

УДК: 519.6

Статистический анализ фазы квазигармонического сигнала методом моментов как инструмент оценивания параметров сигнала

Т. В. Яковлева

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук,
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2

E-mail: tan-ya@bk.ru

Получено 18.09.2025, после доработки — 22.10.2025.

Принято к публикации 24.11.2025.

В работе представлены результаты теоретического исследования особенностей статистического распределения фазы квазигармонического сигнала, формируемого в результате воздействия гауссовского шума на исходно гармонический сигнал. Выявленные особенности распределения фазы легли в основу разрабатываемого оригинального метода оценивания параметров исходного, неискаженного сигнала. Показано, что задача оценивания исходного значения фазы может эффективно решаться расчетом математического ожидания результатов выборочных измерений фазы, в то время как для решения задачи оценивания второго параметра распределения фазы — параметра уровня сигнала относительно шума — предлагается использовать зависимость дисперсии выборочных значений фазы от данного параметра. Для решения этой задачи используются полученные в явном виде аналитические формулы для моментов низших порядков распределения фазы, развит и обоснован новый подход к оцениванию параметров квазигармонического сигнала на основе измерения величины второго центрального момента, т. е. разброса выборочных значений фазы. В частности, применение данного метода обеспечивает высокоточное измерение амплитудных характеристик анализируемого сигнала посредством проведения лишь фазовых измерений. Численные результаты, полученные в ходе проведенного компьютерного моделирования, подтверждают теоретические выводы и эффективность разработанного метода. В работе обоснованы существование и единственность решения задачи оценивания параметров сигнала методом моментов. Показано, что функция, отображающая зависимость второго центрального момента от искомого параметра отношения сигнала к шуму, является монотонно убывающей и тем самым однозначной функцией искомого параметра. Разработанный метод оценивания параметров сигнала представляет интерес для решения широкого круга научных и прикладных задач, связанных с необходимостью измерения уровня сигнала и его фазы, в таких областях, как обработка данных в системах медицинской диагностической визуализации, обработка радиосигналов, радиофизика, оптика, радионавигация, метеорология.

Ключевые слова: квазигармонический сигнал, гауссовский шум, отношение сигнала к шуму, метод моментов, дисперсия, второй центральный момент, функция распределения, функция плотности вероятности

UDC: 519.6

Statistical analysis of the quasi-harmonic signal's phase by method of moments as a tool of signal's parameters estimation

T. V. Yakovleva

Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences,
44/2 Vavilov st., Moscow, 119333, Russia

E-mail: tan-ya@bk.ru

*Received 18.09.2025, after completion — 22.10.2025.
Accepted for publication 24.11.2025.*

The paper presents the results of theoretical investigation of the peculiarities of the quasi-harmonic signal's phase statistical distribution, while the quasi-harmonic signal is formed as a result of the Gaussian noise impact on the initially harmonic signal. The revealed features of the phase distribution became a basis for the original technique elaborated for estimating the parameters of the initial, undistorted signal. It has been shown that the task of estimation of the initial phase value can be efficiently solved by calculating the magnitude of the mathematical expectation of the results of the phase sampled measurements, while for solving the task of estimation of the second parameter — the signal level respectively to the noise level — the dependence of the phase sampled measurements variance upon the sought-for parameter is proposed to be used. For solving this task the analytical formulas having been obtained in explicit form for the moments of lower orders of the phase distribution, are applied. A new approach to quasi-harmonic signal's parameters estimation based on the method of moments has been developed and substantiated. In particular, the application of this method ensures a high-precision measuring the amplitude characteristics of a signal by means of the phase measurements only. The numerical results obtained by means of conducted computer simulation of the elaborated technique confirm both the theoretical conclusions and the method's efficiency. The existence and the uniqueness of the task solution by the method of moments is substantiated. It is shown that the function that describes the dependence of the phase second central moment on the sought-for parameter, is a monotonically decreasing and thus the single-valued function. The developed method may be of interest for solving a wide range of scientific and applied tasks, connected with the necessity of estimation of both the signal level and the phase value, in such areas as data processing in systems of medical diagnostic visualization, radio-signals processing, radio-physics, optics, radio-navigation and metrology.

Keywords: quasi-harmonic signal, Gaussian noise, signal-to-noise ratio, method of moments, dispersion, second central moment, cumulative distribution function, probability density function

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 6, pp. 1037–1049 (Russian).

1. Введение

Развитие многих направлений современной науки и технологий в значительной степени определяется эффективностью методов анализа и обработки анализируемых данных. Исходные анализируемые данные во многих практических задачах формируются посредством измерения физических сигналов, которые в свою очередь характеризуются значениями двух основных физических параметров: амплитуды и фазы. Эти два основных параметра физического сигнала в конечном счете и формируют любые данные, в том числе оцифрованные, которые подлежат анализу и обработке для получения информации о том или ином физическом процессе. Подобные исследования определяют развитие и прогресс ряда научных и технических направлений, таких как магнитно-резонансная визуализация, ультразвуковая медицинская диагностика, решение задач анализа и обработки радиосигналов и сигналов радиолокационных станций, изучение распространения оптических и звуковых сигналов и т. п.

Решение задачи получения и обработки любой информации, как правило, связано с анализом сигналов, формирующихся на практике в условиях неопределенности, искажаемых в результате воздействия тех или иных факторов и неоднородностей среды, в которой данные сигналы распространяются. Другими словами, анализируемые данные являются случайными, носят стохастический характер.

Решение задач обработки стохастических сигналов обеспечивается методами статистического анализа исследуемых данных, поэтому актуальным является изучение особенностей статистического распределения измеряемой величины [Рытов, 1976; Port, 1994; Перов, 2003; Яковлева, Кульберг, 2014]. Именно зависимость статистического распределения исследуемой величины от ее исходных параметров позволяет оценивать эти параметры на основе выборочных измерений и их статистического анализа.

