

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

УДК: 519.62

Применение метода компьютерной аналогии для решения сложных нелинейных систем дифференциальных уравнений

В. В. Аристов^{1,а}, А. А. Музыка², А. В. Строганов²

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2

²МИРЭА – Российский технологический университет,
Россия, 119454, г. Москва, пр-кт Вернадского, д. 78, стр. 2

E-mail: ^a aristovvl@yandex.ru

Получено 03.07.2025, после доработки – 12.11.2025.
Принято к публикации 13.11.2025.

В работе развивается предложенный ранее метод компьютерной аналогии (МКА), основанный на формализации операций цифрового компьютера. Обсуждается место предлагаемого подхода среди известных методов. Подчеркивается, что целью является получение именно аналитических представлений решений, хотя пока в ряде случаев приходится ограничиться полуаналитическими аппроксимациями. Подробно изучается способ построения решений для уравнения Ван дер Поля (сводящегося к нелинейной системе дифференциальных уравнений), для систем Лоренца, Мариока – Шимицу и Рёссlera. Для трех последних нелинейных систем рассматриваются параметры, при которых решения демонстрируют черты детерминистического хаоса. Стятся полуаналитические решения, основанные на представлении решения в виде отрезка сходящегося степенного ряда по шагу независимой переменной при использовании аппроксимирующих разностных схем. Для предотвращения переполнения применяется формализованная операция переноса разрядов. Для перехода на следующий шаг по независимой переменной используется сходящаяся к решению разностная схема, называемая руководящей. Таким образом, получаемая аппроксимация суммой всего с несколькими членами обеспечивает приближение к решению с любой точностью в соответствии с точностью руководящей разностной схемы. Старшие разряды в получаемом приближении обнаруживают вероятностные свойства, которые удается моделировать известными распределениями, что приводит к получению аналитических и полуаналитических аппроксимаций. В работе представлены линейные приближения, являющиеся основой для полных приближений решений и дающие важные качественные, а также некоторые количественные свойства решений. Описываются аппроксимации различного порядка, в том числе и не гарантирующие сходимости к точному решению, но упрощающие анализ определенных свойств решения нелинейных уравнений и систем. В частности, для уравнения Ван дер Поля показывается, что соответствующая ему система уравнений имеет циклическое решение, а также оценивается его масштаб. С помощью модификаций МКА (с некоторыми чертами метода Монте-Карло), в которых удается свернуть рекуррентные последовательности, построены полные решения в простых ситуациях. Упоминается перспективный подход, позволяющий представлять решение с помощью ветвящихся цепных дробей.

Ключевые слова: метод компьютерной аналогии, решение дифференциальных уравнений, задача Коши, решение систем дифференциальных уравнений, уравнение Ван дер Поля, система Лоренца, система Мариока – Шимицу, система Рёссlera

UDC: 519.62

Application of the computer analogy method for solving complex nonlinear systems of differential equations

V. V. Aristov^{1,a}, A. A. Muzyka², A. V. Stroganov²

¹Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences,
44/2 Vavilov st., Moscow, 119333, Russia

²MIREA – Russian Technological University,
78/2 Vernadsky ave., Moscow, 119454, Russia

E-mail: ^a aristovvl@yandex.ru

Received 03.07.2025, after completion — 12.11.2025.
Accepted for publication 13.11.2025.

This study develops a previously proposed Method of Computer Analogy (MCA) based on formalization of digital computer operations. The paper discusses the position of the proposed approach among other well-known methods. It is emphasized that the primary objective is to derive analytical solutions, although in some cases they have to resort to semi-analytical approximations. The paper focuses on constructing solutions for systems which, for certain parameter values, demonstrate the deterministic chaos behavior, namely Lorenz, Marioka–Shimitsu and Rössler systems. The paper also considers obtaining solution for Van der Pol equation (reduced to a nonlinear system). The aim of the study is to construct semi-analytical solutions represented as a segment of a power series in a step size of approximating difference scheme. To prevent overflow, authors formalize rank transfer operation. The authors apply a convergent difference scheme, referred to as the “guiding” scheme, to advance to the next step of the independent variable. The resulting approximation by a sum with only a few terms provides an approximation to the solution with any accuracy in accordance with the accuracy of the governing difference scheme. The senior digits in the resulting approximation exhibit probabilistic properties that can be modeled by known distributions, thereby enabling the derivation of analytical and semi-analytical approximations. The paper presents linear approximations that are the base for a complete approximations of solutions and provide important qualitative as well as some quantitative properties of solutions of considered systems. This work describes approximations of various orders, including those that do not guarantee convergence to the exact solution, but simplify the analysis of certain properties of nonlinear equations and systems. In particular, for the Van der Pol equation, authors demonstrate that its corresponding system has a cyclic solution and provide an estimate of its scale. A modification of the MCA that has features of the Monte Carlo method makes it possible to remove recurrent sequences and construct complete solutions in simple situations. The authors mention a promising approach for representing the solution using branched continued fractions.

Keywords: computer analogy method, solution of differential equations, Cauchy problem, solution of systems of differential equations, Van der Pol equation, Lorenz system, Marioka–Shimitsu system, Rössler system

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 6, pp. 1083–1104 (Russian).

1. Введение

Современная вычислительная техника дает возможность разрешать многие сложные задачи, но поиск аналитических (или полуаналитических подходов) не теряет актуальности. Представление решения в явной форме имеет несомненные достоинства. Явный аналитический вид позволяет получить больше информации о задаче, увидеть решение в целом с его качественными особенностями, асимптотиками и т. д., что важно, например, для физического описания явлений. Также существенно, что аналитические решения, даже частные, могут являться тестами, играющими большую роль при разработке численных методов. При этом известно, что класс дифференциальных уравнений, допускающих аналитическое решение в известных функциях, достаточно узок [Зайцев, Полянин, 1993]. В численных подходах, использующих компьютер, теряется общность, присущая явному представлению решения. Также существенными являются вопросы выбора подходящей численной схемы, исследования ее на устойчивость, аппроксимацию, монотонность, трудности, связанные с написанием и отладкой программ, и т. д.

Вычислительное устройство позволяет получить результат в законченном виде, но результат задается в числовом виде. Тем не менее работа такого устройства указывает на способ сворачивания промежуточных действий, возникающих при стирании промежуточных данных. В [Аристов, Строганов, 2009; Аристов, Строганов, 2010; Aristov, Stroganov, 2012] был предложен метод построения решения дифференциальных уравнений с использованием некоторых свойств, характерных для работы ЭВМ, названный методом компьютерной аналогии (МКА). Он связан с формализацией основных свойств работы цифрового компьютера — ограниченное количество разрядов и переброс значения из разряда в соседний разряд. В таком подходе исключаются промежуточные шаги в рекуррентных формулах разностных схем для дифференциальных уравнений. Решение задачи Коши строится в виде отрезка ряда по степеням шага аргумента τ . С помощью этого метода были получены аналитические решения простых нелинейных уравнений и систем.

Цель настоящей работы — получение полуаналитических аппроксимаций для сложных нелинейных систем дифференциальных уравнений. Это промежуточная цель исследования, направленного на построение на основе МКА явных решений для таких систем. В работе изучаются решения систем, демонстрирующих, в частности, свойства детерминистического хаоса, а именно Лоренца, Мариока – Шимицу и Рёссlera. Также рассматривается система Van der Polya с получением циклов. Данные системы не имеют аналитических решений.

Заметим, что МКА обладает некоторыми особыми свойствами аппроксимации. Он в определенном смысле соединяет черты метода конечных разностей и представления решения задачи в виде суперпозиции функций с заданными свойствами. Рассматривается сходящаяся разностная схема, называемая руководящей, а представление решения в МКА приближает именно такое разностное решение. Степень старшего слагаемого, необходимая для обеспечения сходимости аппроксимации к решению, зависит от порядка нелинейности соответствующего уравнения. Аппроксимация суммой всего с несколькими членами способна обеспечить приближение к решению с любой точностью в согласии с точностью руководящей разностной схемы. Например, для нелинейности второго порядка (уравнения Рёссlera, Мариока – Шимицу, Лоренца) достаточно членов до τ^3 , для кубической нелинейности в системе Van der Polya достаточно аппроксимации до τ^4 . При этом члены суммы вносят вклад разного порядка по τ . При стремлении шага к нулю происходит приближение к решению, задаваемому разностной схемой. Возникает аналог разрядной сетки цифрового компьютера, поэтому можно назвать такую схему τ -компьютером. Важно подчеркнуть, что в отличие от известных методов представления решения в виде суперпозиции заданных функций (метод коллокации, Бубнова – Галёркина, Галёркина и др.), где стремление к решению обеспечивается в общем случае увеличением числа функций в суперпозиции, в МКА

число членов суммы фиксировано, а уточнение происходит за счет уменьшения шага по времени. Основную роль в аппроксимации играют младшие разряды — нулевой и первый. Старшие разряды исчезающие малы при стремлении шага к нулю, но их роль важна из-за перебросов разряда. Причем коэффициенты при старших степенях по τ обнаруживают (из-за переброса разрядов) вероятностные свойства, что также учитывается при построении аппроксимаций.

Опишем кратко план работы. Представлены основные черты МКА. Даётся описание изучаемых уравнений и задач. Строится полное решение систем по МКА с демонстрацией возможностей вероятностных свойств старших коэффициентов. Рассматривается свойство линейного приближения (с использованием аппроксимации лишь первыми членами), дающего важные качественные, а также некоторые количественные свойства решения систем. Получено полное решение по МКА, имеющее черты метода Монте-Карло, указывается, что ранее нами получались решения по так называемому обратному методу Монте-Карло, имеющему ограниченные возможности применимости. В заключении подводится итог проделанных вычислений в работе, а также намечаются перспективы использования МКА, предлагается идея подхода, позволяющего представить решение с помощью ветвящихся цепных дробей.

2. Основные свойства метода

Подробно МКА описан в [Аристов, Строганов, 2009; Аристов, Строганов, 2010; Aristov, Stroganov, 2012]. Отметим лишь его важнейшие черты. Рассмотрим задачу Коши (для одного уравнения или для системы уравнений):

$$\frac{dy}{dt} = G(y), \quad y(0) = y_0.$$

Здесь $G(y)$ — бесконечно дифференцируемая функция (или функции) с ограниченными производными. Далее будем называть сходящуюся к решению исходного уравнения разностную схему руководящей. Рассмотрим в качестве руководящей разностной схемы простую явную схему Эйлера первого порядка. Более сложная разностная схема позволила бы получить более точную, но и более сложную реализацию метода. Схема имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + \tau G(y_n). \quad (1)$$

Шаг по времени τ выбран столь малым, что обеспечивается устойчивость разностной схемы, а значит, и ее сходимость. Подставляя выражения, задаваемые формулой (1), последовательно в y_n с убывающими номерами, получаем отрезок ряда по степеням τ . Для обеспечения сходимости вводится процедура переброса разрядов, гарантирующая, что абсолютные значения коэффициентов слагаемых ряда будут меньше чем $\frac{1}{\tau}$. Если коэффициент становится больше или равен $\frac{1}{\tau}$, его часть переносится в старший разряд (т. е. левый разряд).

