feature of the algorithm is to compare the measured values of the observed random process ordered in ascending or descending order and the generated sets of values in accordance with the accepted models of distribution laws. The results of mathematical modeling illustrating the application of this algorithm are presented.

Keywords: random process, characteristics of a random process, sample mean, sample variance, correlation of ordered sets of samples of random values

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 6, pp. 1105–1118 (Russian).

© 2025 Olga A. Safaryan
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

Понятие и теория случайных процессов находят широкое применение при рассмотрении и описании явлений в различных областях науки и техники. В качестве примеров можно привести формирование сигналов в радиоэлектронных и радиотехнических системах. Под действием различных факторов происходит отклонение частоты сигнала от заданного номинального значения. Возникающее отклонение частоты может быть охарактеризовано двумя составляющими: долговременной (интервалы времени сутки и более) и кратковременной (интервалы времени секунды). Влияние обеих составляющих приводит к ухудшению характеристик передачи данных, в частности к увеличению вероятности битовых ошибок и снижению пропускной способности канала связи [Li et al., 2017; Никитин, Корнеева, 2020; Safaryan et al., 2021; Сафарьян и др., 2022; Safaryan, Pilipenko, 2022].

В настоящее время разработано большое число способов стабилизации частоты сигналов. Однако, как правило, реализующие их технические решения являются сложными, что затрудняет их использование или не обеспечивают требуемой стабильности частоты. В то же время во многих случаях для исключения влияния отклонения частоты сигнала на характеристики ССиПД достаточно знать параметры наблюдаемого случайного процесса, описывающего отклонения частоты сигнала от номинального значения: закон распределения, математическое ожидание и дисперсию процесса [Губарев, 1992]. Следует отметить, что закон распределения принимается на основе физической модели или аналогов данной системы или устройства и не всегда соответствует реальному наблюдаемому процессу. В свою очередь, параметры процесса — математическое ожидание и дисперсия, получаемые на основе выборочных значений малого объема, — также могут быть известны с недостаточной точностью для определения отклонений частоты [Губарев, 1992].

Возможным подходом к решению задачи определения параметров наблюдаемых случайных процессов является определение закона распределения случайной величины по результатам измерений на основе:

- известных методов проверки статистических гипотез [Гмурман, 2003; Фадеева, Лебедев, 2010; Кремер, 2012; Лемешко, 2014];

- расстояния между предполагаемым по результатам измерений законом распределения и модельными законами распределения, например классических статистических критериев на основе расстояния Крамера – фон Мизеса [Кобзарь, 2006; Морелос-Сарагоса, 2007; Иванов и др., 2021; Иванов и др., 2022]. Однако при рассмотрении радиотехнических и радиоэлектронных систем, в частности ССиПД, основным показателем является максимум ОСШ, что при корреляционной обработке соответствует максимальной корреляции между значениями наблюдаемого и опорного сигналов в устройстве обработки. При таком подходе возникает вопрос определения характеристик случайного процесса, описывающего наблюдаемый сигнал и подбор по его параметрам опорного (модельного) сигнала, что требует как можно более точной оценки параметров наблюдаемого сигнала. Все это определяет актуальность задачи оценивания не только законов распределения случайных величин и расстояния между законами распределения наблюдаемого и модельного случайных процессов, а именно оценки среднего выборочного значения и дисперсии отклонения частоты сигнала от действительного. В то же время первым шагом оценивания частоты сигнала является именно определение закона распределения случайного процесса, описывающего флуктуации частоты, и его параметров, в первую очередь математического ожидания и дисперсии.

Целью статьи является разработка алгоритма определения характеристик случайных процессов на основе результатов измерений выборочных значений ограниченного объема.

Статья имеет следующую структуру: постановка задачи, разработка алгоритма определения закона распределения случайного процесса на основе результатов измерений отсчетов сигнала, определение взаимосвязи между измеренными значениями выборочного среднего значения и дисперсии и точностью получаемых оценок случайного процесса.

2. Постановка задачи

Пусть по результатам измерений некоторого физического процесса $\omega(t)$ получены значения $\mathbf{\Omega}^{(0)} = \left\{\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \ldots, \omega_N^{(0)}\right\}$, на основе которых сформированы выборочные среднее значение и выборочная дисперсия, характеризующие данный физический процесс. Применительно к процессу формирования сигнала такими данными могут являться значения измерений частоты сигнала на некотором временном интервале. Требуется по полученным результатам измерений определить закон распределения $p_\omega(x)$ отклонений частоты сигнала от номинального значения и его параметры (математическое ожидание и дисперсию).

3. Решение задачи

Рассмотрим случайный процесс $\omega(t)$, который в течение интервала наблюдения можно считать стационарным. Наблюдаемый процесс на интервале измерения представляет собой выборку случайных значений из генеральной совокупности, характеризующейся априорно неизвестными плотностью распределения $p_\omega(x)$, математическим ожиданием $M_\omega^{(0)}$ и дисперсией $D_\omega^{(0)}$. На рис. 1 приведены возможные 100 отсчетов одной из реализаций случайного процесса на интервале измерений для $M_\omega^{(0)} = 10^3$ с$^{-1}$ и $D_\omega^{(0)} = 10^{-4}$ с$^{-2}$.

