

УДК: 681.5.015

**Общий подход к построению градиентных методов
параметрической идентификации на основе
модифицированной взвешенной ортогонализации
Грама – Шмидта и алгоритмов дискретной
фильтрации информационного типа**

А. В. Цыганов^{1,a}, Ю. В. Цыганова^{1,2,3,b}

¹Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова,
Россия, 432071, г. Ульяновск, пл. Ленина, д. 4/5

²Университет Иннополис,
Россия, 420500, г. Иннополис, ул. Университетская, д. 1

³Ульяновский государственный университет,
Россия, 432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42

E-mail: ^a andrew.tsyganov@gmail.com, ^b y.tsyganova@innopolis.ru

*Получено 27.06.2025, после доработки — 01.10.2025.
Принято к публикации 07.10.2025.*

В работе рассматривается задача параметрической идентификации дискретных линейных стохастических систем, представленных уравнениями в пространстве состояний, с аддитивными и мультипликативными шумами. Предполагается, что уравнения состояния и измерения дискретной линейной стохастической системы зависят от неизвестного параметра, подлежащего идентификации.

Представлен новый подход к построению градиентных методов параметрической идентификации в классе дискретных линейных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами, основанный на применении модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта (MWGS) и алгоритмов дискретной фильтрации информационного типа.

Основными теоретическими результатами данной работы являются: 1) новый критерий идентификации в терминах расширенного информационного LD-фильтра; 2) новый алгоритм вычисления значений производных по параметру неопределенности дискретной линейной стохастической системы в расширенном информационном LD-фильтре на основе прямой процедуры модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта; 3) новый метод вычисления градиента критерия идентификации на основе предложенного дифференцированного расширенного информационного LD-фильтра.

Преимуществом предложенного подхода является применение численно устойчивой к ошибкам машинного округления MWGS-ортогонализации, лежащей в основе разработанных методов и алгоритмов. Информационный LD-фильтр сохраняет симметричность и положительную определенность информационных матриц. Разработанные алгоритмы имеют блочно-матричную структуру, удобную для компьютерной реализации.

Все разработанные алгоритмы реализованы на языке MATLAB. Проведены серии численных экспериментов, результаты которых демонстрируют работоспособность предложенного подхода на примере решения задачи идентификации параметров математической модели сложной механической системы.

Полученные результаты могут быть использованы для построения методов параметрической идентификации математических моделей, представленных в пространстве состояний дискретными линейными стохастическими системами с аддитивными и мультипликативными шумами.

Ключевые слова: параметрическая идентификация, градиентный метод, MWGS-ортогонализация, алгоритм информационной фильтрации, линейная дискретная стохастическая система, параметрическая неопределенность

Работа выполнена в рамках Дополнительного соглашения № 073-03-2025-066/1 от 19.03.2025 г. к Соглашению о предоставлении субсидии из федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2025-066 от 16.01.2025 г., заключенного между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

UDC: 681.5.015

A general approach to constructing gradient methods for parameter identification based on modified weighted Gram – Schmidt orthogonalization and information-type discrete filtering algorithms

A. V. Tsyganov^{1,a}, J. V. Tsyganova^{1,2,3,b}

¹Ulyanovsk State Pedagogical University,
4/5 Lenin sq., Ulyanovsk, 432071, Russia

²Innopolis University,
1 Universitetskaya st., Innopolis, 420500, Russia

³Ulyanovsk State University,
42 L. Tolstoy st., Ulyanovsk, 432017, Russia

E-mail: ^a andrew.tsyganov@gmail.com, ^b y.tsyganova@innopolis.ru

*Received 27.06.2025, after completion — 01.10.2025.
Accepted for publication 07.10.2025.*

The paper considers the problem of parameter identification of discrete-time linear stochastic systems in the state space with additive and multiplicative noise. It is assumed that the state and measurements equations of a discrete-time linear stochastic system depend on an unknown parameter to be identified.

A new approach to the construction of gradient parameter identification methods in the class of discrete-time linear stochastic systems with additive and multiplicative noise is presented, based on the application of modified weighted Gram – Schmidt orthogonalization (MWGS) and the discrete-time information-type filtering algorithms.