Пусть решение на n -м слое задается отрезком ряда по степеням τ :

$$y_n = \sum_{i=0}^p a_{i,n} \tau^i.$$

Представим решение на слое $n+1$ в виде отрезка ряда по степеням τ . Для этого разложим функцию $G(y_n)$ в ряд Тейлора в окрестности $y^* = a_{0,n}$:

$$G(y_n) = G(y^*) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{m=1}^p a_{m,n} \tau^m \right)^k \left. \frac{d^k G(y)}{dy^k} \right|_{y=y^*}.$$

Подставим разложения $G(y_n)$ и y_n в формулу разностной схемы (1) и сгруппируем слагаемые по степеням τ :

$$y_{n+1} = a_{0,n} + \left(a_{1,n} + G(y^*) \right) \tau + \left(a_{2,n} + a_{1,n} \frac{dG(y)}{dy} \Big|_{y=y^*} \right) \tau^2 + \dots$$

После представления конечно-разностной схемы в виде рекуррентной формулы получаем отрезок ряда по степеням τ . Будем искать представление решения с помощью отрезка ряда с ограниченным числом слагаемых. В изучаемых в работе системах достаточно использовать небольшое число слагаемых в таких суммах.

Опишем операцию переброса (переноса) разрядов, обеспечивающую сходимость степенного ряда. Если абсолютное значение коэффициента степенного ряда меньше величины $\frac{1}{\tau}$, мы будем называть его нормализованным, если иначе — ненормализованным и обозначать его $\tilde{a}_{m,n}$. Когда коэффициент степенного ряда становится больше или равен $\frac{1}{\tau}$, целая часть произведения $\tilde{a}_{m,n}$ и τ добавляется к левому слагаемому, а прежний коэффициент $\tilde{a}_{m,n}$ заменяется остатком от деления своего значения на $\frac{1}{\tau}$:

$$\begin{aligned} a_{m,n} &= (\tilde{a}_{m,n} + \delta_{m+1,n}) \bmod \frac{1}{\tau}, \\ \delta_{m,n} &= [(\tilde{a}_{m,n} + \delta_{m+1,n})\tau], \quad \delta_{p+1,n} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь функция переброса $\delta_{m,n}$ определяет величину, переносимую из m -го в $(m-1)$ -й разряд на слое n . Величина $\delta_{p+1,n}$ определяет переброс в старший, а именно p -й, разряд, его значение всегда равно нулю, поскольку нет разряда, из которого в него мог бы произойти переброс. Если в скобках для целой части в формуле величины переброса $\delta_{m,n}$ оказывается отрицательное число, то берется целая часть от модуля соответствующего числа, а в остальные формулы подставляется $-\delta_{m,n}$ вместо $\delta_{m,n}$. Эти преобразования можно формализовать, введя множители, соответствующие знакам коэффициентов [Aristov, Stroganov, 2012].

Тем самым предлагается новая вычислительная модель, которую мы назвали τ -компьютером. Таким образом, получается аппроксимация решения с помощью суммы с фиксированным числом слагаемых. Заметим, что для улучшения аппроксимации нужно уменьшать шаг τ , а не увеличивать число слагаемых. Более подробно рассматриваем это утверждение в следующем разделе.

Поскольку абсолютные величины коэффициентов $a_{i,n+1}$ меньше $\frac{1}{\tau}$ ($i \geq 1$), основной вклад вносят $a_{1,n+1}\tau$ (линейный член) и $a_{0,n+1}$. Остальные слагаемые (содержащие степени $\tau^2, \tau^3, \dots, \tau^p$) стремятся к нулю при $\tau \rightarrow 0$. Но эти слагаемые также важны, поскольку определяют функции перебросов разряда. Вместе эти члены вносят вклад $O(\tau)$ на каждом слое.

Коэффициенты $a_{m,n}$ при степенях τ^m , где $m > 1$, проявляют вероятностные свойства. Этот факт объясняется тем, что формулы для коэффициентов $a_{m,n}$ (2) являются модификацией линейного конгруэнтного генератора, применяемого для получения псевдослучайных чисел в следующей форме (см., например, [Ермаков, 1975; Соболь, 1973]):

$$x_m = (bx_{m-1} + c) \bmod P,$$

где b, c и P — целые числа, причем $b, c < P$. Такое свойство метода будет использоваться для получения аппроксимации со стохастическими коэффициентами.

3. Рассматриваемые уравнения и задачи

Для всех изучаемых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений ставилась задача Коши. Уравнение Van der Polia [Van der Pol, 1920] имеет вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \mu(1-u^2)\frac{du}{dt} + u = 0,$$

что эквивалентно системе двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -u + \mu(1 - u^2)v. \end{cases}$$

Параметр μ будем считать равным 1. Основные результаты получаются для начальных условий $u(0) = 1$, $v(0) = 1$ (или $u(0) = 0$, $v(0) = 1$). Ставится следующая задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, & u(0) = 1, \\ \frac{dv}{dt} = -u + (1 - u^2)v, & v(0) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Для систем Лоренца, Мариока – Шимицу и Рёсслера рассматриваются стандартные параметры, дающие странные аттракторы.

Для системы Лоренца [Lorenz, 1963] ставится следующая задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3(y - x), & x(0) = 3, \\ \frac{dy}{dt} = x(15 - z) - y, & y(0) = 2, \\ \frac{dz}{dt} = xy - z, & z(0) = 15. \end{cases} \quad (4)$$

Для системы Мариока – Шимицу [Shimizu, Morioka, 1980] задача Коши имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, & x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = x - 0,81y - xz, & y(0) = 1, \\ \frac{dz}{dt} = -0,375z + x^2, & z(0) = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Задача Коши для системы Рёсслера [Rössler, 1976] имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z, & x(0) = 3, \\ \frac{dy}{dt} = x + 0,2y, & y(0) = 2, \\ \frac{dz}{dt} = 0,2 + z(x - 5,7), & z(0) = 15. \end{cases} \quad (6)$$

В качестве вспомогательной модели также рассматривалось нелинейное дифференциальное уравнение с соответствующей задачей Коши:

$$\frac{dy}{dt} = -y^2, \quad y(0) = 1. \quad (7)$$

Удобство этой задачи в том, что для нее строится аналитическое решение

$$y(t) = \frac{1}{t + 1}.$$

4. Аппроксимация, обеспечивающая сходимость

В [Аристов, Строганов, 2009; Аристов, Строганов, 2010; Aristov, Stroganov, 2012] демонстрируется, что старший член τ^{n+1} в применяемом τ -компьютере при полиномиальной нелинейности степени n достаточен, чтобы обеспечить требуемую аппроксимацию (первого порядка для руководящей схемы первого порядка). Покажем, что для изучаемых систем аппроксимация решения до τ^2 в случае линейности соответствующего уравнения и до τ^3 в случае квадратичной нелинейности соответствующего уравнения обеспечивает сходимость к решению по руководящей схеме.

Рассмотрим в качестве примера задачу Коши только для системы Рёсслера (см. (6)). Разностная схема Эйлера выглядит так:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \tau(-y_n - z_n), \\ y_{n+1} = y_n + \tau(x_n + 0,2y_n), \\ z_{n+1} = z_n + \tau(0,2 + z_n(x_n - 5,7)). \end{cases}$$

Используем аппроксимацию для x и для y до τ^2 , а для z — до τ^3 :

$$\begin{cases} x_n = a_{0,n} + a_{1,n}\tau + a_{2,n}\tau^2, \\ y_n = b_{0,n} + b_{1,n}\tau + b_{2,n}\tau^2, \\ z_n = c_{0,n} + c_{1,n}\tau + c_{2,n}\tau^2 + c_{3,n}\tau^3. \end{cases}$$

Подставим полученные выражения в разностную схему, отбрасывая слагаемые со степенями выше τ^2 в формулах для x и y и слагаемые со степенями выше τ^3 в формулах для z , получим

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{0,n} + (a_{1,n} - b_{0,n} - c_{0,n})\tau + (a_{2,n} - b_{1,n} - c_{1,n})\tau^2, \\ y_{n+1} = b_{0,n} + (b_{1,n} + a_{0,n} + 0,2b_{0,n})\tau + (b_{2,n} + a_{1,n} + 0,2b_{1,n})\tau^2, \\ z_{n+1} = c_{0,n} + (c_{1,n} + 0,2 + c_{0,n}(a_{0,n} - 5,7))\tau + (c_{2,n} + c_{0,n}a_{1,n} + c_{1,n}(a_{0,n} - 5,7))\tau^2 + \\ + (c_{3,n} + c_{0,n}a_{2,n} + c_{1,n}a_{1,n} + c_{2,n}(a_{0,n} - 5,7))\tau^3. \end{cases}$$

Таким образом, на каждом шаге отбрасываются значения Δx_{n+1} , Δy_{n+1} и Δz_{n+1} следующего вида:

$$\begin{cases} \Delta x_{n+1} = -(b_{2,n} + c_{2,n})\tau^3 - c_{3,n}\tau^4, \\ \Delta y_{n+1} = (a_{2,n} + 0,2b_{2,n})\tau^3, \\ \Delta z_{n+1} = (c_{1,n}a_{2,n} + c_{2,n}a_{1,n} + c_{3,n}(a_{0,n} - 5,7))\tau^4 + (c_{2,n}a_{2,n} + c_{3,n}a_{1,n})\tau^5 + c_{3,n}a_{2,n}\tau^6. \end{cases}$$

Так как коэффициенты $a_{i,n}$, $b_{i,n}$, $c_{i,n}$ по модулю меньше $\frac{1}{\tau}$, получим (подразумевая ограниченность всех необходимых в оценках производных)

$$\begin{cases} \Delta x_{n+1} = O(\tau^2), \\ \Delta y_{n+1} = O(\tau^2), \\ \Delta z_{n+1} = O(\tau^2). \end{cases}$$

Во всех трех случаях ошибка на каждом шаге не превышает $O(\tau^2)$, что обеспечивает сходимость к решению руководящей схемы Эйлера.

