

УДК: 550.344, 550.311

Сейсмические волновые поля в сферически-симметричной Земле с высокой детальностью. Аналитическое решение

А. Г. Фатьянов^{1,a}, В. Ю. Бурмин^{2,b}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики, СО РАН,
Россия, 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, д. 6

²Институт физики Земли РАН им. О. Ю. Шмидта,
Россия, 123242, г. Москва, ул. Б. Грузинская, д. 10, стр. 1

E-mail: ^a fat@nmsf.sccc.ru, ^b vburmin@yandex.ru

Получено 30.09.2024, после доработки — 31.07.2025.
Принято к публикации 08.08.2025.

Получено аналитическое решение для сейсмических волновых полей в сферически-симметричной Земле. В случае произвольной слоистой среды решение, в которое входят функции Бесселя, строится с помощью дифференциальной прогонки. Для устойчивого вычисления волновых полей используется асимптотика функций Бесселя. Показано, что классическая асимптотика в случае высоких частот дает погрешность в решении. Для эффективного вычисления решения без погрешностей с высокой детальностью используется оригинальная асимптотика. Создана программа, позволяющая проводить расчеты для высокочастотных (1 герц и выше) телесейсмических волновых полей в дискретном (слоистом) шаре планетарных размеров. Расчеты можно осуществлять даже на персональных компьютерах с распараллеливанием OpenMP.

В работе Бурмина (2019 г.) предложена сферически-симметричная модель Земли. Она характеризуется тем, что в ней внешнее ядро обладает вязкостью и, следовательно, эффективным модулем сдвига, отличным от нуля. Для этой модели Земли проведен расчет с высокой детальностью с несущей частотой в 1 герц. В результате аналитического расчета обнаружено, что впереди *РКР*-волн возникают высокочастотные колебания небольшой амплитуды, так называемые предвестники. Аналитический расчет показал, что теоретические сейсмограммы для этой модели Земли во многом похожи на экспериментальные данные. При этом ключевым моментом сравнения является возникновение предвестников впереди *РКР*-волн. Это подтверждает правильность идей, положенных в основу ее построения.

Ключевые слова: радиально-симметричная Земля, аналитическое решение, новая асимптотика, дифференциальная прогонка, устойчивое вычисление решения, телесейсмические волновые поля, модель Земли, модуль сдвига, предвестники *РКР*-волн

Работа выполнена в соответствии с Государственным заданием ИВМиМГ СО РАН № FWNM-2025-0004 и ИФЗ РАН № FMWU-2025-0038.

UDC: 550.344, 550.311

Seismic wave fields in spherically symmetric Earth with high details. Analytical solution

A. G. Fatyanov^{1,a}, V. Yu. Burmin^{2,b}

¹Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch,
Russian Academy of Sciences,

6 Ac. Lavrentieva ave., Novosibirsk, 630090, Russia

²Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences,
10/1 B. Gruzinskaya st., Moscow, 123242, Russia

E-mail: ^a fat@nmsf.sccc.ru, ^b vburmin@yandex.ru

Received 30.09.2024, after completion — 31.07.2025.

Accepted for publication 08.08.2025.

An analytical solution is obtained for seismic wave fields in a spherically symmetric Earth. In the case of an arbitrary layered medium, the solution, which includes Bessel functions, is constructed by means of a differential sweep method. Asymptotic of Bessel functions is used for stable calculation of wave fields. It is shown that the classical asymptotic in the case of a sphere of large (in wavelengths) dimensions gives an error in the solution. The new asymptotic is used for efficient calculation of a solution without errors with high detail. A program has been created that makes it possible to carry out calculations for high-frequency (1 hertz and higher) teleseismic wave fields in a discrete (layered) sphere of planetary dimensions. Calculations can be carried even out on personal computers with OpenMP parallelization.

In the works of Burmin (2019) proposed a spherically symmetric model of the Earth. It is characterized by the fact that in it the outer core has a viscosity and, therefore, an effective shear modulus other than zero. For this model of the Earth, a highly detailed calculation was carried out with a carrier frequency of 1 hertz. As a result of the analytical calculation, it was found that high-frequency oscillations of small amplitude, the so-called “precursors”, appear ahead of the *PKP* waves. An analytical calculation showed that the theoretical seismograms for this model of the Earth are in many respects similar to the experimental data. This confirms the correctness of the ideas underlying its construction.

Keywords: radially symmetric Earth, analytical solution, new asymptotic, differential sweep method, stable solution computation, teleseismic wave fields, Earth model, shear modulus, precursors of *PKP* waves

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 5, pp. 903–922 (Russian).

The work was supported by order of the ICM&MG SB RAS No. FWNM-2025-0004 and IPE RAS No. FMWU-2025-0038.

1. Введение

Еще в 1934 году Гутенберг и Рихтер [Gutenberg, Richter, 1934] обнаружили на экспериментальных данных волновые фазы — предвестники (precursor), которые возникают впереди *PKP*-волн. Аббревиатурой «*PKP*» в сейсмологии обозначают продольные волны, которые проходят через земное ядро.

Объяснение этого явления (возникновение предвестников) породило в научной среде сейсмологов дискуссию, которая окончательно не завершена и по сей день, так как считается, что это единственное маленькое окно в глубины Земли.

В настоящее время общепринято, что волны-предвестники, наблюдаемые на сейсмограммах в диапазоне расстояний меньших 145 градусов впереди *PKP*-волн, объясняются рассеянием на мелкомасштабных неоднородностях в низах мантии. В случае классической непрерывной модели радиально-симметричной Земли впереди *PKP*-волн волновое вступление не образуется [Wen, Helmberger, 1998]. Поэтому объяснение предвестников, наблюдаемых на реальных данных впереди *PKP*-волн, рассеянием на мелкомасштабных неоднородностях [Hedlin et al., 1997] на первый взгляд представляется разумным.

Но ряд исследователей выдвигали гипотезы о природе предвестников, возникающих и в радиально-симметричной сферической Земле, без наличия каких-либо неоднородностей, малых или больших. В том числе сам первооткрыватель предвестников Гутенберг считал, что они вызваны преломлением во внутреннем ядре [Gutenberg, 1957]. Кроме того, в работе [Бурмин, Бойко, 2017] показано, что предвестники не могут быть волнами, рассеянными на неоднородностях в мантии. Эти и ряд других исследований стимулировали авторов на исследование данного явления.

Поскольку амплитуда предвестников очень мала, требуется высокая детальность при вычислении волнового поля. Чтобы убрать погрешности, обусловленные сеточной аппроксимацией, было рассмотрено аналитическое решение для акустических волн в радиально-симметричной Земле. Общепринятый математический метод решения таких задач в сферической системе координат хорошо известен (см., например, [Тихонов, Самарский, 2004]). Используя технологию разложения по спецфункциям (получелые бесселя) была создана программа для расчета акустических волн в однородном шаре. Однако при расчете для шара земных размеров (высоких частот) стали возникать сильные помехи. Было непонятно, в чем дело. Ведь считалось, что здесь уже все в математическом плане сделано. Это дало еще одну мотивацию для работы: разобраться, почему общепринятый метод не работает для шара больших (в длинах волн) размеров. Проведенные аналитические исследования и численные расчеты выявили причину. Дело оказалось в переходе на асимптотику в формулах для решения в спектральной области. Поэтому проведена работа по разработке асимптотики, адаптированной для раскрытия неопределенностей в решении в условиях выхода за границы числового диапазона при использовании любых вычислительных платформ (машинного округления). В итоге метод заработал.

Далее с помощью метода дифференциальной прогонки составлена программа расчета акустических полей для шара с произвольным количеством сферических слоев. Приведены расчеты полного волнового поля и годографов для продольных волн для дискретной радиально-симметричной модели Земли АК135 с несущей частотой в 1 герц [Kennett et al., 1995]. Аналитическое решение показало, что на углах меньших 145 градусов впереди *PKP*-волн возникают колебания (предвестники) с небольшой амплитудой, имеющие более высокую частоту, порядка 1,3 герца. То есть, как и предполагали исследователи, в том числе и Гутенберг, предвестники возникают и для модели радиально-симметричной Земли.

В данной работе рассмотрена классическая задача построения аналитического решения для сейсмических волновых полей в радиально-симметричном шаре. Эта задача рассматривалась

во многих работах (см., например, [Тихонов, Самарский, 2004; Агаян и др., 2013]). В данной работе показано, что эту задачу нельзя считать окончательно решенной для высокочастотных волновых полей.

Решение этой задачи строится следующим образом. На первом этапе применяется классическое преобразование Фурье – Лежандра. В итоге исходная постановка для распространения сейсмических волн сводится к двухпараметрическому семейству краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Параметрами здесь являются временные и пространственные частоты. На втором этапе в каждом сферическом слое искомая краевая задача второго порядка сводится к двум задачам Коши первого порядка. Причем одна из них линейная, другая нелинейная. Следуя [Фатьянов, 1990], построено явное решение нелинейной задачи Коши. Это позволило дифференциальной прогонкой получить аналитическое решение в случае произвольной слоистой среды, в которое входят функции Бесселя. В случае когда функции Бесселя не выходят за границы числового диапазона на используемой вычислительной платформе, они, а тем самым и аналитическое решение, вычисляются по опубликованному открытому коду (см., например, [Zhang, Jin, 1996]). Для данной задачи индекс бесселевых функций (пространственных частот) имеет величину порядка 5000.