The main theoretical results of this research include: 1) a new identification criterion in terms of an extended information filter; 2) a new algorithm for calculating derivatives with respect to an uncertainty parameter in a discrete-time linear stochastic system based on an extended information LD filter using the direct procedure of modified weighted Gram – Schmidt orthogonalization; and 3) a new method for calculating the gradient of identification criteria using a “differentiated” extended information LD filter.

The advantages of this approach are that it uses MWGS orthogonalization which is numerically stable against machine roundoff errors, and it forms the basis of all the developed methods and algorithms. The information LD-filter maintains the symmetry and positive definiteness of the information matrices. The algorithms have an array structure that is convenient for computer implementation.

All the developed algorithms were implemented in MATLAB. A series of numerical experiments were carried out. The results obtained demonstrated the operability of the proposed approach, using the example of solving the problem of parameter identification for a mathematical model of a complex mechanical system.

The results can be used to develop methods for identifying parameters in mathematical models that are represented in state space by discrete-time linear stochastic systems with additive and multiplicative noise.

Keywords: parameter identification, gradient-based method, MWGS orthogonalization, algorithm of information filtering, linear discrete-time stochastic system, parameter uncertainty

Citation: Computer Research and Modeling, 2025, vol. 17, no. 5, pp. 761–782 (Russian).

This work was carried out under the Supplementary Agreement No. 073-03-2025-066/1 dated March 19, 2025, to the Agreement on granting subsidies from the federal budget for financial support of the fulfillment of state assignments to provide public services (works) No. 073-03-2025-066 dated January 16, 2025, concluded between Ulyanovsk State Pedagogical University and the Ministry of Education of the Russian Federation.

Введение и постановка задачи

Дискретными линейными стохастическими системами с аддитивными и мультипликативными шумами описывается широкий класс математических моделей сложных систем, связанных с обработкой и анализом измерительной информации во многих областях науки и техники, таких как сложные производственно-технологические, энергетические, технические и экономические системы, системы обработки изображений, телекоммуникационные, аэрокосмические системы. Мультипликативные помехи позволяют учесть в математической модели ошибки линеаризации, физические явления типа фединга (замирания) в каналах связи, ошибки моделирования и др.

В настоящее время задача исследования и разработки новых методов моделирования для стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами по-прежнему остается актуальной в силу важности современных практических приложений, например, в задачах биомеханики, робототехники, беспроводных телекоммуникационных систем [Liu, 2015; Chen et al., 2015; Wu et al., 2016].

Дополнительную сложность в процесс построения математической модели системы вносит так называемая параметрическая неопределенность, когда известна структура модели, но не известны числовые значения ее параметров, либо они могут внезапно измениться во времени в процессе функционирования системы. В этом случае возникает задача параметрической идентификации [Ljung, 1999], которая на практике обычно решается численными методами оптимизации выбранного критерия идентификации. Реализация методов оптимизации градиентного типа [Васильев, 1982] требует вычисления градиента критерия идентификации.

Как известно, при программной реализации алгоритмов, требующих сложных вычислений, серьезной проблемой является влияние на результат ошибок машинного округления [Golub, Van Loan, 2013]. Их накопление иногда оказывается настолько велико, что приводит к неправдоподобным оценкам и тем самым ставит под сомнение любые полученные результаты. Поэтому построение численно устойчивых вычислительных методов — крайне важная и актуальная задача, решение которой позволяет более эффективно решать задачи параметрической идентификации математических моделей сложных систем.

В данной работе рассмотрим математические модели дискретных линейных стохастических систем с параметрической неопределенностью следующего вида:

$$\begin{cases} x_k = (F_{k-1}(\theta) + \tilde{F}_{k-1}(\theta)\xi_{k-1})x_{k-1} + G_{k-1}(\theta)w_{k-1}, \\ z_k = (H_k(\theta) + \tilde{H}_k(\theta)\zeta_k)x_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{cases} \quad (1)$$

где $\theta \in \mathbb{R}^p$ — неизвестный параметр модели, $x_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $\xi_k \in \mathbb{R}$ — мультипликативный шум в уравнении состояния, $w_k \in \mathbb{R}^q$ — аддитивный шум в уравнении состояния, $z_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор доступных измерений, $\zeta_k \in \mathbb{R}$ — мультипликативный шум в уравнении измерений, $v_k \in \mathbb{R}^m$ — аддитивный шум в уравнении измерений. Предположим, что начальный вектор состояния x_0 является гауссовским случайным вектором с математическим ожиданием $\bar{x}_0(\theta)$ и ковариацией $P_0(\theta)$; аддитивные шумы w_k и v_k образуют независимые гауссовские последовательности с нулевыми математическими ожиданиями и матрицами ковариаций $Q_k(\theta) > 0$ и $R_k(\theta) > 0$ соответственно; мультипликативные шумы $\xi_k \sim N(0, \sigma_\xi^2)$ и $\zeta_k \sim N(0, \sigma_\zeta^2)$ являются гауссовскими случайными величинами и не зависят от w_k , v_k и от $\bar{x}_0(\theta)$.