Такие же выводы можно сделать и для систем Лоренца и Мариока–Шимицу, для системы Ван дер Поля, как легко видеть, старший член в аппроксимации τ -компьютера должен быть τ^4 . Далее под точным решением будем подразумевать решение с помощью МКА с порядком аппроксимации, обеспечивающим сходимость к решению по схеме Эйлера.

5. Применение МКА для аппроксимации решений сложных систем и учет квазислучайного поведения старших коэффициентов

В применении МКА мы стремимся сокращать промежуточные вычисления и получать решения в явном виде. Представление решения в указанной выше форме с конечным (небольшим) числом членов является важным этапом в построении решения. Для дальнейшего избавления от слоев рекуррентии важную роль играет обнаруживаемая квазистохастичность старших коэффициентов. Одной из целей настоящего пункта является подтверждение сходимости к точному решению для сложных систем, мы также показываем возможность замены данных коэффициентов с помощью вероятностных распределений.

Проверка предположения о стохастичности старших коэффициентов сводилась к тому, что коэффициенты при степенях τ выше первой на каждом слое заменялись значениями случайных величин с известными распределениями (например, значениями равномерно распределенных случайных величин).

В этом разделе рассматриваем задачи (4), (5), (6), для которых справедлива следующая аппроксимация, значение x_n на слое n получалось в следующем виде:

$$x_n = a_{0,n} + a_{1,n}\tau + a_{2,n}\tau^2 + a_{3,n}\tau^3,$$

где $a_{i,n}$ — нормализованные коэффициенты. Тогда после замены решение на слое n будет получаться в следующем виде:

$$x_n = a_{0,n} + a_{1,n}\tau + a_{2,n,\text{rand}}\tau^2 + a_{3,n,\text{rand}}\tau^3,$$

где $a_{2,n,\text{rand}}$ и $a_{3,n,\text{rand}}$ — значения случайных величин. В случае равномерного распределения значения величин получаются в интервале $\left[-\frac{1}{\tau} + 1, \frac{1}{\tau} - 1\right]$, поскольку после переброса $|a_{i,n}| < \frac{1}{\tau}$.

Таким образом, с использованием вероятностных свойств могут быть получены аппроксимации решений.

Ниже приведены гистограммы, позволяющие сравнить частоты различных значений коэффициентов, получаемых при решении системы Рёссlera с помощью МКА, с частотами значений равномерно распределенных случайных величин. На рис. 1 приведены гистограммы для коэффициента $b_{2,n}$ и равномерно распределенной случайной величины. Видно, что равномерное распределение хорошо воспроизводит квазистохастическое поведение коэффициентов при старших степенях τ .

Если вычислить выборочные математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение для коэффициента решения, можно сгенерировать нормальное распределение с соответствующими математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением. На рис. 2 приведены гистограммы для коэффициента $b_{2,n}$ для системы Рёссlera и нормально распределенной случайной величины, математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение которой равны выборочному среднему и выборочному среднеквадратическому отклонению для коэффициента $b_{2,n}$ соответственно. Видно, что нормальное распределение воспроизводит квазистохастическое поведение коэффициентов при старших степенях τ хуже, чем равномерное распределение. Поэтому отдаем предпочтение равномерному распределению.

На рис. 3 приводятся графики решений $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ системы Лоренца, полученных с помощью МКА и МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин. Видно, что даже после замены коэффициентов получается хорошая аппроксимация решения. Максимумы модулей разностей решений по МКА и по МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин: 0,0019774 (по x), 0,0019732 (по y), 0,0019940 (по z). Максимумы модулей разностей решений по явному методу Эйлера (на рисунке не приводится) и по МКА: 0,0014160

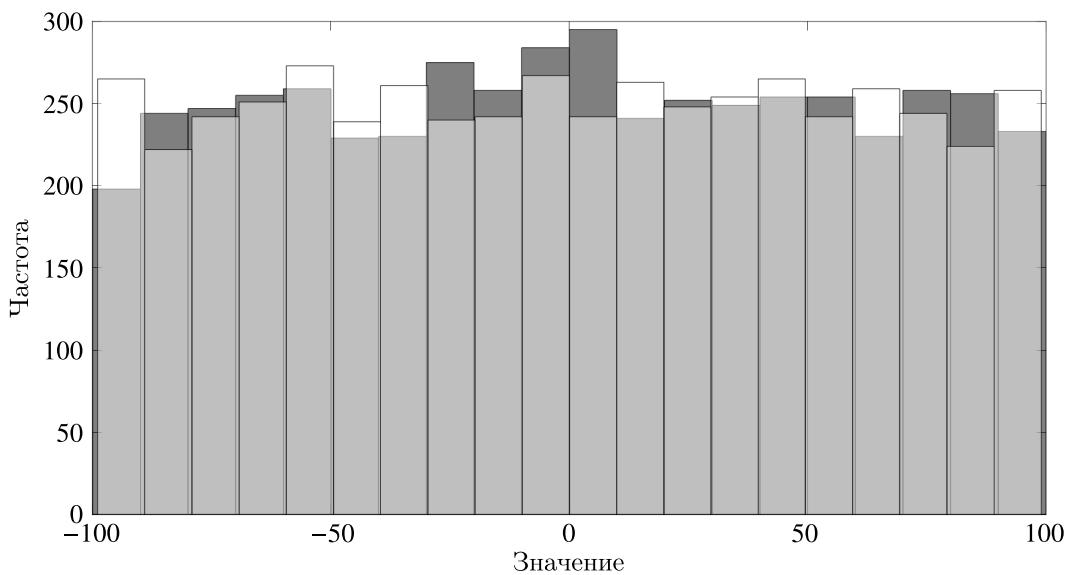


Рис. 1. Частотные гистограммы для равномерного распределения и значений $b_{2,n}$ для системы Рёссlera (здесь темно-серым цветом отмечены частоты значений $b_{2,n}$, белым цветом отмечены результаты моделирования равномерно распределенной случайной величины, светло-серым — их пересечение)

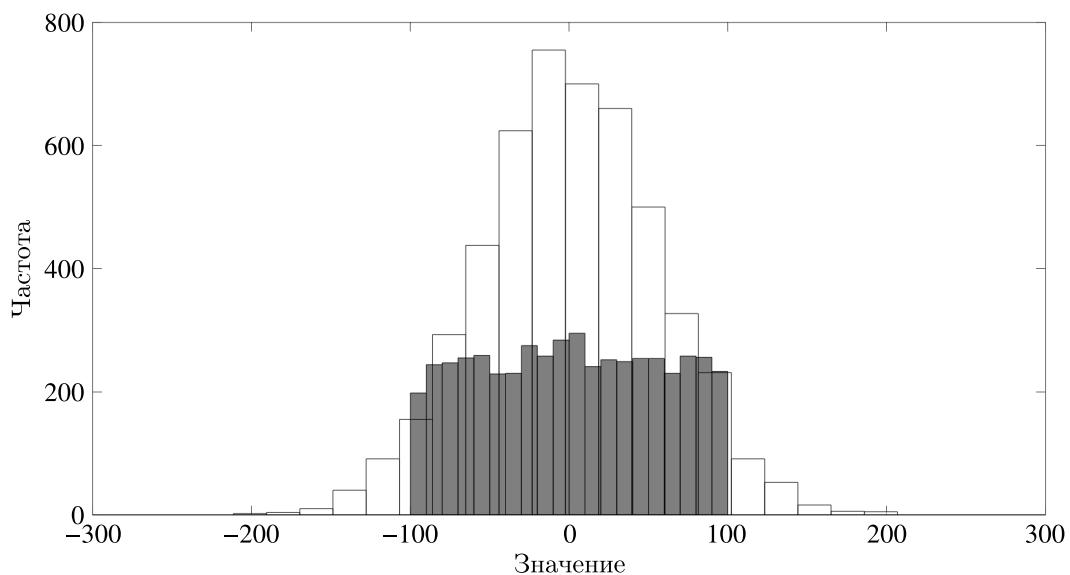


Рис. 2. Частотные гистограммы для нормального распределения и значений $b_{2,n}$ для системы Рёссlera (здесь темно-серым цветом отмечены частоты значений $b_{2,n}$, белым цветом отмечены результаты моделирования нормально распределенной случайной величины)

(по x), 0,0021484 (по y), 0,0025722 (по z). Максимумы модулей разностей решений по методу Эйлера и по МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин: 0,0031436 (по x), 0,0040368 (по y), 0,0045053 (по z).

Такие же результаты демонстрируются для систем Мариока–Шимицу и Рёссlera. На рис. 4 приводятся графики решений $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ системы Мариока–Шимицу по МКА и по МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин. На рис. 5 приводятся графики решений $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ системы Мариока–Шимицу по методу Эйлера и по МКА. Максимумы модулей разностей решений по МКА и по МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин: 0,0019981 (по x), 0,0019912 (по y), 0,0019925 (по z). Максимумы модулей разностей

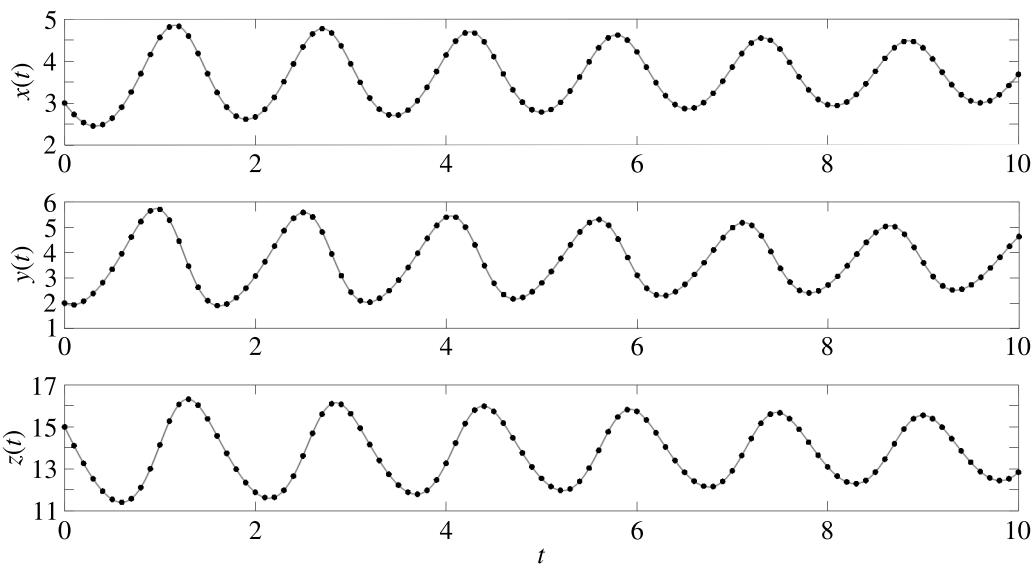


Рис. 3. Решения $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ системы Лоренца, полученные с помощью МКА (линия) и МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин (точки, изображается каждая сотая точка), шаг 0,001