Но, как показали численные расчеты при решении этой задачи для шара земных размеров с несущей частотой в 1 герц, нужно брать порядка 50 000 пространственных частот. Такое количество частот возникает при необходимости расчета высокочастотных волновых полей для модели Земли. А в этом случае, поскольку функции Бесселя $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ быстро стремятся к нулю и бесконечности при возрастании индекса ν (пространственной частоты), в аналитическом решении возникают неопределенности разных типов (например, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$). Отбросить их нельзя, так как это приводит к возникновению помех. Для раскрытия неопределенностей требуется использование асимптотики функций Бесселя. В настоящей работе используется оригинальная асимптотика, приведенная в работах [Фатьянов, Бурмин, 2019; Фатьянов, Бурмин, 2021]. Это позволило устойчиво и с высокой детальностью вычислять высокочастотные волновые поля.

Проведен анализ первого вступления сейсмических волновых полей для однородного шара в случае использования новой и классической асимптотики. Выяснилось следующее. Применение классической и новой асимптотики дает одинаковые результаты для шара земных размеров только в случае низкочастотных волновых полей. Но в случае высокочастотных волновых полей использование классической асимптотики приводит к возникновению помех в виде ложных фаз. Это делает невозможным использование классической асимптотики для расчета высокочастотных сейсмических волновых полей в шаре земных размеров. Дело здесь в том, что классическая асимптотика верна при $\nu \gg |x|$. А при расчетах аналитического решения для шара земных размеров, например, функция Бесселя $Y_\nu \sim \infty$, когда $\nu \sim |x|$. То есть классическую асимптотику здесь нельзя использовать.

В настоящее время активно развиваются конечно-разностные методы для расчета волновых полей в Земле. Несмотря на достижения в области высокопроизводительных вычислений, численное моделирование распространения высокочастотных (например, 1 Гц или выше) сейсмических волн в глобальном масштабе по-прежнему невозможно [Wu et al., 2018]. Чтобы преодолеть эту трудность, используется гибридный (комбинированный) метод для расчета телесейсмических волновых полей. Однако при гибридном моделировании возникают погрешности [Shen et al., 2022].

Разработанный метод позволяет устойчиво вычислять аналитическое решение для высокочастотных (1 герц и выше) телесейсмических волновых полей в шаре земных размеров. Использование новой асимптотики дает возможность эффективного вычисления решения без погрешностей с высокой детальностью. Это позволяет проводить расчеты даже волновых фаз небольшой интенсивности. Таких как, например, предвестники продольных P -волн. При этом созданная

программа позволяет проводить расчеты даже на персональных компьютерах с распараллеливанием OpenMP.

По созданной программе проведен расчет для дискретной (слоистой) модели Земли [Бурмин, 2019] с несущей частотой в 1 герц. Обычно считается, что внешнее ядро Земли является жидким, так как через него не проходят упругие поперечные волны. В соответствии с этим модуль сдвига во внешнем ядре Земли принимается равным нулю. По крайней мере так выглядят современные физические модели Земли. В то же время всякая нормальная (не квантовая или не сверхтекучая) жидкость обладает вязкостью и, следовательно, по отношению к достаточно высокочастотным колебаниям обладает эффективным модулем сдвига, отличным от нуля. Так как скорость продольных сейсмических волн V_P определяется формулой

$$V_P = \sqrt{\frac{k_S + \frac{4}{3}\mu}{\rho}},$$

то в данном случае отличие от нуля модуля сдвига μ существенно влияет на характер изменения скорости продольных сейсмических волн, особенно в низах внешнего ядра Земли (рис. 1) [Бурмин, 2019]. Здесь k_S — адиабатический модуль всестороннего сжатия, ρ — плотность. На рис. 2 показана лучевая картина в земном ядре, соответствующая скоростной кривой, представленной на рис. 1.

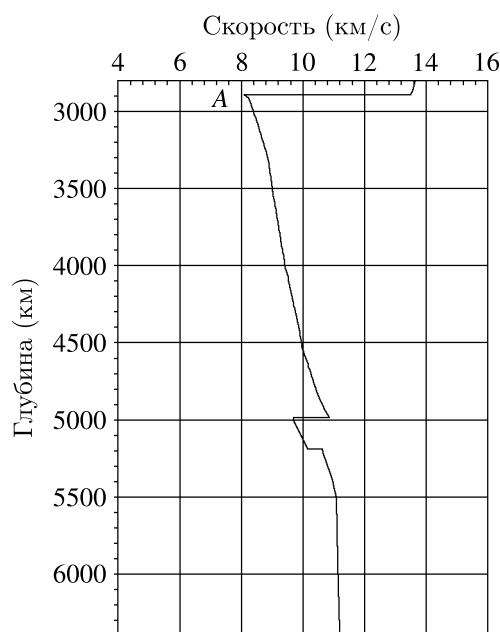


Рис. 1. Распределение скорости продольных сейсмических волн в земном ядре из работы [Бурмин, 2019]

В результате аналитического расчета для дискретной модели Земли [Бурмин, 2019] обнаружено, что впереди PKP -волн возникают колебания небольшой амплитуды. Спектральный анализ показал, что эти колебания имеют более высокую частоту. Их частота примерно равна 1,25 герца.

Это явление объясняется рассмотрением прямой кинематической задачи для годографа преломленных P -волн для сферически-симметричной дискретной (слоистой) скоростной модели Земли [Бурмин, 2019]. Впереди годографа PKP -волн возникает интерференционная картина преломленных волн. Причем если лучи выпускаются из источника с меньшим шагом, то волн становится больше, и они дальше заходят в область меньших углов. Кроме того, на каждую ветвь годографа преломленных волн садится своя дифракционная волна. Одна дифракционная

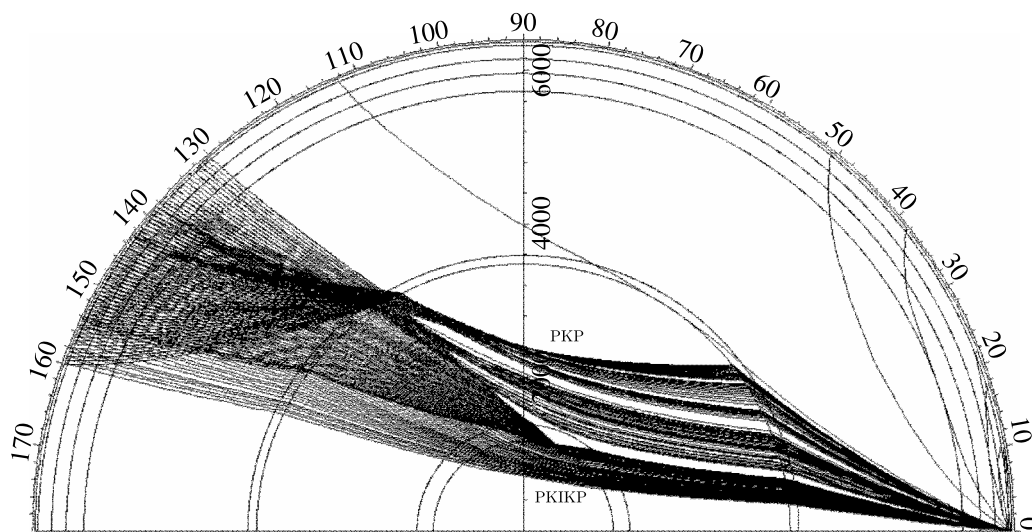


Рис. 2. Лучевая картина в земном ядре, соответствующая распределению скорости распространения продольных сейсмических волн, представленному на рис. 1

волна имеет незначительную амплитуду, но их много. Это и приводит к возникновению высокочастотного вступления (предвестника) впереди *PKP*-волн. Отметим, что для моделей Земли с непрерывным изменением скорости распространения сейсмических волн во внешнем ядре интерференционной картины не возникает [Фатьянов, Бурмин, 2019].

Аналитический расчет показал, что теоретические сейсмограммы для модели Земли [Бурмин, 2019] во многом похожи на экспериментальные сейсмограммы, полученные мировой сетью сейсмических станций. При этом ключевым моментом является возникновение предвестников впереди *PKP*-волн. Это сравнение, с одной стороны, подтверждает справедливость выводов о природе предвестников сейсмических волн, полученных в [Фатьянов, Бурмин, 2019]. С другой — подтверждает правильность идей, положенных в основу построения модели Земли в [Бурмин, 2019].

Аналитическое решение задачи распространения волновых полей в шаре получено давно, но часто исследователи ограничиваются только построением решения и теоретическими исследованиями. Численные результаты в основном получены для модельных задач, например для верификации конечно-разностных методов [Агаян и др., 2013]. Данная работа позволяет говорить, что аналитика может использоваться и для решения сложных задач. Причем с высокой детальностью, для значительных пространственно-временных масштабов и с небольшими вычислительными затратами.

2. Постановка задачи

Математическая постановка задачи моделирования сейсмических волн формулируется в сферической системе координат ($0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) следующим образом: определить вектор смещения $\hat{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$ из хорошо известных динамических уравнений упругости (например, [Тихонов, Самарский, 2004]).

В качестве краевого условия приложим в точке $r = R_1$, $\theta = 0$ сосредоточенное воздействие типа радиальной осесимметричной силы:

$$\sigma_{rr} = \frac{\delta(\theta)}{R_1^2 \sin \theta} f(t), \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad f(t) = e^{-\left(\frac{\pi f_0 t}{2}\right)^2} \sin(2\pi f_0 t). \quad (1)$$

В (1) σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ — напряжения, $f(t)$ — функция источника по времени, f_0 — его видимая частота, R_1 — радиус Земли. В этом случае возбуждается поле смещений $\widehat{u} = u_r(r, \theta, t)\widehat{e}_r + u_\theta(r, \theta, t)\widehat{e}_\theta$, не зависящее от координаты φ .