Другими словами, задача оценивания параметров при статистической обработке данных неразрывно связана с задачей детального изучения особенностей статистического распределения анализируемой величины, так как именно особенности параметрической зависимости измеряемых статистических характеристик могут служить математическим инструментом оценивания искомых параметров на основе статистического анализа данных.

Проблема высокоточных измерений амплитудных и фазовых характеристик стохастического сигнала является значимой для решения широкого круга научных и прикладных задач в области теоретической информатики, прикладной математики и т. п. С этим связан значительный научный интерес к решению данной проблемы, которая остается предметом многих научных исследований в течение десятилетий (см., например, [Daryanoosh et al., 2018; Du et al., 2018; Webster, 2004]). Традиционно основное внимание ученых было направлено на решение задачи достижения высокой точности именно амплитудных характеристик сигнала как определяющих уровень интенсивности сигнала [Rice, 1944; Benedict, Soong, 1967; Talukdar, Lawing, 1991; Sijbers et al., 1998].

Однако, как показал ряд исследований, достижение высокой точности фазовых измерений является не менее актуальным в связи с тем, что во многих задачах фазовые характеристики сигнала по своей информативной емкости являются более значимыми, чем амплитудные (см., например, [Зельдович и др., 1983]).

В настоящее время одно из актуальных приложений высокоточных фазовых измерений связано с решением метрологических задач измерения расстояния между двумя объектами. Решение таких задач становится весьма значимой проблемой из-за необходимости высокой точности позиционирования объектов в навигации, геодезии, строительстве и т. п. Методы измерения расстояний, как правило, связаны с необходимостью фазовых измерений. Такие измерения

используются при определении расстояний, в системах дальнометрии, при определении геометрических параметров объектов, при решении задач неразрушающего контроля и в ряде других прикладных задач [Webster, 2004; Hing, Zhenhua, 2013].

Важно отметить, что статистическое распределение амплитуды квазигармонического сигнала детально изучалось в течение десятилетий [Rice, 1944; Park, 1961]. При этом развивались различные подходы для оценивания параметров сигнала и восстановления информативной составляющей сигнала на фоне шума посредством статистического анализа выборочных измерений амплитуды [Sijbers, den Dekker, 2004; Carobbi, Cati, 2008; Rajan et al., 2011; Yakovleva, Kulberg, 2013; Яковлева, 2016]. Принципиальное отличие настоящей работы состоит в том, что в качестве инструмента анализа и обработки квазигармонического сигнала используется статистическое распределение не амплитуды сигнала, а его фазы.

Задача строгого математического исследования статистического распределения фазы оставалась нерешенной до недавнего времени. А именно, в работе [Яковлева, 2021] автором данной статьи впервые получено аналитическое выражение для функции плотности вероятности распределения фазы и показано, что данное распределение является двухпараметрическим и определяется следующими параметрами: величиной отношения сигнала к шуму и величиной отклонения фазы от ее значения, соответствующего исходно детерминированному, незашумленному сигналу.

В работе [Яковлева, 2024] приведены результаты последующего теоретического и численного исследования свойств статистического распределения фазы квазигармонического сигнала. Особенности данного распределения, как оказалось, открывают возможности эффективного измерения не только фазовых характеристик сигнала, но и уровня интенсивности сигнала относительно уровня шума. В [Яковлева, 2024] рассматривалось решение данной задачи методом максимума правдоподобия, эффективность которого была подтверждена также и численными экспериментами. Однако решение оценивания параметров исходного сигнала методом максимума правдоподобия сопряжено с достаточно большим объемом вычислений, поскольку данный метод предполагает численное решение задачи нахождения максимума функции правдоподобия. Данная функция, как известно, определяется как совместная вероятность событий, состоящих в том, что в результате i -го выборочного измерения фазы получено значение фазы φ_i ($i = 1, \dots, n$), где n — это количество измерений в выборке, называемое длиной выборки. Тем самым функция правдоподобия определяется произведением вероятностей указанных событий, причем вероятность каждого из этих событий выражается достаточно сложной формулой, включающей в себя специальные функции (см. [Яковлева, 2024]). В силу математической сложности задачи нахождения максимума функции правдоподобия для решения задачи рассматривается логарифмическая функция правдоподобия как функция искомого параметра и задача решается путем нахождения максимума данной функции, что вполне обосновано в силу монотонного характера логарифмической функции. Переход к анализу логарифмической функции правдоподобия несколько упрощает численное решение задачи, но все же, ввиду необходимости вычислений с использованием специальных функций, представленный в работе [Яковлева, 2024] метод требует значительных вычислительных ресурсов.

В отличие от метода максимума правдоподобия разработанный и обоснованный в настоящей работе новый подход к оцениванию параметров незашумленного сигнала сопряжен с гораздо менее значительными вычислениями и поэтому является более простым в реализации. Речь идет об использовании для расчета искомых параметров величины дисперсии выборочных фазовых измерений, т. е. величины разброса фазы. Именно эта величина, которая представляет собой второй центральный момент фазы, используется для расчета параметров, наряду с величиной математического ожидания значения фазы, т. е. первым центральным моментом. Таким образом, решение задачи оценивания параметров в данной работе осуществляется методом моментов, представлено строгое математическое обоснование предлагаемого метода, получена в явном ви-

де аналитическая зависимость дисперсии фазы от искомого параметра задачи, показано, что решение задачи оценивания параметров данным методом существует и является единственным.

Принципиальная научная новизна предлагаемого в данной работе подхода к оцениванию параметров анализируемого сигнала состоит в том, что статистический анализ фазы используется как математический инструмент для расчета уровня интенсивности сигнала относительно шума.