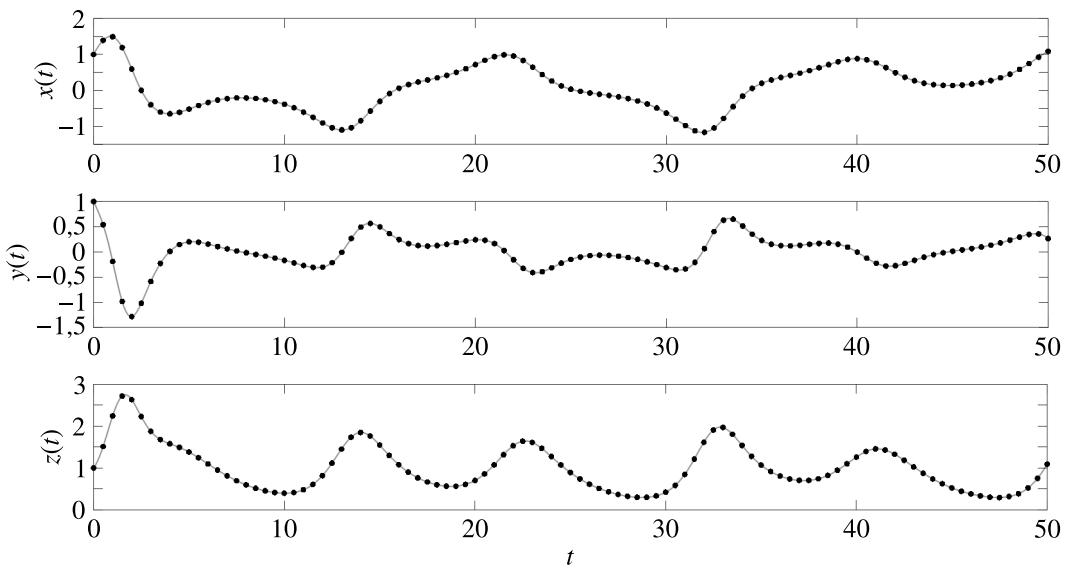


Рис. 4. Решения $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ системы Мариока – Шимицу, полученные с помощью МКА (линия) и МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин (точки, изображается каждая пятисотая точка), шаг 0,001

решений по методу Эйлера и по МКА: 0,10430 (по x), 0,085799 (по y), 0,22510 (по z). Максимумы модулей разностей решений по методу Эйлера и по МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин: 0,10505 (по x), 0,085489 (по y), 0,22540 (по z).

На рис. 6 – графики решений $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ для системы Рёссlerа по МКА и по МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин. Максимумы модулей разностей решений по МКА и по МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин: 0,0019937 (по x), 0,0019900 (по y), 0,0019892 (по z). Максимумы модулей разностей решений по методу Эйлера (на рисунке не приводится) и по МКА: 0,054327 (по x), 0,029354 (по y), 0,13034 (по z). Максимумы модулей разностей решений по методу Эйлера и по МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин: 0,054843 (по x), 0,030187 (по y), 0,13096 (по z).

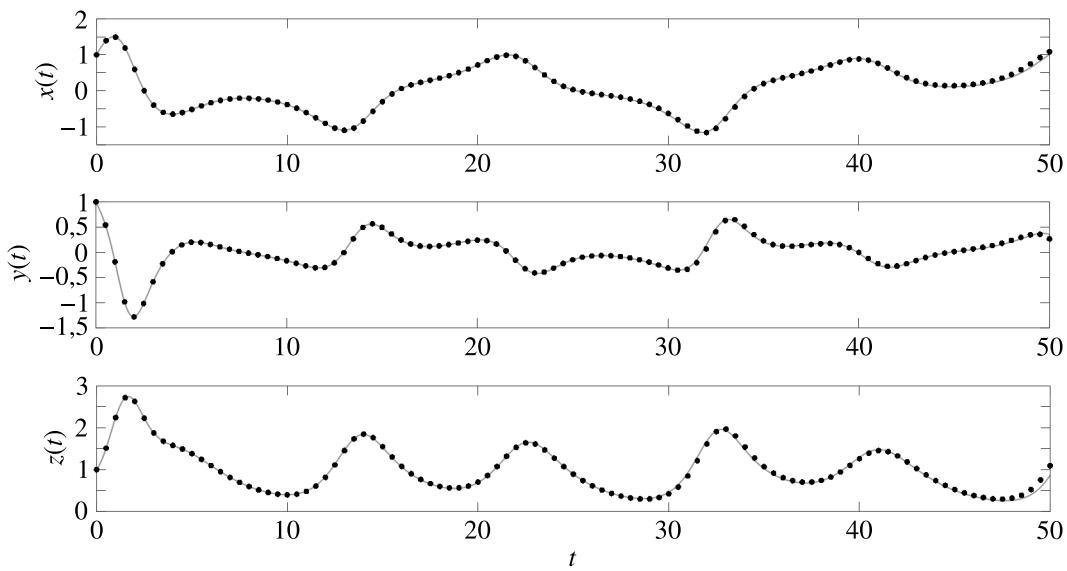


Рис. 5. Решения $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ системы Мариока – Шимицу, полученные с помощью явного метода Эйлера (линия) и МКА (точки, изображается каждая пятисотая точка), шаг 0,001

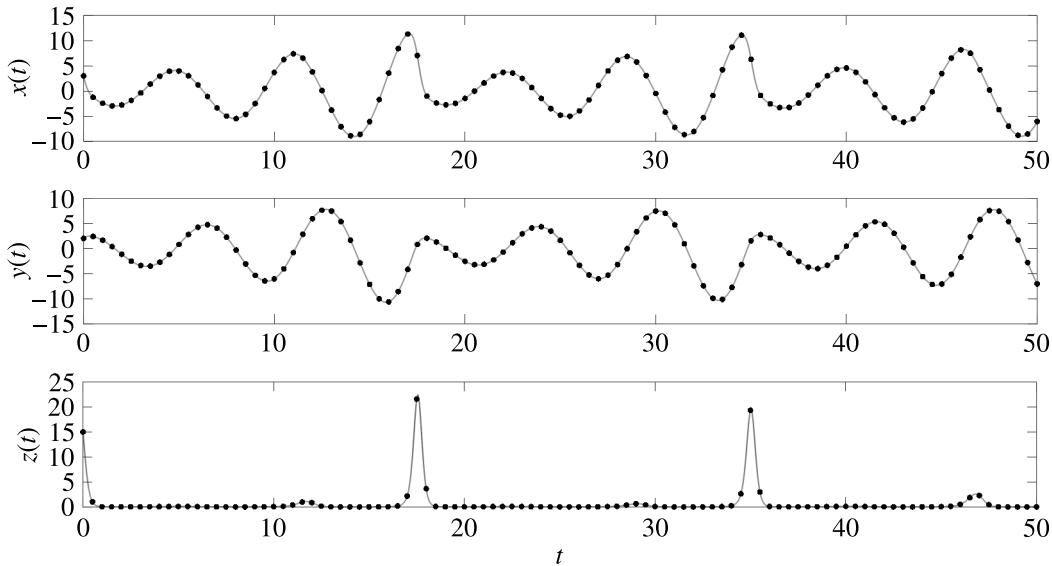


Рис. 6. Решения $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ системы Рёсслера, полученные с помощью МКА (линия) и МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин (точки, изображается каждая пятисотая точка), шаг 0,001

На рис. 7 показаны траектории решений, демонстрирующих странный аттрактор для системы Лоренца по МКА и по МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин. Максимум расстояния в трехмерном евклидовом пространстве между точками решений по МКА и по МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин: 0,028046.

Такие же результаты демонстрируются и для систем Мариока – Шимицу и Рёсслера. На рис. 8 приводятся графики решений для системы Мариока – Шимицу. Максимум расстояния в трехмерном евклидовом пространстве между точками решений по МКА и по МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин: 0,0031307.

На рис. 9 приводятся графики решений для системы Рёсслера. Максимум расстояния в трехмерном евклидовом пространстве между точками решений по МКА и по МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин: 0,028245.

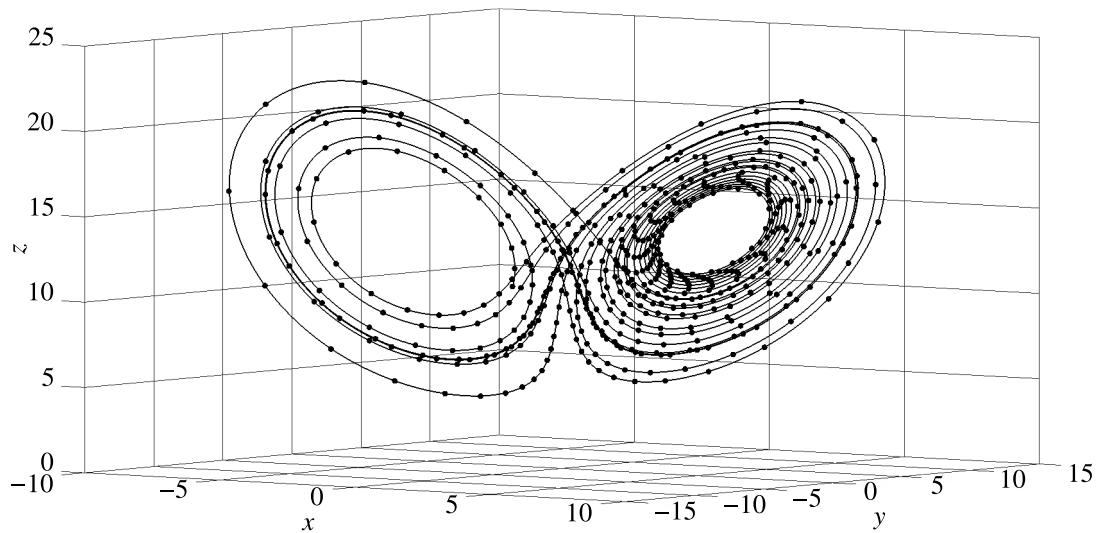


Рис. 7. Решения системы Лоренца, полученные с помощью МКА (линия) и МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин (точки, изображается каждая десятая точка), шаг 0,01. Решения построены в интервале по времени [0, 50]