Параметрическая неопределенность модели (1) определяется тем, что все элементы матриц $F_k(\theta)$, $\tilde{F}_k(\theta)$, $G_k(\theta)$, $H_k(\theta)$, $\tilde{H}_k(\theta)$, входящих в правые части уравнений модели, ковариационные матрицы шумов $Q_k(\theta)$ и $R_k(\theta)$, а также начальный вектор состояния $x_0(\theta)$ могут зависеть от неизвестного параметра θ .

Поставим задачу параметрической идентификации модели (1), которая заключается в вычислении оценок параметра θ по доступным измерениям z_k , $k = 1, 2, \dots, K$, при наличии аддитивных и мультипликативных шумов.

Одним из известных подходов к решению задач параметрической идентификации является применение численных методов условной минимизации критерия идентификации вида

$$\widehat{\theta}_{\min} = \arg \min_{\theta \in D(\theta)} J(\theta, Z_1^K), \quad (2)$$

где θ — неизвестный параметр, подлежащий оцениванию, $D(\theta)$ — область определения θ , $Z_1^K = \{z_1, \dots, z_K\}$ — доступная измерительная информация [Gibbs, 2011]. Критерий идентификации (2) выбирают в зависимости от исследуемого класса динамических систем [Ljung, 1999]. Область $D(\theta)$ допустимых значений параметра θ определяется из условий сходимости его оценок при решении задачи (2). Для дискретных линейных стохастических систем общие условия сходимости градиентных методов идентификации известны и обсуждаются в [Ljung, 1978].

В данной работе для решения задачи параметрической идентификации в классе дискретных линейных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами рассмотрим критерий идентификации, основанный на отрицательной логарифмической функции правдоподобия:

$$J(\theta, Z_1^K) = \frac{Km}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left[\ln \det B_k(\theta) + \|v_k(\theta)\|_{B_k^{-1}(\theta)}^2 \right], \quad (3)$$

где вектор невязок $v_k(\theta)$ и его ковариационную матрицу $B_k(\theta)$ вычисляют в алгоритме калмановского типа [Wu et al., 2016; Tsyganov et al., 2020] (см. алгоритм 1), который, в отличие от стандартного фильтра Калмана [Grewal, Andrews, 2015], учитывает наличие мультипликативных шумов в уравнениях системы (1).

Алгоритм 1. Ковариационный фильтр (CF)

Вход: $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0 \bar{x}_0^T$, $P_0 = \Pi_0$, $\widehat{x}_0 = \bar{x}_0$

Выход: $\widehat{x}_k$, P_k , $k = 1, 2, \dots, K$

1 **for** $k = 1, 2, \dots, K$ **do**

Обновление по времени

2 $\widetilde{Q}_{k-1} = \sigma_\xi^2 \widetilde{F}_{k-1} X_{k-1} \widetilde{F}_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T$

3 $X_k = F_{k-1} X_{k-1} F_{k-1}^T + \widetilde{Q}_{k-1}$

4 $\widehat{x}_{k|k-1} = F_{k-1} \widehat{x}_{k-1}$

5 $P_{k|k-1} = F_{k-1} P_{k-1} F_{k-1}^T + \widetilde{Q}_{k-1}$

Обновление по измерениям

6 $\widetilde{R}_k = \sigma_\zeta^2 \widetilde{H}_k X_k \widetilde{H}_k^T + R_k$

7 $B_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + \widetilde{R}_k$

8 $K_k = P_{k|k-1} H_k^T B_k^{-1}$

9 $\widehat{x}_k = \widehat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k \widehat{x}_{k|k-1})$

10 $P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$

11 **end for**

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В алгоритме 1 для простоты изложения не указываем возможную зависимость системных матриц от параметра θ .