2. Основы теории статистического распределения фазы квазигармонического сигнала, постановка задачи оценивания его параметров

Как известно, квазигармонический сигнал формируется из синусоидального, гармонического сигнала в силу воздействия неизбежного гауссовского шума. А именно, на практике процесс распространения любого исходно гармонического сигнала сопровождается случайными флуктуациями величин его амплитуды и фазы. В результате амплитуда и фаза результирующего квазигармонического сигнала представляют собой случайные величины.

Введем основные обозначения следующим образом. Квазигармонический сигнал в любой момент времени t может быть представлен в следующей форме:

$$x(t) = R(t) \cdot \sin(\omega t + \varphi(t)), \quad (1)$$

где ω — частота, $R(t)$ — амплитуда, или огибающая сигнала, которая изменяется случайным образом под воздействием гауссовского шума, величина фазы $\varphi(t)$ также изменяется во времени случайным образом под воздействием шума в силу амплитудно-фазовой модуляции. В комплексной плоскости сигнал (1) может быть представлен как комплексная величина:

$$f(t) = R(t) \cdot \exp[i(\omega t + \varphi(t))] = s(t) \cdot \exp(i\omega t), \quad (2)$$

где $f(t)$ — комплексная величина сигнала, $s(t)$ — медленная составляющая сигнала: $s(t) = R(t) \cdot \exp[i\varphi(t)]$. Эта величина формируется случайными значениями амплитуды $R(t)$ и фазы, причем именно статистическое распределение фазы $\varphi(t)$ и является предметом исследования в настоящей работе. Что касается медленной составляющей исходного гармонического, не искаженного шумом комплексного сигнала, то очевидно, что она характеризуется постоянными величинами амплитуды A и фазы φ_0 . Обозначим эту величину как вектор $\vec{A}(A, \varphi_0)$. При распространении сигнала по какой-либо среде неизбежно происходит его искажение таким образом, что действительная ($A \cos \varphi_0$) и мнимая ($A \sin \varphi_0$) составляющие исходного сигнала независимо изменяются под воздействием на исходный сигнал большого числа случайных шумовых составляющих. Обозначим как $\vec{r}(r, \psi)$ суммарный вектор шума, который накладывается на исходный сигнал \vec{A} , искажая его. Компоненты r_x, r_y вектора шума \vec{r} являются независимыми случайными величинами и подчиняются нормальному распределению: $\overline{r_x} = \overline{r_y} = 0$, $\overline{r_x^2} = \overline{r_y^2} = \sigma^2$, где величина σ^2 представляет собой дисперсию шума. Очевидно, что амплитуда r шумового вектора и его фаза ψ представляют собой независимые случайные величины и распределены следующим образом: случайная величина амплитуды r подчиняется статистическому распределению Рэлея, в то время как фаза ψ шумовой компоненты распределена равномерно на интервале $(0, 2\pi)$.

Результирующий квазигармонический сигнал формируется в результате сложения исходного гармонического сигнала \vec{A} и шума \vec{r} : $\vec{R} = \vec{A} + \vec{r}$. Медленную составляющую результирующего квазигармонического сигнала обозначим как вектор $\vec{R}(R, \varphi)$.

Важно отметить, что рассматриваемый в настоящей работе квазигармонический сигнал характеризуется именно гауссовским статистическим распределением шумовой составляющей

сигнала, что в наибольшей степени соответствует ситуациям формирования стохастических данных на практике. Это следует из известного свойства устойчивости нормального распределения, состоящего в том, что сумма любого числа независимых случайных шумовых компонент, искажающих сигнал по мере его распространения в среде, также подчиняется нормальному распределению. Именно такой характер шумообразования, характеризующийся гауссовским статистическим распределением шумовой компоненты результирующего сигнала, приводит к амплитудно-фазовой модуляции, характерной для исследуемых в настоящей работе квазигармонических сигналов. Эта особенность принципиально отличает квазигармонические сигналы от используемых при кодировании информации сигналов с намеренной манипуляцией фазы, когда сигнал характеризуется некими коррелированными изменениями фазы. С физической точки зрения такой процесс существенно отличается от амплитудно-фазовой модуляции, вызванной гауссовским шумом. Очевидно, что в случае наличия той или иной степени коррелированности шумовой компоненты сигнала статистическое распределение шумовой составляющей будет отличаться от нормального, в силу того что, как отмечается выше, распределение фазы гауссовского шума является равномерным на интервале $(0, 2\pi)$. Отличие распределения шума от гауссовского будет означать неприменимость к такой ситуации выкладок, которые проводят к представленным в статье результатам.

В результате ряда математических преобразований с учетом геометрического представления исходного, шумового и результирующего сигналов получено выражение для совместной функции распределения случайных величин амплитуды R и фазы φ результирующего сигнала \vec{R} . Эта функция определяется следующим выражением [Рытов, 1976; Яковлева, 2024]:

$$W(R, \varphi) dR d\varphi = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{A^2 + R^2 - 2AR \cos(\varphi - \varphi_0)}{2\sigma^2} \right\} R dR d\varphi. \quad (3)$$

Как следует из выражения (3), распределения амплитуды R и фазы φ квазигармонического сигнала не являются независимыми, причем фаза φ результирующего сигнала, в отличие от фазы ψ шумовой составляющей, уже не является равномерно распределенной величиной.

Впервые развитие теории статистического распределения фазы квазигармонического сигнала представлено в работах [Яковлева, 2021; Яковлева, 2024]. Здесь приведем лишь полученные автором в этих работах основные формулы для характеристик распределения фазы с целью последовательного изложения и математического обоснования развиваемого в данной работе метода оценивания параметров квазигармонического сигнала на основе измерения разброса фазы.

