

УДК: 004.94

Математическое моделирование фазовых переходов при коллективном взаимодействии агентов

Д. А. Брацун^а, К. В. Костарев

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Профессора Поздеева, д. 11, корп. В

E-mail: ^а DABracun@pstu.ru

*Получено 26.06.2025, после доработки — 26.09.2025.
Принято к публикации 07.10.2025.*

Коллективное поведение может выступать в роли механизма терморегуляции и играть ключевую роль при выживании группы организмов. Такие явления в среде животных, как правило, являются предметом изучения биологии, так как внезапные переходы к коллективному поведению трудно дифференцировать от психологической и социальной адаптации животных в группе. Тем не менее в работе указывается важный пример, когда стая животных демонстрирует фазовые переходы, сходные с явлением классической тепловой конвекции в жидкостях и газах. Этот вопрос может быть изучен также экспериментально в рамках синтетических систем, состоящих из самодвижущихся роботов, которые действуют по определенному заданному алгоритму. Обобщая оба эти случая, мы рассматриваем задачу о фазовых переходах в плотной группе взаимодействующих самодвижущихся агентов. В рамках микроскопической теории мы предлагаем математическую модель явления, в которой агенты представлены в виде тел, взаимодействующих друг с другом в соответствии с эффективным потенциалом особого вида, выражающим стремление агентов двигаться в направлении градиента общего теплового поля. Показано, что управляющим параметром задачи является численность группы. Дискретная модель с индивидуальной динамикой агентов воспроизводит большинство явлений, наблюдаемых как в естественных стаях животных, демонстрирующих коллективную терморегуляцию, так и в синтетических сложных системах, состоящих из роботов. Наблюдается фазовый переход 1-го рода со сменой агрегатного состояния в среде агентов, который заключается в самосборке первоначальной слабоструктурированной массы агентов в плотные квазикристаллические структуры. Кроме того, показано, что с увеличением численности скопления наблюдается фазовый переход 2-го рода в форме тепловой конвекции, который включает внезапное оживление группы и переход к вихревому движению. Последнее обеспечивает более эффективное расходование энергии в случае синтетической системы взаимодействующих роботов и коллективное выживание всех особей в случае природных стай животных. С ростом численности группы происходят вторичные бифуркации, вихревая структура толпы агентов усложняется.

Ключевые слова: агентное моделирование, самоорганизация, биоконвекция

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (№ FSNM-2025-0001).

UDC: 004.94

Mathematical modeling of phase transitions during collective interaction of agents in a common thermal field

D. A. Bratsun^a, K. V. Kostarev

Perm National Research Polytechnic University,
11/B Professor Pozdeev st., Perm, 614990, Russia

E-mail: ^a DABracun@pstu.ru

Received 26.06.2025, after completion — 26.09.2025.

Accepted for publication 07.10.2025.

Collective behavior can serve as a mechanism of thermoregulation and play a key role in the joint survival of a group of organisms. In higher animals, such phenomena are usually the subject of study of biology since sudden transitions to collective behavior are difficult to differentiate from the psychological and social adaptation of animals. However, in this paper, we indicate several important examples when a flock of higher animals demonstrates phase transitions similar to known phenomena in liquids and gases. This issue can also be studied experimentally within the framework of synthetic systems consisting of self-propelled robots that act according to a certain given algorithm. Generalizing both of these cases, we consider the problem of phase transitions in a dense group of interacting self-propelled agents. Within the framework of microscopic theory, we propose a mathematical model of the phenomenon, in which agents are represented as bodies interacting with each other in accordance with an effective potential of a special type, expressing the desire of agents to move in the direction of the gradient of the joint thermal field. We show that the number of agents in the group, the group power, is the control parameter of the problem. A discrete model with individual dynamics of agents reproduces most of the phenomena observed both in natural flocks of higher animals engaged in collective thermoregulation and in synthetic complex systems. A first-order phase transition is observed, which symbolizes a change in the aggregate state in a group of agents. One observes the self-assembly of the initial weakly structured mass of agents into dense quasi-crystalline structures. We demonstrate also that, with an increase in the group power, a second-order phase transition in the form of thermal convection can occur. It manifests in a sudden liquefaction of the group and a transition to vortex motion, which ensures more efficient energy consumption in the case of a synthetic system of interacting robots and the collective survival of all individuals in the case of natural animal flocks. With an increase in the group power, secondary bifurcations occur, the vortex structure in agent medium becomes more complicated.

Keywords: agent-based modeling, self-organization, bioconvection

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 5, pp. 1005–1028 (Russian).

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project No. FSNM-2025-0001).

1. Введение

В последние годы внимание исследователей привлекают активные среды, под которыми понимаются агрегаты из элементов, способных самостоятельно перемещаться и взаимодействовать друг с другом [Vicsek, Zafeiris, 2012]. Исследование таких систем обеспечивает более глубокое понимание процессов самосборки, при которой сравнительно простые строительные блоки самостоятельно объединяются в структуры со сложной иерархической архитектурой [Whitesides, Grzybowski, 2002]. Считается, что самосборка является принципиальным элементом технологии производства новых функциональных материалов [Ozin, Arsenault, 2005]. Чем меньше размер строительного блока, тем выше интерес к разработке технологий, включающих естественные механизмы самосборки таких блоков.

Как известно, элемент активной среды должен уметь заимствовать энергию из внешнего окружения и трансформировать ее в свое движение в пространстве. Хотя примеры самодвижущихся объектов, имеющих физическую или химическую природу, известны, прежде всего речь идет о живой материи. Выживание организмов во многом зависит от их способности адаптироваться к изменениям окружающей среды. Одним из самых простых, но эффективных механизмов адаптации является хемотаксис [Wadhams, Armitage, 2004]. Многие микробы могут чувствовать градиенты концентрации химических веществ. Эта способность позволяет бактериям находить питательные вещества, устанавливать чувство кворума, передавать сигналы друг другу и играет ключевую роль при возникновении коллективного поведения в целях выживания всей группы микроорганизмов [Miller, Bassler, 2001; Gregor et al., 2010; Danino et al., 2010]. Кроме хемотаксиса также известно явление фототаксиса: некоторые водоросли ищут оптимальные уровни интенсивности света для фотосинтеза [Giometto et al., 2015; Javadi et al., 2020; Ramamonjy et al., 2023]. Чувствительность к свету и пространственная самоорганизация демонстрируются также некоторыми видами плесени [Брацун, Захаров, 2011].

Яркой иллюстрацией самоорганизации в ткани под контролем хемотаксиса служит морфогенез, который является причиной того, что изначально однородная масса клеток трансформируется в сложные пространственные структуры, которые постепенно вырастают в специфические органы и организмы [Turing, 1952; Pismen, 2020; Verisokin et al., 2021; Крючичникова и др., 2025]. Подобные явления наблюдаются и среди раковых клеток, которые могут перемещаться, а затем дифференцироваться, также образуя пространственные структуры в рамках опухоли [Tabassum, Polyak, 2015; Красняков и др., 2018; Bratsun et al., 2020; Bratsun, Krasnyakov, 2022]. Коллективность поведения во всех этих случаях означает спонтанное структурообразование в группе, которое приводит к более эффективному распределению ресурсов среды. Такие события в распределенных системах физики называют фазовыми переходами 2-го рода. Количественной характеристикой перехода является параметр порядка, который меняет свое значение от нуля в неупорядоченной фазе до положительного значения в фазе с нарушенной симметрией [Ландау, Лифшиц, 2002]. Фазовый переход 2-го рода является сигналом того, что в системе произошла самоорганизация [Prigogine, Stengers, 1984].

Биоконвекция является еще одним хорошо известным примером фазового перехода 2-го рода [Hillesdon, Pedley, 1996]. Она наблюдается, например, в растворах с аэротактическими бактериями *Bacillus subtilis*, чье индивидуальное движение по градиенту кислорода спонтанно переводит среду из однородного состояния в состояние упорядоченных вихревых движений. Несмотря на приставку *био*- и участие в процессе живых бактерий, биоконвекция имеет глубоко физическое объяснение: фазовый переход происходит благодаря механизму конвективной неустойчивости Рэлея – Тейлора [Rayleigh, 1883], которая развивается из-за того, что среда приобретает неустойчивую стратификацию в поле тяжести. Срабатывание сравнительно простого

физического принципа оказывает удивительное влияние на колонию микробов: вихревые движения обеспечивают равномерное распределение кислорода среди всех бактерий, что более эффективно, чем стационарная стратификация, при которой бактерии на поверхности имеют прямой доступ к кислороду, в то время как остальные испытывают его недостаток. В результате выживает вся популяция, а не отдельные ее представители, которым посчастливилось занять лучшую позицию вблизи свободной поверхности. Явление биоконвекции не ограничивается одним хемотаксисом. Например, вихревые движения в колонии бактерий *Euglena gracilis* возникают в ответ на неоднородное освещение [Bees, 2020]. Интересен случай гравитаксиса, при котором биоконвекция возникает в ответ на внешнее силовое поле [Mogami et al., 2004].

Приведенные выше примеры касались активных систем, составленных из клеток или одноклеточных организмов. Похожие явления в среде животных гораздо труднее дифференцировать от социального поведения в стаях, поэтому они изучены гораздо хуже. Например, сложные коллективные движения наблюдаются у летающих птиц, рыб, оленей [Sumpter, 2010]. Но простого объяснения на основе физических механизмов здесь, как правило, уже недостаточно, так как основным триггером является социальная или зоопсихологическая адаптация животных в стае.

В этом контексте нельзя не упомянуть работы Д. Хелбинга с коллегами [Helbing et al., 2000; Helbing et al., 2007; Helbing, 2012], которые посвящены самоорганизации в крупных скоплениях людей. Авторы проанализировали многочасовые видеозаписи поведения толпы в Мекке и предложили математические модели, описывающие явления. Здесь также наблюдаются эффекты самоорганизации, которые включают возникновение волн плотности, «турбулентности толпы» и некоторые другие. Интересно, что крупномасштабные вихревые движения в человеческой толпе, наблюдаемой в Мекке, спонтанно не возникали, поэтому авторы цитированных выше работ предлагали относиться к термину турбулентность толпы осторожно, так как говорить здесь о полной аналогии с явлениями в жидкости не приходится. Зато такие вихри иногда наблюдались в толпах людей, участвующих в рок-концертах [Silverberg et al., 2013], что указывает на то, что вихревые структуры требуют определенных условий для своего появления. Ясно, что вопрос о формах самоорганизации в человеческих скоплениях требует дальнейшего исследования. Тем не менее в целом указанные работы имеют важное значение, так как они показали, что аппарат молекулярной динамики, разработанный в физике, вполне может быть применен к описанию явлений в крупных скоплениях людей. Последние, как известно, по отдельности обладают сложным самосознанием, имеют ясные целеполагания, характеризуются свободой воли. Однако, объединяясь в большую толпу, люди демонстрируют коллективное поведение, в котором индивидуальные черты во многом нивелируются, что позволяет использовать инструментарий физики.