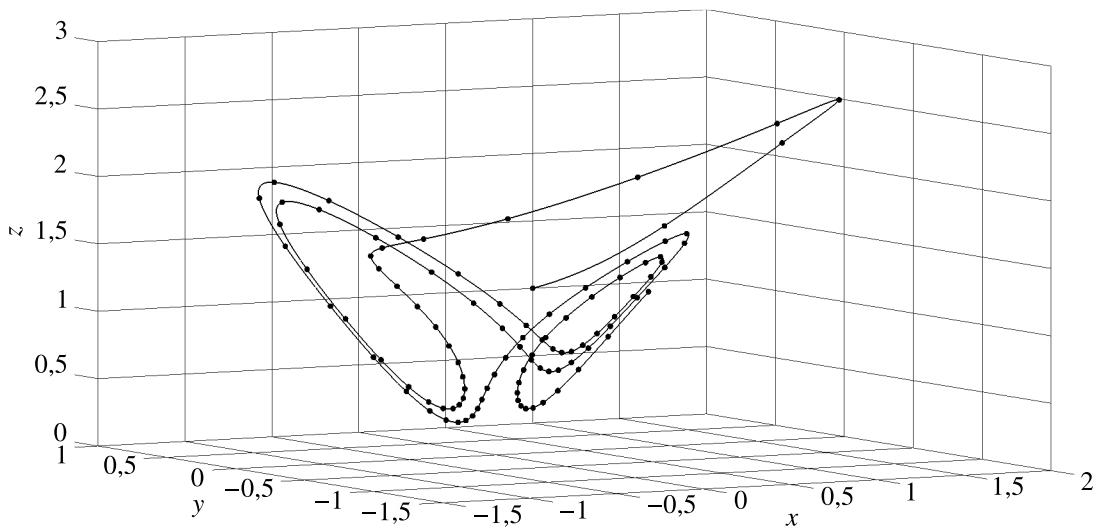


Рис. 8. Решения системы Мариока–Шимицу, полученные с помощью МКА (линия) и МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин (точки, изображается каждая пятисотая точка), шаг 0,001. Решения построены в интервале по времени [0, 50]

Совпадение достаточно хорошее. Что показывает возможность использования свойства стохастичности коэффициентов в МКА. Свойство стохастичности рекомендуется использовать, потому что в принципе МКА направлен на построение аналитических аппроксимаций, где удается в явном виде предъявить получающиеся случайные распределения. Стохастичность играет принципиальную роль при построении полуаналитических приближений, поскольку указывает на возможность получения по сути новых аппроксимаций (по сравнению с традиционными).

6. Линейное приближение с помощью τ -компьютера

Рассмотрим аппроксимацию решения по МКА до первой степени τ . Такое приближение позволяет получить эскиз решения, дающий некоторую качественную (и даже количественную)

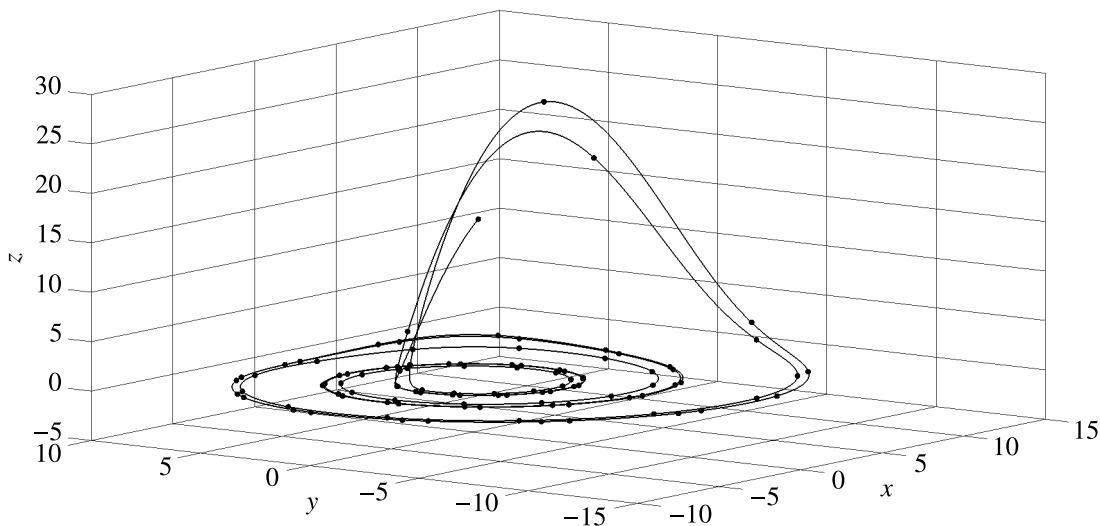


Рис. 9. Решения системы Рёсслера, полученные с помощью МКА (линия) и МКА с заменой коэффициентов на значения случайных величин (точки, изображается каждая пятидесятая точка), шаг 0,01. Решения построены в интервале по времени [0, 50]

информацию о точном решении. Такую аппроксимацию, т. е. аппроксимацию вида $y_n = a_{0,n} + a_{1,n}\tau$, будем обозначать как МКА₁.

С одной стороны, МКА₁ имеет простой вид, с другой стороны, для этой аппроксимации возможен переброс из первого разряда в нулевой. Операция переброса нелинейна в силу нелинейности операций взятия целой части и получения остатка от деления. Нелинейность приводит к появлению квазистохастических свойств коэффициентов, позволяющих получать схематические изображения аттракторов для рассматриваемых систем.

Покажем принцип получения МКА₁ вначале на простом примере модельной задачи (7). В общем случае такое приближение будет зависеть от величины шага τ . В случае модельной задачи МКА₁ имеет следующий вид (знак минус взят здесь для удобства представления):

$$y_n = a_{0,n} - a_{1,n}\tau, \quad a_{0,0} = 1, \quad a_{1,0} = 0.$$

Подставив это выражение в схему Эйлера и удерживая линейные по τ члены, получим

$$y_n = (a_{0,n-1} - \delta_{1,n}) - \left((a_{1,n-1} + a_{0,n-1}^2) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau,$$

где

$$\delta_{1,n} = [(a_{1,n-1} + a_{0,n-1}^2)\tau].$$

До момента переброса значение $a_{0,n}$ не меняется, $a_{1,n}$ будет иметь вид

$$a_{1,n} = (a_{1,n-1} + a_{0,n-1}^2) = a_{1,n-1} + 1 = a_{1,n-2} + 2 = \dots = n.$$

Но при разных τ произведение $n\tau$ будет давать разные значения, следовательно, переброс будет происходить в разные моменты времени t и решение будет меняться. Так, при $\tau = 0,1$ получится $n = 10$. Действительно,

$$a_{1,n} = \left(n \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) = 10 \bmod 10 = 0,$$

$$\delta_{1,n} = [n\tau] = 10 \cdot 0,1 = 1,$$

$$a_{0,n} = a_{0,n-1} - \delta_{1,n} = 1 - 1 = 0.$$

Переброс произошел в момент времени $t = n\tau = 1$. С этого момента решение выглядит как горизонтальная прямая:

$$y = a_0 - a_1\tau = 0 - 0 = 0.$$

Но, например, при $\tau = 0,3$ $n = 4$. Действительно,

$$\begin{aligned} a_{1,n} &= \left(n \bmod \left(\frac{1}{\tau} \right) \right) = 4 \bmod (3, (3)) = 0, (6), \\ \delta_{1,n} &= [n\tau] = [4 \cdot 0,3] = 1, \\ a_{0,n} &= a_{0,n-1} - \delta_{1,n} = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Переброс произошел в момент времени $t = n\tau = 4 \cdot 0,3 = 1,2$. С этого момента решение выглядит как горизонтальная прямая:

$$y = a_0 - a_1\tau = 0 - 0, (6) \cdot 0,3 = -0,2.$$

При стремлении τ к нулю происходит выход на одну предельную точку $t = 0$, $y = 1$, две получившиеся прямые линии мы называем линейным приближением или предельным линейным приближением (для шага, кратного отрицательным степеням 10, всегда будет попадание траектории МКА₁ в предельную точку). Линейное приближение (как и МКА₁) качественно передает поведение аналитического решения, отмеченного сплошной линией на рис. 10. Можем представить значения линейных приближений в разные моменты времени для рассматриваемой задачи с помощью табл. 1.

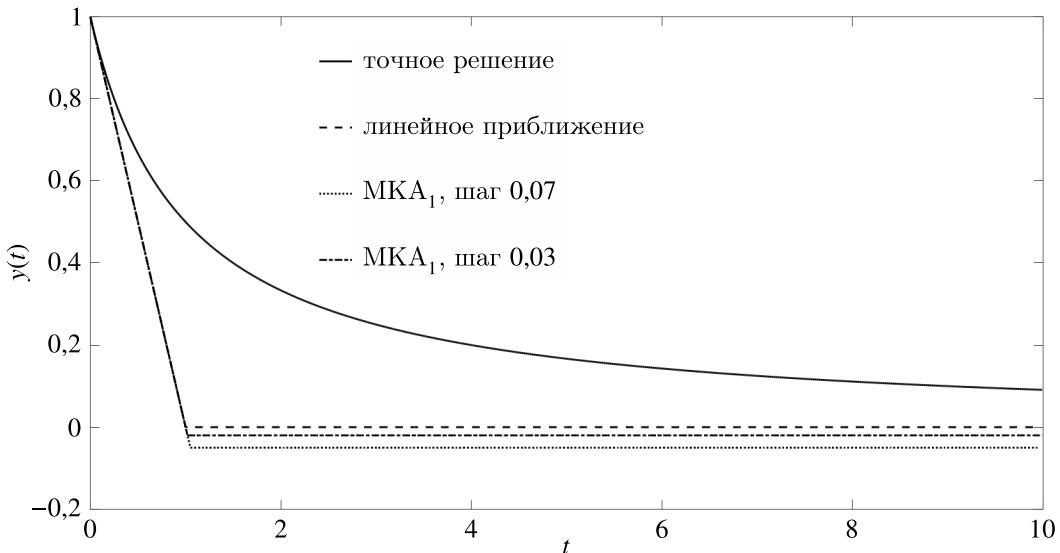


Рис. 10. Графики точного решения, линейного приближения и решений с помощью МКА₁ при различных значениях шага для модельной задачи

Таблица 1. Значения линейных приближений для модельной задачи в разные моменты времени

T	y
$[0, 1]$	$1 - t$
$[1, t_{\max}]$	0

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Ван дер Поля (3). В этом случае решение по МКА₁ ищется в виде

$$u_n = a_{0,n} + a_{1,n}\tau, \quad v_n = b_{0,n} + b_{1,n}\tau, \quad a_{0,0} = 1, \quad a_{1,0} = 0, \quad b_{0,0} = 1, \quad b_{1,0} = 0.$$

Записав руководящую схему Эйлера, получим

$$\begin{aligned} u_n &= (a_{0,n-1} + \delta_{1,n}) + \left((a_{1,n-1} + b_{0,n-1}) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau, \\ v_n &= (b_{0,n-1} + \omega_{1,n}) + \left((b_{1,n-1} - a_{0,n-1} + (1 - a_{0,n-1}^2)b_{0,n-1}) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau, \\ \delta_{1,n} &= [(a_{1,n-1} + b_{0,n-1})\tau], \quad \omega_{1,n} = [(b_{1,n-1} - a_{0,n-1} + (1 - a_{0,n-1}^2)b_{0,n-1})\tau]. \end{aligned}$$

Методология, как и для модельного уравнения, дает представление приближения в виде отрезков прямых, соединяющих точки, в которых происходит переброс разрядов (см. рис. 11 и табл. 2). На рис. 11 виден выход на предельное линейное приближение при устремлении шага к нулю в МКА₁ (при малых значениях шага траектории МКА₁ близки к линейному приближению). В табл. 2 приведены только несколько строк, дающих представление о характере приближения. В табл. 3 представлены точки, в которых происходит переброс разряда, они, по сути, задают линейное приближение.