В результате интегрирования выражения (3) для совместной функции распределения случайных величин амплитуды R и фазы φ по R в пределах от нуля до бесконечности и ряда последующих преобразований получаем следующее выражение для функции плотности вероятности распределения фазы φ квазигармонического сигнала, сформированного в результате воздействия гауссовского шума с дисперсией σ^2 на исходно детерминированный сигнал \vec{A} с амплитудой A и фазой φ_0 :

$$\begin{aligned} \omega_\varphi(\varphi | S, \varphi_0) &= \frac{1}{2\pi} e^{-S^2} \left\{ 1 + \sqrt{\pi} \eta e^{\eta^2} [1 + \Phi(\eta)] \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-S^2} \left\{ 1 + \sqrt{\pi} \cdot S \cos(\varphi - \varphi_0) e^{S^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0)} [1 + \Phi(S \cos(\varphi - \varphi_0))] \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) используются следующие обозначения: $S = \frac{A}{\sqrt{2}\sigma}$, $\eta = \frac{A}{\sqrt{2}\sigma} \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)$, а функция $\Phi(\eta)$ представляет собой известную специальную функцию, называемую интегралом ошибок: $\Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\eta e^{-t^2} dt$ [Абрамовиц, Стиган, 1979]. Величину $S^2 = \frac{A^2}{2\sigma^2}$ часто используют в качестве

характеристики отношения сигнала к шуму. С учетом введенного параметра S выражение для выше введенного параметра η имеет вид $\eta = S \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)$.

Таким образом, как следует из (4), статистическое распределение фазы определяется двумя параметрами задачи: отношением сигнала к шуму S и величиной отклонения текущего значения фазы φ от значения фазы φ_0 исходного сигнала. В предельном случае отсутствия детерминированной составляющей, т.е. при $A = 0$, из (4) ожидаемо следует вывод о равномерном распределении фазы сигнала: $\omega_\varphi(\varphi) d\varphi|_{A=0} = \frac{1}{2\pi} d\varphi$.

Обозначим как $F(\varphi | S, \varphi_0)$ функцию распределения вероятностей статистического распределения фазы квазигармонического сигнала. Естественно предположить, что фаза φ изменяется в интервале от $\varphi_0 - \pi$ до $\varphi_0 + \pi$. Тогда, интегрируя (4) в диапазоне значений фазы от $\varphi_0 - \pi$ до текущего значения фазы φ и проводя ряд математических преобразований, получим для функции распределения $F(\varphi | S, \varphi_0)$ следующее выражение:

$$F(\varphi | S, \varphi_0) = \frac{\exp(-S^2)}{2\pi} \left\{ \varphi - \varphi_0 + \pi - \sqrt{\pi} \int_{-S}^{S \cos(\varphi - \varphi_0)} \frac{\eta \exp(\eta^2)}{\sqrt{S^2 - \eta^2}} (1 + \Phi(\eta)) d\eta \right\}. \quad (5)$$

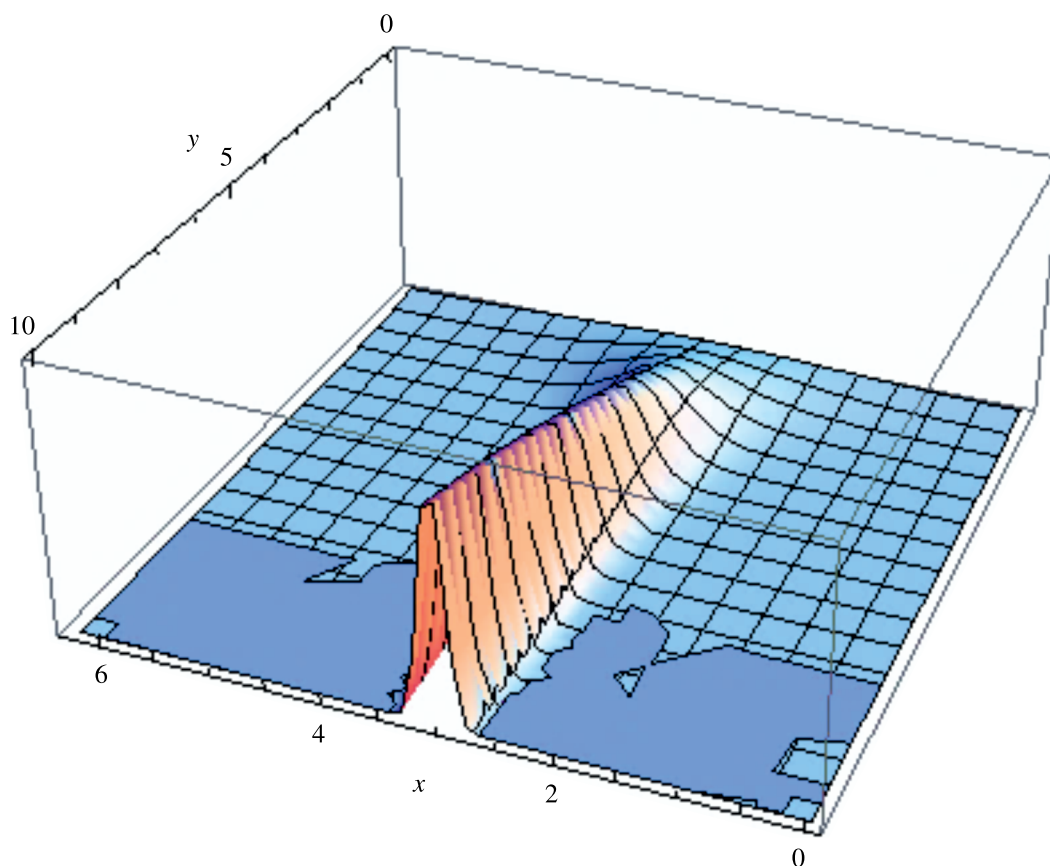


Рис. 1. Трехмерный график функции плотности вероятности $\omega_\varphi(\varphi | S, \varphi_0)$ статистического распределения фазы квазигармонического сигнала, иллюстрирующий зависимость этой функции от параметра уровня сигнала S (по оси y отложена величина отношения сигнала к шуму S) при $\varphi_0 = \pi$ (по оси x отложена величина фазы)