В данной работе мы фокусируем внимание на другом биологическом виде. На наш взгляд, взаимодействие императорских пингвинов (лат. *Aptenodytes forsteri*) является замечательным случаем, который демонстрирует коллективное поведение на основе физических принципов [Ancel et al., 1997; Gerum et al., 2013; Richter et al., 2018; Брацун, Костарев, 2022]. Причиной являются крайне суровые условия зимовки в Антарктиде. Высиживанием потомства занимаются самцы, которые вынуждены в течение нескольких месяцев удерживать яйцо, находясь в стесненном положении [Ancel et al., 1997]. В этих условиях именно физика процесса диктует животным что делать: при внезапном ухудшении погоды эти птицы демонстрируют спорадический переход к плотной группе, состоящей из сотен (иногда тысяч) особей (рис. 1). Экспериментально установлено, что внутри плотно упакованной стаи устанавливается комфортная температура, достаточная для выживания. Нами было показано, что в таких стаях может наблюдаться не только смена агрегатного состояния [Richter et al., 2018], но и фазовый переход 2-го рода, который выглядит как внезапное оживление стаи и начало вихревого движения [Брацун, Костарев, 2022]. Общая логика перехода та же, что и в случае биоконвекции: выживание всей популя-

ции за счет потери комфорта некоторых привилегированных особей. Но физический механизм, который лежит в основе перехода, здесь другой — тепловая конвекция [Bénard, 1900; Rayleigh, 1916; Gershuni, Zhukhovitsky, 1976]. Интересно заметить, что эффективная сила Архимеда, которая обуславливает развитие конвективной неустойчивости, формируется за счет усилий каждой особи продвинутся по градиенту температуры [Браун, Костарев, 2022]. В нашей работе была сформулирована краевая задача, решена задача линейной устойчивости, исследованы конечно-амплитудные режимы конвекции. Результат развития конвективной неустойчивости можно заметить в кино- и фотодокументальных материалах, посвященных наблюдениям за пингвинами [La Marche de l'Empereur, 2005]. Качественно, а в некоторых случаях и количественно, они совпадают с нашими выводами.

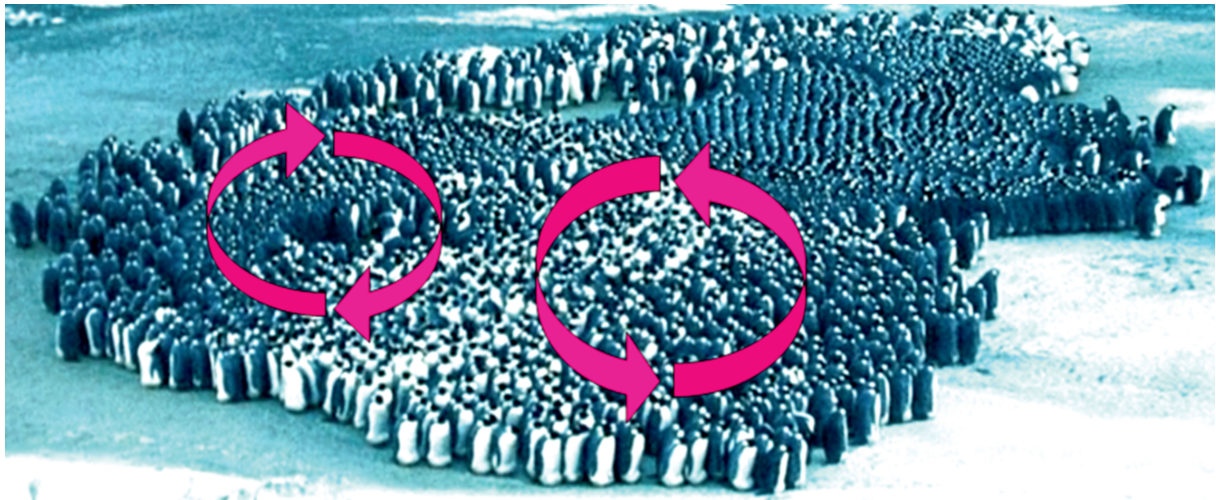


Рис. 1. Внезапное оживление в плотной группе императорских пингвинов при ухудшении погодных условий. Можно заметить, что отдельные части стаи находятся в разных агрегатных состояниях: ближняя подгруппа находится в оживленном состоянии, часть пингвинов включена в квазитвердое образование, дальняя периферия находится в газообразном состоянии [Richter et al., 2018]. Фазовый переход 2-го рода проявляется себя в возбуждении двухвихревого движения в оживленной части стаи. В основе рисунка — кадр из документального фильма [La Marche de l'Empereur, 2005], обработанный с помощью ИИ

Другим характерным примером коллективной терморегуляции являются японские макаки *Macaca fuscata*. Они также известны способностью сбиваться в большие плотные группы для сохранения тепла в холодные периоды. В работе [Sueur et al., 2024] была предложена модель с индивидуальной динамикой для исследования коллективного поведения макак. Результаты расчетов показали, что ключевым фактором, влияющим на размер скоплений, является температура: при ее снижении вероятность присоединения к группе возрастает, что согласуется с данными полевых наблюдений.

В последние годы стало понятно, что элементом активной среды может быть и искусственный объект, например робот, который движется и взаимодействует с другими роботами по определенному алгоритму, имитируя поведение живого. Процессы самосборки и самоорганизации в среде взаимодействующих киборгов или микроботов изучались в ряде работ [Solem, 2002; Rubenstein et al., 2014; Leaman et al., 2019]. Если в [Solem, 2002] авторы исследовали самосборку роботов с теоретической точки зрения, то статья [Rubenstein et al., 2014] представляла собой прорыв, так как предложила конструкцию дешевых микроботов Kilobots, которые могли самостоятельно передвигаться и координировать свои действия. В работе [Slavkov et al., 2018] было впервые показано, что сложная система из микроботов вполне может демонстрировать эффекты самоорганизации: например, роботы были способны спонтанно демонстрировать структуры

Тьюринга. Другой путь развития был намечен в работе [Leaman et al., 2019], в которой была предложена технология создания киборгов-пловцов, созданных на базе генетически модифицированных бактерий. Эти работы показали, что создание большого роя из синтетических ботов той или иной природы, действующих в разных средах, — уже сегодня вполне реализуемая задача. В работе [Bratsun, Kostarev, 2024] мы теоретически изучили фазовые переходы 2-го рода в среде ползающих микроботов со свойством термотаксиса в рамках континуальной модели. Динамические свойства системы были исследованы вплоть до наступления нестационарных вихревых режимов.

В данной работе мы теоретически исследуем фазовые переходы в обобщенной 2D-среде агентов в рамках микроскопического описания. Элементами исследуемого агрегата из агентов вполне могут рассматриваться либо императорские пингвины во время зимовки, либо микроботы из работы [Rubenstein et al., 2014], перепрограммированные двигаться по градиенту тепла. Результаты данной работы существенно дополняют результаты, полученные нами ранее в рамках модели сплошной среды.

2. Математическая модель с индивидуальной динамикой агентов

Рассмотрим совокупность взаимодействующих агентов, способных к определенному виду самодвижения на плоскости. Будем полагать, что рассматриваемый агрегат из агентов является сильно диссипативной средой. Таким образом, перемещения агентов происходят в безынерционном приближении и при описании применима аристотелева механика, в которой действующие силы непосредственно определяют скорости агентов. Изучение результатов натурных наблюдений за императорскими пингвинами подтверждает такой вывод: скорость движения птиц при индивидуальном поведении не выше 1–2 км/ч, все перемещения медленные и осторожные с целью сохранения единственного вынашиваемого яйца, которое должно быть непрерывно закрыто оперением брюшной части пингвина и не иметь касаний со снегом и льдом. Если птицы собираются в плотную группу, как показано на рис. 1, то движение в ней становится еще более медленным и энергетически затратным для особи. В случае рассмотрения синтетических агентных систем, имитирующих поведение животных, движение ботов может быть запрограммировано соответствующим образом.

Совокупность из N агентов будем рассматривать как динамическую систему, состоящую из взаимодействующих на плоскости дискретных элементов:

$$\gamma m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1, i \neq j}^N \mathbf{\Omega}_{ij}(\mathbf{r}) + \sum_{j=1, i \neq j}^N \mathbf{\Psi}_{ij}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где m_i и $\mathbf{r}_i: (x_i, y_i)$ — соответственно масса и радиус-вектор i -го агента в двумерной декартовой системе координат. Размерный коэффициент γ нужен для того, чтобы силы в правой части уравнения (1), записанного в рамках аристотелевой механики, имели бы привычную размерность. Коэффициент характеризует сопротивление среды и имеет размерность [1/с]. В расчетах, представленных ниже, этому коэффициенту приписано значение 1. Так как в стае пингвинов, вынашивающих яйца, все особи примерно одного веса и размера (самцы), в рамках модели мы принимаем каждую особь за круглое тело радиусом R , имеющее фиксированную массу m . В правой части (1) стоят суммы сил, индексы которых пробегают по всем агентам, участвующим в коллективном движении, за исключением самого i -го агента, чтобы исключить самодействие. Система $2N$ дифференциальных уравнений 1-го порядка (1) в качестве начальных условий требует задания только начальных координат для всех N агентов.

Взаимодействие агентов в группе определяется с помощью сил в правой части (1), часть которых являются эффективными и требуют конструирования. Ситуация здесь аналогична построению модели паникующей толпы людей [Helbing et al., 2000; Аптуков и др., 2013]. Таким образом, все силы в (1) можно разделить на три класса:

- психологические силы $\mathbf{F}$, которые определяются внутренним побуждением агента (человека, индивида, особи) совершить определенное действие;
- социальные силы $\mathbf{\Omega}$, которые обусловлены окружением агента (человека, индивида, особи) в составе группы (стаи);
- силы физической природы $\mathbf{\Psi}$.

Многие авторы отмечают, что императорский пингвин индивидуально отлично приспособлен к полярным условиям [Ancel et al., 1997]. Если большинство видов пингвинов зиму обычно проводят в океане, самцы императорского пингвина остаются на суше и вынашивают яйца. С одной стороны, стратегия этого вида понятна: в это время года противников у пингвинов практически нет, так как температура окружающей среды в Антарктике может внезапно падать до -60°C , сопровождаясь шквальным порывистым ветром. С другой стороны, в условиях стесненного вынашивания яйца во время зимовки индивидуальной защиты индивида становится недостаточно.