В начальный момент времени ставятся нулевые условия:

$$u_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} = u_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Кроме того, добавляется условие ограниченности решения в центре шара:

$$\widehat{u}|_{r=0} < \infty. \quad (3)$$

На границах $r = R_j$, где скорости продольных ($V_P(r)$), поперечных ($V_S(r)$) волн и плотности $\rho(r)$ терпят разрыв, вводятся известные условия сопряжения (непрерывности) [Тихонов, Самарский, 2004]:

$$[u_r] = [u_\theta] = [\sigma_{rr}] = [\sigma_{r\theta}]|_{r=R_j} = 0. \quad (4)$$

В (4) σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ — напряжения, u_r , u_θ — смещения.

3. Отделение переменных

На первом этапе решение краевой задачи (1)–(4) ищется в виде разложения Фурье–Лежандра по переменным (θ, t) [Тихонов, Самарский, 2004; Фатьянов, 1990]:

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, t) &= \frac{1}{2T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_r(r, k, \omega_m) \exp(i\omega_m t) P_k(\cos \theta), \\ u_\theta(r, \theta, t) &= \frac{1}{2T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_\theta(r, k, \omega_m) \exp(i\omega_m t) P_k^1(\cos \theta). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $P_k(x)$, $P_k^1(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) — многочлены Лежандра [Тихонов, Самарский, 2004], $\omega_m = \frac{m\pi}{T}$.

Далее для сокращения записи несущественные переменные обозначаются буквой s , а несущественные индексы опускаются.

После применения (5) постановка (1)–(4) сведена к двухпараметрическому семейству (k, ω_n) краевых задач в каждом сферическом слое $R_{j+1} < r < R_j$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_\theta}{dr} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{n}{r^2} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} u_\theta + \frac{\omega^2}{V_S^2} u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} u_r &= 0, \\ \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{n}{r} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{du_\theta}{dr} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{n}{r^2} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} u_\theta - \frac{u_r}{r^2} \left(2 + \frac{n\mu}{\lambda + 2\mu} \right) + \frac{\omega^2}{V_S^2} u_r &= 0, \\ \sigma_{rr}|_{r=R} \equiv (\lambda + 2\mu) \frac{du_r}{dr} + \frac{2\lambda}{r} u_r - \frac{n}{r} \lambda u_r \Big|_{r=R} &= \frac{2k+1}{R_1^2} F(\omega), \\ \sigma_{r\theta}|_{r=R} \equiv \mu \left(\frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{u_r}{r} \right) \Big|_{r=R} &= 0, \quad u_r|_{r=0} < \infty, \quad u_\theta|_{r=0} < \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) $n = k(k+1)$, а λ, μ — упругие параметры Ламе, ρ — плотность.

На втором этапе осуществляется переход к потенциалам продольных (u_p) и поперечных (u_s) волн. Известно классическое представление полного поля через потенциалы [Аки,

Ричардс, 1983]. В данной работе с использованием результатов из работы [Фатьянов, Бурмин, 2021] это представление берется в виде

$$u_r = \frac{d}{dr} \left(\frac{u_p}{r^{0,5}} \right) + \frac{k(k+1)}{r^{1,5}} u_s, \quad u_\theta = \frac{d}{dr} \left(\frac{u_s}{r^{0,5}} \right) + \frac{1}{r^{1,5}} u_s + \frac{1}{r^{1,5}} u_p. \quad (7)$$

Представление (7) позволяет сразу свести уравнения (6) к уравнениям для потенциалов продольных (u_p) и поперечных (u_s) волн:

$$\frac{d^2 u_p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_p}{dr} + \frac{\omega_n^2}{V_p^2} u_p - \frac{\nu^2}{r^2} u_p = 0, \quad \frac{d^2 u_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_s}{dr} + \frac{\omega_n^2}{V_s^2} u_s - \frac{\nu^2}{r^2} u_s = 0, \quad \nu = k + 0,5. \quad (8)$$

Уравнения (8) — это классические уравнения для функций Бесселя. Отметим, что сведение уравнений для потенциалов сразу к бесселевым функциям (8) существенно упрощает нахождение искомого аналитического решения.

4. Построение аналитического решения

Следуя работе [Фатьянов, 1990], вводим вспомогательные функции $a_{11}(r)$, $a_{22}(r)$, $a_{12}(r)$, $a_{21}(r)$ следующим образом:

$$\frac{du_p}{dr} = \frac{a_{11}}{r} u_p + \frac{a_{12}}{r} u_s, \quad \frac{du_s}{dr} = \frac{a_{21}}{r} u_p + \frac{a_{22}}{r} u_s. \quad (9)$$

Подстановка (9) в (8) дает следующие уравнения на a_{pq} ($p, q = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \frac{da_{11}}{dr} + \frac{a_{11}^2}{r} + \frac{a_{12}a_{21}}{r} + \frac{\omega^2}{V_p^2} r - \frac{\nu^2}{r} &= 0, \\ \frac{da_{22}}{dr} + \frac{a_{22}^2}{r} + \frac{a_{12}a_{21}}{r} + \frac{\omega^2}{V_s^2} r - \frac{\nu^2}{r} &= 0, \\ \frac{da_{12}}{dr} + \frac{a_{12}}{r} (a_{11} + a_{22}) &= 0, \\ \frac{da_{21}}{dr} + \frac{a_{21}}{r} (a_{11} + a_{22}) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, краевая задача второго порядка (6) свелась к двум задачам Коши первого порядка (9)–(10). Отметим, что задача Коши (10) является нелинейной. Но это не приносит трудностей, так как для нее получено решение в явном виде.

Ниже приведем рекуррентный алгоритм (дифференциальная прогонка) нахождения функций a_{pq} ($p, q = 1, 2$) на дневной поверхности при $r = R_1$. Пусть известны значения функций $a_{pq} = a_{pq}^{j+1}$ на верхней границе сферического слоя $r = R_{j+1} + 0$. Тогда значения функций $a_{pq} = a_{pq}^j$ на нижней границе сферического слоя $r = R_j - 0$ по аналогии с [Фатьянов, 1990] даются формулами

$$\begin{aligned} a_{22}^j &= z_{p1} \frac{g_1 J_\nu(z_{p1}) - g_3 Y_\nu(z_{p1})}{g_2 J_\nu(z_{p1}) - g_4 Y_\nu(z_{p1})}, \\ a_{21}^j &= \frac{2}{\pi} \frac{a_{21}^{j+1}}{g_2 J_\nu(z_{p1}) - g_4 Y_\nu(z_{p1})}, \quad a_{12}^j = a_{12}^{j+1} \frac{a_{21}^j}{a_{21}^{j+1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_1 &= \{aJ_\nu(z_{s2})Y(z_{p2}) - [z_{p2}Y'_\nu(z_{p2}) - a_{11}^{j+1}Y_\nu(z_{p2})][z_{s2}J'_\nu(z_{s2}) - a_{22}^{j+1}J_\nu(z_{s2})]\}, \\ f_2 &= \{aY_\nu(z_{s2})Y(z_{p2}) - [z_{p2}Y'_\nu(z_{p2}) - a_{11}^{j+1}Y_\nu(z_{p2})][z_{s2}Y'_\nu(z_{s2}) - a_{22}^{j+1}Y_\nu(z_{s2})]\}, \\ f_3 &= \{-aJ_\nu(z_{s2})J(z_{p2}) - [z_{p2}J'_\nu(z_{p2}) - a_{11}^{j+1}J_\nu(z_{p2})][z_{s2}J'_\nu(z_{s2}) - a_{22}^{j+1}J_\nu(z_{s2})]\}, \\ f_4 &= \{-aY_\nu(z_{s2})J(z_{p2}) - [z_{p2}J'_\nu(z_{p2}) - a_{11}^{j+1}J_\nu(z_{p2})][z_{s2}Y'_\nu(z_{s2}) - a_{22}^{j+1}Y_\nu(z_{s2})]\}, \\ g_1 &= [f_1Y'_\nu(z_{s1}) - f_2J'_\nu(z_{s1})]\frac{\pi z_{s1}}{2}, \quad g_2 = [f_1Y_\nu(z_{s1}) - f_2J_\nu(z_{s1})]\frac{\pi}{2}, \\ g_3 &= [-f_3Y'_\nu(z_{s1}) + f_4J'_\nu(z_{s1})]\frac{\pi z_{s1}}{2}, \quad g_4 = [-f_3Y_\nu(z_{s1}) + f_4J_\nu(z_{s1})]\frac{\pi}{2}, \\ z_{p1} &= \frac{\omega}{V_p^j}R_j, \quad z_{s1} = \frac{\omega}{V_s^j}R_j, \quad z_{p2} = \frac{\omega}{V_p^j}R_{j+1}, \quad z_{s2} = \frac{\omega}{V_s^j}R_{j+1}, \quad a = a_{12}^{j+1}a_{21}^{j+1}. \end{aligned}$$

Здесь $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $J'_\nu(z)$, $Y'_\nu(z)$ — это функции Бесселя первого и второго рода и их производные.