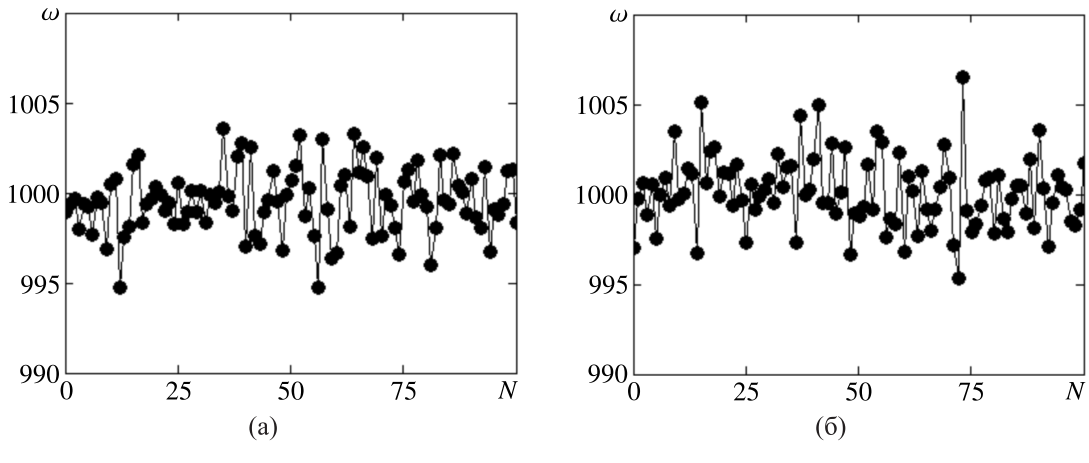

Рис. 1. Возможная реализация наблюдаемого случайного процесса на интервале измерений при различных законах распределения: а) нормальном; б) логистическом

По результатам выполненных измерений определим выборочное среднее значение m_ω и выборочную дисперсию d_ω соответственно следующими соотношениями:

$$m_\omega = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \omega_n^{(0)}, \tag{1}$$

$$d_\omega = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(\omega_n^{(0)} - m_\omega\right)^2 . \tag{2}$$

Будем считать, что закон распределения случайных значений наблюдаемого процесса может быть отнесен к одному из множества I модельных законов распределения с плотностями распределения $p_\omega^{(i)}(x)$, значения математического ожидания и дисперсии которых равны соответственно m_ω и d_ω ($i = 1, \ldots, I$). Примерами таких модельных законов распределения могут являться, например, нормальное распределение, логистическое распределение, распределение Лапласа, гамма-распределение и другие законы распределения.

Сформируем для каждого из I рассматриваемых модельных законов совокупность K распределений модельных реализаций случайных значений $\mathbf{\Omega}_l^{(i,k)}(m_\omega, d_\omega) = \left\{\omega_1^{(i,k)}, \omega_2^{(i,k)}, \ldots, \omega_N^{(i,k)}\right\}$, $i = 1, \ldots, I$, $k = 1, \ldots, K$. Характерный вид одной реализации для каждого из двух модельных случайных процессов приведен на рис. 2.

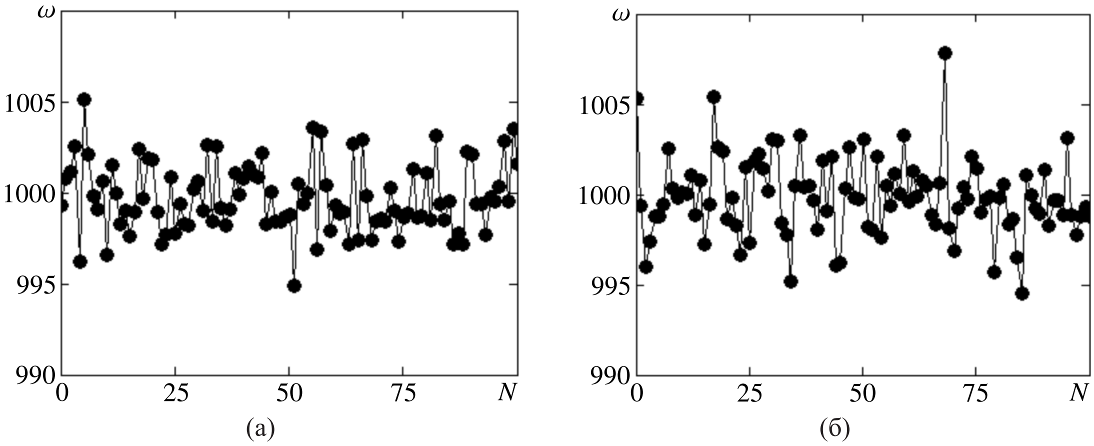

Рис. 2. Возможная реализация модельного случайного процесса на интервале измерений при различных законах распределения: а) нормальном; б) логистическом