Обсудим диапазон значений температуры, при котором императорский пингвин чувствует себя комфортно и предпочитает индивидуальное поведение вне группы. Экспериментальные измерения говорят, что поведение пингвинов определяется несколькими параметрами: прежде всего, температурой окружающей среды и силой ветра, а также, в меньшей степени, уровнем солнечной радиации и влажностью воздуха. Соответственно, комфортный диапазон температур определяется сложной совокупностью всех этих факторов. В работе [Richter et al., 2018] было построено распределение вероятностей перехода, основанное на длительном наблюдении за колонией. Например, нижняя граница температур при вероятности образования плотного скопления более 0,5 составляет -48°C . Для сравнения при внешней температуре -20°C вероятность сбивания пингвинов в кучу — менее 0,2. Более конкретными являются данные непосредственных измерений температуры поверхности тела отдельных особей, представленные в работе [Ancel et al., 1997]. Было показано, что пингины начинали искать коллективную защиту от холода, когда термодатчики, установленные на спинах особей, выдавали значение менее -10°C . По-видимому, это критическое значение, ниже которого наступает переохлаждение организма, опасное для жизни особи.

Экспериментальные наблюдения установили четкую корреляцию между периодами заморозков и/или усиления ветра, с одной стороны, и актами самосборки пингвинов в плотные группы — с другой [Canals, Bozinovic, 2011; Richter et al., 2018]. При этом фиксируемая датчиками температура внутри этих групп быстро становилась вполне комфортной для птиц. Таким образом, основной силой, стимулирующей агентов к самодвижению в данной задаче, будем считать их внутреннее стремление двигаться по градиенту температуры коллективного поля. Эта сила психологической природы задает тренд к самосборке агентов в большую плотную группу, которая способна за счет своих коллективных действий осуществлять общую терморегуляцию стаи:

$$\mathbf{F}_i = k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad (2)$$

где k — размерный коэффициент, подгоночный параметр задачи. Таким образом, группа формирует коллективное тепловое поле $T = T(t, x, y)$, создаваемое совокупностью всех агентов (рис. 2), каждый из которых является точечным источником тепла мощностью Q_i . По сути, сила (2) задает

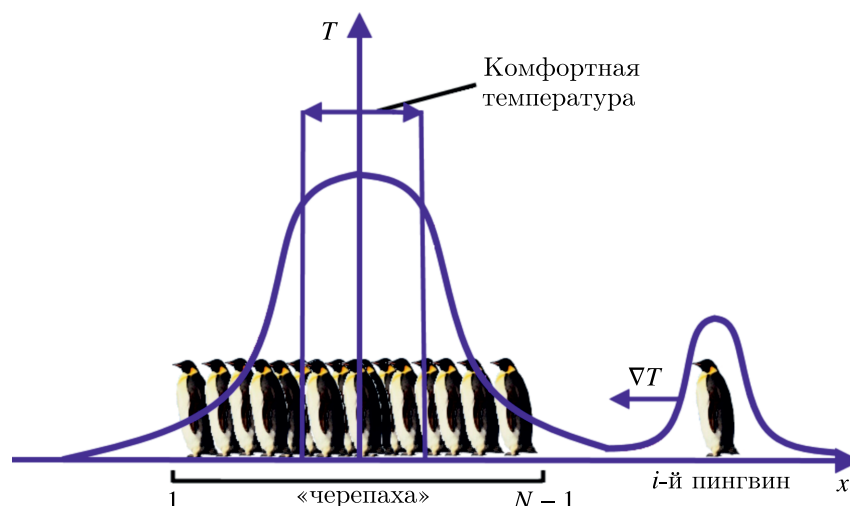


Рис. 2. Природа психологической силы (2) определяется стремлением каждого агента двигаться по градиенту температуры, который ведет его в зону установления комфортной температуры в центре плотной группы, где происходит коллективная терморегуляция

термотаксис в сложной системе агентов, действие которого схоже с явлением хемотаксиса у бактерий. Так как любой агент является источником тепла, то градиент температуры в (2) должен вычисляться на некотором характерном расстоянии от центра масс i -й особи.

При записи эффективной силы (2) полностью были проигнорированы побудительные мотивы агентов двигаться, формируемые за счет зрительных сигналов. На практике агент (особенно если это живое существо) вначале движется скорее по градиенту оптической плотности стаи. Тем более что, находясь на некотором отдалении от основной группы, он не способен чувствовать коллективное тепловое поле. Вероятно, первым побудительным импульсом к движению является именно зрительный сигнал.

Более сложные формулировки силы (2), которые учитывают визуальные наблюдения агентов, нами также рассматривались. Было обнаружено, что такие модификации в некоторой степени влияют на скорость первоначальной сборки группы. Однако в данной работе нас больше интересует финальный этап эволюции, когда все агенты уже присоединились к плотной группе. В этом случае зрительный сигнал полностью теряет значение. Кроме того, экспериментальные наблюдения показывают, что наибольшую активность групповая динамика достигает в ночное время, когда зрительные сигналы ослабевают [Richter et al., 2018]. Поэтому в данной работе будут представлены результаты для наиболее простой записи эффективной силы (2).

Даже при стремлении пингвинов к совместной терморегуляции в плотной группе они предпочитают сохранять между друг другом безопасную дистанцию, так как каждая особь несет перед собой хрупкое габаритное яйцо с характерным размером 10–15 см. Чтобы учесть это наблюдение, введем механизм слабого отталкивания между агентами, аналогичный социальной силе в задаче о паникующей толпе [Helbing et al., 2000; Аптуков и др., 2013]. Пусть на i -го агента со стороны j -го действует сила вида

$$\Omega_{ij} = A n_{ij} e^{(2R-d_{ij})/B}, \quad (3)$$

где A , B — подгоночные параметры, которые должны быть подобраны таким образом, чтобы сила отталкивания проявляла бы себя гораздо слабее силы притяжения (2), оставляя небольшой зазор между агентами. В формуле (3) введена величина

$$d_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|, \quad (4)$$

которая обозначает расстояние между центрами масс агентов, а

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} \quad (5)$$

есть единичный вектор, направленный от j -го к i -му агенту.

Изучение доступных фото- и видеоматериалов показывает, что физические силы (например, сила трения), как правило, в стае пингвинов невелики, так как особи избегают непосредственного контакта друг с другом, сохраняя небольшую дистанцию. Кроме того, как известно, оперение пингвинов пропитано специальным жиром, который позволяет им свободно скользить по снегу и льду, а также уменьшает гидродинамическое сопротивление при плавании в соленой воде океана [Ancel et al., 1997; La Marche de l'Empereur, 2005]. Таким образом, задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) в явном виде запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma m \frac{dx_i}{dt} &= k \frac{\partial T(t, \mathbf{r})}{\partial x} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{A(x_i - x_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} e^{(2R - \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2})/B}, \\ \gamma m \frac{dy_i}{dt} &= k \frac{\partial T(t, \mathbf{r})}{\partial y} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{A(y_i - y_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} e^{(2R - \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2})/B}, \\ x_i(0) &= x_{i0}, \quad y_i(0) = y_{i0}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6)$$

Обсудим далее уравнение, описывающее коллективное тепловое поле. Вообще говоря, задача о движущихся по плоскости тепловых источниках является краевой 3D-задачей на нахождение пространственного распределения температуры $\Theta(t, x, y, z)$:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \Theta = \chi \Delta \Theta + \sum_{i=1}^N Q_i, \quad (7)$$

где $\mathbf{V}$ — скорость ветра, χ — коэффициент теплопроводности среды.

В силу ограниченного плоскостью движения агентов уравнение теплопроводности (7) может быть усреднено в направлении, ортогональном плоскости движения агентов. Если рассматривать узкий слой толщиной $2d$, в котором оперируют агенты, то условия на границе слоя для Θ можно записать в следующем виде:

$$z = \pm d: \quad \kappa \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \mp \alpha (\Theta - \Theta_0), \quad (8)$$

где κ — коэффициент теплопроводности агентов, α — коэффициент теплоотдачи в воздушную среду, Θ_0 — температура окружающей среды. Здесь для простоты были приняты симметричные условия на границах, а слой считается однородным. Учитывая (8), тепловое поле можно представить как

$$\Theta(t, x, y, z) = \frac{3\text{Bi}}{2(3 + \text{Bi})} \left(1 + \frac{2}{\text{Bi}} - \frac{z^2}{d^2} \right) T(t, x, y), \quad (9)$$

где $\text{Bi} = \frac{\alpha d}{\kappa}$ — число Био, безразмерный критерий подобия, отвечающий за теплоотдачу тонкого воздушного слоя, насыщенного агентами, во внешнюю среду. В двух предельных случаях $\text{Bi} \rightarrow 0$ и $\text{Bi} \rightarrow \infty$ вертикальная теплоотдача соответственно либо отсутствует (идеальная

теплоизоляция), либо принимает максимальное значение (высокая теплопроводность). Подставляя аппроксимацию (9) в 3D-уравнение теплопроводности (7) и усредняя его поперек тонкого слоя вдоль оси z :

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \dots dz,$$

получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \chi \frac{3Bi}{3 + Bi} T - V_x \frac{\partial T}{\partial x} - V_y \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_{i=1}^N Q_i. \quad (10)$$

Уравнение (10) описывает динамику температурного поля воздушной прослойки, насыщенной агентами. Первое слагаемое в правой части (10) отвечает за диффузию тепла в плоскости (x, y) , второе описывает теплопотери в ортогональном направлении, третье и четвертое слагаемые задают адвекцию тепла за счет ветра, и последнее слагаемое представляет собой сумму мощностей источников тепла, генерируемых агентами. В целом задача Коши (6) и краевая задача (10) представляют собой замкнутую систему связанных эволюционных уравнений, определяющих динамику теплового поля и тепловыделяющих агентов в процессе коллективного термотаксиса. Для начала расчета необходимо задать значения параметров, начальное расположение агентов (6), граничные условия для теплового поля (10) и векторное поле, задающее структуру и направление ветра $\mathbf{V}$. Последний является параметром задачи, но возможно рассмотрение ситуаций, в которых ветер имеет нестационарный характер.

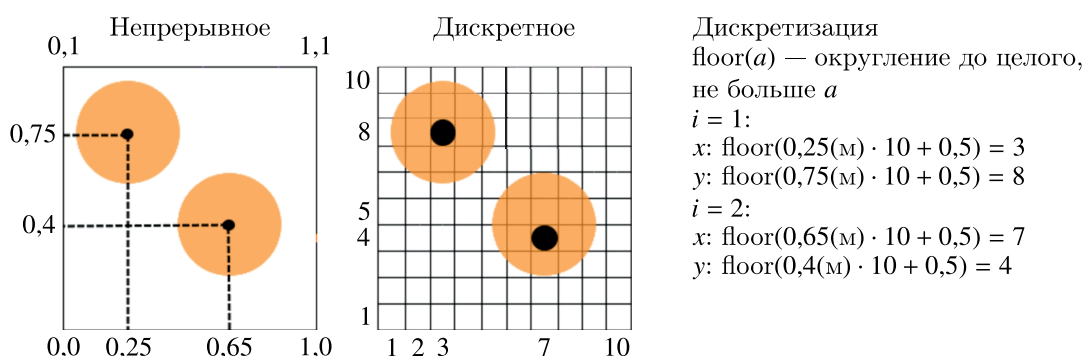


Рис. 3. Аппроксимация непрерывных и дискретных данных, генерируемых соответственно при решении задачи Коши для позиции агентов (6) и задачи теплопроводности для коллективного теплового поля (10)

3. Численная и программная реализация

Математическая модель коллективного поведения агентов в общем тепловом поле (6), (10) является гибридной и состоит из двух связанных частей. При решении задачи Коши (6) используются данные о текущем состоянии теплового поля, расчет которого с помощью уравнения теплопроводности (10) использует данные о местоположении каждого агента, так как именно они являются источниками тепла.