Далее нужно получить формулы пересчета функций a_{pq} в случае разрыва коэффициентов на произвольной сферической границе $r = R_j$. Пусть известны $a_{pq} = a_{pq}^-$ на нижней границе $r = R_j - 0$. Требуется определить $a_{pq} = a_{pq}^+$ на верхней границе $r = R_j + 0$. Они определяются из условий сопряжения (непрерывности) смещений и напряжений (4). Для этого с учетом (6)–(9) получены формулы для смещений и напряжений через потенциалы продольных (u_p) и поперечных (u_s) волн:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \mu r^{-2,5} \left\{ \left[-4a_{11} + 2(n+1) + 2na_{21}\gamma - \frac{\omega^2 r^2}{V_s^2} \right] u_p + [-4a_{12} + n\gamma(2a_{22} - 3)] u_s \right\}, \\ \sigma_{r\theta} &= \mu r^{-2,5} \left\{ [2a_{11} - 3 - 2a_{21}\gamma] u_p + \left[2a_{12} - 2a_{22}\gamma + \gamma \left(2n - 1 - \frac{\omega^2 r^2}{V_s^2} \right) \right] u_s \right\}, \\ u_r &= r^{-1,5} [(a_{11} - 0,5)u_p + (a_{12} + n\gamma)u_s], \quad u_\theta = r^{-1,5} [(a_{21}\gamma + 1)u_p + \gamma(a_{22} + 0,5)u_s]. \end{aligned} \quad (12)$$

В (12) $\gamma = \frac{V_p^2}{V_s^2}$.

Условия сопряжения (4) для произвольной сферической границы $r = R_j$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_{r=R_j+0} &\equiv \sigma_{rr}^+ = \sigma_{rr}^- \equiv \sigma_{rr}|_{r=R_j-0}, \\ \sigma_{r\theta}^+ &= \sigma_{r\theta}^-, \quad u_r^+ = u_r^-, \quad u_\theta^+ = u_\theta^-. \end{aligned} \quad (13)$$

Из формул (13) с учетом (12) после преобразований получим значения вспомогательных коэффициентов $a_{pq}^+ = a_{pq}|_{r=R_j+0}$ через $a_{pq}^- = a_{pq}|_{r=R_j-0}$ для сферической границы $r = R_j$. Выражение (13) — это система линейных алгебраических уравнений для a_{pq}^+ четвертого порядка. Тогда a_{pq}^+ получаются из решения системы уравнений (13) стандартным образом и здесь не приводятся из-за их громоздкости.

Для завершения построения аналитического решения нужно определить начальные значения для a_{pq} . Пусть сферически-симметричная слоистая Земля состоит из N слоев. В этом случае при $r \in [0, R_N)$, следуя [Тихонов, Самарский, 2004], решение получим в виде

$$u_p(r) = c_1 J_\nu \left(\frac{\omega r}{V_{pN}} \right), \quad u_s(r) = c_2 J_\nu \left(\frac{\omega r}{V_{sN}} \right), \quad \nu = k + 0,5. \quad (14)$$

В (14) V_{pN} , V_{sN} — скорости продольных и поперечных волн при $r \in [0, R_N)$.

Из (14) с учетом (9) получим начальные значения для a_{pq} при $r = R_N - 0$:

$$a_{11}^- = z_p \frac{J'_\nu(z_p)}{J_\nu(z_p)}, \quad a_{22}^- = z_s \frac{J'_\nu(z_s)}{J_\nu(z_s)}, \quad a_{12}^- = a_{21}^- = 0. \quad (15)$$

В (15) $z_p = \frac{\omega R_N}{V_{pN}}$, $z_s = \frac{\omega R_N}{V_{sN}}$.

Теперь, зная начальные значения a_{pq} из (15), пересчитываем их на верхнюю границу слоя с границей $r = R_N + 0$ по (13). Затем по (11) получаем значения a_{pq} на нижней границе слоя $r = R_{N-1} - 0$. Осуществляя этот процесс N раз (по количеству слоев), получаем значения вспомогательных функций a_{pq} на поверхности шара при $r = R_1$.

Из (12) с учетом (6) найдем сначала потенциалы продольных (u_p) и поперечных (u_s) волн на поверхности шара при $r = R_1$:

$$u_p = -\frac{q_4}{\Delta} \frac{2k+1}{2\mu_1} F(\omega), \quad u_s = -\frac{q_3}{\Delta} \frac{2k+1}{2\mu_1} F(\omega). \quad (16)$$

В (16) использованы обозначения

$$\begin{aligned} q_1 &= -4a_{11} + 2(n+1) + 2n\gamma_1 a_{21} - \left(\frac{\omega R_1}{V_{s1}}\right)^2, \quad q_2 = n\gamma_1(2a_{22} - 3), \\ q_3 &= 2a_{11} - 3 - 2\gamma_1 a_{21}, \quad q_4 = 2a_{12} - 2\gamma_1 a_{22} - \gamma_1 \left(\frac{\omega R_1}{V_{s1}}\right)^2 + \gamma_1(2n-1), \\ \Delta &= q_2 q_3 - q_1 q_4, \quad n = k(k+1), \quad \gamma_1 = \frac{V_{p1}^2}{V_{s1}^2}. \end{aligned}$$

Далее, с учетом (12) найдем искомые смещения u_r , u_θ в спектральной области на поверхности шара при $r = R_1$:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{R_1} [(a_{11} - 0,5)u_p + (a_{12} + n\gamma_1)u_s], \\ u_\theta &= \frac{1}{R_1} [\gamma_1 a_{21} + 1)u_p + \gamma_1(a_{22} + 0,5)u_s]. \end{aligned} \quad (17)$$

Окончательно суммированием в (5) получаем решение в физической области $u_r(r, \theta, t)$, $u_\theta(r, \theta, t)$.

5. Устойчивое вычисление аналитического решения без погрешности

По приведенному алгоритму составлена программа для аналитического расчета сейсмических волновых полей в радиально-симметричной слоистой Земле. Количество сферических слоев и параметры среды могут быть произвольными. В случае когда функции Бесселя не выходят за границы числового диапазона на используемой вычислительной платформе, то нет проблем при расчете аналитического решения по (11). А тем самым и при вычислении ряда (5) для получения решения в физической области (r, t) . Функции Бесселя вычисляются по опубликованному открытому коду (например, [Zhang, Jin, 1996]). Это проходит, когда величина индекса бесселевых функций порядка 5000. А при решении этой задачи для шара земных размеров с несущей частотой в 1 герц в сумме (5) нужно брать порядка 50 000 членов. И поскольку функции Бесселя $J_{k+0,5}(z)$ и $Y_{k+0,5}(z)$ вместе со своими производными при возрастании пространственной частоты k быстро стремятся к нулю и бесконечности, в аналитическом решении (11) возникают особенности разных типов. В этом случае вычисление на компьютере становится неустойчивым.

В самом деле, пусть, например, $|J_{k+0,5}(z)| = \varepsilon_1$, $|J'_{k+0,5}(z)| = \varepsilon_2$ и $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < \delta$, где δ — числовое значение (компьютерный ноль), которое можно использовать на компьютере (на 64-разрядной платформе $\delta \sim 10^{-320}$). В этом случае функция Бесселя $J_{k+0,5}(z)$ и ее производная на компьютере будут представляться нулем. А, например, в формуле (15) будет деление на нуль. Поскольку и в числителе (15) будет ноль, то возникает неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Отбросить это слагаемое просто так нельзя. Это приведет к возникновению погрешности, так как в силу быстрого убывания функции Бесселя $J_{k+0,5}(z)$ (и, соответственно, ее производной) неопределенность будет возникать уже для сравнительно небольших индексов k (~ 5000). Аналогично и для $Y_{k+0,5}(z)$.

Поэтому для расчета телесеизмических волн для несущих частот в 1 герц и выше необходимо использовать асимптотику для раскрытия неопределенностей. Пусть для больших ν $J_\nu(x) \sim 0$ и $x \neq 0$. Тогда и $J'_\nu(x) \sim 0$. В этом случае в [Фатьянов, Бурмин, 2019; Фатьянов, Бурмин, 2021] приведена новая асимптотика:

$$\frac{J'_\nu(x)}{J_\nu(x)} \sim \frac{\sqrt{\nu^2 - x^2}}{x}. \quad (18)$$

Если для больших ν $Y_\nu(x) \sim \infty$ и $x \neq 0$, тогда и $Y'_\nu(x) \sim \infty$. В этом случае

$$\frac{Y'_\nu(x)}{Y_\nu(x)} \sim -\frac{\sqrt{\nu^2 - x^2}}{x}. \quad (19)$$

Рассмотрим классическую асимптотику в виде

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{ex}{2\nu}\right)^\nu$$

(например, [Zhang, Jin, 1996]). Из нее видно, что для произвольного ν чем меньше x , тем меньше $J_\nu(x)$. Пусть для некоторого x_0 и фиксированного ν_0 $|J_{\nu_0}(x_0)| < \delta$ и $|x_0 J'_{\nu_0}(x_0)| < \delta$. Если это не так, то, как было уже сказано, устойчивое вычисление решения осуществляется без использования асимптотики.

Введем в рассмотрение функции $f(x) = xJ'_{\nu_0}(x)$ и $g(x) = J_{\nu_0}(x)$. В этом случае $f(x_0) = 0$ и $g(x_0) = 0$. Используя правило Лопиталя, получим

$$\left. \frac{f(x)}{g(x)} \right|_{x \rightarrow x_0 + 0} = \left. \frac{f'(x)}{g'(x)} \right|_{x \rightarrow x_0 + 0}.$$

Далее с использованием определения функции Бесселя элементарно получим

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \sqrt{\nu_0^2 - x_0^2},$$

что совпадает с (18). Аналогично получается и (19).

Из (18) и (19) получим несколько новых формул для функций Бесселя в случае больших ν , когда $J_\nu(x) \sim 0$ и $Y_\nu(x) \sim \infty$. Они позволяют раскрыть неопределенности разных типов, которые возникают в (11) и используются при написании программы расчета волновых полей на компьютере.