Детальный анализ зависимости функции плотности вероятности (4) и функции распределения (5) приведен в [Яковлева, 2024]. Здесь приведем лишь трехмерный график функции

плотности вероятности фазы в зависимости от определяющих данную функцию параметров S и φ_0 (см. рис. 1) с целью иллюстрации обоснованности развиваемого в данной работе метода оценивания параметров квазигармонического сигнала путем измерения разброса выборочных значений фазы, т. е. величины дисперсии фазы.

Как известно, величина разброса значений выборочных измерений фазы определяется вторым центральным моментом фазы $M2 = \overline{\Delta\varphi^2}$, где $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ — величина отклонения фазы от исходного значения. Рисунок 1 демонстрирует наличие хорошо выраженной зависимости величины разброса фазы, т. е. ширины функции плотности вероятности, от параметра отношения сигнала к шуму S . А именно: как следует из представленного на рис. 1 трехмерного графика, с ростом величины отношения сигнала к шуму функция плотности вероятности фазы сигнала $\omega_\varphi(\varphi | S, \varphi_0)$ заметно сужается, что вполне ожидаемо, учитывая, что при очень большой величине отношения сигнала к шуму мы имеем практически детерминированный сигнал, функция плотности вероятности которого близка к δ -функции, в то время как в предельном случае очень малой величины отношения сигнала к шуму мы имеем сигнал, состоящий практически из шумовой составляющей, с функцией плотности вероятности, близкой к равномерной.

Наличие существенной зависимости функции плотности вероятности от параметра S отношения сигнала к шуму является значимым и лежит в основе развиваемого в данной работе метода оценивания параметра S путем анализа величины второго момента, или дисперсии фазы.

3. Расчет математического ожидания и дисперсии фазы квазигармонического сигнала

Как следует из выражения (4) для функции плотности вероятности и из приведенного на рис. 1 графика, функция плотности вероятности распределения фазы является четной функцией величины $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ отклонения текущего значения фазы φ от ее исходного, незашумленного значения φ_0 в силу четного характера функции $\cos(\Delta\varphi)$, которая определяет параметр $\eta = S \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)$ в выражении для $\omega_\varphi(\varphi | S, \varphi_0)$. Кроме того, из (4) с очевидностью следует, что для изучения свойств фазового распределения удобнее рассматривать его как распределение величины $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ отклонения фазы от ее исходного значения.

Обозначим первый момент случайной величины $\Delta\varphi$ как $M1$. Тогда, в силу четного характера функции плотности вероятности (4) как функции величины отклонения фазы $\Delta\varphi$, получаем, что первый момент случайной величины сдвига фазы относительно ее исходного значения φ_0 равен нулю:

$$M1 = \overline{\Delta\varphi} = \int_{-\pi}^{\pi} \Delta\varphi \cdot \omega_\varphi(\varphi | S, \varphi_0) d(\Delta\varphi) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, величина исходного, неискаженного значения фазы φ_0 совпадает с величиной ее математического ожидания: $\varphi_0 = \overline{\varphi} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \omega_\varphi(\varphi | S, \varphi_0) d\varphi$.

Обозначим как $M2$ второй центральный момент, или дисперсию отклонения фазы $\Delta\varphi$:

$$M2 = \overline{\Delta\varphi^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \Delta\varphi^2 \cdot \omega_\varphi(\varphi | S, \varphi_0) d(\Delta\varphi). \quad (7)$$

Подставляя (4) в (7) и принимая во внимание четный характер функции плотности вероятности, получим

$$M2 = 2 \int_0^{\pi} (\Delta\varphi)^2 \cdot \omega_\varphi(\varphi | S, \varphi_0) d(\Delta\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 e^{-S^2} \cdot \{1 + \sqrt{\pi} S \cos t \cdot e^{S^2 \cos^2 t} \cdot [1 + \Phi(S \cos t)]\} dt. \quad (8)$$

Проводя ряд математических преобразований, получаем следующее выражение для второго момента величины отклонения фазы:

$$M2 = e^{-S^2} \left\{ \frac{\pi^2}{3} + \frac{S}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} t^2 \cos t \cdot e^{S^2 \cos^2 t} \cdot [1 + \Phi(S \cos t)] dt \right\}. \quad (9)$$

Как следует из (9), второй центральный момент фазы, или ее дисперсия, является лишь функцией искомого параметра S отношения сигнала к шуму, что вполне ожидаемо, учитывая приведенные выше комментарии и графическую иллюстрацию. Причем с уменьшением величины параметра S значение второго центрального момента фазы приближается к величине $\frac{\pi^2}{3}$, что соответствует известному значению дисперсии равномерно распределенной величины фазы, так как при стремлении параметра S к нулю сигнал представляет собой фактически лишь шумовую составляющую, в то время как какой-либо детерминированный сигнал при этом отсутствует. В этом частном случае амплитуда сигнала подчиняется статистическому распределению Рэлея, а фаза распределена равномерно в пределах интервала $(-\pi, \pi)$, и второй центральный момент фазы, как известно, равен величине $\frac{\pi^2}{3}$.