С использованием совокупностей измеренных значений $\mathbf{\Omega}^{(0)} = \left\{\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \ldots, \omega_N^{(0)}\right\}$ и реализаций модельных случайных процессов введем квадратичные функционалы следующего вида:

$$L_\omega^{(i)}\left(p_\omega^{(i)}, m_\omega, d_\omega\right) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{K}\sum\limits_{n=1}^{N}\left(\omega_n^{(0)} - \omega_n^{(i,k)}\right)^2}{K \cdot \sum\limits_{n=1}^{N}\left(\omega_n^{(0)}\right)^2}. \tag{3}$$

Квадратичный функционал вида (3) является физически обоснованными показателем качества для оценивания параметров наблюдаемого случайного процесса отклонения частоты сигнала от номинального значения в различных технических устройствах, в том числе и ССиПД. Минимизация функционала (3) при корреляционной обработке определяет максимальное ОСШ, что позволяет обеспечить минимальную вероятность битовой ошибки и максимальную пропускную способность канала связи. С учетом этого во многих приложениях теории оценивания случайных процессов минимизация (3) является физически обоснованным критерием, на основе которого может проводиться оценивание параметров случайного процесса, даже если закон распределения значений случайного процесса не является нормальным.

Значение функционала $L_\omega^{(i)}\left(p_\omega^{(i)}, m_\omega, d_\omega\right)$ определяется следующими факторами:

- соответствием принятого i-го модельного закона распределения закону распределения измеренных значений наблюдаемого случайного процесса;
- различием значений математического ожидания $M_\omega^{(0)}$, характеризующего наблюдаемый случайный процесс, и выборочным средним значением m_ω, полученным на основе выборки ограниченного объема из этого процесса;

- расхождением значений дисперсии $D_\omega^{(0)}$, характеризующей наблюдаемый случайный процесс, и выборочным значением дисперсии d_ω, полученным на основе выборки ограниченного объема из этого процесса.

С учетом этого оценку параметров исследуемого случайного процесса проведем из условия

$$\mathbf{H}\left\{P_\omega^{(i)},\, M_\omega,\, D_\omega\right\} = \underset{\left\{P_\omega^{(i)},\, M_\omega,\, D_\omega\right\}}{\arg\min} \left\{L_\omega^{(i)}\left(p_\omega^{(i)},\, m_\omega,\, d_\omega\right)\right\}, \tag{4}$$

где $\mathbf{H} = \left\{P_\omega^{(i)},\, M_\omega,\, D_\omega\right\}$ — вектор в пространстве параметров случайных процессов, элементами которого являются закон распределения, оценки математического ожидания и дисперсии исследуемого случайного процесса.

В силу случайного характера значений наблюдаемого и модельного случайных процессов прямое сравнение значений этих процессов, как предложено в (3), не позволяет установить закон распределения наблюдаемого случайного процесса. Однако такое соответствие может быть установлено при сравнении упорядоченных по возрастанию или убыванию значений наблюдаемого и модельных случайных процессов (упорядоченных статистик) [Жуковский и др., 2017; Маталыцкий, Хацкевич, 2017]. Обозначим указанные упорядоченные совокупности как $\widehat{\mathbf{\Omega}}^{(0)} = \left\{\widehat{\omega}_1^{(0)},\, \widehat{\omega}_2^{(0)},\, \ldots,\, \widehat{\omega}_N^{(0)}\right\}$ для исследуемого процесса и $\widehat{\mathbf{\Omega}}^{(i,k)}(m_\omega,\, d_\omega) = \left\{\widehat{\omega}_1^{(i,k)},\, \widehat{\omega}_2^{(i,k)},\, \ldots,\, \widehat{\omega}_N^{(i,k)}\right\}$ для принятых модельных случайных процессов. Примеры упорядоченных наборов значений, полученных для представленных на рис. 1 исследуемых процессов при различных законах распределения, показаны на рис. 3. Аналогичный вид имеют графики упорядоченных наборов значений, полученных для представленных на рис. 2 реализаций модельных случайных процессов.

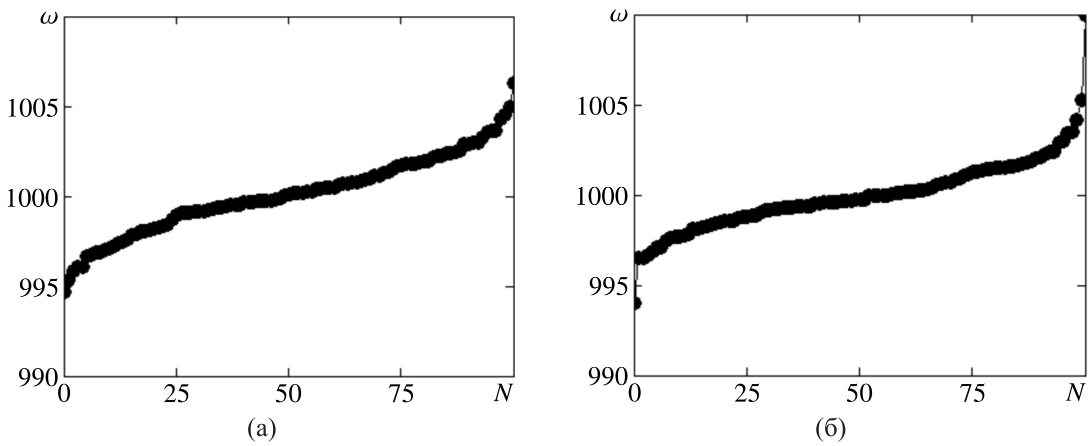

Рис. 3. Упорядоченная совокупность значений случайного процесса на интервале измерений при различных законах распределения: а) при нормальном; б) логистическом