Для численного решения уравнения теплопроводности (10) использовался метод конечных разностей. Поле температур рассчитывалось на однородной квадратной сетке $L \times L$ с постоянным шагом Δx на плоскости (x, y) . Область выбиралась достаточно большой, чтобы гарантированно включать все эволюционные изменения в среде агентов. На границе области Γ ставилось нулевое граничное условие для температуры:

$$T|_{\Gamma} = 0. \quad (11)$$

Задача (6) решалась методом Эйлера с фиксированным шагом по времени. Так как траектории агентов являются непрерывными, то в ходе расчета на каждом шаге по времени дискретные и непрерывные данные требовали адаптации для использования в рамках чужого представления (рис. 3). Кроме того, дискретизации обеих связанных задач (6) и (10) по времени были синхронизированы. Для реализации конечно-разностного метода использовалась явная схема, которая устойчива, если шаг по времени удовлетворяет условию Куранта. В таблицах 1 и 2 представлены перечни значений параметров для имитационного моделирования коллективного поведения агентов, в качестве которых рассматриваются либо императорские пингвины [Richter et al., 2018], либо микроботы вида Kilobots [Rubenstein et al., 2014; Slavkov et al., 2018].

Таблица 1. Значения основных параметров задачи о коллективном поведении императорских пингвинов в качестве агентов разработанной математической модели (6), (10)

m	k	A	B	R	Δx	Q	χ	Bi
25 кг	$2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / (\text{К} \cdot \text{с}^2)$	2 Н	0,35 м	0,2 м	0,1 м	10^{-2} Вт	$2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$	1

Таблица 2. Значения основных параметров задачи о коллективном поведении микроботов вида Kilobots в качестве агентов разработанной математической модели (6), (10)

m	k	A	B	R	Δx	Q	χ	Bi
$2 \cdot 10^{-2}$ кг	$6 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / (\text{К} \cdot \text{с}^2)$	$8 \cdot 10^{-4}$ Н	$1,5 \cdot 10^{-2}$ м	$2 \cdot 10^{-2}$ м	10^{-2} м	10^{-2} Вт	$2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$	1

Расчеты, лежащие в основе данной модели, теоретически возможно выполнить на одном процессорном ядре. Однако такой подход потребует значительных временных затрат. Для достижения оптимальной производительности целесообразно использовать возможности параллельных вычислений на графическом процессоре (GPU). Реализация модели выполнена на языке программирования Cuda C, который является языком расширения C и позволяет создавать программы, выполняемые на GPU. Преимущество данного подхода заключается в возможности задействовать тысячи вычислительных ядер GPU, что приводит к значительному ускорению расчетов по сравнению с использованием одного CPU. Применение GPU обеспечивает существенный прирост производительности по сравнению с CPU. Однако при этом возникает ряд новых задач, связанных с синхронизацией параллельных процессов и оптимизацией использования памяти. При распараллеливании вычислений на GPU важно обеспечить синхронизацию доступа к разделяемым данным между потоками выполнения. В противном случае возможны ошибки в результатах расчетов. В данной модели для синхронизации потоков используются различные механизмы, предоставляемые Cuda, такие как атомарные операции и барьеры синхронизации. В данной модели тщательно оптимизировано распределение данных в памяти GPU. Это позволяет минимизировать задержки при доступе к данным и повысить производительность приложения.

Для фиксации фазовых переходов 2-го рода требуется сформулировать параметр порядка, который принимал бы нулевое значение в однородной фазе и был бы отличен от нуля в неоднородной фазе. Так как фазовые переходы в плотной группе агентов проявляются себя прежде всего в виде возбуждения вихревых движений, то удобной величиной является средняя завихренность:

$$\Phi(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{u_{yj}(x_j - x_i) - u_{xj}(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \right), \quad (12)$$

где $\mathbf{u}$: (u_x, u_y) — вектор скорости агента, компоненты которого вычисляются в соответствии с уравнениями (6); индекс i пробегает по всем агентам группы, а индекс j — только по бли-

жайшим соседям i -го агента. Таким образом, формула (12) определяет средние значения циркуляции скорости вокруг каждого агента (локальные завихренности), усредненные затем по всему ансамблю. Величина $\Phi(t)$ чувствительна к микроскопическим флуктуациям при взаимодействии агентов, что позволяет выявить пороговые явления и фазовые переходы в системе. Полезно также ввести в рассмотрение величину

$$\Lambda = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \Phi^2(t) dt}, \quad (13)$$

которая является среднеквадратичным усреднением завихренности (12) по времени и по числу реализаций. В качестве τ брался достаточно длинный промежуток эволюции сложной системы, который содержал сотни периодов базового колебания. Число реализаций в данной работе имело фиксированное значение $N_r = 10$. Величина Λ , независимая ни от времени, ни от ансамбля, ни от числа реализаций, служила основным параметром порядка в исследуемой системе.

Кроме завихренностей (12), (13) вычислялся также ряд других полезных величин, характеризующих динамику ансамбля агентов с определенной стороны. Например, скоростная корреляционная функция

$$K(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{u_{xi} u_{xj} + u_{yi} u_{yj}}{|\mathbf{u}_i| \cdot |\mathbf{u}_j|} \right) \quad (14)$$

отражает степень согласованности движения агентов в группе. Измеряется как среднее значение косинуса угла между векторами скоростей соседних агентов, усредненное затем по всему ансамблю. Если агенты склонны двигаться в одном направлении, то функция $K(t)$ стремится к значению 1; если в противоположных направлениях — к значению -1 ; наконец, при случайном характере движения значение осциллирует около 0. Величина (14) отражает микроскопическую согласованность, характерную для коллективного поведения, но является слабочувствительной к вращательным движениям. Усреднение по времени и реализациям дает величину

$$\Sigma = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} K^2(t) dt}. \quad (15)$$

Корреляция скоростей агентов (15) уже не содержит информацию о смене знака $K(t)$, взамен четко указывает на общий рост координации движений между агентами.

При формировании плотной группы из N_g агентов имеет смысл определить положение центра масс этого образования:

$$\mathbf{R}_g(t) = \frac{1}{N_g} \sum_{i=1}^{N_g} \mathbf{r}_i, \quad (16)$$

относительно которого удобно рассматривать движения отдельных агентов.

В заключение раздела отметим условный характер терминов «вихревое движение» и «завихренность», используемых в данной работе по отношению к явлениям в скоплениях агентов. Данная терминология изначально была разработана для моделей сплошной среды, в то время как здесь мы рассматриваем дискретную совокупность взаимодействующих агентов.

4. Результаты численного моделирования

4.1. Смена агрегатного состояния

В работе [Richter et al., 2018] на основе экспериментальных наблюдений было замечено, что периодическая самосборка императорских пингвинов в плотные скопления напоминает смену агрегатного состояния вещества. В светлое время суток стая находится преимущественно в газообразном состоянии, в котором расстояния между особями значительны, а сами пингвины перемещаются случайным образом по территории.

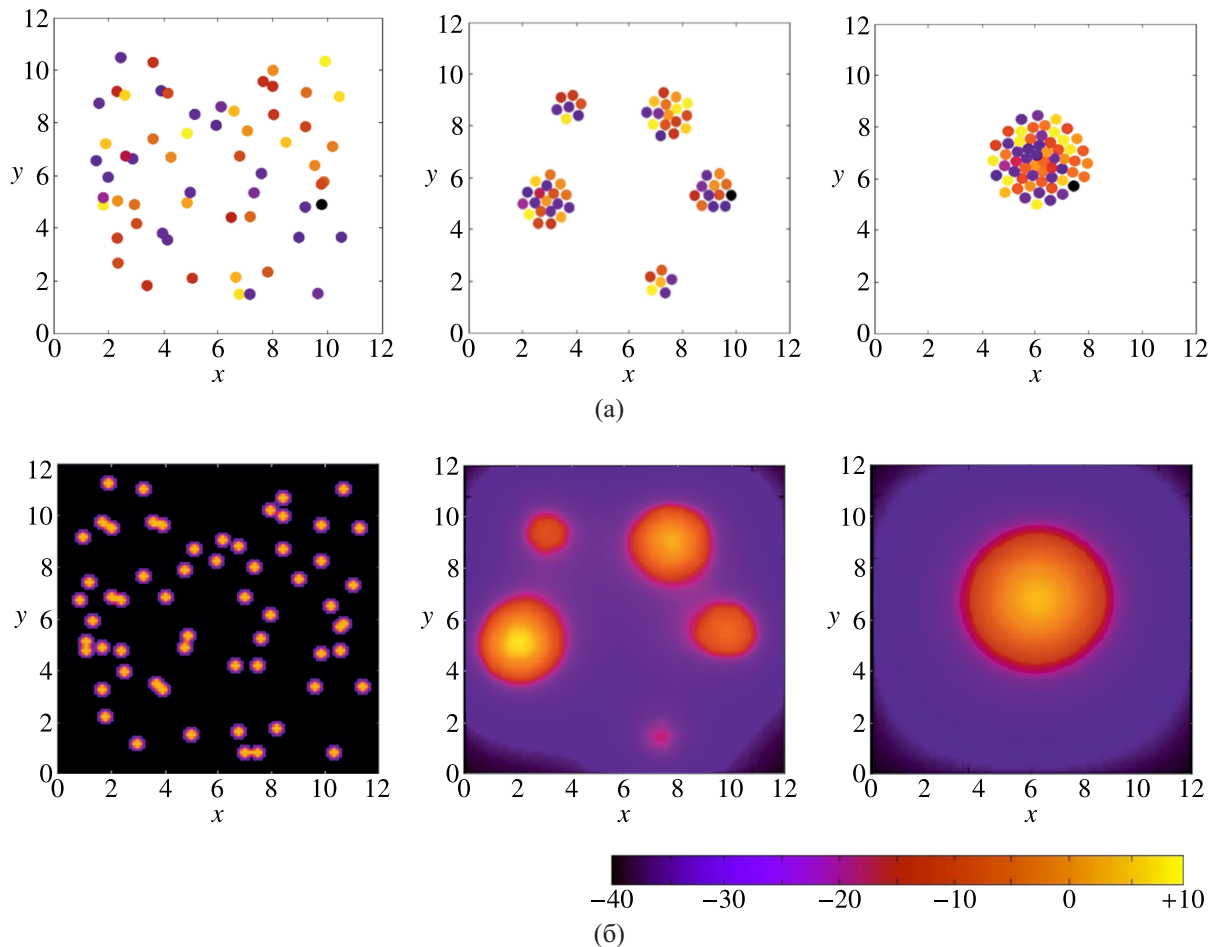


Рис. 4. Мгновенные положение агентов на плоскости (а) и соответствующее тепловое поле (б) для трех последовательных моментов времени $t = 0, 235, 1345$ с (фрагменты слева направо), полученные при численном моделировании коллективного поведения 60 агентов. Расчетная область 12 на 12 м, использовалась равномерная квадратная сетка 121×121 узлов. Температура окружающей среды — -40°C . Начальное положение агентов задавалось случайным образом. Параметры расчета указаны в таблице 1

Ночью происходит процесс *конденсации*, а затем и *кристаллизации* стаи. Финальное состояние включает формирование ряда крупных плотных групп, в которых положение каждой птицы в стае фиксировано, а общая структура напоминает кристаллическую решетку. Как и в физике, фазовый переход 1-го рода происходит в нескольких центрах. В редких случаях все пингвины объединяются в единственную структуру.