Таким образом, полученная аналитическая зависимость (9) дисперсии фазы от искомого параметра и выражение для первого момента образуют систему уравнений для оценивания искомых параметров S и φ_0 методом моментов. При этом параметр φ_0 определяется по результатам выборочных измерений фазы как их математическое ожидание, в то время как для расчета второго параметра — величины отношения сигнала к шуму S — получена в явном виде соответствующая аналитическая зависимость, что позволяет решать данную задачу с высокой точностью.

На рис. 2 приведен график функции (9), определяющей зависимость дисперсии фазы от искомого параметра S . Монотонный характер данной функции находится в соответствии с представленной на рис. 1 монотонной зависимостью величины разброса фазы от указанного параметра. Данная аналитическая зависимость (9) фактически является уравнением для расчета параметра S . Очевидно, что в силу монотонного, однозначного характера функции $M2(S)$ решение для искомого параметра S , полученное предлагаемым методом, всегда существует и является единственным.

Численное решение задачи было получено в системе Wolfram Mathematica и иллюстрируется графиками, представленными на рис. 3. По сути, численное решение задачи сводится к вычислению функции, являющейся обратной функцией представленной выше зависимости второго центрального момента выборочных измерений фазы.

В проведенных численных экспериментах для получения выборочных значений фазы предварительно моделировался процесс формирования случайной величины с распределением, соответствующим функции плотности вероятности (4).

Три варианта графиков на рис. 3 соответствуют различным длинам выборки, т. е. различному числу измерений в выборке значений фазы. На графиках сплошная линия соответствует реальной, исходно заданной величине искомого параметра S , а пунктирная линия — рассчитанному значению данного параметра S_c . Представленные графики подтверждают возможность эффективного оценивания уровня сигнала относительно уровня шума на основе измерений разброса фазы квазигармонического сигнала. Точность оценивания параметров ожидаемо повышается с увеличением длины выборки.

Представленные на рис. 3 данные демонстрируют тот факт, что по мере увеличения числа измерений в выборке расчетное значение искомого параметра приближается к его истинному значению, что подтверждает состоятельность оценки параметра отношения сигнала к шуму.

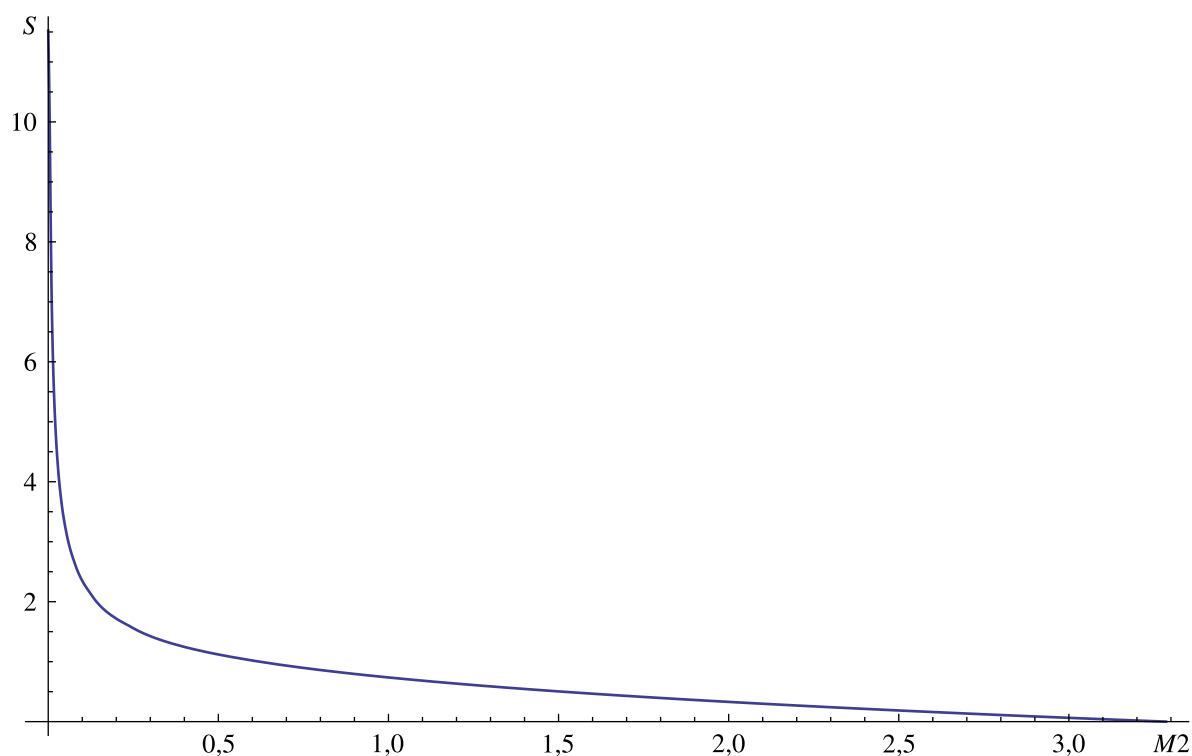


Рис. 2. График функции (9), демонстрирующий зависимость величины второго центрального момента фазы M_2 от параметра отношения сигнала к шуму S