Необходимо сразу отметить, что функционал, полученный на основе упорядоченных наборов значений случайных процессов,

$$\widehat{L}_\omega^{(i)}\left(p_\omega^{(i)},\, m_\omega,\, d_\omega\right) = \frac{\sum\limits_{l=1}^{L}\sum\limits_{n=1}^{N}\left(\widehat{\omega}_n^{(0)} - \widehat{\omega}_n^{(i,l)}\right)^2}{L\cdot\sum\limits_{n=1}^{N}\left(\widehat{\omega}_n^{(0)}\right)^2}, \tag{5}$$

позволяет определить все элементы вектора $\mathbf{H}$ из условия глобального минимума данного функционала. Однако поиск глобального минимума при отсутствии априорной информации о законе распределения исследуемого случайного процесса сопряжен с большим объемом вычислительных затрат. С учетом этого оценка параметров случайного процесса может быть выполнена в два этапа:

- на первом этапе выполняется определение закона распределения значений исследуемого случайного процесса;
- на втором этапе уточняются оценки математического ожидания и дисперсии исследуемого случайного процесса.

Действительно, в соответствии с центральной предельной теоремой можно считать, что $\sum\limits_{n=1}^{N}\widehat{\omega}_n^{(0)} \simeq N\cdot m_\omega$ и $\sum\limits_{n=1}^{N}\widehat{\omega}_n^{(i)} \simeq N\cdot m_\omega$ для любых i [Жуковский и др., 2017; Маталыцкий, Хацкевич, 2017]. С учетом этого значение функционала (4) будет определяться корреляцией наборов значений $\widehat{\mathbf{\Omega}}^{(0)} = \left\{\widehat{\omega}_1^{(0)}, \widehat{\omega}_2^{(0)}, \ldots, \widehat{\omega}_N^{(0)}\right\}$ и $\widehat{\Omega}^{(i,k)}(m_\omega, d_\omega) = \left\{\widehat{\omega}_1^{(i,k)}, \widehat{\omega}_2^{(i,k)}, \ldots, \widehat{\omega}_N^{(i,k)}\right\}$, которая будет наибольшей для модельного случайного процесса, закон распределения, математическое ожидание и дисперсия которого будут наиболее близкими к соответствующим параметрам исследуемого случайного процесса. Справедливость данного утверждения определяется тем, что упорядоченные наборы для всех модельных процессов формируются на основе выборочных среднего значения m_ω и дисперсии d_ω, полученных при наблюдении исследуемого случайного процесса. В этом случае функционал $\widehat{L}_\omega^{(i)}\left(p_\omega^{(i)}, m_\omega, d_\omega\right)$ принимает наименьшее значение для модельного случайного процесса, закон распределения которого является наиболее близким к закону распределения исследуемого процесса. Данное условие имеет вид

$$i_0 = \arg\min_{p_\omega^{(i)}}\left\{\widehat{L}_\omega^{(i)}\left(p_\omega^{(i)}, m_\omega, d_\omega\right)\right\}, \tag{6}$$

где i_0 — номер модельного случайного процесса из множества I модельных законов распределения, закон распределения которого наиболее близок в смысле (5) закону распределения наблюдаемого процесса.

После определения закона распределения наблюдаемого случайного процесса уточнение математического ожидания и дисперсии этого процесса сводится к последующей минимизации $\widehat{L}_\omega^{(i)}\left(p_\omega^{(i_0)}, m_\omega, d_\omega\right)$ при уточнении M_ω и D_ω, а оценки математического ожидания и дисперсии исследуемого случайного процесса находятся из условия

$$\mathbf{G}\{M_\omega, D_\omega\} = \arg\min_{\{M_\omega, D_\omega\}}\left\{\widehat{L}_\omega^{(i_0)}\left(p_\omega^{(i_0)}, m_\omega, d_\omega\right)\right\}, \tag{7}$$

где $\mathbf{G} = \{M_\omega, D_\omega\}$ — вектор в пространстве параметров случайных процессов, элементами которого являются оценки математического ожидания и дисперсии исследуемого случайного процесса при выбранном законе распределения i_0.

Соотношения (1), (2) и (5)–(7) представляют алгоритм определения параметров случайного процесса. Структура алгоритма представлена на рис. 4.