Рисунок 4 показывает численные результаты по моделированию такой самосборки для 60 агентов (использовались значения параметров для пингвинов), в начальный момент распо-

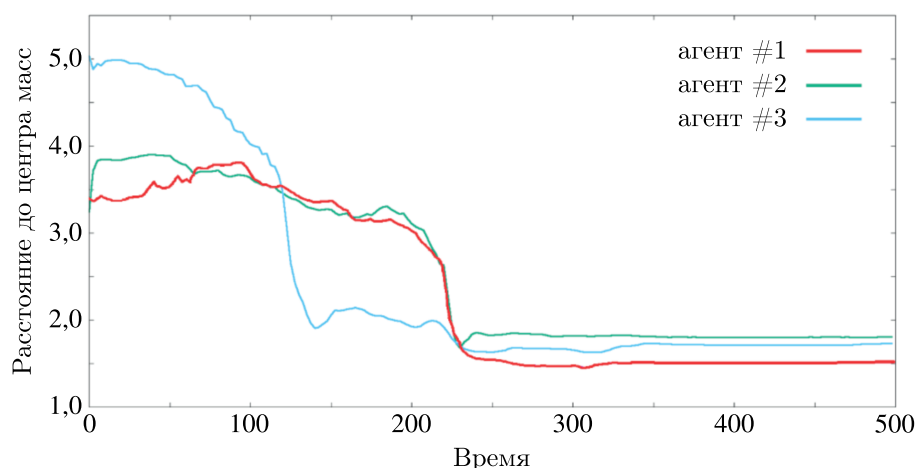


Рис. 5. Временная зависимость расстояния трех разных агентов до центра масс финального плотного агрегата из агентов, показанного на рис. 4. Параметры расчета указаны на рис. 4

ложенных на плоскости случайным образом. Расчеты показали, что сразу после начала эволюции возникают центры конденсации, число которых варьируется в разных численных реализациях. На рис. 4 их оказалось пять, все разного размера.

Сразу после окончания процесса сборки положение агентов во всех группах стабилизируется, всякие движения прекращаются. Рисунок 5 показывает, что через некоторое время после сборки формируется квазитвердая структура из агентов, положение каждого агента фиксируется в пространстве. На тепловых картах на рис. 4 видно, что в ядре коллективного теплового поля устанавливается постоянная температура, градиенты выравниваются, а силы притяжения (2) стремятся к нулю. Таким образом, кристаллическая структура держится за счет агентов из периферийного сферического слоя, в котором центростремительные силы, действующие на агентов, велики.

Было обнаружено, что в некоторых случаях образуются несколько групп, которые могут существовать независимо друг от друга достаточно долго, что согласуется с натурными наблюдениями за поведением пингвинов [La Marche de l'Empereur, 2005; Richter et al., 2018]. Однако небольшие по размеру плотные группы агентов, находящиеся в квазикристаллическом состоянии, менее эффективны при сверхнизких температурах окружающей среды, так как они не позволяют в агрегате происходить фазовым переходам 2-го рода. Ниже этот эффект будет продемонстрирован.

В большинстве численных экспериментов наблюдается картина постепенного укрупнения структур. Центры масс агрегатов (16) все время флуктуируют, поэтому они могут со временем постепенно сближаться друг с другом. В этом случае агенты, находящиеся на периферии своей структуры, начинают испытывать конкурирующее влияние со стороны другого агрегата. Такой процесс может стимулироваться, например, ветром, который смещает тепловые факелы групп. При сближении двух групп до критического расстояния они сливаются в одно более крупное образование. Рисунок 4 иллюстрирует этот процесс, показывая образование единой квазитвердой структуры, которая включает в себя всех агентов системы. На практике время жизни всех плотных агрегатов императорских пингвинов ограничено несколькими часами ночного времени или дневного времени при сильной ветровой нагрузке. Все группы немедленно распадаются, переходя в газообразное состояние (аналог физической *сублимации*) при повышении температуры окружающей среды.

4.2. Фазовые переходы 2-го рода

В ходе численных экспериментов были обнаружены фазовые переходы 2-го рода, которые сопровождаются скачком параметра порядка, вызываемые спонтанным возбуждением вихревых движений. Управляющим параметром задачи является число агентов N , участвующих в коллективном действии. Рисунок 4 показывает, что все плотные группы, возникающие в процессе сборки агентов, представляют собой квазикристаллические объединения, в которых агенты остаются неподвижными. Таким образом, становится понятно, что эффект самоорганизации происходит пороговым образом и зависит от числа агентов в группе взаимодействия. Для изучения переходов численные эксперименты производились с начальной конфигурацией, в которой агенты уже занимают позиции в рамках квазикристаллической структуры, существующей под зонтиком теплового поля. Это позволило исключить влияние нестационарных температурных эффектов в начальный момент времени и существенно сократить время вычислений, исключая из рассмотрения длительный процесс самосборки. Таким образом, удалось исследовать поведение системы в широком диапазоне значений N .

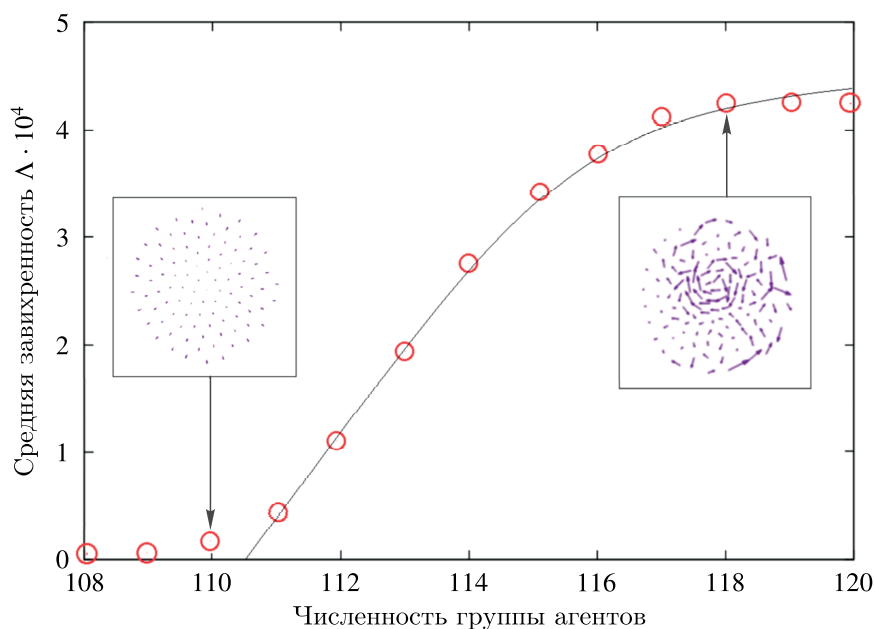


Рис. 6. Зависимость усредненной по ансамблю, времени и числу реализаций завихренности (13) от численности группы взаимодействующих агентов вблизи точки фазового перехода 2-го рода. Расчетная область 2 на 2 м, для вычисления поля температур использовалась равномерная квадратная сетка 201×201 узлов. Начальное положение агентов задавалось в рамках заполненного квазикристаллического агрегата, чтобы исключить длительный процесс сборки агентов. Температура окружающей среды — $+20^\circ\text{C}$. Параметры расчета указаны в таблице 2

В результате численного моделирования были обнаружены бифуркационные значения параметра N как для набора значений параметров для императорских пингвинов (табл. 1), так и для значений параметров для динамики микроботов (табл. 2). Качественного различия в поведении этих систем не обнаружено. Рисунок 6 показывает амплитудную кривую усредненного значения завихренности Λ , задаваемой формулой (13), как функцию численности стаи. В качестве агентов в этих вычислениях выступают микроботы вида Kilobots, способные к самодвижению в направлении градиента температуры. Как видно из рисунка, бифуркационное значение примерно равно $N^* = 110$. Если численность группы меньше критического значения: $N < N^*$, то она, как правило, находится в квазикристаллическом состоянии.