Для условной минимизации критерия (3) эффективным является применение градиентного подхода, который требует вычисления градиента критерия (3) на каждом шаге алгоритма идентификации [Gibbs, 2011].

Обновление оценки неизвестного параметра в стандартном градиентном методе первого порядка выполняется согласно итерационному выражению

$$\theta^{j+1} = \theta^j - \beta_j \nabla_{\theta} J(\theta^j, Z_1^K), \quad (4)$$

где θ^j — оценка неизвестного параметра на j -й итерации алгоритма. В (4) ∇_{θ} означает оператор градиента $\left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} \mid \cdots \mid \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right]^T$, который применяется к (3) в точке $\theta = \theta^j$. Скалярный параметр шага β_j выбирают таким образом, чтобы удовлетворялось условие $J(\theta^{j+1}, Z_1^K) \leq J(\theta^j, Z_1^K) + e$, где e — положительное число, которое в зависимости от конкретного метода минимизации может быть выбрано различными способами [Nocedal, Wright, 2006].

Для моделей дискретных линейных стохастических систем вида (1) вычисление значений градиента $\nabla_{\theta} J(\theta, Z_1^K)$ критерия $J(\theta, Z_1^K)$ требует применения алгоритма дискретной фильтрации, дополненного так называемыми уравнениями чувствительности, определяющими способ вычисления производных оценки вектора состояния $\hat{x}_k$ и ковариационной матрицы ошибки оценивания P_k по параметру θ .

Рассмотренный подход к решению задачи параметрической идентификации позволяет вычислить оценки неизвестного параметра θ одновременно с оцениванием вектора состояния дискретной линейной стохастической системы с мультипликативными и аддитивными шумами в уравнении состояния и измерения. При этом качество полученного решения можно повысить за счет разработки численно эффективных методов для вычисления как самого критерия идентификации, так и его градиента. Под численной эффективностью мы понимаем прежде всего устойчивость вычислительной схемы по отношению к ошибкам машинного округления [Golub, Van Loan, 2013]. Известно, что для дискретных стохастических систем с аддитивными гауссовскими шумами указанное свойство в полной мере обеспечивает подход к построению алгоритмов дискретной фильтрации, основанный на модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта (так называемой MWGS-ортогонализации) [Bierman, 1977; Grewal, Andrews, 2015].

Целью данной работы является разработка нового подхода к построению градиентных методов параметрической идентификации для дискретных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами вида (1), основанного на применении модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта и алгоритмов дискретной фильтрации информационного типа, разработанных ранее в [Tsyganov et al., 2020; Цыганов и др., 2023].

Достижение указанной цели подразумевает решение следующих задач.

1. Построение нового критерия идентификации в терминах расширенного информационного LD-фильтра.
2. Разработка нового алгоритма вычисления значений производных по модельному параметру θ в расширенном информационном LD-фильтре на основе прямой процедуры MWGS-ортогонализации.
3. Построение нового метода вычисления градиента критерия идентификации на основе расширенного информационного LD-фильтра.

В следующих разделах подробно описаны полученные решения поставленных задач.

Алгоритмы дискретной фильтрации информационного типа

Приведенный выше алгоритм 1 является алгоритмом ковариационного типа, поскольку позволяет вычислить вместе с оценкой вектора состояния $\widehat{x}_k$ ковариационную матрицу ошибок оценивания P_k . Известную альтернативу ковариационным алгоритмам дискретной фильтрации составляют алгоритмы информационного типа, которые позволяют вычислить оценку $\widehat{y}_k$ информационного вектора $y_k \triangleq Y_k x_k$ и информационную матрицу $Y_k \triangleq P_k^{-1}$. Алгоритмы дискретной фильтрации информационного типа имеют преимущество перед ковариационными алгоритмами в случае распределенной обработки данных, поскольку служат основой для построения современных методов распределенной дискретной фильтрации [Olfati-Saber, 2007; Cattivelli, Sayed, 2010; Mahmoud, Khalid, 2013; Ryu, Back, 2019], применение которых в настоящее время очень актуально в связи с бурным развитием распределенных информационных систем.

Алгоритм информационного типа для системы (1) можно получить из алгоритма 1, применив лемму об обращении матричных выражений [Henderson, Searle, 1981]. В [Tsyanov et al., 2020] приведены два варианта информационного алгоритма дискретной фильтрации. Для последующего изложения основных результатов приведем первый из них.