4. Результаты численного эксперимента

При постановке и проведении вычислительного эксперимента примем, что наблюдаемый случайный процесс описывается одним из трех законов распределения: нормальным распределением ($i = 1$), логистическим распределением ($i = 2$), распределением Лапласа ($i = 3$). Математическое ожидание и дисперсия генеральной совокупности отсчетов наблюдаемого процесса во всех случаях приняты соответственно $M_\omega^{(0)} = 10^3$ с$^{-1}$, $D_\omega^{(0)} = 4$ с$^{-2}$. При наблюдении исследуемого случайного процесса выполнено 100 измерений значений случайного процесса (частоты

Рис. 4. Схема алгоритма определения параметров случайного процесса

Таблица 1. Выборочные значения математического ожидания m_ω и дисперсии d_ω

Закон распределения случайного процесса	m_ω	d_ω
Нормальный (i = 1)	1000,09	1,98581
Логистический (i = 2)	999,78	1,72884
Лапласа (i = 3)	999,92	2,17879

сигнала), по результатам которых получены выборочные значения: m_ω и d_ω. Указанные значения для каждого из процессов приведены в табл. 1.

Множество I законов распределения, на основе которых формируются модельные сигналы, также равно трем и включает те же законы распределения с соответствующими выборочными значениями математического ожидания и дисперсии. В частности, квадратичные функционалы

$$ {}^{(1)}\widehat{L}_{\omega}^{(1)}\left(p_{\omega}^{(1)},\, m_{\omega},\, d_{\omega}\right) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N}\left(\widehat{\omega}_n^{(0)} - \widehat{\omega}_n^{(1)}\right)^2, \tag{8} $$

$$ {}^{(1)}\widehat{L}_{\omega}^{(2)}\left(p_{\omega}^{(2)},\, m_{\omega},\, d_{\omega}\right) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N}\left(\widehat{\omega}_n^{(0)} - \widehat{\omega}_n^{(2)}\right)^2, \tag{9} $$

$$ {}^{(1)}\widehat{L}_{\omega}^{(3)}\left(p_{\omega}^{(3)},\, m_{\omega},\, d_{\omega}\right) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N}\left(\widehat{\omega}_n^{(0)} - \widehat{\omega}_n^{(3)}\right)^2 \tag{10} $$

соответствуют случаю, при котором наблюдаемый случайный процесс подчинялся первому из рассматриваемых (нормальному) закону распределения и трем модельным сигналам. Значения во второй и третьей строках таблицы получены для наблюдаемых случайных процессов, имеющих логистический закон распределения и закон распределения Лапласа соответственно.

Для указанных исходных данных при $K = 10$ получены значения квадратичных функционалов (5) для всех возможных парных сочетаний наблюдаемого и модельных сигналов. Полученные результаты приведены в табл. 2, где номер строки определяет закон распределения наблюдаемого сигнала, а номер столбца — закон распределения модельного сигнала. Так, в первой строке табл. 2 расположены значения, полученные из соотношений (8)–(10).

Таблица 2. Значения функционала (5) при различных сочетаниях наблюдаемого и модельного процессов

Закон распределения наблюдаемого случайного процесса	Закон распределения модельного случайного процесса		
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
Нормальный ($i = 1$)	$1{,}336 \cdot 10^{-7}$	$1{,}919 \cdot 10^{-7}$	$2{,}975 \cdot 10^{-7}$
Логистический ($i = 2$)	$1{,}463 \cdot 10^{-7}$	$1{,}415 \cdot 10^{-7}$	$2{,}859 \cdot 10^{-7}$
Лапласа ($i = 3$)	$6{,}675 \cdot 10^{-7}$	$5{,}733 \cdot 10^{-7}$	$4{,}921 \cdot 10^{-7}$

Как следует из представленных результатов, диагональный элемент в таблице имеет наименьшее значение в соответствующей строке. Это определяет, что при использовании предложенного алгоритма закон распределения в наблюдаемом случайном процессе определяется правильно.

Для сравнения в табл. 3 и 4, структуры которых аналогичны структуре табл. 2, соответственно приведены результаты определения закона распределения, полученные с использованием критерия согласия Пирсона и расстояния Крамера – фон Мизеса.

Таблица 3. Значения χ^2-функции при различных сочетаниях наблюдаемого и модельного процессов

Закон распределения наблюдаемого случайного процесса	Закон распределения модельного случайного процесса		
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
Нормальный ($i = 1$)	0,393	0,606	157,417
Логистический ($i = 2$)	0,312	0,646	39,813
Лапласа ($i = 3$)	4,491	2,736	4183

Как следует из приведенных результатов, предлагаемый алгоритм для всех трех законов распределения показал правильный результат. В то же время критерий Пирсона показал неправильный результат для законов распределения логистического и Лапласа, а использование

Таблица 4. Значения расстояния Крамера – фон Мизеса при различных сочетаниях наблюдаемого и модельного процессов

Закон распределения наблюдаемого случайного процесса	Закон распределения модельного случайного процесса		
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
Нормальный ($i = 1$)	$1{,}171 \cdot 10^{-3}$	$1{,}994 \cdot 10^{-3}$	$7{,}405 \cdot 10^{-3}$
Логистический ($i = 2$)	$13{,}0 \cdot 10^{-3}$	$11{,}0 \cdot 10^{-3}$	$30{,}0 \cdot 10^{-3}$
Лапласа ($i = 3$)	$14{,}0 \cdot 10^{-3}$	$18{,}0 \cdot 10^{-3}$	$3{,}01 \cdot 10^{-3}$

критерия, основанного на расстоянии Крамера – фон Мизеса, — в случае логистического закона распределения.