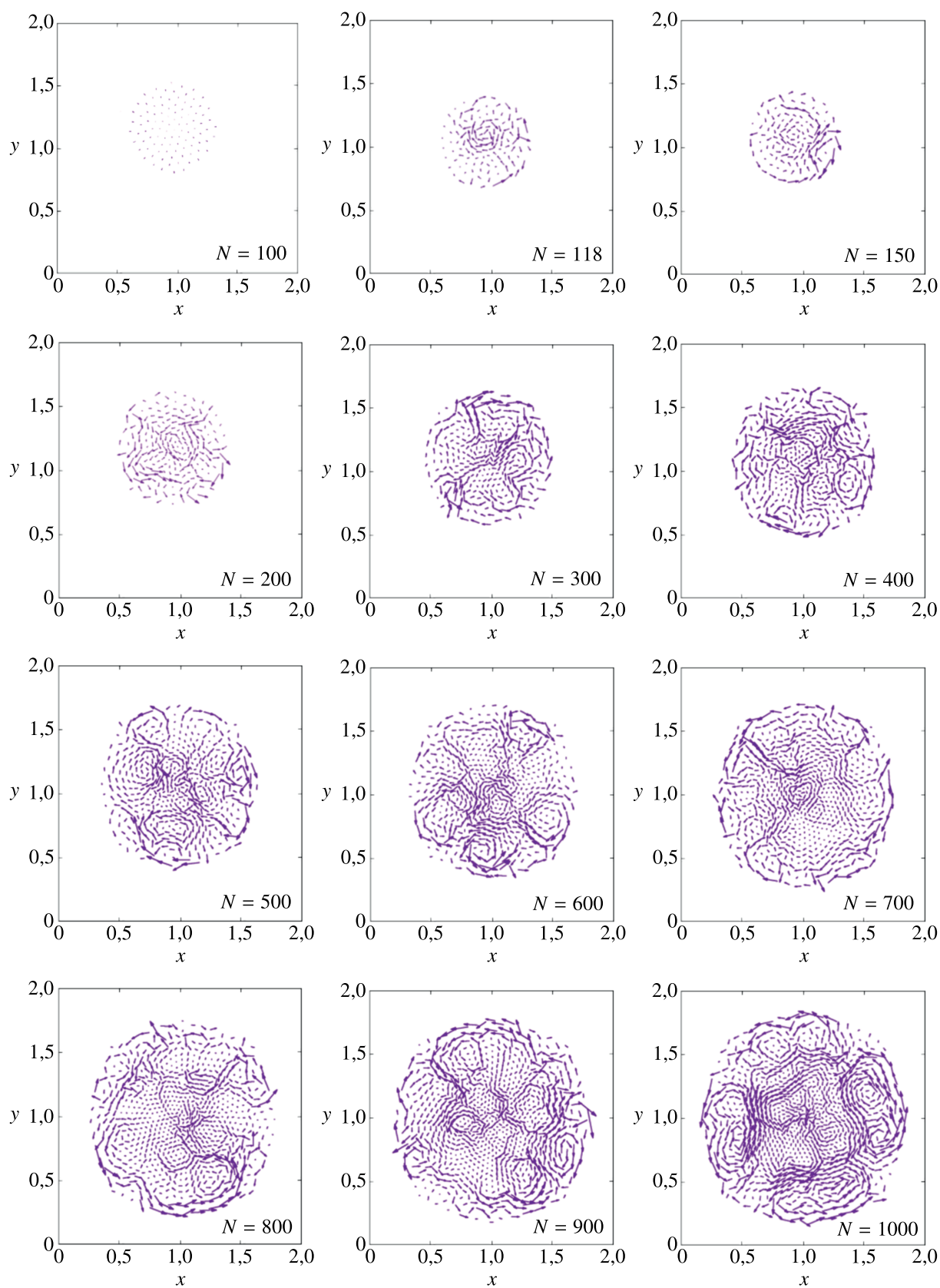


Рис. 7. Мгновенные поля скоростей агентов в оживленной плотной группе в зависимости от числа агентов, участвующих в коллективной терморегуляции. Параметры расчета такие же, как на рис. 6. Поля скорости измерялись в момент $t = 500$

В случае $N > N^*$ плотное скопление агентов испытывает спонтанное ожижение, вслед за которым в системе возбуждаются вихревые движения, что проявляется в отличном от нуля значении средней завихренности (рис. 6).

Таким образом, завихренность Λ действительно выступает в качестве параметра порядка, который испытывает скачок при фазовом переходе 2-го рода. Этот переход напоминает возникновение конвективной неустойчивости в задаче Рэлея – Бенара. Новое пространственно-неоднородное состояние толпы обеспечивает агентам более эффективное перераспределение коллективной тепловой энергии, что будет далее продемонстрировано. Если в квазикристаллической структуре особи, находящиеся на периферии, страдали от переохлаждения, то в ожиженном состоянии с вихрями, доставляющими агентов от края структуры к ее центру тяжести и обратно, приемлемые тепловые условия получают все агенты. Хотя плата за новое нестационарное поведение также понятна: определенная группа агентов теряет комфорт нахождения в центральной части теплового поля. Зато популяция (если речь идет о животных, а не роботах) получает шанс коллективного выживания всех особей. Уместно заметить, что постоянное перемещение агентов в толпе требует дополнительных затрат энергии от каждого из них. Здесь мы сталкиваемся со стандартной дилеммой существования диссипативных структур: перестройка структуры понижает значение энтропии системы, но приводит к более энергичному движению элементов, что работает на увеличение энтропии. Суммарный баланс оказывается все-таки в пользу уменьшения энтропии, но указанный парадокс подтолкнул в свое время Пригожина назвать такие структуры диссипативными [Prigogine, Stengers, 1984].

Рисунок 7 показывает мгновенные значения полей скорости агентов при постепенном увеличении численности взаимодействующих агентов. Хорошо видно, как меняются масштаб и амплитуда вихревых движений в зависимости от растущего числа агентов. Вблизи порога фазового перехода 2-го рода вихревое движение зарождается локально (рис. 7, $N = 118$). Какое-то время однородная и вихревая фазы могут даже сосуществовать, так как в плотных группах малой численности энергетическая эффективность циркуляции особей в группе не является однозначно выигрышным поведением. Постепенно масштаб коллективного движения увеличивается, вихрь вовлекает в свое движение сначала десятки, а впоследствии и сотни особей (рис. 7, $N = 1000$). С ростом численности агентов растет также и число вихрей, в рамках которых организовано нестационарное движение агентов. Например, при $N = 150$ можно видеть два вихря, а в случае $N = 1000$ вихрей — уже 12, и они объединены в двухэтажную структуру.

Таким образом, можно говорить о целой последовательности фазовых переходов 2-го рода, после которых вихревые движения агентов усложняются и становятся все более нестационарными. На высоких значениях критичности наблюдается уже полноценная турбулентность в движении агентов в ожиженной группе. Этот процесс иллюстрируется на рис. 8, на котором приведена зависимость скоростной корреляции агентов Σ (15), осредненная по ансамблю, по времени и по числу реализаций, от численности группы N . На амплитудной кривой можно заметить по крайней мере два фазовых перехода. Как было показано выше, при $N^* = 110$ спонтанно возникает ожижение в плотной группе агентов, впервые возбуждается вихревое движение. Скоростная корреляция агентов увеличивается по закону, близкому к корневому, до значения 0,2. Второй значительный скачок корреляционной функции возникает около значения $N^* = 850$. Соответствующие мгновенные скоростные поля агентов, приведенные на рисунке, показывают, что именно изменяется в системе. Второй скачок связан с формированием двухуровневой системы вихрей в группе: наблюдаются довольно сильные по амплитуде движений вихри в центральной зоне и азимутальная система периферийных вихрей. Общая корреляция скоростей в группы из 1000 агентов вырастает до значения $\Sigma = 0,4$.

Гистограмма на рис. 9 демонстрирует эффективность перераспределения тепла в результате возникновения циркуляций в группе из 500 пингвинов (расчеты выполнены с использованием

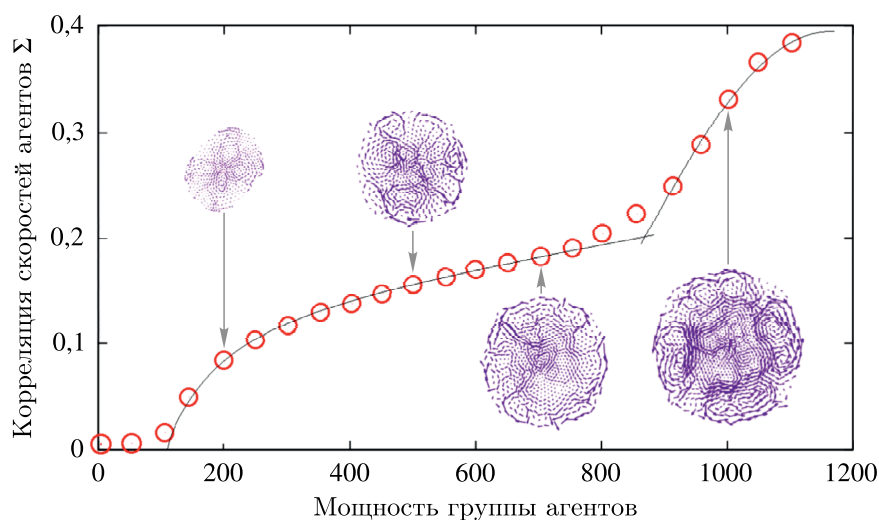


Рис. 8. Зависимость усредненной по ансамблю, времени и числу реализаций скоростной корреляционной функции (15) от численности плотной группы взаимодействующих агентов. Для нескольких значений $N = 200, 500, 700, 1000$ приведены мгновенные поля скоростей агентов. Параметры расчета такие же, как на рис. 6

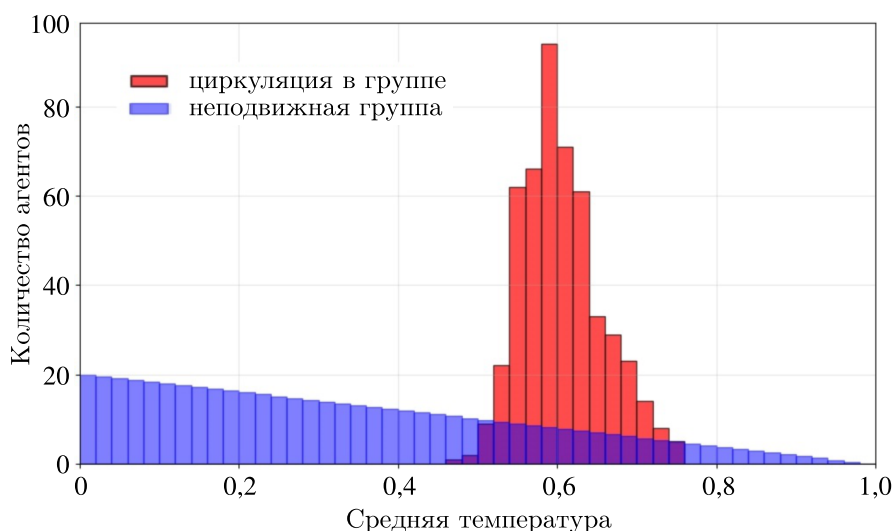


Рис. 9. Распределение количества пингвинов по значениям температуры, осредненной для каждой особи по времени вдоль траектории движения. Температура обезразмерена своим максимальным движением в центре стаи. Количество особей в группе — $N = 500$. Параметры расчета указаны в таблице 1

значений из таблицы 1). Приведены два распределения числа птиц по значениям температуры, осредненной по времени вдоль траектории движения для каждой i -й особи:

$$\langle T \rangle_i = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{T(t, \mathbf{r})}{T_{\max}} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i(t)} dt. \quad (17)$$

Средняя температура (17) была обезразмерена своим максимальным значением $T_{\max}$ в центре скопления. При таком размере стаи в системе уже развивается спонтанная циркуляция. Было проведено два расчета. В первом случае формировалось примерно круглое скопление из птиц, которые принудительно оставались неподвижными. Результаты расчетов показаны на рис. 9 (синяя гистограмма). Распределение температур в круглой стае может быть получено аналитически,

и оно имеет следующий вид:

$$T(r) = T_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (18)$$

где r_0 — радиус скопления [Bratsun, Kostarev, 2024]. С другой стороны, число особей в равноудаленном от центра сферическом слое увеличивается также квадратично. Поэтому синяя гистограмма на рис. 9 имеет линейный вид. Из распределения видно, что в комфортных условиях находится меньшая часть стаи в центре толпы, в то время как большая часть пингвинов мерзнет на периферии.