Алгоритм 2. Информационный фильтр (IF)

Вход: $\bar{x}_0, \Pi_0$

Выход: $\widehat{y}_k, Y_k, k = 1, 2, \dots, K$

1 $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0 \bar{x}_0^T, Y_0 = \Pi_0^{-1}, \widehat{y}_0 = Y_0 \bar{x}_0$

2 **for** $k = 1, 2, \dots, K$ **do**

Обновление по времени

3 $\widetilde{Q}_{k-1} = \sigma_\xi^2 \widetilde{F}_{k-1} X_{k-1} \widetilde{F}_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T$

4 $X_k = F_{k-1} X_{k-1} F_{k-1}^T + \widetilde{Q}_{k-1}$

5 $S_{k-1} = F_{k-1}^T Y_{k-1} F_{k-1}^{-1}$

6 $C_{k-1} = S_{k-1} + \widetilde{Q}_{k-1}^{-1}$

7 $J_{k-1} = S_{k-1} C_{k-1}^{-1}$

8 $Y_{k|k-1} = (I - J_{k-1}) S_{k-1}$

9 $\widehat{y}_{k|k-1} = (I - J_{k-1}) F_{k-1}^T \widehat{y}_{k-1}$

Обновление по измерениям

10 $\widetilde{R}_k = \sigma_\zeta^2 \widetilde{H}_k X_k \widetilde{H}_k^T + R_k$

11 $Y_k = Y_{k|k-1} + H_k^T \widetilde{R}_k^{-1} H_k$

12 $\widehat{y}_k = \widehat{y}_{k|k-1} + H_k^T \widetilde{R}_k^{-1} z_k$

13 **end for**

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В алгоритме 2 оценки $\widehat{y}_k$ информационного вектора y_k и оценки $\widehat{x}_k$ вектора состояния x_k связаны соотношением $\widehat{y}_k = Y_k \widehat{x}_k$. Следовательно, $\widehat{x}_k = Y_k^{-1} \widehat{y}_k$. Также и для векторов $\widehat{y}_{k|k-1}$ и $\widehat{x}_{k|k-1}$.

Легко видеть, что в алгоритме 2 присутствуют операции матричного вычитания и обращения, которые могут повлиять на численную устойчивость его компьютерной реализации при наличии ошибок машинного округления. В частности, при вырожденных или близких к вырожденным матрицах $\widetilde{Q}_{k-1}, \widetilde{R}_k$ или при потере информационной матрицей $Y_{k|k-1}$ свойства положительной определенности алгоритм теряет работоспособность и оценки будут расходиться.

Для предотвращения численной неустойчивости в теории калмановской фильтрации существуют методы, основанные на матричных ортогональных преобразованиях, позволяющие строить численно устойчивые модификации алгоритмов дискретной фильтрации [Grewal, Andrews,

2015; Kailath et al., 1983]. Для дискретных стохастических систем с аддитивными гауссовскими шумами такие методы хорошо известны (см., например, обзор [Цыганова, Куликова, 2018]).

Для класса дискретных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами численно устойчивые модификации алгоритмов дискретной фильтрации калмановского типа были предложены в работах авторов [Tsyganov et al., 2020; Kureneva et al., 2021; Tsyganov et al., 2022; Цыганов и др., 2023]. Одним из подходов к построению указанных алгоритмов является применение модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта (MWGS-ортогонализация). Этот метод впервые был предложен в [Thornton, 1976] для вычисления UD-факторов ковариационной матрицы ошибок оценивания на этапе экстраполяции в алгоритме Дж. Бирмана [Bierman, 1977].

Существуют два основных вида разложения прямоугольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{r \times s}$ с помощью метода MWGS: LD-разложение (применяется прямая процедура MWGS) и UD-разложение (применяется обратная процедура MWGS). Обратная процедура MWGS-ортогонализации широко применяется в области дискретной фильтрации стохастических систем [Bierman, 1977; Grewal et al., 2001; Gibbs, 2011; Grewal, Andrews, 2015].

Для дискретных стохастических систем вида (1) задача построения новых алгоритмов дискретной фильтрации ковариационного и информационного типа на базе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта решена в работах [Tsyganov et al., 2020; Цыганов и др., 2023], где предложены новые UD- и LD-алгоритмы фильтрации ковариационного и информационного типа.