Для обобщения полученных результатов были рассмотрены 100 реализаций для каждого из наблюдаемых случайных процессов (нормального, логистического и Лапласа), на основе которых были определены вероятности ошибок первого и второго рода при использовании предлагаемого алгоритма, критерия согласия Пирсона и расстояния Крамера – фон Мизеса. Результаты приведены в табл. 5–7. При этом в табл. 5 вероятности ошибок второго рода соответствуют вероятностям выбора гипотезы «логистический закон распределения / распределение Лапласа», в табл. 6 — вероятностям выбора гипотезы «нормальный закон распределения / распределение Лапласа» и в табл. 7 — вероятностям выбора гипотезы «нормальный закон распределения / логистический закон распределения».

Таблица 5. Вероятности ошибок при наблюдении процесса с нормальным законом распределения

Используемый критерий	Вероятность ошибок	
	Ошибки 1-го рода	Ошибки 2-го рода
Критерий согласия Пирсона	0,05	0,05 / —
Расстояние Крамера – фон Мизеса	0,45	0,45 / —
Предлагаемый алгоритм	0,05	0,05 / —

Таблица 6. Вероятности ошибок при наблюдении процесса с логистическим законом распределения

Используемый критерий	Вероятность ошибок	
	Ошибки 1-го рода	Ошибки 2-го рода
Критерий согласия Пирсона	0,30	0,30 / —
Расстояние Крамера – фон Мизеса	0,25	0,20 / 0,05
Предлагаемый алгоритм	0,25	0,25 / 0,00

Таблица 7. Вероятности ошибок при наблюдении процесса с законом распределения Лапласа

Используемый критерий	Вероятность ошибок	
	Ошибки 1-го рода	Ошибки 2-го рода
Критерий согласия Пирсона	0,90	0,90 / —
Расстояние Крамера – фон Мизеса	0,1	0,05 / –0,05
Предлагаемый алгоритм	0,15	0,10 / 0,05

Представленные в табл. 5–7 результаты показывают, что предлагаемый алгоритм имеет в пределах статистической погрешности сопоставимую вероятность ошибок первого и второго рода с критерием согласия Пирсона для случайных процессов с нормальным законом распределения, несколько превосходит его при анализе процессов с логистическим законом распределения и превосходит при анализе случайных процессов с распределением Лапласа. По отношению к критерию, основанному на вычислении расстояния Крамера – фон Мизеса, предлагаемый критерий совместно с критерием Пирсона существенно лучше для нормального закона распределения и сопоставим для логистического и Лапласа законов распределения.

Необходимо отметить отсутствие в предлагаемом алгоритме субъективности при выборе параметров критерия, как, например, числа разбиений интервала значений случайного процесса в критерии согласия Пирсона.

С точки зрения применения предложенного алгоритма представляет интерес анализ его работоспособности в случае, если используемые законы формирования модельных сигналов не включают закон распределения наблюдаемого процесса. Проанализируем работоспособность предложенного алгоритма применительно к анализу случайного процесса, подчиняющегося гамма-распределению с параметрами $M_\omega^{(0)} = 10^3$ с$^{-1}$ и $D_\omega^{(0)} = 4$ с$^{-2}$, при том же наборе модельных законов распределения. При анализе 100 реализаций закон распределения наблюдаемого процесса как критерием Пирсона, так и предлагаемым алгоритмом был отнесен к нормальному закону распределения. Правильность принятия такой статистической гипотезы частично подтверждается графиками на рис. 5, где представлены упорядоченные совокупности наблюдаемого и модельных законов распределения.

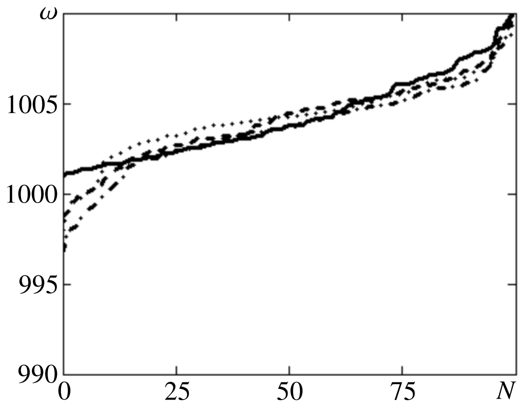

Рис. 5. Упорядоченные совокупности значений случайных процессов: наблюдаемого (сплошная линия), модельного с нормальным законом распределения (штриховая линия), модельного с логистическим законом распределения (штрихпунктирная линия), модельного с законом распределения Лапласа

Таким образом, предложенный функционал (5) не уступает в эффективности классическим критериям, таким как критерий согласия Пирсона и расстояние Крамера – фон Мизеса, при проверке статистических гипотез и позволяет определять функциональную форму закона распределения.