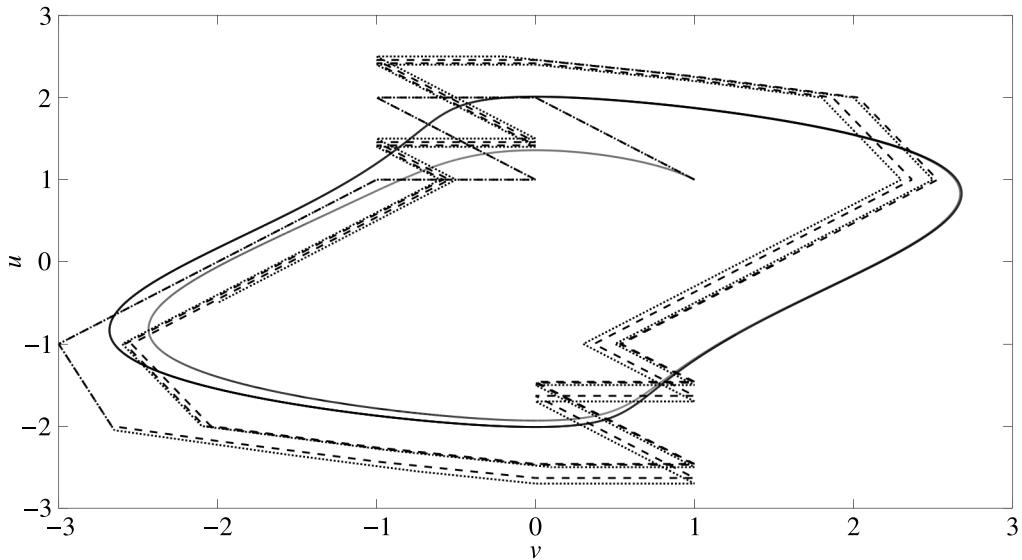


Рис. 11. Графики линейного приближения (пунктирная линия), МКА₁ при шаге 0,05 (точки) и решения с помощью МКА (сплошная линия) системы Ван дер Поля. Решения рассматривались на временном интервале [0, 30]

Построенное аналитическое приближение u и v кусочно-линейно, причем при переносе происходят скачки значений данных функций, что приводит к изломанности траектории. При наложении полученного решения на решение, аппроксимирующее точное, передаются некоторые важные черты истинной траектории на фазовой плоскости. В частности, решение обладает предельным циклом. На рис. 11 показаны траектории линейного приближения и решения с помощью МКА.

Заметим, что даже МКА₁ воспроизводит качественные особенности решения — в данном случае масштаб и цикличность. При том что линейный член at в общем случае порядка $O(1)$, поскольку $a < \frac{1}{\tau}$. Чтобы увидеть цикличность решения, покажем, что траектория на фазовой

Таблица 2. Отрезки прямых между точками переброса разрядов для системы Ван дер Поля

T	u	v
[0, 1]	$1 + t$	$1 - t$
[1, 1,5]	2	$-2(t - 1)$
[1,5, 2,5]	$2 - (t - 1,5)$	$-1 + (t - 1,5)$
[2,5, 3,5]	1	$-(t - 2,5)$
[3,5, 4,5]	$1 - (t - 3,5)$	$-1 - (t - 3,5)$
[4,5, 5]	$-2(t - 4,5)$	$-2 - 2(t - 4,5)$
[5, 5,3333]	$-1 - 3(t - 5)$	$-3 + (t - 5)$
[5,3333, 5,3939]	$-2 - 3(t - 5,3333)$	$-2,6667 + 11(t - 5,3333)$
[5,3939, 5,5189]	$-2,1818 - 2(t - 5,3939)$	$-2 + 8(t - 5,3939)$
[5,5189, 5,7189]	$-2,4318 - (t - 5,5189)$	$-1 + 5(t - 5,5189)$
[5,7189, 6,2189]	$-2,6318$	$2(t - 5,7189)$
[6,2189, 6,8508]	$-2,6318 + (t - 6,2189)$	$1 - (t - 6,2189)$
[6,8508, 7,2189]	$-2 + (t - 6,8508)$	$0,36818 - (t - 6,8508)$
[7,2189, 7,7189]	$-1,6318$	$2(t - 7,2189)$
[7,7189, 8,3508]	$-1,6318 + (t - 7,7189)$	$1 - (t - 7,7189)$

Таблица 3. Точки переброса разряда для системы Ван дер Поля

t	u	v
0	1	1
1	2	0
1,5	2	-1
2,5	1	0
3,5	1	-1
4,5	0	-2
5	-1	-3
5,3333	-2	-2,6667
5,3939	-2,1818	-2
5,5189	-2,4318	-1
5,7189	-2,6318	0
6,2189	-2,6318	1
6,8508	-2	0,36818
7,2189	-1,6318	0
7,7189	-1,6318	1

плоскости (преимущественно) монотонно меняет знаки углов ломаной. На рис. 11 видно, что, несмотря на чередование, все же больше углов поворота ломаных с положительным знаком. Тем самым обеспечивается замыкание линии на фазовой плоскости. Постараемся объяснить этот факт.

Тангенс угла наклона линии:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta u}{\Delta v} = \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{v_n}{-u_n + v_n - u_n^2 v_n}.$$

На его знак влияют знаки знаменателя и числителя. Запишем приращение переменных в явном виде:

$$\Delta u = v_n, \quad \Delta v = -u_n + v_n (1 - u_n^2).$$

Рассмотрим пример, представленный в табл. 2 (при малых значениях шага решение по МКА₁ и линейное приближение близки, поэтому поведение линейного приближения позволяет оценивать поведение МКА₁). Начальные единичные значения функций приводят к тому,

что $\Delta u > 0$, $\Delta v < 0$, т. е. траектория идет вверх и влево. Перейдя через нуль в отрицательную область, v задает отрицательное приращение переменной u . Причем из последних формул следует, что приращение $\Delta v < 0$ до тех пор, пока при уменьшении u эта величина не станет отрицательной. Тогда с абсолютным ростом этой переменной и величина $(1 - u_n^2)$ станет отрицательной. Значит, $\Delta v > 0$ (что обеспечивает движение вправо), и траектория перейдет через нуль v . Тогда $\Delta u > 0$, что соответствует движению вверх, значит, траектория будет двигаться вправо и вверх. Аналогично предыдущему рассуждению легко заключить, что вначале приращение по v будет положительным, но, когда $(1 - u_n^2) < 0$, приращение по v станет отрицательным, и траектория выйдет на следующий цикл.

Кроме того, можно показать, что решение по каждой из переменных (при выбранных начальных условиях) не выходит за пределы области $[-4, 4]$. Границы области определяют коэффициенты a_0 и b_0 . Попробуем оценить границы этой области:

$$R_\Delta = R + O(h)N,$$

где R — точное значение радиуса предельного цикла, R_Δ — радиус предельного цикла после совершения одного оборота траектории в МКА₁, N — число шагов по времени, обеспечивающих примерно один цикл, h — шаг в фазовом пространстве за один шаг по времени. Если оценка $h \sim \frac{1}{N}$, тогда $R_\Delta = R + 1$. Рисунок 11 иллюстрирует это. Область предельного цикла и в случае МКА₁ не выходит далеко за пределы области для точного решения, так как коэффициенты в МКА₁ имеют ограниченные значения. В самом деле, переносы разрядов происходят, когда коэффициенты достигают величины $n\tau = 1$. Значит, коэффициенты при нулевой и первой степенях шага ограничены величинами порядка единицы. Аналогично и радиус предельного цикла может, по сравнению с точным значением, измениться лишь на величину порядка единицы. Принимая, что предельный цикл точного решения лежит внутри области $[-3, 3]$, получаем вышеприведенную оценку, полученную с некоторым запасом.

Рассмотрим МКА₁ для задачи Коши (4) для системы Лоренца:

$$\begin{aligned} x_n &= a_{0,n} + a_{1,n}\tau, & y_n &= b_{0,n} + b_{1,n}\tau, & z_n &= c_{0,n} + c_{1,n}\tau, \\ a_{0,0} &= 3, & a_{1,0} &= 0, & b_{0,0} &= 2, & b_{1,0} &= 0, & c_{0,0} &= 15, & c_{1,0} &= 0. \end{aligned}$$

Руководящая схема имеет вид

$$\begin{aligned} x_n &= (a_{0,n-1} + \delta_{1,n}) + \left((a_{1,n-1} + 3(b_{0,n-1} - a_{0,n-1})) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau, \\ y_n &= (b_{0,n-1} + \omega_{1,n}) + \left((b_{1,n-1} + 15a_{0,n-1} - a_{0,n-1}c_{0,n-1} - b_{0,n-1}) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau, \\ z_n &= (c_{0,n-1} + \gamma_{1,n}) + \left((c_{1,n-1} + a_{0,n-1}b_{0,n-1} - c_{0,n-1}) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau, \\ \delta_{1,n} &= [(a_{1,n-1} + 3(b_{0,n-1} - a_{0,n-1}))\tau], \\ \omega_{1,n} &= [(b_{1,n-1} + 15a_{0,n-1} - a_{0,n-1}c_{0,n-1} - b_{0,n-1})\tau], \\ \gamma_{1,n} &= [(c_{1,n-1} + a_{0,n-1}b_{0,n-1} - c_{0,n-1})\tau]. \end{aligned}$$

Геометрически линейное приближение, как и в случае системы Ван дер Поля, задается набором отрезков, можно построить таблицу, похожую на табл. 2. Решение приведено на рис. 12.