Проинтегрируем (18) в пределах от x_1 до x_2 :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dJ_\nu(x)}{J_\nu(x)} = \ln[J_\nu(x)] \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{\nu^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{\nu^2 - x^2} + \nu \ln \left(\frac{\nu^2 x}{\sqrt{\nu^2 - x^2} + \nu} \right) \Big|_{x_1}^{x_2}. \quad (20)$$

Из (20) получим

$$J_\nu(x_2) = J_\nu(x_1) e^{w_2 - w_1} \left(\frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{w_1 + \nu}{w_2 + \nu} \right)^\nu. \quad (21)$$

Известно выражение для вронскиана (например, [Zhang, Jin, 1996])

$$w(x) \equiv J_\nu(x) Y'_\nu(x) - J'_\nu(x) Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi x}. \quad (22)$$

Из (22) с учетом (18) и (19) получим

$$J_\nu(x_1) Y_\nu(x_1) = -\frac{1}{\pi w_1}. \quad (23)$$

И тогда из (21) и (23) получим следующую формулу:

$$J_\nu(x_2) Y_\nu(x_1) = -\frac{1}{\pi w_1} e^{w_2 - w_1} \left(\frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{w_1 + \nu}{w_2 + \nu} \right)^\nu. \quad (24)$$

В (24) использованы обозначения $w_1 = \sqrt{\nu^2 - x_1^2}$ и $w_2 = \sqrt{\nu^2 - x_2^2}$.

Формулы (18), (19), (21), (24) позволяют раскрыть неопределенности разных типов, которые возникают в (11). А это в свою очередь дает возможность устойчивого вычисления аналитического решения для телесейсмических волновых полей с высокой детальностью для Земли в случае несущей частоты в 1 герц и выше.

Может возникнуть вопрос: зачем было разрабатывать новые асимптотики? Ведь есть классические асимптотики. Почему бы их не использовать?

Рассмотрим еще раз классические асимптотики (например, [Zhang, Jin, 1996]). Они верны при $\nu \gg |x|$:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{ex}{2\nu} \right)^\nu, \quad Y_\nu(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \left(\frac{ex}{2\nu} \right)^{-\nu}. \quad (25)$$

Из (25) следует, что

$$\frac{J'_\nu(x)}{J_\nu(x)} = \frac{\nu}{x} \quad \text{и} \quad J_\nu(x_2) Y_\nu(x_1) \sim -\frac{1}{\pi\nu} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^\nu. \quad (26)$$

Если $\nu \gg |x_1|$ и $\nu \gg |x_2|$, то можно положить $w_1 \equiv \sqrt{\nu^2 - x_1^2} \sim \nu$ и $w_2 \equiv \sqrt{\nu^2 - x_2^2} \sim \nu$. Тогда из (18), (24) и (26) следует, что новая асимптотика будет в точности совпадать с классической.

На рис. 3 приведены волновые поля вертикальной компоненты U_r сейсмического поля с несущей частотой 1 герц для однородного шара с радиусом Земли $R_1 = 6371$ километров. Однородный шар имеет параметры: $V_p = 5,8$, $V_s = 3,45$, $\rho = 2,72$. По горизонтали приведены расстояния в градусах. По вертикали — время в секундах (возрастает вниз). При этом на рис. 3, а используется новая асимптотика (18), (19), (24). А на рис. 3, б — классическая асимптотика (26). Символы P и PP означают прямую и однократную продольные волны. В этом случае кинематика для угла φ для прямой волны P будет даваться известным выражением

$$t_p = \frac{2R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{V_p}.$$

Соответственно, кинематика однократной продольной волны —

$$t_{pp} = \frac{4R \sin\left(\frac{\varphi}{4}\right)}{V_p}.$$

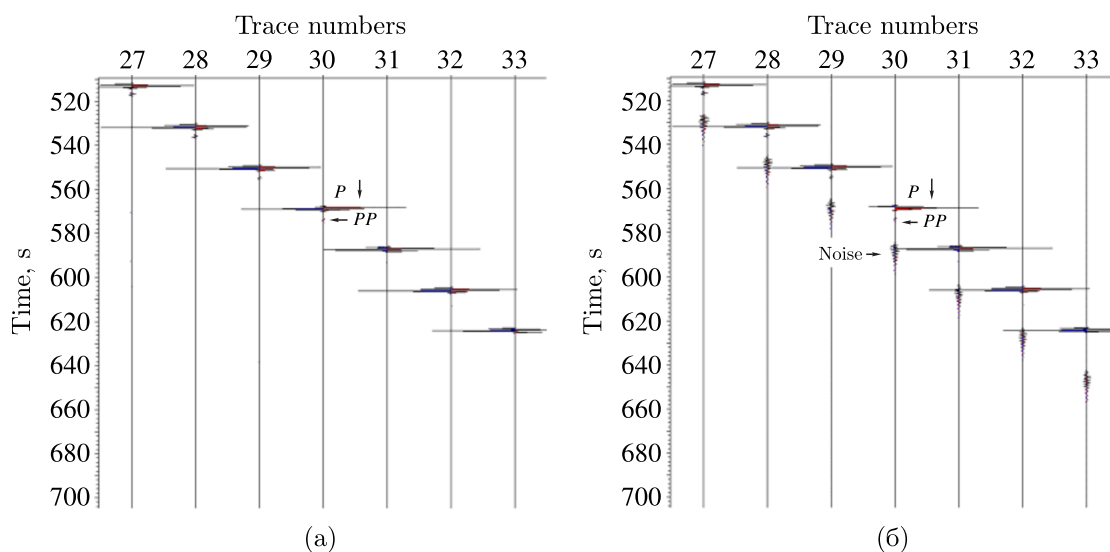


Рис. 3. Компонента U_r сейсмического поля с несущей частотой 1 герц для однородного шара земных размеров. В алгоритме расчета используются новая (а) и классическая (б) асимптотики. По вертикали время — в секундах (возрастает вниз), по горизонтали — расстояние в градусах. P и PP обозначают прямую и однократную продольные волны. Noise — помеха при использовании классической асимптотики

Для угла в 30 градусов будет $t_p \approx 568,6$ секунд, а $t_{pp} \approx 573,5$ секунд. Приход этих волн обозначен символами P и PP на рис. 3. Далее все кратные волны распространяются по граням вписанных в круг многоугольников. В пределе многоугольники стремятся к окружности. Длина дуги окружности для угла φ в 30 градусов будет $\frac{R_1 \cdot \pi \cdot \varphi}{180} \approx 3335,85$. Поэтому для времен больших, чем $\frac{3335,85}{V_p} \approx 575,1$, кратных продольных волн P быть не может. Таким образом, волновая фаза, приходящая на рис. 3, б за P - и PP -волнами, заведомо является помехой, так как она регистрируется на времени (возрастает вниз), большем 580 секунд. Она обозначена символом Noise на рис. 3, б.

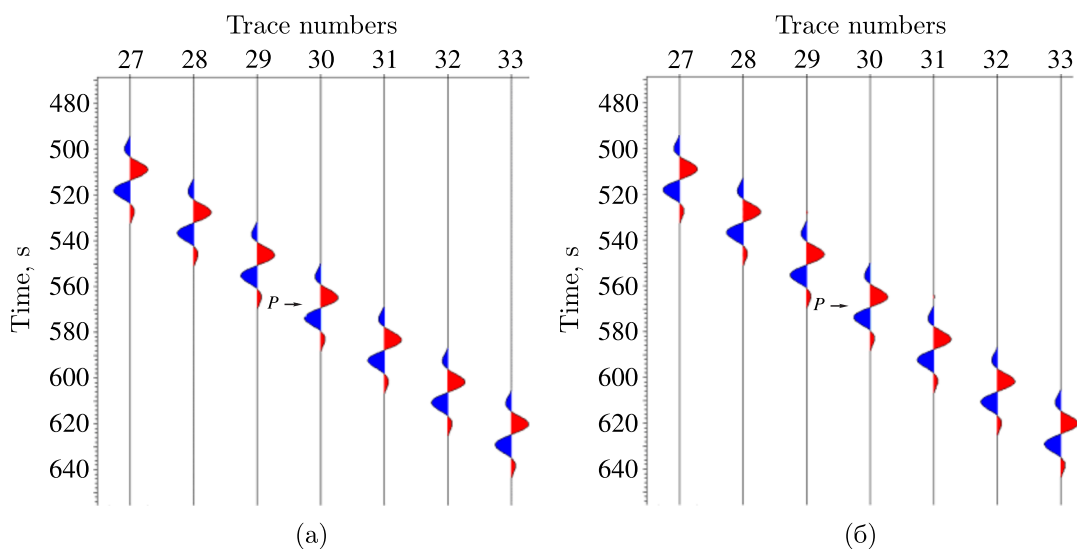


Рис. 4. Компонента U_r сейсмического поля с несущей частотой 0,05 герца для однородного шара земных размеров. В алгоритме расчета используются новая (а) и классическая (б) асимптотики. По вертикали — время в секундах (возрастает вниз), по горизонтали — расстояние в градусах. P обозначает прямую продольную волну. Совпадение результатов при использовании новой и классической асимптотик для небольших частот

На рис. 4 приведено сейсмическое поле компоненты U_r с несущей частотой 0,05 герц для однородного шара. Параметры шара такие же, как на рис. 3. Из рис. 4 видно, что применение классической и новой асимптотик дает одинаковые результаты только в случае низкочастотных волновых полей.

Для однородной среды алгоритм с использованием классической и новой асимптотик практически не изменяется и время расчета совпадает. В случае же слоистой Земли для низкочастотной области, конечно, можно использовать новую асимптотику. Но алгоритм будет существенно усложняться из-за сложности раскрытия неопределенностей в формулах дифференциальной прогонки (11). В этом случае нужно использовать формулы (21), (24). В случае же использования классической асимптотики раскрытие неопределенностей значительно упрощается. Это формулы (25), (26). Поэтому если расчеты нужно проводить только в низкочастотной области, то проще использовать классическую асимптотику.