Полученный закон распределения на втором этапе используется для уточнения математического ожидания и дисперсии случайного процесса путем обработки выборок большего объема. При этом функционал (5) приводит к получению несмещенных состоятельных оценок параметров закона распределения. Действительно, $m_\omega \to M_\omega^{(0)}$ и $d_\omega \to D_\omega^{(0)}$ при $N \to \infty$, что приводит к выполнению двух следующих условий:

$$P\left(\left|m_\omega - M_\omega^{(0)}\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0, \quad P\left(\left|d_\omega - D_\omega^{(0)}\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0, \tag{11}$$

определяющих, как и при использовании расстояния Крамера – фон Мизеса, состоятельность получаемых оценок. Таким образом, применение предложенного функционала (3) совместно с условием (4) позволяет определять закон распределения $p_\omega^{(i_0)}$ в наблюдаемом случайном процессе.

Полученные результаты показывают, что предложенный алгоритм, основанный на сравнении упорядоченных статистик, полученных на основе измеренных значений случайного процесса и сформированных наборов значений с использованием полученных выборочных среднего и дисперсии для различных предполагаемых законов распределения, не уступает классическим непараметрическим критериям, таким как критерий Пирсона и критерий на основе расстояния Крамера – фон Мизеса (https://github.com/olenkasafarya-arch/proekt.git). В этой ситуации, как отмечено в [Li et al., 2017], удается естественным образом объединять предлагаемый алгоритм для совместного использования с известными статистическими критериями. Такое объединение позволяет использовать нейросетевые технологии путем формирования однослойной сети из эквивалентных статистическим критериям нескольких искусственных нейронов.

5. Заключение

Анализ результатов выполненных исследований показал следующее.

1. Вычислительные эксперименты показали устойчивую работу предлагаемого алгоритма уже при числе выборок N порядка 100, что делает его применимым для определения характеристик случайного процесса с выборками ограниченного объема.

2. Предложенный алгоритм определения характеристик случайного процесса путем сравнения измеренных значений наблюдаемого процесса и моделируемых для различных законов распределения наборов с использованием выборочных значений среднего и дисперсии наблюдаемого процесса:

    - для процесса с нормальным законом распределения не уступает критерию согласия Пирсона и превосходит критерий, основанный на расстоянии Крамера – фон Мизеса;
    - для процесса с логистическим законом распределения имеет одинаковую эффективность с критерием согласия Пирсона и критерием, основанным на расстоянии Крамера – фон Мизеса;
    - для процесса с законом распределения Лапласа не уступает критерию, основанному на расстоянии Крамера – фон Мизеса, и превосходит критерий согласия Пирсона.

3. Предложенный критерий является не более сложным по сравнению с критериями Пирсона и Крамера – фон Мизеса. При этом по сравнению с критерием согласия Пирсона исключаются операции, связанные с разбиением на интервалы, выбор числа которых является в достаточной мере субъективным, а по сравнению с критерием Крамера – фон Мизеса исключаются операции вычисления функции распределения для измеренных отсчетов случайного процесса.

4. Получаемые с использованием предлагаемого алгоритма оценки являются несмещенными и состоятельными.

5. Ограничением предлагаемого алгоритма является возможная для использования совокупность законов распределения. В реальном физическом процессе ни один из модельных законов распределения, как правило, не имеет места. В этом случае предлагаемый алгоритм будет показывать модельный закон распределения, для которого отличие отсчетов модельного сигнала от значений отсчетов наблюдаемого процесса будет наименьшим в среднеквадратическом смысле.

6. Предлагаемый алгоритм допускает совместное использование с известными алгоритмами проверки статистических гипотез.

Список литературы (References)

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов. — 9-е изд. — М.: Высшая школа, 2003. — 479 с.

Gmurman V. E. Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika [Probability theory and mathematical statistics]. — 9th ed. — Moscow: Vysshaya shkola, 2003. — 479 p. (in Russian).

Губарев В. В. Вероятностные модели: справочник. — В 2 ч. Ч. 1. — Новосибирск: Новосибирский электротехнический институт, 1992. — 422 с.

Gubarev V. V. Veroyatnostnye modeli: spravochnik [Probabilistic models: a handbook]. — In 2 parts. Part 1. — Novosibirsk: Novosibirskii elektrotekhnicheskii institut, 1992. — 422 p. (in Russian).

Жуковский М. Е., Родионов И. В., Шабанов Д. А. Введение в математическую статистику. — М.: МФТИ, 2017. — 109 с.

Zhukovskii M. E., Rodionov I. V., Shabanov D. A. Vvedenie v matematicheskuyu statistiku [Introduction to mathematical statistics]. — Moscow: MFTI, 2017. — 109 p. (in Russian).