Развивая и дополняя результаты [Tsyganov et al., 2020; Цыганов и др., 2023], в настоящей работе мы предлагаем новый подход к построению градиентных методов параметрической идентификации для дискретных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами, включая параметрическую неопределенность системных матриц, основанный на применении численно устойчивых методов модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта (MWGS) и алгоритмов дискретной фильтрации информационного типа.

Решение будем строить на примере прямой процедуры MWGS-ортогонализации. Рассмотрим численно устойчивую LD-модификацию информационного фильтра IF, использующую LD-разложение информационных матриц вида $Y = L_Y D_Y L_Y^T$, где L_Y — нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали, $D_Y > 0$ — диагональная матрица.

В [Цыганов и др., 2023] впервые предложена расширенная версия информационного LD-фильтра (см. алгоритм 3). Основная идея LD-алгоритма заключается в преобразовании блочных предмассивов $\mathcal{A}$ (прямоугольных, в общем случае, блочных матриц) и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ (блочных диагональных матриц). Применяя к ним прямую процедуру MWGS-ортогонализации, получаем блочные постмассивы $\mathcal{L}$ (нижние треугольные блочные матрицы) и $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ (блочные диагональные матрицы) такие, что

$$\mathcal{A}^T = \mathcal{L} \mathcal{W}^T \quad \text{и} \quad \mathcal{A}^T \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \mathcal{A} = \mathcal{L} \mathcal{D}_{\mathcal{L}} \mathcal{L}^T, \quad (5)$$

где $\mathcal{W}$ — матрица MWGS-преобразования.

Обозначим через $\widehat{d}_k = (L_{Y_k} D_{Y_k})^{-1} \widehat{y}_k$ LD-оценку информационного фильтра. Пусть cholm() — процедура модифицированного разложения Холецкого [Golub, Van Loan, 2013]. Расширенный информационный LD-фильтр запишем в виде алгоритма 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В любой момент времени k оценку $\widehat{x}_k$ вектора состояния x_k можно вычислить с помощью прямой подстановки как решение системы линейных уравнений $L_{Y_k} \widehat{x}_k = \widehat{d}_k$.

Доказано [Цыганов и др., 2023], что алгоритмы 2 и 3 алгебраически эквивалентны.

Преимуществом предложенной LD-модификации алгоритма дискретной фильтрации является его расширенная блочно-матричная форма, позволяющая обновлять все необходимые величины фильтра с использованием численно устойчивой процедуры MWGS-ортогонализации.