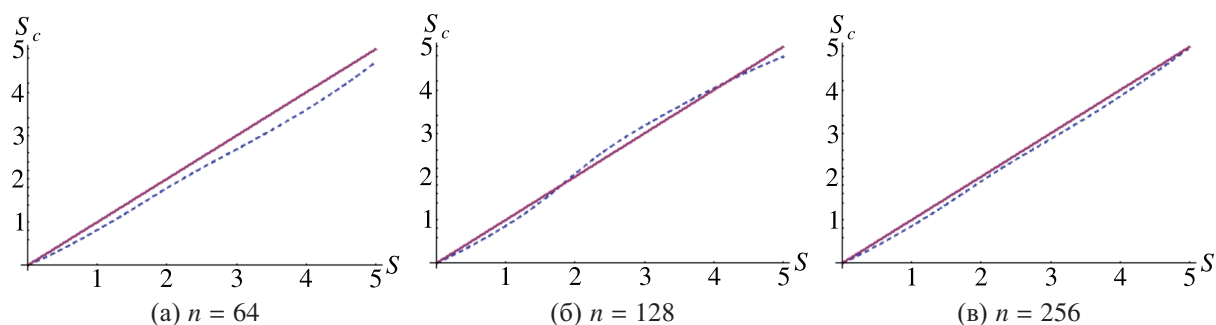


Рис. 3. Результаты численного эксперимента по расчету параметра S на основе измерений дисперсии фазы при различных длинах выборки: $n = 64$ (а), 128 (б), 256 (в), где выходящая из начала координат сплошная линия отображает истинное значение искомого параметра S , а пунктирные линии иллюстрируют результаты оценивания данного параметра предлагаемым методом при соответствующем значении длины выборки

В таблице 1 представлены результаты расчетов величин среднеквадратичного отклонения и доверительного интервала для проведенных численных экспериментов.

Как показал анализ результатов численного решения задачи, для многих практических задач размер выборки $n \geq 128$ является достаточным для получения оценочных значений искомых параметров.

Что касается диапазона применимых значений параметра S , обеспечивающего адекватную точность расчетов, то в этом смысле никаких значимых ограничений предлагаемый метод расчета не накладывает: даже при очень малых значениях данного параметра достигается достаточная точность его оценивания.

Таблица 1. Результаты расчетов величин среднеквадратичного отклонения и доверительного интервала для проведенных численных экспериментов

Характеристики точности оценивания параметра отношения сигнала к шуму методом моментов	$n = 64$	$n = 128$	$n = 256$
Среднеквадратичное отклонение	0,462	0,374	0,245
Доверительный интервал, рассчитанный по уровню вероятности 0,95	$\pm 0,113$	$\pm 0,065$	$\pm 0,030$

Анализ численных результатов оценивания искомого параметра отношения сигнала к шуму показал, что по обеспечиваемой точности разработанный в настоящей работе метод моментов практически не отличается от метода максимума правдоподобия, рассматриваемого в работе [Яковлева, 2024]. При этом, как отмечалось выше, метод моментов сопряжен с гораздо менее значительными вычислениями, не требует проведения сложных расчетов со специальными функциями и в этом смысле является предпочтительным.

4. Заключение

В работе теоретически исследуется статистическое распределение фазы квазигармонического сигнала, разработан и математически обоснован метод оценивания параметров данного распределения на основе измеренных данных для математического ожидания фазы и ее второго центрального момента. Для второго центрального момента фазы получено в явном виде аналитическое выражение, определяющее однозначную зависимость величины данного момента от искомого параметра отношения сигнала к шуму. Тем самым разработан новый, оригинальный метод расчета уровня квазигармонического сигнала относительно уровня шума на основе измерения дисперсии фазы, без необходимости проводить какие-либо измерения амплитуды (или интенсивности) сигнала.

Полученные в работе результаты вносят вклад в развитие теории вероятностей и теоретических основ информатики. Предлагаемый математический метод обеспечивает возможность эффективного определения соотношения уровней полезной, информативной составляющей сигнала и шума посредством анализа разброса фазы, тем самым открывая принципиально новые возможности решения задач в таких областях науки и техники, как радиофизика, медицинская диагностическая визуализация, оптика, метрология. Одно из значимых применений представленных в работе результатов связано с развитием инновационных методов обработки стохастических данных [Яковлева, 2025].

Список литературы (References)

Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
Abramowitz M., Stegun I. A. (eds.) Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. — Applied Mathematics Series 55. — Washington D.C., USA; New York, USA: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964. (Russ. ed.: Abramovic M., Stigan I. Spravochnik po special'nyim funkciyam. — Moscow: Nauka, 1979.)

Зельдович Б. Я., Шкунов В. В., Яковлева Т. В. Теория восстановления толстослойных голограмм спекл-полей // Квантовая электроника. — 1983. — Т. 10, № 8. — С. 1581–1586.
Zeldovich B. Ya., Shkunov V. V., Yakovleva T. V. Theory of reconstruction of thick-layer speckle-fields holograms // Soviet Journal of Quantum Electronics. — 1983. — Vol. 13, No. 8. — P. 1040–1043. (Original Russian paper: Zeldovich B. Ya., Shkunov V. V., Yakovleva T. V. Teoriya vosstanovleniya tolstosloinyh hologram speckle-poley // Kvantovaya elektronika. — 1983. — Vol. 10, No. 8. — P. 1581–1586.)