Из литературы известны и другие асимптотики (например, [Керимов, Скороходов, 1990]). Но асимптотики из работы [Керимов, Скороходов, 1990] приводят к формулам (26). То есть результаты ее применения к волновым задачам будут совпадать с классической асимптотикой.

Таким образом, классическую асимптотику можно использовать в расчетах волновых полей только для небольших частот. В случае высокочастотных (1 герц и выше) сейсмических волновых полей использовать классическую асимптотику нельзя. Ее использование приводит к возникновению помех в виде ложных фаз. То есть приводит к погрешностям в решении даже для однородного шара. Причина этого в том, что классическая асимптотика верна при $\nu \gg |x|$. А при расчетах аналитического решения для шара планетарных размеров, например, функция Бесселя $J_\nu(x)$ становится близка к нулю, когда ν только немного больше $|x|$. Это и приводит к невозможности использования классической асимптотики. А новая асимптотика как раз применима, когда $J_\nu(x) \sim 0$.

В настоящее время активно развиваются конечно-разностные методы для расчета волновых полей в Земле. Несмотря на достижения в области высокопроизводительных вычислений, численное моделирование распространения высокочастотных (например, 1 Гц или выше) сейсмических волн в глобальном масштабе по-прежнему невозможно [Wu et al., 2018]. Чтобы преодолеть эту трудность, предлагается гибридный (комбинированный) метод для расчета волновых полей. Однако при гибридном моделировании возникают погрешности [Shen et al., 2022].

Разработанный аналитический метод позволяет устойчиво вычислять телесеismicкие высокочастотные (1 герц и выше) волновые поля в шаре земных размеров. Использование новой асимптотики дает возможность эффективного вычисления решения без погрешностей с высокой детальностью. Это позволяет проводить расчеты даже волновых фаз небольшой интенсивности. Таких как, например, предвестники продольных P -волн. При этом созданная программа позволяет проводить расчеты даже на персональных компьютерах с распараллеливанием OpenMP.

Расчеты проводились на домашнем персональном компьютере: Notebook AMD Ryzen 5 4500U with Radeon Graphics, 2,38 GHz, 6 ядер, 32,0 ГБ. Транслятор Intel Visual Fortran Compiler XE 14.0.5.239. Время работы программы линейно зависит от количества слоев. Время расчета для модели Бурмина, содержащей 175 сферических слоев с видимой частотой в 1 герц, составляет примерно одни сутки.

Структура программы довольно проста. Идет суммирование по временным и пространственным частотам. Внутри двойного цикла осуществляется дифференциальная прогонка по сферическим слоям Земли. То есть цикл по слоям. Для дифференциальной прогонки требуются значения функций Бесселя. Они берутся из известных открытых пакетов и используются в блоке дифференциальной прогонки. Распараллеливание по OpenMP осуществлено для блока дифференциальной прогонки. Эффективность оказалась примерно в 50 процентов. То есть получено ускорение в 3 раза, так как ядер на ноутбуке — 6. Это происходит за счет того, что не распараллелен блок вычисления значений функций Бесселя. Это не было сделано, так как время расчета

(1 сутки) вполне приемлемо для получения результата для реальной модели Земли. Поскольку на домашнем ноутбуке всего 6 ядер, то для такого малого количества не было смысла получать таблицу ускорения.

Реализация алгоритма возможна по технологии MPI. Алгоритм полностью независим по частотам. То есть каждая частота считается независимо. Еще одна проблема при использовании MPI — недостаток общей памяти. Для данного алгоритма много памяти не требуется. Основная память (2 двумерных массива) используется для получения при суммировании волнового поля в физической области компонент r и θ . Остальные вспомогательные массивы здесь одномерные. То есть ничто не мешает использовать технологию MPI.

Однако переходить на технологию MPI для решения этой задачи представляется нецелесообразным. Модель Бурмина содержит 175 сферических слоев. Это максимальное количество слоев из известных в настоящее время моделей Земли. Если возникнет модель Земли, например, с 1000 слоями, то ее обсчет на домашнем ноутбуке займет $\left(\frac{1000}{175} = 5,7\right)$ примерно 6 суток. Это, конечно, уже не очень удобно столько времени ждать результатов. Но в этом случае оптимальнее проводить расчеты уже не на персональном компьютере, а, например, на сервере с использованием сотен ядер.

6. Результаты аналитического решения

На рис. 5 приведена вертикальная компонента U_r для модели Земли. Дискретная модель Земли взята из [Бурмин, 2019], которая приведена на рис. 1 и 6. Она характеризуется тем, что в ней внешнее ядро обладает модулем сдвига отличным от нуля.

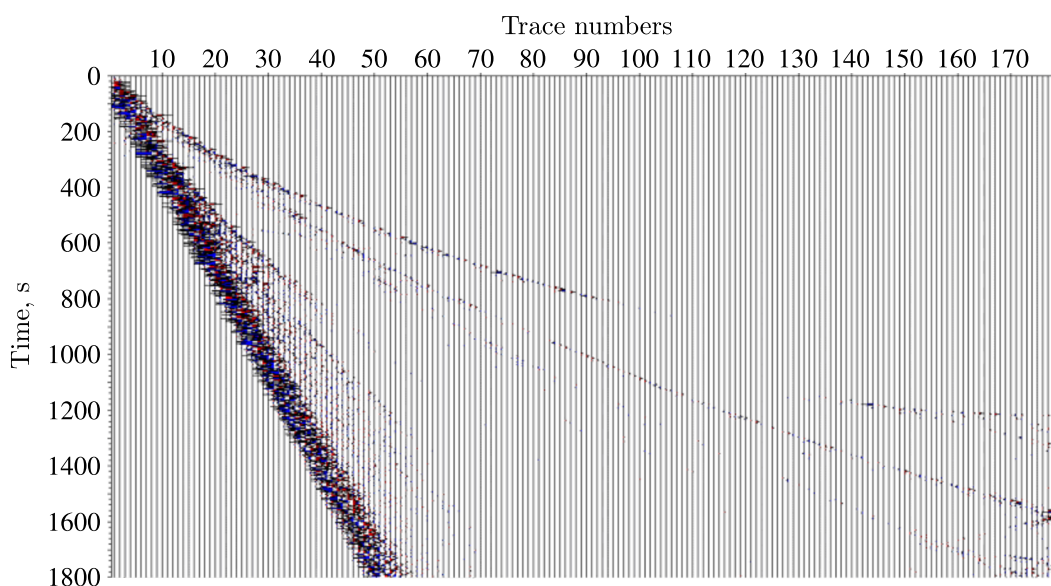


Рис. 5. Компонента U_r сейсмического поля для модели из [Бурмин, 2019]. По вертикали — время в секундах (возрастает вниз), по горизонтали — расстояние в градусах. Для наглядности поле выдано с обрезкой амплитуды

Несущая частота функции источника по времени (1) f_0 равна одному герцу. На рис. 5 по горизонтали приведено расстояние в градусах. По вертикали — время в секундах (возрастает вниз). Расчет осуществлен до 1800 с (30 минут). На рис. 7 и 8 приведены результаты решения прямой кинематической задачи для годографа преломленных P -волн для радиально-симметричной дискретной (слоистой) скоростной модели Земли [Бурмин, 2019]. На рис. 7 приведен

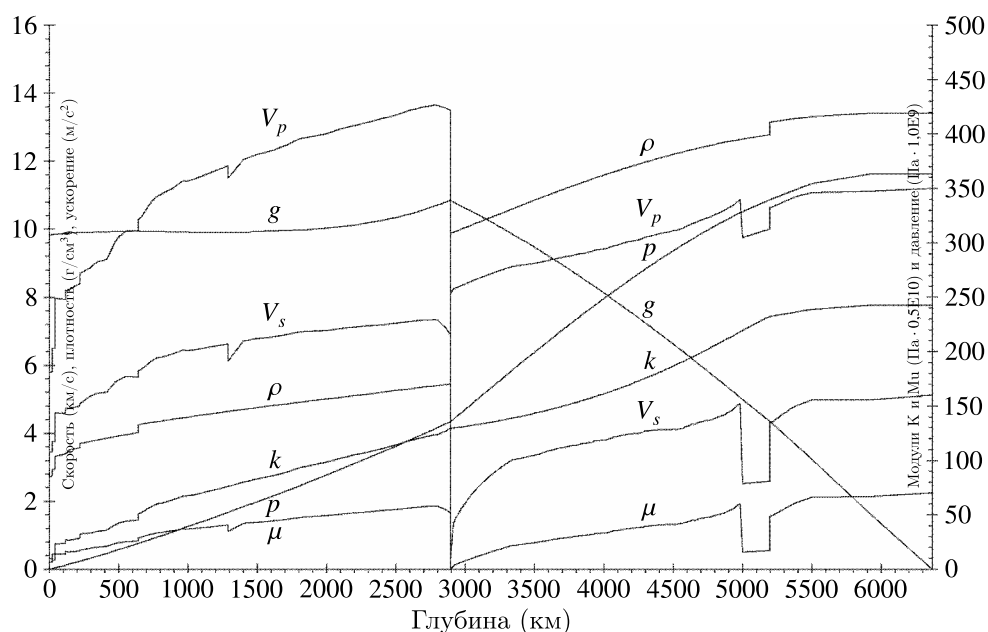


Рис. 6. Распределение геофизических параметров в Земле из работы [Бурмин, 2019]