Иванов А. И., Малыгин А. Ю., Полковникова С. А. Новый статистический критерий большой мощности, полученный дифференцированием случайных данных малой выборки // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. — 2021. — № 3. — С. 67–74. — DOI: 10.21685/2072-3059-2021-3-7

Ivanov A. I., Malygin A. Yu., Polkovnikova S. A. Novyi statisticheskii kriterii bol'shoi moshchnosti, poluchennyi differentsirovaniem sluchainykh dannykh maloi vyborki [A new high-power statistical criterion obtained by differentiation of random small-sample data] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Technical sciences. — 2021. — No. 3. — P. 67–74. — DOI: 10.21685/2072-3059-2021-3-7 (in Russian).

Иванов А. И., Малыгин А. Ю., Полковникова С. А. Удвоение числа статистических критериев семейства Крамера – фон Мизеса дифференцированием малых выборок с нормальным и равномерным распределением биометрических данных // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. — 2022. — № 1. — С. 53–61. — DOI: 10.21685/2072-3059-2022-1-5

Ivanov A. I., Malygin A. Yu., Polkovnikova S. A. Udvoenie chisla statisticheskikh kriteriev semeistva Kramera – fon Mizesa differentsirovaniem malykh vyborok s normal'nym i ravnomernym raspredeleniem biometricheskikh dannykh [Doubling the number of Cramer – von Mises family statistical criteria by differentiation of small samples with normal and uniform distribution of biometric data] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Povolzhskii region. Technical sciences. — 2022. — No. 1. — P. 53–61. — DOI: 10.21685/2072-3059-2022-1-5 (in Russian).

Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. — М.: Физматлит, 2006. — 816 с.

Kobzar' A. I. Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov [Applied mathematical statistics. For engineers and scientists]. — Moscow: Fizmatlit, 2006. — 816 p. (in Russian).

Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Юнити-Дана, 2012. — 538 с.

Kremer N. Sh. Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika [Probability theory and mathematical statistics]. — 2nd ed., revised and enlarged. — Moscow: Yuniti-Dana, 2012. — 538 p. (in Russian).

Лемешко Б. Ю. Непараметрические критерии согласия. Руководство по применению. — М.: ИНФРА-М, 2014. — 163 с.

Lemeshko B. Yu. Neparametricheskie kriterii soglasiya. Rukovodstvo po primeneniyu [Nonparametric goodness-of-fit tests. A guide for applications]. — Moscow: INFRA-M, 2014. — 163 p. (in Russian).

Малыцкий М. А., Хацкевич Г. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. — Минск: Вышэйшая школа, 2017. — 591 с.

Matalytskii M. A., Khatskevich G. A. Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika [Probability theory and mathematical statistics]. — Minsk: Vysheishaya shkola, 2017. — 591 p. (in Russian).

Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования / пер. с англ. — М.: Техносфера, 2007. — 320 с.

Morelos-Zaragoza R. H. The art of error correcting coding. — 2nd ed. — Chichester, England; Hoboken NJ, USA: John Wiley & Sons, 2006. — 276 p. (Russ. ed.: *Morelos-Saragosa R.* Iskusstvo pomekhoustoichivogo kodirovaniya / trans. from English. — Moscow: Tekhnosfera, 2007. — 320 p.)

Никитин О. Р., Корнеева Н. Н. Методы измерения статистических параметров радиосигналов: учеб. пособие. — Владимир: Изд-во ВлГУ, 2020. — 227 с.

Nikitin O. R., Korneeva N. N. Metody izmereniya statisticheskikh parametrov radiosignalov [Methods for measuring statistical parameters of radio signals]. — Vladimir: Vladim. gos. univ., 2020. — 227 p. (in Russian).

Сафарьян О. А., Алферова И. А., Енгибарян И. А., Юхнов В. И. Стабилизация частоты на основе первично-фундаментальных свойств больших систем // Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. — 2022. — Т. 14, № 4. — С. 26–32.

Safaryan O. A., Alferova I. A., Engibaryan I. A., Yukhnov V. I. Stabilizatsiya chastoty na osnove pervichno-fundamental'nykh svoistv bol'shikh sistem [Frequency stabilization based on the primary-fundamental properties of large systems] // Naukoemkie tekhnologii v kosmicheskikh issledovaniyakh Zemli. — 2022. — Vol. 14, No. 4. — P. 26–32 (in Russian).

Фадеева Л. Н., Лебедев А. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Эксмо, 2010. — 496 с.

Fadeeva L. N., Lebedev A. V. Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika [Probability theory and mathematical statistics]. — 2nd ed., revised and enlarged. — Moscow: Eksmo, 2010. — 496 p. (in Russian).

Li B., Zhou L., Yu X. R., Zheng C., Liu J. H. A microgrid inverter secondary frequency modulation scheme based on improved virtual synchronous generator algorithm // Power System Technology. — 2017. — Vol. 41, No. 8. — P. 2680–2687.

Safaryan O. A., Pilipenko I. A. Prerequisites and theoretical foundations of the statistical method of frequency stabilization in information and telecommunication systems // Electronics. — 2022. — Vol. 11, No. 18. — P. 1–9.

Safaryan O. A., Pilipenko I. A., Boldyrikhin N. V., Yukhnov V. I. Multidimensional likelihood function in the problem of estimating time-frequency parameters of signals // 2021 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). — 2021. — P. 393–396.