В случае естественной циркуляции распределение приобретает совершенно другой вид, приведенный на рис. 9 (красная гистограмма). Такой разительный переход происходит из-за двух факторов. Во-первых, тепловое поле деформируется здесь за счет конвективного движения особей и распределяется более равномерно по скоплению. А во-вторых, каждая особь проводит часть времени как в центре стаи, так и на периферии, получая в среднем тепла около $0,6T_{\max}$ от максимального значения в центре.

Так как теперь все агенты находятся в движении, в стае исчезли привилегированные особи, постоянно существовавшие при высоких температурах в центре. Но также исчезли и замерзающие птицы на периферии. Практически все особи теперь попадают в сравнительно узкий диапазон благоприятных температур — от 0,4 до 0,8.

Численные эксперименты с несимметричными начальными формами плотных скоплений показали, что с течением времени скопление деформируется, стремясь принять более округлую форму, так как последняя является более оптимальным состоянием для минимизации тепловых потерь. Здесь надо иметь в виду, что любая выступающая часть толпы агентов будет приводить к существенному понижению температуры в этой части. Это создает градиент температуры вдоль границы. В свою очередь, это заставляет агентов перемещаться вдоль границы в поисках более комфортной позиции в стае. Так работает механизм постепенного округления форм изначально сильно неоднородных скоплений агентов. Интересно заметить, что полевые наблюдения за пингвинами фиксируют постоянное движение отдельных особей вдоль края группы [Richter et al., 2018].

4.3. Влияние ветра на терморегуляцию в плотной группе агентов

В ходе численных экспериментов было обнаружено, что внезапное появление ветра существенно меняет поведение системы. Ветер воздействует на тепловое поле, смещая его максимум и деформируя тепловой факел. Это приводит к разрушению исходной симметрии задачи и возникновению вихревых движений агентов даже в группах малой численности. При воздействии ветра система быстро перестраивается, приходя к двухвихревому движению, ось симметрии которого совпадает с направлением ветра (рис. 10). В группах большой численности, в которых и без ветровой нагрузки уже произошел фазовый переход 2-го рода, наблюдается перестройка вихревой структуры. Другим следствием воздействия ветра является дрейф центра тяжести агрегата в направлении ветра. Механизм такого дрейфа вполне понятен: ветер смещает экстремум теплового поля, вынуждая агентов с некоторым запаздыванием следовать за ним. Это приводит к возбуждению колебаний. В рамках модели сплошной среды такие колебания наблюдать невозможно, так как при формулировании краевой задачи скопление агентов закреплено в пространстве. Полученные данные хорошо согласуются с аналитическими результатами, полученными в рамках континуальной модели [Браун, Костарев, 2022], а также данными натурных наблюдений за пингвинами (см. рис. 1).

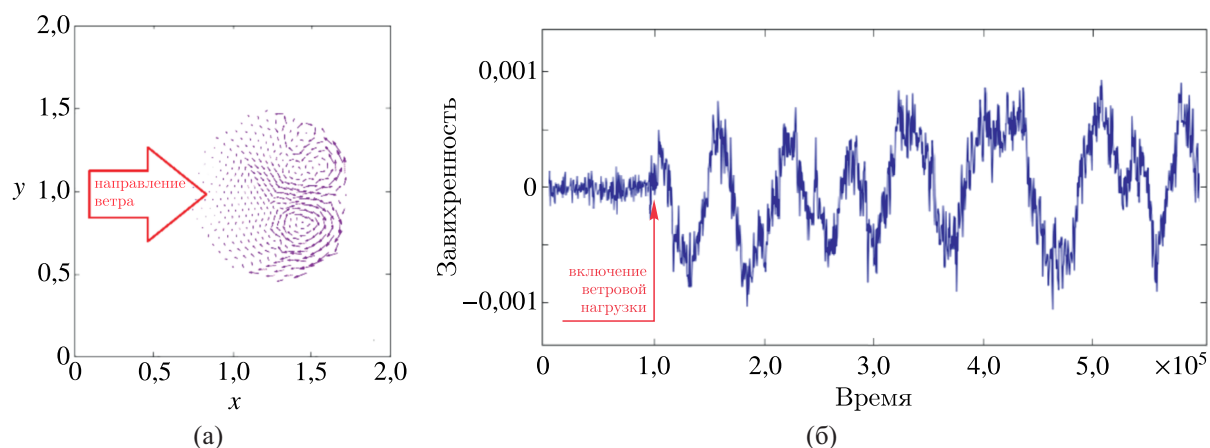


Рис. 10. Влияние внезапного включения ветра на терморегуляцию плотной группы агентов численностью $N = 300$: (а) мгновенное поле скорости агентов после появления ветровой нагрузки $\mathbf{V}: (1, 0)$ м/с; (б) временная зависимость завихренности $\Phi(t)$ до и после включения ветровой нагрузки в момент $t = 10^5$ с. Расчетная область 2 на 2 м, для вычисления поля температур использовалась равномерная квадратная сетка 201×201 узлов. Начальное положение агентов задавалось в рамках заполненного квазикристаллического агрегата, чтобы исключить длительный процесс сборки агентов. Температура окружающей среды — $+20^\circ\text{C}$. Параметры расчета указаны в таблице 2 для микроботов

5. Обсуждение и заключение

Тепловая конвекция, под которой понимается движение неравномерно нагретой жидкости или газа в поле внешних сил, занимает особое место в истории физики. Исследование этого явления привело к развитию теории конвективной устойчивости [Rayleigh, 1916], первым наблюдениям формирования пространственно-распределенного паттерна [Bénard, 1900], открытию детерминированного хаоса [Lorenz, 1963]. Как правило, это явление наблюдается в жидкостях или газах. Стандартное объяснение возбуждения конвекции в рамках механики жидкости выглядит следующим образом [Gershuni, Zhukhovitsky, 1976]: если нагретый элемент сплошной среды в поле тяжести случайно смещается в направлении более холодного окружения, то он продолжит двигаться дальше благодаря подъемной силе. Таким образом, конвективная неустойчивость связана с вариацией плотности среды из-за неоднородности ее нагрева. Совершенно другое описание конвекции дает Пригожин в рамках синергетики [Prigogine, Stengers, 1984]. Он называет спонтанное возбуждение конвективного массопереноса чудом, которое заключается в том, что огромное число молекул внезапно переходит к согласованному движению в пространстве и времени. Последнее находит свое выражение в виде сложного регулярного паттерна. Таким образом, фазовый переход 2-го рода позволяет среде найти системный ответ на внезапно выросший внешний поток тепловой энергии.

Оставаясь в рамках синергетической парадигмы, интересно задать себе вопрос, который обычно не обсуждается в литературе по синергетике: что изменится, если выйти за пределы механики жидкости и заменить молекулы более сложными элементами? Обычно подразумевается следующий ответ: при усложнении элемента активной среды существенно усложняется и системный эффект, который он производит. То есть взаимодействующие физические объекты приводят к самоорганизации на физическом уровне, а взаимодействующие биологические элементы порождают более сложную самоорганизацию биологического уровня. Скорее всего, это так и есть. Но всегда ли это так? Явление биоконвекции частично дает ответ на этот вопрос [Hillesdon, Pedley, 1996]. Биоконвекция традиционно воспринимается прежде всего как неустойчивость гетерогенной среды, включающей огромное число плавающих бактерий. Хотя

среда в этом случае изотермическая, способность бактерий к самодвижению благодаря, например, хемотаксису обеспечивает неоднородное распределение плотности среды. Это приводит в поле тяжести к появлению эффективной подъемной силы. С биологической точки зрения фазовый переход к сложной пространственной циркуляции позволяет бактериям получить доступ к ресурсу, необходимому для коллективного выживания всей колонии. Но сам фазовый переход имеет чисто физическую природу — неустойчивость Рэлея–Тейлора [Rayleigh, 1883]! Но что можно сказать о животных? Коллективное поведение в сложных биологических системах может выступать в роли механизма сохранения энергии и играть ключевую роль при выживании группы организмов [Trenchard, Perc, 2016]. Подобные явления в среде животных гораздо труднее дифференцировать от социального поведения в группе, они являются предметом изучения биологов, имеющих отличную от физики методологию. Как правило, простого объяснения этим явлениям на основе физических механизмов здесь уже недостаточно, так как основным триггером такого поведения является скорее социальная адаптация, а не безусловный рефлекс [Sumpter, 2010]. Тем не менее в данной работе мы показываем, что здесь есть исключения из правил: например, императорские пингвины при определенных условиях демонстрируют коллективное поведение, с точки зрения физики мало отличимое от процесса тепловой конвекции. Оказывается, что простые физические правила (с точки зрения биологии) в приложении к высшей форме материи действуют совершенно так же универсально, как и по отношению к атомам и молекулам сплошной среды. И это не может не удивлять.

Выше цитировались работы, посвященные самоорганизации в человеческой толпе. Уместно обсудить, чем человеческая толпа отличается от пингвинов. Как было отмечено, глобальные стационарные вихревые движения не наблюдаются в человеческих скоплениях [Helbing, 2012]. Зато в них можно наблюдать явление спонтанной турбулизации, которое включает образование множества мелких неупорядоченных вихрей и струй, увлекающих людей. Люди, как агенты коллективного движения, более подвижны, чем пингвины. Такая толпа легче меняет агрегатные состояния. При наличии целеполагания и плотной упаковки человеческая толпа, по нашему мнению, всегда находится на более высоком энергетическом уровне, характеризуемым большим значением эффективного числа Рейнольдса, если рассматривать толпу как некую эффективную жидкость. Таким образом, срыв неподвижного состояния приводит к мгновенной и мощной турбулизации движения.

Толпа пингвинов, вынашивающих яйца во время зимовки, состоит из очень медленных, но скользких индивидов, у которых нет ярко выраженного целеполагания, как у людей. Кроме того, толпа пингвинов во время зимовки находится под контролем весьма инертного температурного поля. Поэтому в среде пингвинов вполне можно наблюдать возбуждение первых мод неустойчивости внезапно оживленного слоя, которые редко в дальнейшем турбулизируются. Более того, давно замечено, что императорские пингвины предпочитают образовывать несколько плотных скоплений поменьше, чем одно гигантское [Richter et al., 2018]. В данной работе мы показали, что увеличение численности агентов в толпе ведет ко все более турбулизированному состоянию среды, в котором агенты вынуждены двигаться все быстрее и быстрее. Возможно, формирование не слишком крупных скоплений закреплено у пингвинов на уровне инстинкта именно потому, что слишком энергичные перемещения в хаотизированной толпе также не способствуют выживанию, как и пассивное состояние неподвижной массы.

В заключение отметим: в данной работе мы предложили простую математическую модель, которая описывает фазовые переходы в группе обобщенных агентов, под которыми понимается любое живое существо (как микроскопическое, так и макроскопическое) или синтетическое устройство любого размера, которое следует правилу движения по градиенту коллективного теплового поля. Это простое правило, тем не менее, приводит к сложной пространственно-временной коллективной динамике агентов, которая мало чем отличается по своей сути от физической тепловой конвекции.