Рассмотрим МКА₁ для задачи Коши (5) для системы Мариока – Шимицу:

$$\begin{aligned} x_n &= a_{0,n} + a_{1,n}\tau, & y_n &= b_{0,n} + b_{1,n}\tau, & z_n &= c_{0,n} + c_{1,n}\tau, \\ a_{0,0} &= 1, & a_{1,0} &= 0, & b_{0,0} &= 1, & b_{1,0} &= 0, & c_{0,0} &= 1, & c_{1,0} &= 0. \end{aligned}$$

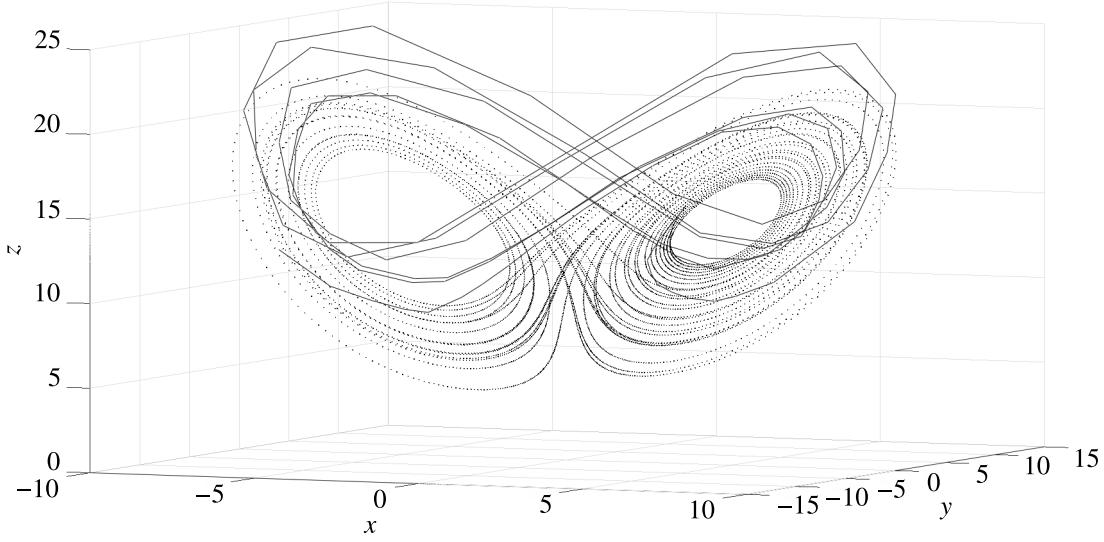


Рис. 12. Графики решения, полученного с помощью МКА₁ при шаге 0,1 (сплошная линия), и решения, полученного с помощью МКА (точки) системы Лоренца. Решения рассматривались на временном интервале [0, 70]

Руководящая схема имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_n &= (a_{0,n-1} + \delta_{1,n}) + \left((a_{1,n-1} + b_{0,n-1}) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau, \\
 y_n &= (b_{0,n-1} + \omega_{1,n}) + \left((b_{1,n-1} + a_{0,n-1} - 0,81b_{0,n-1} - a_{0,n-1}c_{0,n-1}) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau, \\
 z_n &= (c_{0,n-1} + \gamma_{1,n}) + \left((c_{1,n-1} - 0,375c_{0,n-1} + a_{0,n-1}^2) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau, \\
 \delta_{1,n} &= [(a_{1,n-1} + b_{0,n-1})\tau], \\
 \omega_{1,n} &= [(b_{1,n-1} + a_{0,n-1} - 0,81b_{0,n-1} - a_{0,n-1}c_{0,n-1})\tau], \\
 \gamma_{1,n} &= [(c_{1,n-1} - 0,375c_{0,n-1} + a_{0,n-1}^2)\tau].
 \end{aligned}$$

МКА₁ для задачи Коши (6) для системы Рёсслера имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_n &= a_{0,n} + a_{1,n}\tau, & y_n &= b_{0,n} + b_{1,n}\tau, & z_n &= c_{0,n} + c_{1,n}\tau, \\
 a_{0,0} &= 3, & a_{1,0} &= 0, & b_{0,0} &= 2, & b_{1,0} &= 0, & c_{0,0} &= 15, & c_{1,0} &= 0.
 \end{aligned}$$

Руководящая схема имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_n &= (a_{0,n-1} + \delta_{1,n}) + \left((a_{1,n-1} - b_{0,n-1} - c_{0,n-1}) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau, \\
 y_n &= (b_{0,n-1} + \omega_{1,n}) + \left((b_{1,n-1} + a_{0,n-1} + 0,2b_{0,n-1}) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau, \\
 z_n &= (c_{0,n-1} + \gamma_{1,n}) + \left((c_{1,n-1} + 0,2 + c_{0,n-1}a_{0,n-1} - 5,7c_{0,n-1}) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau, \\
 \delta_{1,n} &= [(a_{1,n-1} - b_{0,n-1} - c_{0,n-1})\tau], \\
 \omega_{1,n} &= [(b_{1,n-1} + a_{0,n-1} + 0,2b_{0,n-1})\tau], \\
 \gamma_{1,n} &= [(c_{1,n-1} + 0,2 + c_{0,n-1}a_{0,n-1} - 5,7c_{0,n-1})\tau].
 \end{aligned}$$

7. Сокращение операций в МКА, приближение суммой двух слагаемых

Целью предлагаемого подхода является построение решения в явном виде, но получение полуаналитической формы тоже важно. Для иллюстрации подхода рассмотрим вначале модельное уравнение (7). Будем использовать приближение

$$y_n = a_{0,n} - a_{1,n}\tau + a_{2,n}\tau^2 - a_{3,n}\tau^3.$$

Поскольку правая часть рассматриваемого уравнения имеет вторую степень нелинейности, приближения до третьей степени шага τ достаточно для аппроксимации решения. Подставив в разностную схему и применив процедуру переноса разрядов, получим

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (a_{0,n} - \delta_{1,n}) - \left((a_{1,n} + a_{0,n}^2 - \delta_{2,n}) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau + \left((a_{2,n} + 2a_{0,n}a_{1,n} - \delta_{3,n}) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau^2 - \\ &\quad - \left((a_{3,n} + 2a_{0,n}a_{2,n} + a_{1,n}^2) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau^3, \\ \delta_{1,n} &= [(a_{1,n} + a_{0,n}^2 - \delta_{2,n})\tau], \quad \delta_{2,n} = [(a_{2,n} + 2a_{0,n}a_{1,n} - \delta_{3,n})\tau], \quad \delta_{3,n} = [(a_{3,n} + 2a_{0,n}a_{2,n} + a_{1,n}^2)\tau]. \end{aligned}$$

Было доказано [Aristov, Stroganov, 2012], что $\delta_{2,n}$ (важнейший член, определяющий величину при первой степени τ) может принимать только значения 0 и 1, и была вычислена вероятность

$$P\{\delta_{2,n} = 0\} = (1 - a_{1,n}\tau)^2.$$

Тогда

$$P\{\delta_{2,n} = 1\} = 1 - (1 - a_{1,n}\tau)^2.$$

Поэтому можно получать $\delta_{2,n}$ как случайную величину с вероятностью $P\{\delta_{2,n} = 1\}$. В результате можно представлять решение в виде суммы двух слагаемых:

$$y_{n+1} = (a_{0,n} - \delta_{1,n}) - \left((a_{1,n} + a_{0,n} - \delta_{2,n}) \bmod \left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \tau.$$

Таким образом, в свернутом виде в основном коэффициенте $\delta_{2,n}$ содержится вклад, вносимый коэффициентами $a_{2,n}$ и $a_{3,n}$ (через переброс $\delta_{3,n}$, который в свою очередь влияет на $a_{2,n}$), что учитывалось при получении вероятности $P\{\delta_{2,n} = 0\}$.

Также было показано, что $\delta_{1,n} \equiv 0$, следовательно, $a_{0,n} = a_{0,0} = 1$. Тогда решение можно представлять в виде

$$y_{n+1} = 1 - (a_{1,n} + 1 - \delta_{2,n})\tau.$$

Ранее [Aristov, Stroganov, 2012] этот подход использовался для выражения обратной зависимости номера шага по времени n от значения коэффициента $a_{1,n}$, на основе которой получалось аналитическое решение задачи. Такой подход можно назвать обратным методом Монте-Карло. Мы пытаемся построить более общий прямой метод Монте-Карло.

Значит, удалось в одно слагаемое (линейный по шагу член) вместить информацию, относящуюся к старшим разрядам. Фактически одно случайное распределение управляет всем приближением МКА. Решение теперь представлено в виде простой суммы двух слагаемых. Рисунок 13 позволяет видеть, что при уменьшении шага решение сходится к точному решению.