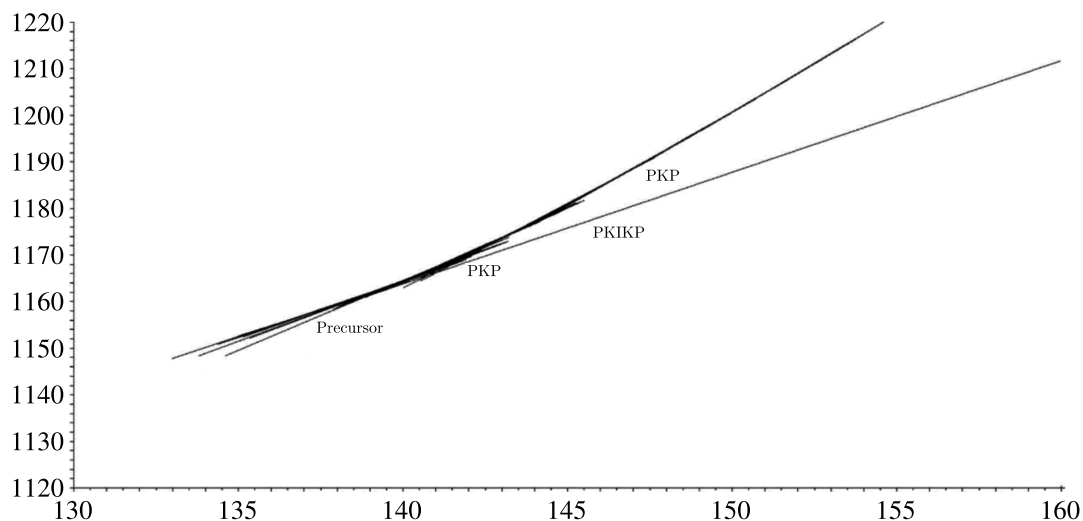


Рис. 7. Годограф преломленных волн для модели Земли из работы [Бурмин, 2019]. Лучи выходят из источника с равномерным шагом 0,02 градуса

годограф преломленных P -волн, когда лучи выходят из источника с равномерным шагом 0,02 градуса. На рис. 8 лучи выходят из источника с равномерным шагом 0,002 градуса.

Из рис. 7 и 8 видно, что впереди годографа PKP -волн возникает интерференционная картина преломленных волн. Причем если лучи выпускаются из источника с меньшим шагом, то волн будет больше, и они дальше заходят в область меньших углов. Это происходит за счет сферичности Земли. Кроме того, на каждую ветвь годографа преломленных волн садится своя дифракционная волна. Одна дифракционная волна имеет незначительную амплитуду, но их много. И их интерференция приводит к тому, что высокочастотное вступление впереди PKP -волн продолжается далеко в сторону меньших углов. Отметим, что для моделей Земли с непрерывным изменением скорости распространения сейсмических волн во внешнем ядре интерференционной картины не возникает [Фатьянов, Бурмин, 2019].

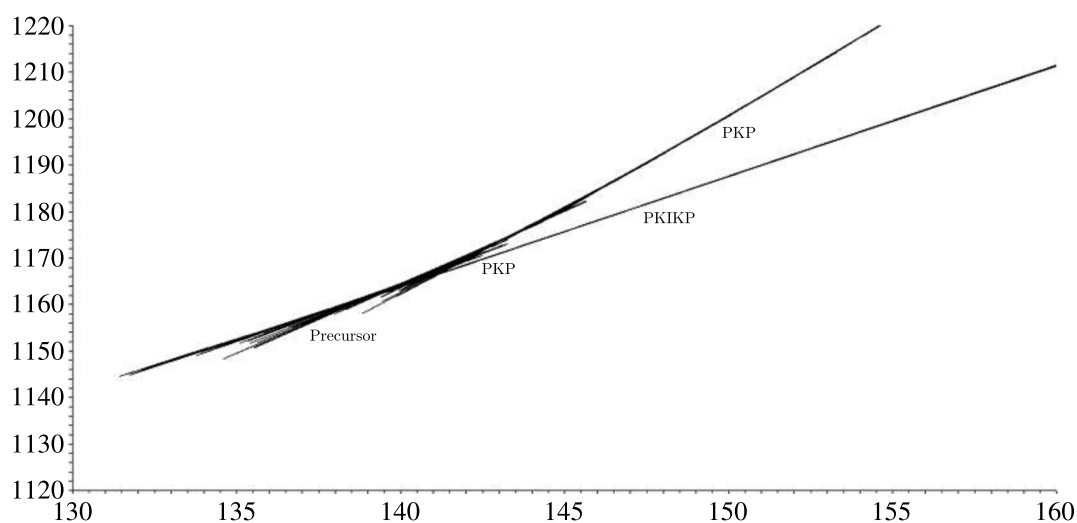


Рис. 8. Годограф преломленных волн для модели Земли из [Бурмин, 2019]. Лучи выходят из источника с равномерным шагом 0,002 градуса

На рис. 9 приведен фрагмент полного волнового сейсмического поля для радиально-симметричной дискретной (слоистой) скоростной модели Земли из [Бурмин, 2019] в диапазоне эпицентральных расстояний 130–160 градусов. Импульс $f(t)$ в (1) взят в виде функции Гаусса с несущей частотой в 1 герц. По горизонтали приведено расстояние в градусах. По вертикали — время (возрастает вверх). Из рис. 9 видно, что впереди PKP -волн возникают колебания небольшой амплитуды. Спектральный анализ показал, что эти колебания имеют более высокую частоту. Их частота примерно равна 1,25 герца. Аналогичные явления происходят и для известной модели АК135 [Kennett et al., 1995]. В работе [Фатьянов, Бурмин, 2019] показано, что для модели АК135 впереди PKP -волн возникают колебания небольшой амплитуды. Таким образом, явление возникновения небольших высокочастотных колебаний впереди PKP -волн полностью объясняется сферической геометрией дискретной (слоистой) модели Земли.

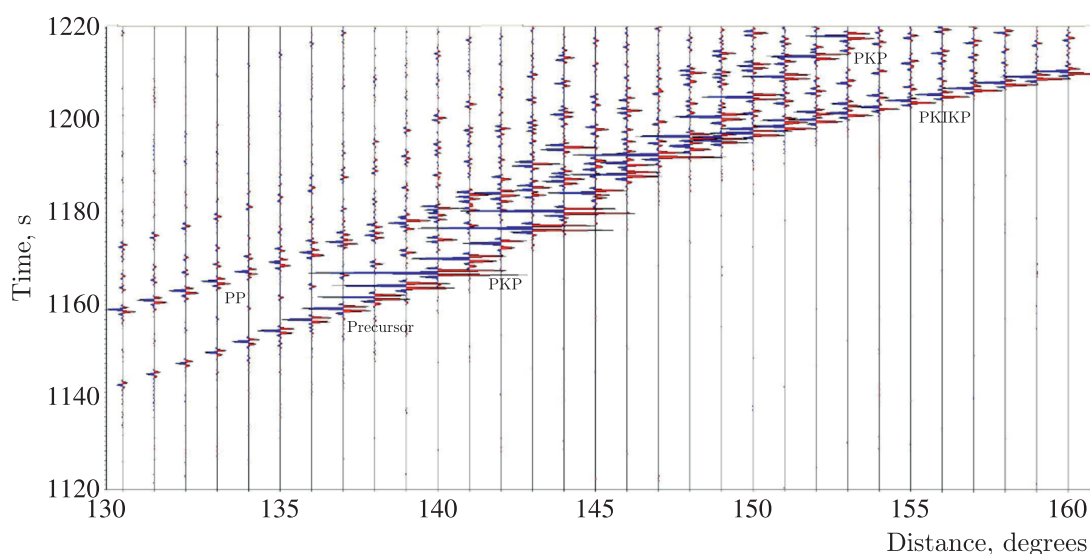


Рис. 9. Компонента U_r сейсмического поля. По вертикали приведено время в секундах (возрастает вверх), по горизонтали — расстояние в градусах. Возникновение прекурсоров для модели Земли из [Бурмин, 2019]

На рис. 10 представлен монтаж нормированных сейсмограмм, полученный по данным мировой сети сейсмических станций [Фатьянов, Бурмин, 2019]. На рис. 10, несмотря на сейсмический шум, предвестники прослеживаются начиная со 137 до 132 градусов. Сравнение рис. 9 и 10 показывает, что теоретические сейсмограммы во многом похожи на экспериментальные сейсмограммы. Это сравнение подтверждает правильность идей, положенных в основу построения модели Земли в [Бурмин, 2019].