Список литературы (References)

- Антуков А. М., Брацун Д. А., Люшин А. В. Моделирование поведения паникующей толпы в многоуровневом разветвленном помещении // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 3. — С. 491–508.
- Aptukov A. M., Bratsun D. A., Lyushnin A. V. Modelirovanie povedeniya panikuyushej tolpy v mnogourovnevom razvetvlyonnom pomeschenii [Modeling of behavior of panicked crowd in multi-floor branched space] // Computer Research and Modeling. — 2013. — Vol. 5, No. 3. — P. 491–508 (in Russian).
- Брацун Д. А., Захаров А. П. Моделирование пространственно-временной динамики циркадиан-ных ритмов *Neurospora crassa* // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 2. — С. 191–213.
- Bratsun D. A., Zakharov A. P. Modelirovanie prostranstvenno-vremennoj dinamiki tsirkadiannyh ritmov *Neurospora crassa* [Modelling spatio-temporal dynamics of circadian rhythms in *Neurospora crassa*] // Computer Research and Modeling. — 2011. — Vol. 3, No. 2. — P. 191–213 (in Russian).
- Брацун Д. А., Костарев К. В. Сплошносредная модель биоконвекции с центростремительной силой // Вестник Пермского университета. Физика. — 2022. — № 2. — С. 36–46.
- Bratsun D., Kostarev K. Sploshnosrednaya model' biokonveksii s tsentrostremitel'noj siloj [A continuum model of bioconvection with a centripetal force] // Bulletin of Perm University. Physics. — 2022. — No. 2. — P. 36–46 (in Russian).
- Красняков И. В., Брацун Д. А., Письмен Л. М. Математическое моделирование роста карциномы при динамическом изменении фенотипа клеток // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 6. — С. 879–902.
- Krasnyakov I. V., Bratsun D. A., Pismen L. M. Matematicheskoe modelirovanie rosta kartsinomy pri dinamicheskom izmenenii fenotipa kletok [Mathematical modeling of carcinoma growth with a dynamic change in the phenotype of cells] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 6. — P. 879–902 (in Russian).
- Крючечникова А. Н., Левдик Т. Г., Браже А. Р. Моделирование морфологии астроцитов с применением алгоритма колонизации пространства // Компьютерные исследования и моделирование. — 2025. — Т. 17, № 3. — С. 465–481.
- Kriuchchnikova A. N., Levdik T. G., Brazhe A. R. Modelirovanie morfologii astrotsitov s primeneniem algoritma kolonizatsii prostranstva [Modelling of astrocyte morphology with space colonization algorithm] // Computer Research and Modeling. — 2025. — Vol. 17, No. 3. — P. 465–481 (in Russian).
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Физическая кинетика. Том X. — М.: Изд-во физико-математической литературы, 2002. — 536 с.
- Landau L. D., Lifshits E. M. Teoreticheskaja fizika. Fizicheskaja kinetika. Tom X [Theoretical physics. Physical kinetics. Vol. X.]. — Moscow: Fizmat literatura, 2002. — 536 p. (in Russian).
- Ancel A., Visser H., Handrich Y., Masman D., Le Maho Y. Energy saving in huddling penguins // Nature. — 1997. — Vol. 385. — P. 304–305.
- Bees M. A. Advances in bioconvection // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2020. — Vol. 52, No. 1. — P. 449–476.
- Bénard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide // Revue Gén. Sci. Pures Appl. — 1900. — Vol. 11. — P. 1261–1271, 1309–1328.
- Bratsun D., Kostarev K. Phase transition in a dense swarm of self-propelled bots // Fluid Dynamics & Materials Processing. — 2024. — Vol. 20, No. 8. — P. 1785–1798.
- Bratsun D., Krasnyakov I. Study of architectural forms of invasive carcinoma based on the measurement of pattern complexity // Math. Model. Nat. Phenom. — 2022. — Vol. 17. — Art. 15.
- Bratsun D. A., Krasnyakov I. V., Pismen L. M. Biomechanical modeling of invasive breast carcinoma under a dynamic change in cell phenotype: collective migration of large groups of cells // Biomech. Model. Mechanobiol. — 2020. — Vol. 19. — P. 723–743.
- Canals M., Bozinovic F. Huddling behavior as critical phase transition triggered by low temperatures // Complexity. — 2011. — Vol. 17, No. 1. — P. 35–43.
- Danino T., Mondragón-Palomino O., Tsimring L., Hasty J. A synchronized quorum of genetic clocks // Nature. — 2010. — No. 463. — P. 326–330.
- Gershuni G. Z., Zhukhovitsky E. M. Convective stability of incompressible fluids. — Keter Publishing House, 1976. — P. 330.

- Gerum R. C., Fabry B., Metzner C., Beaulieu M., Ancel A., Zitterbart D. P.* The origin of traveling waves in an emperor penguin huddle // *New J. Phys.* — 2013. — Vol. 15, No. 12. — Art. 125022.
- Giometto A., Altermatt F., Maritan A., Stocker R., Rinaldo A.* Generalized receptor law governs phototaxis in the phytoplankton *Euglena gracilis* // *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* — 2015. — Vol. 112. — P. 7045–7050.
- Gregor T., Fujimoto K., Masaki N., Sawai S.* The onset of collective behavior in social amoebae // *Science*. — 2010. — Vol. 328. — P. 1021–1025.
- Helbing D.* Self-organization in pedestrian crowds // *Helbing D. (eds.) Social self-organization. understanding complex systems.* — Berlin, Heidelberg: Springer, 2012.
- Helbing D., Farkas I., Vicsek T.* Simulating dynamical features of escape panic // *Nature*. — 2000. — Vol. 407, No. 6803. — P. 487–490.
- Helbing D., Johansson A., Al-Abideen H. Z.* Dynamics of crowd disasters: an empirical study // *Phys. Rev. E*. — 2007. — Vol. 75, No. 4. — Art. 046109.
- Hillesdon A. J., Pedley T. J.* Bioconvection in suspensions of oxytactic bacteria: linear theory // *J. Fluid Mech.* — 1996. — Vol. 324. — P. 223–259.
- Javadi A., Arrieta J., Tuval I., Polin M.* Photo-bioconvection: towards light control of flows in active suspensions // *Philos. Trans. R. Soc. A*. — 2020. — Vol. 378. — Art. 20190523.
- La Marche de l'Empereur.* — Un film du Luc Jacquet. — Paris, France: Buena Vista Home Entertainment, 2005 (DVD-ROM).
- Landau L. D., Lifshitz E. M.* Statistical physics: theory of the condensed state. — Elsevier Science & Technology Books, 2013. — P. 400.
- Leaman E. J., Geuther B. Q., Behkam B.* Hybrid centralized/decentralized control of a network of bacteria-based bio-hybrid microrobots // *J. Micro-Bio. Robot.* — 2019. — Vol. 15. — No. 1. — P. 1–12.
- Lorenz E. N.* Deterministic non-periodic flow // *J. Atmos. Sci.* — 1963. — Vol. 20, No. 2. — P. 130–141.
- Miller M. B., Bassler B. L.* Quorum sensing in bacteria // *Annu. Rev. Microbiol.* — 2001. — Vol. 55. — P. 165–199.
- Mogami Y., Yamane A., Gino A., Baba S. A.* Bioconvective pattern formation of Tetrahymena under altered gravity // *J. Exp. Biol.* — 2004. — Vol. 207. — P. 3349–3359.
- Ozin G. A., Arsenault A. C.* Nanochemistry: a chemical approach to nanomaterials. — Royal Society of Chemistry, 2005. — P. 820.
- Pismen L.* Morphogenesis deconstructed: an integrated view of the generation of forms. — Cham: Springer, 2020. — P. 146.
- Prigogine I., Stengers I.* Order out of Chaos: Man's new dialogue with nature. — Flamingo, 1984. — P. 349.
- Ramamonjy A., Brunet P., Dervaux J.* Pattern formation in photo-controlled bioconvection // *J. Fluid Mech.* — 2023. — Vol. 971. — Art. A29.
- Rayleigh J. W. S.* Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // *Proc. London Math. Soc.* — 1883. — Vol. 14. — P. 170–177.
- Rayleigh J. W. S.* On convection currents in horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side // *Philos. Mag. Ser.* — 1916. — Vol. 6, No. 32. — P. 529–546.
- Richter S., Gerum R., Winterl A., Houstin A., Seifert M., Peschel J., Fabry B., Le Bohec C., Zitterbart D. P.* Phase transitions in huddling emperor penguins // *J. Phys. D Appl. Phys.* — 2018. — Vol. 51, No. 21. — Art. 214002.
- Rubenstein M., Cornejo A., Nagpal R.* Programmable self-assembly in a thousand-robot swarm // *Science*. — 2014. — Vol. 345. — P. 795–799.
- Silverberg J. L., Bierbaum M., Sethna J. P., Cohen I.* Collective motion of humans in mosh and circle pits at heavy metal concerts // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 110. — Art. 228701.

- Slavkov I., Carrillo-Zapata D., Carranza N., Diego X., Jansson F., Kaandorp J., Hauert S., Sharpe J.* Morphogenesis in robot swarms // *Sci. Robot.* — 2018. — Vol. 3, No. 25. — Art. eaau9178.
- Solem J. C.* Self-assembling micrites based on the Platonic solids // *Robot. Auton. Syst.* — 2002. — Vol. 38, No. 2. — P. 69–92.
- Sueur C., Ishizuka S., Kaigaishi Y., Yamamoto S.* The warmth of sarudango: modelling the huddling behaviour of Japanese macaques (*Macaca fuscata*) // *Animals.* — 2024. — Vol. 14, No. 23. — Art. 3468.
- Sumpter D. J.* Collective animal behavior. — Princeton University Press, 2010. — P. 312.
- Tabassum D., Polyak K.* Tumorigenesis: it takes a village // *Nat. Rev. Cancer.* — 2015. — Vol. 8. — P. 473–483.
- Trenchard H., Perc M.* Energy saving mechanisms, collective behavior and the variation range hypothesis in biological systems: a review // *BioSystems.* — 2016. — Vol. 147. — P. 40–66.
- Turing A.* The chemical basis of morphogenesis // *Phil. Trans. Roy. Soc.* — 1952. — Vol. 237, No. 641. — P. 37–72.
- Verisokin A. Yu., Verveiko D. V., Postnov D. E., Brazhe A. R.* Modeling of astrocyte networks: toward realistic topology and dynamics // *Front. Cell. Neurosci.* — 2021. — Vol. 15. — Art. 645068.
- Vicsek T., Zafeiris A.* Collective motion // *Phys. Rep.* — 2012. — Vol. 517. — P. 71–140.
- Wadhams G. H., Armitage J. P.* Making sense of it all: Bacterial chemotaxis // *Nat. Rev. Mol. Cell Biol.* — 2004. — Vol. 5. — P. 1024–1037.
- Whitesides G. M., Grzybowski B.* Self-assembly at all scales // *Science.* — 2002. — Vol. 295. — P. 2418–2421.