Рассмотрим модификацию задачи Коши для уравнения Ван дер Поля (3): изменим начальное условие для u , запишем его в виде

$$u(0) = 0.$$

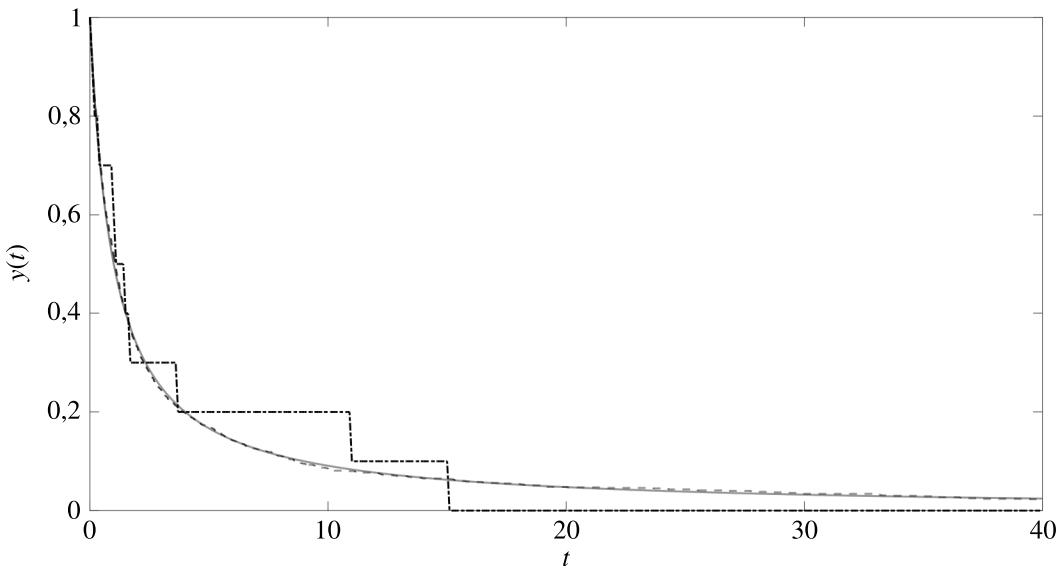


Рис. 13. Графики решений $y(t)$ уравнения (7): точного (сплошная линия), в виде суммы двух слагаемых со случайным перебросом для шага 0,1 (штрихпунктирная линия), в виде суммы двух слагаемых со случайным перебросом для шага 0,001 (пунктирная линия)

Будем использовать приближение

$$\begin{aligned} u_n &= a_{0,n} + a_{1,n}\tau + a_{2,n}\tau^2, \\ v_n &= b_{0,n} + b_{1,n}\tau - b_{2,n}\tau^2 - b_{3,n}\tau^3 - b_{4,n}\tau^4. \end{aligned}$$

Правая часть уравнения для u линейна, а правая часть для v имеет третью степень нелинейности, значит, для аппроксимации достаточно приближения u до второй, а v — до четвертой степени шага τ . Подставив в разностную схему и применив процедуру переноса разрядов, по аналогии с решением для модельной задачи получим формулы u_{n+1} , v_{n+1} , $\delta_{1,n}$, $\delta_{2,n}$ (перебросы по u), $\omega_{1,n}$, $\omega_{2,n}$, $\omega_{3,n}$, $\omega_{4,n}$ (перебросы по v). Из-за громоздкости формулы не приводятся.

На начальном интервале времени $\delta_{2,n}$ и $\omega_{2,n}$ принимают только значения 0 и 1. Применяя подход, аналогичный подходу, использованному при решении модельной задачи, получаем вероятности того, что величины $\delta_{2,n}$ и $\omega_{2,n}$ имеют значение 1:

$$\begin{aligned} P\{\delta_{2,n} = 1\} &= b_{1,n}\tau, \\ P\{\omega_{2,n} = 1\} &= 1 - \frac{1 + b_{1,n}\tau - a_{1,n}\tau - a_{1,n}^2\tau^2 - a_{1,n}^2b_{1,n}\tau^3 - 2a_{1,n}b_{1,n}\tau^2}{1 + \tau}. \end{aligned}$$

На начальном интервале времени $\delta_{1,n} \equiv 0$ и $\omega_{1,n} \equiv 0$, следовательно, $a_{0n} = a_{0,0} = 0$ и $b_{0n} = b_{0,0} = 1$. Тогда решение можно представлять в виде

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (a_{1,n} + 1 + \delta_{2,n})\tau, \\ v_{n+1} &= 1 + (b_{1,n} + 1 - \omega_{2,n})\tau. \end{aligned}$$

На рис. 14 видно, что при уменьшении шага решение сходится к решению по МКА.

Сходный подход, который может быть перспективным, связан с представлением решения в виде суммы детерминированной и квазислучайной частей:

$$y_n = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \dots + a_p\tau^p = (a_0\tau^{-1} + a_1)\tau + (a_2\tau^{2-p} + \dots + a_p)\tau^p = \alpha\tau + \beta\tau^p,$$

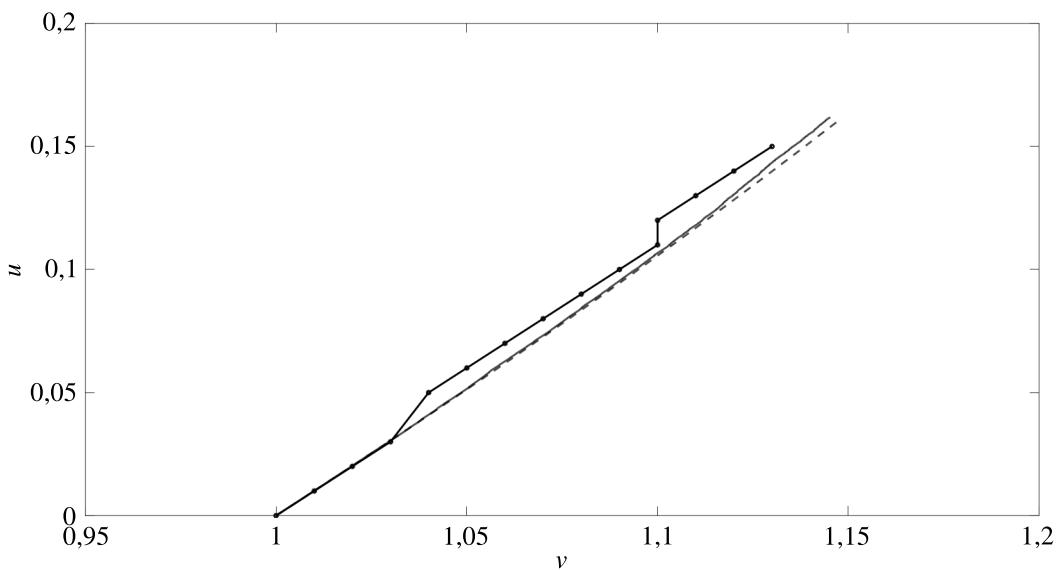


Рис. 14. Графики решений уравнения Ван дер Поля для интервала времени $[0, 0,15]$, полученных с помощью МКА (пунктирная линия), в виде суммы двух слагаемых со случайным перебросом для шага 0,01 (сплошная линия с точками) и для шага 0,0001 (сплошная линия)

где слагаемое αt описывает детерминированную часть решения, а слагаемое $\beta \tau^p$ — квазислучайную. После применения разностной схемы и осуществления операции переноса разрядов можно представить решение с помощью ветвящихся цепных дробей [Скоробогатько, 1983]. Решение уравнения Риккати, представленное с помощью ветвящихся цепных дробей, было приведено в [Aristov, Stroganov, 2012]. Этот метод можно использовать для решения системы Лоренца и уравнения Ван дер Поля.

8. Заключение

В работе показаны возможности метода компьютерной аналогии (МКА) для получения решений сложных нелинейных систем с циклическим поведением или нерегулярностью, характеризующейся странными атTRACTорами. Для изучаемых систем с невысокой степенью полиномиальной нелинейности аппроксимация задается в виде суперпозиции членов со старшей степенью шага на единицу больше степени правой части, выраженной с помощью многочлена. То есть ищется решение в виде небольшого отрезка сходящегося ряда по степеням шага независимой переменной. При уменьшении шага обеспечивается приближение к решению с любой точностью, соответствующей точности руководящей разностной схемы. Причем коэффициенты при старших степенях шага допустимо получать как значения случайных величин, что приводит к аппроксимации решения в полуаналитическом виде. Получение приближения величины, перебрасываемой из нелинейной части в линейную, позволяет получать аппроксимацию в виде суммы двух слагаемых.

В рассматриваемых системах нелинейность имеет квадратичный вид, что дает возможность применять МКА для решения кинетических систем, в частности, в перспективе — для уравнения Больцмана, правая часть которого аппроксимируется квадратичной формой.

Список литературы (References)

- Аристов В. В., Строганов А. В. Вероятностные аспекты метода компьютерной аналогии для решения дифференциальных уравнений // Компьютерные исследования и моделирование. — 2009. — Т. 1, № 1. — С. 21–31.

- Aristov V.V., Stroganov A. V. Veroyatnostnye aspekty metoda komp'yuternoj analogii dlya resheniya differencial'nyh uravnenij [Probabilistic aspects of the computer analogy method for solving differential equations] // Computer Research and Modeling. — 2009. — Vol. 1, No. 1. — P. 21–31 (in Russian).*
- Aристов В. В., Строганов А. В. Построение решений дифференциальных уравнений с помощью метода компьютерной аналогии // Доклады Академии наук. — 2010. — Т. 434, № 2. — С. 151–157.*
- Aristov V.V., Stroganov A. V. Postroenie reshenij differencial'nyh uravnenij s pomoshch'yu metoda komp'yuternoj analogii [Construction of solutions of differential equations using computer analogy method] // Doklady Akademii nauk. — 2010. — Vol. 434, No. 2. — P. 151–157 (in Russian).*
- Ermakov C. M. Metod Monte-Karla i smezhnye voprosy. — M.: Nauka, 1975.*
- Ermakov S. M. Metod Monte-Karla i smezhnye voprosy [Monte Carlo method and related topics]. — Moscow: Nauka, 1975 (in Russian).*
- Zajcev B. F., Polyanin A. D. Spravochnik po nelinejnym differencial'nym uravneniyam: prilozheniya v mehanike, tochnye resheniya. — M.: Fizmatlit, 1993.*
- Zajcev V.F., Polyainin A.D. Spravochnik po nelinejnym differencial'nym uravneniyam: prilozheniya v mehanike, tochnye resheniya [Handbook of nonlinear differential equations: Applications in mechanics, exact solutions]. — Moscow: Fizmatlit, 1993 (in Russian).*
- Skorobogat'ko V. Ya. Teoriya vetyashchihsya cepnyh drobej i evo primenenie v vychislitel'noj matematike. — M.: Nauka, 1983.*
- Skorobogat'ko V. Ya. Teoriya vetyashchihsya cepnyh drobej i evo primenenie v vychislitel'noj matematike [The theory of branching continued fractions and its application in computational mathematics]. — Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).*
- Sobol' I. M. Chislenные методы Монте-Карло. — M.: Nauka, 1973.*
- Sobol' I. M. Chislennye metody Monte-Karlo [Numerical Monte Carlo methods]. — Moscow: Nauka, 1973 (in Russian).*
- Aristov V. V., Stroganov A. V. A method of formalizing computer operations for solving nonlinear differential equations // Applied Mathematics and Computation. — 2012. — Vol. 218, No. 16. — P. 8083–8098.*
- Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1963. — Vol. 20, No. 2. — P. 130–141.*
- Rössler O. E. An equation for continuous chaos // Physics Letters A. — 1976. — Vol. 57, No. 5. — P. 397–398.*
- Shimizu T., Morioka N. On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model // Physic Letters A. — 1980. — Vol. 76, No. 3–4. — P. 201–204.*
- Van der Pol B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations // Radio Review. — 1920. — Vol. 1. — P. 701–710.*