- Перов А. И. Статистическая теория радиотехнических систем. — М.: Радиотехника, 2003. — 400 с.
Perov A. I. Statisticheskaya teoriya radiotekhnicheskikh system [Statistical theory of radio-technical systems]. — Moscow: Radiotekhnika, 2003. — 400 p. (in Russian).
- Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. — М.: Наука, 1976. — 494 с.
Rytov S. M. Vvedenie v statisticheskuyu radiophysiku. Ch. 1. Sluchainye protsessy [Introduction in statistical radiophysics. P. 1. Random processes]. — Moscow: Nauka, 1976. — 494 p. (in Russian).
- Яковлева Т. В. Особенности статистического распределения фазы квазигармонического сигнала // Доклады Российской академии наук. Математика. Информатика. Процессы управления. — 2021. — Т. 497. — С. 35–37. — DOI: 10.31857/S2686954321020089
Yakovleva T. V. Features of the statistical distribution of a quasi-harmonic signal phase // Dokl. Math. — 2021. — Vol. 103. — P. 95–97. — DOI: 10.1134/S1064562421020083 (Original Russian paper: *Yakovleva T. V. Osobennosti statisticheskogo raspredeleniya phazy kvazigarmonicheskogo signala* // Doklady Rossiiskoi akademii nauk. Matematika. Informatika. Protsessy upravleniya. — 2021. — Vol. 497. — P. 35–37. — DOI: 10.31857/S2686954321020089)
- Яковлева Т. В. Статистический анализ фазы сигнала как математический инструмент обработки данных // Тезисы докладов 22-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов», ММРО-2025. Муром, 22–26 сентября 2025 г. — 2025. — С. 122–124.
Yakovleva T. V. Statisticheskii analys phazy signala kak matematicheskii instrument obrabotki dannikh [Statistical analysis of signal phase as a mathematical tool of data processing] // Proceedings of 22 All-Russian conference “Mathematical methods of image recognition”, MMRO-2025. Murom, 22–26 September 2025. — 2025. — P. 122–124 (in Russian).
- Яковлева Т. В. Статистическое распределение фазы квазигармонического сигнала: основы теории и компьютерное моделирование // Компьютерные исследования и моделирование. — 2024. — Т. 16, № 2. — С. 287–299. — DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-2-287-297
Yakovleva T. V. Statisticheskoe raspredelenie phazy kvasigarmonicheskogo signala: osnovy teorii i komp'yuternoe modelirovanie [Statistical distribution of the quasi-harmonic signal's phase: basics of theory and computer simulation] // Computer Research and Modeling. — 2024. — Vol. 16, No. 2. — P. 287–299 (in Russian).
- Яковлева Т. В. Теоретическое обоснование математических методов совместного оценивания параметров сигнала и шума при анализе райсовских данных // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 3. — С. 445–473.
Yakovleva T. V. Teoreticheskoe obosnovanie matematicheskikh metodov sovmestnogo otseivvaniya parametrov signala i shuma pri analize raisovskikh dannyh [Theoretical substantiation of the mathematical techniques for joint signal and noise estimation at Rician data analysis] // Computer Research and Modeling. — 2016. — Vol. 8, No. 3. — P. 445–473 (in Russian).
- Яковлева Т. В., Кульберг Н. С. Методы математической статистики как инструмент двухпараметрического анализа магнитно-резонансного изображения // Информатика и ее применения. — 2014. — Т. 8, Вып. 3. — С. 51–61.
Yakovleva T. V., Kulberg N. S. Metody matematicheskoi statistiki kak instrument dvuhparametricheskogo analiza magnitno-rezonansnogo izobrazheniya [Mathematical statistics methods as a tool of two-parameter magnetic-resonance image analysis] // Informatics and its application. — 2014. — Vol. 8, No. 3. — P. 51–61 (in Russian).
- Benedict T. R., Soong T. T. The joint estimation of signal and noise from the sum envelope // IEEE Trans. Inf. Theory. — 1967. — Vol. IT-13, No. 3. — P. 447–454.
- Carobbi C. F. M., Cati M. The absolute maximum of the likelihood function of the Rice distribution: existence and uniqueness // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement. — 2008. — Vol. 57, No. 4. — P. 682–689.
- Daryanoosh S., Slussarenko S., Berry D. W., Wiseman H. M., Pryde G. J. Experimental optical phase measurement approaching the exact Heisenberg limit // Nature Communications. — 2018. — Vol. 9. — Article number 4606.
- Du B., Li S., Huang G., Geng X., Li Z., Deng R., Mo C. High-precision frequency measurement system based on different frequency quantization phase comparison // Measurement. — 2018. — Vol. 122. — P. 220–223.
- Hing C. S., Zhenhua Z. Two accurate phase-difference estimators for dual-channel sine-wave model // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. — 2013. — Vol. 122.
- Park J. H. Jr. Moments of generalized Rayleigh distribution // Q. Appl. Math. — 1961. — Vol. 19, No. 1. — P. 45–49.

- Port S. C.* Theoretical probability for applications. — New York: Wiley, 1994.
- Rajan J., Jeurissen B., Verhoye M., Van Audekerke J., Sijbers J.* Maximum likelihood estimation based denoising of magnetic resonance images using restricted local neighborhoods // *Physics in Medicine and Biology*. — 2011. — Vol. 56, No. 16. — P. 5221–5234. — DOI: 10.1088/0031-9155/56/16/009
- Rice S. O.* Mathematical analysis of random noise // *Bell Syst. Technological J.* — 1944. — Vol. 23. — P. 282–322.
- Sijbers J., den Dekker A. J.* Maximum likelihood estimation of signal amplitude and noise variance from MR data // *Magn. Reson. Med.* — 2004. — Vol. 51, No. 3. — P. 586–594.
- Sijbers J., den Dekker A. J., Scheunders P., Van Dyck D.* Maximum-likelihood estimation of Rician distribution parameters // *IEEE Transactions on Medical Imaging*. — 1998. — Vol. 17, No. 3. — P. 357–361.
- Talukdar K. K., Lawing W. D.* Estimation of the parameters of Rice distribution // *J. Acoust. Soc. Amer.* — 1991. — Vol. 89, No. 3. — P. 1193–1197.
- Yakovleva T. V., Kulberg N. S.* Noise and signal estimation in MRI: two-parametric analysis of Rice-distributed data by means of the maximum likelihood approach // *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*. — 2013. — Vol. 2, No. 3. — P. 67–79.
- Webster J. G.* (ed.) *Electrical measurement, signal processing, and displays*. — Boca Raton: CRC Press, 2004. — 723 p.