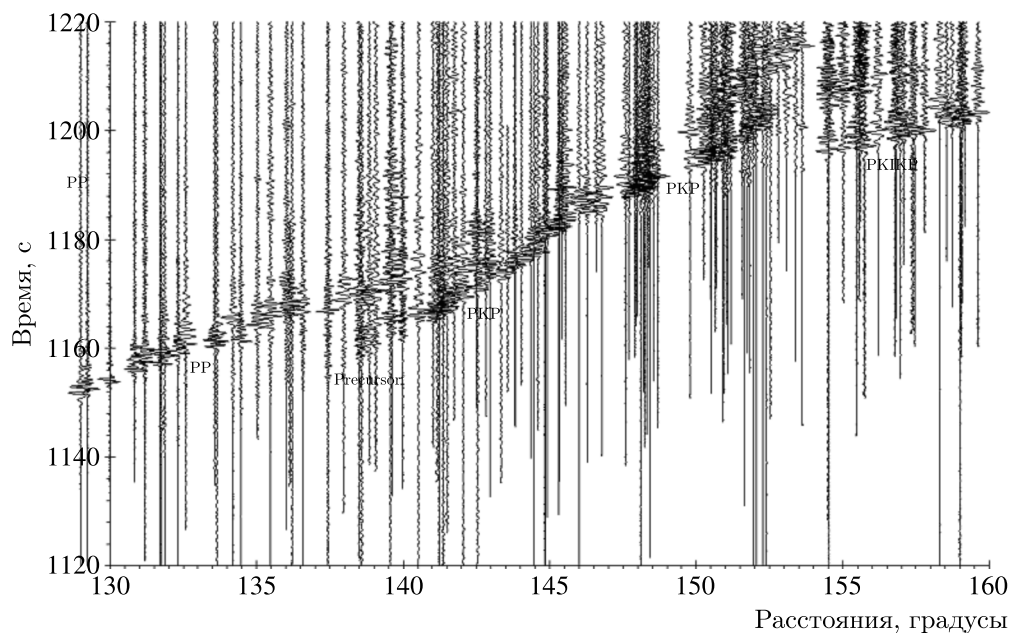


Рис. 10. Фрагмент монтажа сейсмограмм, полученного на сейсмических станциях мировой сети

7. Выводы

В настоящей работе получено аналитическое решение для волновых полей сейсмических волн в сферически-симметричной Земле. В случае произвольной слоистой среды решение, в которое входят функции Бесселя, строится с помощью дифференциальной прогонки. В аналитическом решении за счет быстрого убывания/возрастания бесселевых функций возникают особенности. Это приводит к неустойчивости вычисления решения на любой вычислительной платформе. Для устранения неустойчивости нужно использовать асимптотику. Исследовано применение классической и новой асимптотики для случая первого вступления продольных P -волн. В случае небольших частот расчеты сейсмических волновых полей при использовании классической и новой асимптотики совпадают. Показано, что в случае высоких частот (1 герц и выше) классическая асимптотика дает погрешность в решении. То есть использовать классическую асимптотику в случае высоких частот нельзя.

Использование новой асимптотики дает возможность эффективного вычисления решения без погрешностей с высокой детальностью. Создана программа, позволяющая проводить расчеты для высокочастотных (1 герц и выше) телесейсмических волновых полей в шаре земных размеров. Расчеты можно осуществлять даже на персональных компьютерах с распараллеливанием OpenMP.

Это позволило по созданной программе провести расчет с высокой детальностью для дискретной (слоистой) модели Земли [Бурмин, 2019] с несущей частотой в 1 герц. Она характеризуется тем, что в ней внешнее ядро обладает модулем сдвига, отличным от нуля. В результате

аналитического расчета обнаружено, что впереди *РКР*-волн возникают колебания небольшой амплитуды. Спектральный анализ показал, что эти колебания имеют более высокую частоту. Их частота примерно равна 1,25 герца. Это явление объясняется рассмотрением прямой кинематической задачи для годографа преломленных *Р*-волн. Впереди годографа *РКР*-волн возникает интерференционная картина преломленных волн. Причем если лучи выпускаются из источника с меньшим шагом, то волн становится больше, и они дальше заходят в область меньших углов. Кроме того, на каждую ветвь годографа преломленных волн садится своя дифракционная волна. Одна дифракционная волна имеет незначительную амплитуду, но их много. Это и приводит к возникновению высокочастотного вступления (предвестника) впереди *РКР*-волн.

Аналитический расчет показал, что теоретические сейсмограммы для модели Земли [Бурмин, 2019] во многом похожи на экспериментальные сейсмограммы, полученные мировой сетью сейсмических станций. Это сравнение говорит о правильности идей, положенных в основу построения модели Земли в работе [Бурмин, 2019].

Список литературы (References)

- Агаян Г. М., Воеводин В. В., Романов С. Ю. О применимости послойных моделей в решении трехмерных задач ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование. — 2013. — Т. 14. — С. 533–542.
- Agayan G. M., Voevodin V. V., Romanov S. Yu. O primenimosti posloynnykh modeley v reshenii trekhmernykh zadach ul'trazvukovoy tomografii [On the applicability of layered models in solving three-dimensional problems of ultrasonic tomography] // Numerical Methods and Programming. — 2013. — Vol. 14. — P. 533–542 (in Russian).
- Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. — М.: Мир, 1983.
- Aki K., Richards P. Quantitative seismology: theory and methods. — San Francisco: Freeman, 1980. (Russ. ed.: Aki K., Richards P. Kolichestvennaya seysmologiya. — Moscow: Mir, 1983.)
- Бурмин В. Ю. Некоторые обратные задачи сейсмологии. Теория, эксперименты, результаты. — М.: Наука, 2019.
- Burmin V. Yu. Nekotoryye obratnyye zadachi seysmologii. Teoriya, eksperimenty, rezul'taty [Some inverse problems of seismology. Theory, experiments, results]. — Moscow: Nauka, 2019 (in Russian).
- Бурмин В. Ю., Бойко А. Н. О природе волн-предвестников от далеких землетрясений // Доклады Российской академии наук. Науки о Земле. — 2017. — Т. 472, № 2. — С. 197–200.
- Burmin V. Yu., Boyko A. N. The nature of precursors waves from distant earthquakes // Doklady Earth sciences. — 2017. — Vol. 472, No. 1. — P. 83–86. (Original Russian paper: Burmin V. Yu., Boyko A. N. O prirode voln-predvestnikov ot dalekikh zemletryaseniy // Doklady Rossiyskoy akademii nauk. Nauki o Zemle. — 2017. — Vol. 472, No. 2. — P. 197–200.)
- Керимов М. К., Скороходов С. Л. О некоторых асимптотических формулах для цилиндрических функций Бесселя // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1990. — Т. 30, № 12. — С. 1775–1784.
- Kerimov M. K., Skorokhodov S. L. Some asymptotic formulae for cylindrical Bessel functions // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1990. — Vol. 30, No. 6. — P. 126–133. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(90\)90120-H](https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90120-H) (Original Russian paper: Kerimov M. K., Skorokhodov S. L. O nekotorykh asimptoticheskikh formulakh dlya tsilindricheskikh funktsiy Besselya // Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki. — 1990. — Vol. 30, No. 12. — P. 1775–1784.)
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 2004. — 798 с.
- Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. — Moscow: Nauka, 2004 (in Russian).
- Фатьянов А. Г. Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // Доклады Российской академии наук. Науки о Земле. — 1990. — Т. 310, № 2. — С. 323–327.
- Fatyanov A. G. Semi-analytical method for solving direct dynamic problems in layered media // Transactions (Doklady) of the USSR Academy of Sciences. Earth Science Sections. — 1990. — Vol. 310, No. 1. — P. 17–21. (Original Russian paper: Fatyanov A. G. Poluanaliticheskiy metod resheniya pryamykh dinamicheskikh zadach v sloistyykh sredakh // Doklady Akademii nauk USSR. Nauki o Zemle. — 1990. — Vol. 310, No. 2. — P. 323–327.)
- Фатьянов А. Г., Бурмин В. Ю. Возникновение предвестников *РКР*-волн в радиально-симметричной слоистой Земле // Доклады Российской академии наук. Науки о Земле. — 2019. — Т. 489, № 1. — С. 84–88.

- Fatyanov A. G., Burmin V. Yu.* Occurrence of precursors of PKP waves in the layered radial-symmetric Earth // *Doklady Earth sciences*. — 2019. — Vol. 489, No. 1. — P. 1313–1317. (Original Russian paper: *Fatyanov A. G., Burmin V. Yu.* Vozniknoveniye predvestnikov PKP-voln v radial'no-simmetrichnoy sloistoy Zemle // *Doklady Rossiyskoy akademii nauk. Nauki o Zemle*. — 2019. — Vol. 489, No. 1. — P. 84–88.)
- Фатьянов А. Г., Бурмин В. Ю.* Кинематика волновых полей в шаре // *Геофизические процессы и биосфера*. — 2021. — Т. 20, № 1. — С. 61–67. — DOI: 10.21455/GPB2021.1-6
- Fatyanov A. G., Burmin V. Yu.* Kinematics of wave fields in a sphere // *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*. — 2021. — Vol. 57, No. 7. — P. 739–745. (Original Russian paper: *Fatyanov A. G., Burmin V. Yu.* Kinematika volnovykh poley v share // *Geofizicheskiye protsessy i biosfera*. — 2021. — Vol. 20, No. 1. — P. 61–67.)
- Gutenberg B.* The boundary of the Earth's inner core. — *Eos, Trans. AGU*. — 1957. — Vol. 38, No. 5. — P. 750–753.
- Gutenberg B., Richter C. F.* On seismic waves // *Gerlands Beiträge zur Geophysik*. — 1934. — Vol. 43. — P. 56–133.
- Hedlin M. A. H., Shearer P. M., Earle P. S.* Seismic evidence for small-scale heterogeneity throughout the Earth's mantle // *Nature*. — 1997. — Vol. 387. — P. 145–150.
- Kennett B. L. N., Engdahl E. R., Buland R.* Constraints on seismic velocities in the Earth from traveltimes // *Geophys. J. Int.* — 1995. — No. 122. — P. 108–124.
- Shen H., Tang X., Lyu C., Zhao L.* Spatial- and temporal-interpolations for efficient hybrid wave numerical simulations // *Frontiers in Earth Science. Sec. Solid Earth Geophysics*. — 2022. — Vol. 10. — DOI: 10.3389/feart.2022.977063
- Wen L., Helmberger D. V.* Ultra-low velocity zones near the core-mantle boundary from broadband PKP precursors // *Science*. — 1998. — Vol. 279, No. 5357. — P. 1701–1703.
- Wu W., Ni S., Zhan Z., Wei S.* An SEM-DSM three-dimensional hybrid method for modelling teleseismic waves with complicated source-side structures // *Geophysical Journal International*. — 2018. — Vol. 215, No. 1. — P. 133–154.
- Zhang S., Jin J.-M.* Computation of special functions. — New York: John Wiley, 1996. — 717 p.