Алгоритм 3. Расширенный информационный LD-фильтр (eLD-IF)**Вход:** $\bar{x}_0, \Pi_0$ **Выход:** $\widehat{d}_k, \{L_{Y_k}, D_{Y_k}\}, k = 1, 2, \dots, K$ 1 $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0 \bar{x}_0^T, Y_0 = \Pi_0^{-1}, \{L_{X_0}, D_{X_0}\} = \text{cholm}(X_0), \{L_{Y_0}, D_{Y_0}\} = \text{cholm}(Y_0), \bar{y}_0 = Y_0 \bar{x}_0, \widehat{d}_0 = (L_{Y_0} D_{Y_0})^{-1} \bar{y}_0$ 2 **for** $k = 1, 2, \dots, K$ **do** **Обновление по времени**3 $\{L_{Q_{k-1}}, D_{Q_{k-1}}\} = \text{cholm}(Q_{k-1})$ 4 $\underbrace{\begin{bmatrix} \widetilde{F}_{k-1} L_{X_{k-1}} & G_{k-1} L_{Q_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_1^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{\widetilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_1} \mathcal{W}_1^T \quad // \text{вычисление } L_{\widetilde{Q}_{k-1}}$ 5 $\mathcal{W}_1^T \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_\xi^2 D_{X_{k-1}} & 0 \\ 0 & D_{Q_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_1}} \mathcal{W}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\widetilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_1}} \quad // \text{вычисление } D_{\widetilde{Q}_{k-1}}$ 6 $\underbrace{\begin{bmatrix} L_{\widetilde{Q}_{k-1}}^{-T} & F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} & 0 \\ 0 & F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} & 0 \\ 0 & \widehat{d}_{k-1}^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_2^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{C_{k-1}} & 0 & 0 \\ J_{k-1} L_{C_{k-1}} & L_{Y_{k|k-1}} & 0 \\ \tau^T & \widehat{d}_{k|k-1}^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_2} \mathcal{W}_2^T \quad // \text{вычисление } L_{Y_{k|k-1}}$ 7 $\mathcal{W}_2^T \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\widetilde{Q}_{k-1}}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & D_{Y_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_2}} \mathcal{W}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{C_{k-1}} & 0 & 0 \\ 0 & D_{Y_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_2}} \quad // \text{вычисление } D_{Y_{k|k-1}}$ 8 $\underbrace{\begin{bmatrix} F_{k-1} L_{X_{k-1}} & L_{\widetilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_3^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{X_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_3} \mathcal{W}_3^T \quad // \text{вычисление } L_{X_k}$ 9 $\mathcal{W}_3^T \underbrace{\begin{bmatrix} D_{X_{k-1}} & 0 \\ 0 & D_{\widetilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_3}} \mathcal{W}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{X_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_3}} \quad // \text{вычисление } D_{X_k}$ **Обновление по измерениям**10 $\{L_{R_k}, D_{R_k}\} = \text{cholm}(R_k)$ 11 $\underbrace{\begin{bmatrix} \widetilde{H}_k L_{X_k} & L_{R_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_4^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{\widetilde{R}_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_4} \mathcal{W}_4^T \quad // \text{вычисление } L_{\widetilde{R}_k}$ 12 $\mathcal{W}_4^T \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_\xi^2 D_{X_k} & 0 \\ 0 & D_{R_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_4}} \mathcal{W}_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\widetilde{R}_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_4}} \quad // \text{вычисление } D_{\widetilde{R}_k}$ 13 $\underbrace{\begin{bmatrix} H_k^T L_{\widetilde{R}_k}^{-T} & L_{Y_{k|k-1}} \\ z_k^T L_{\widetilde{R}_k}^{-T} & \widehat{d}_{k|k-1}^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_5^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{Y_k} & 0 \\ \widehat{d}_k^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_5} \mathcal{W}_5^T \quad // \text{вычисление } L_{Y_k}$ 14 $\mathcal{W}_5^T \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\widetilde{R}_k}^{-1} & 0 \\ 0 & D_{Y_{k|k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_5}} \mathcal{W}_5 = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{Y_k} & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_5}} \quad // \text{вычисление } D_{Y_k}$ 15 **end for**

В [Tsyganov et al., 2020] показана численная устойчивость к ошибкам машинного округления алгоритмов, основанных на матричных MWGS-преобразованиях, по сравнению со стандартными алгоритмами калмановского типа. В [Цыганов и др., 2023] показан выигрыш по времени вычислений с помощью прямой процедуры MWGS-ортогонализации и основанных на ней LD-фильтров по сравнению с обратной процедурой и ранее построенных на ее основе UD-фильтров [Tsyganov et al., 2020]. Указанные результаты обусловили выбор LD-модификации алгоритма дискретной фильтрации информационного типа для построения градиентного метода параметрической идентификации.

Основные результаты

Основными результатами являются новые решения трех связанных задач, перечисленных в первом разделе данной работы, которые вместе составляют общий подход к построению градиентных методов параметрической идентификации на основе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта и алгоритмов дискретной фильтрации информационного типа в классе дискретных линейных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами.

В данном разделе сначала построим новый критерий идентификации в терминах расширенного информационного LD-фильтра. Затем с помощью разработанного ранее оригинального метода вычисления значений производных в LD-разложении параметризованных матриц [Цыганова, Цыганов, 2018] модифицируем алгоритм 3, добавляя в него уравнения чувствительности по параметру θ для вычисления частных производных $\frac{\partial \widehat{d}_k(\theta_i)}{\partial \theta_i}$ и $\frac{\partial D_{Y_k}(\theta_i)}{\partial \theta_i}$, $\frac{\partial L_{Y_k}(\theta_i)}{\partial \theta_i}$, $i = 1, \dots, p$. После этого разработаем новый метод вычисления градиента критерия качества идентификации в терминах дифференцированного информационного LD-фильтра.

Построение нового критерия идентификации в терминах расширенного информационного LD-фильтра

Для построения нового критерия идентификации в терминах алгоритма 3 необходимо выразить величины $\det B_k(\theta)$ и $\|v_k(\theta)\|_{B_k^{-1}(\theta)}^2$, входящие в выражение (3), через доступные величины расширенного информационного LD-фильтра.

Теорема 1. Критерий идентификации (3) в терминах информационного расширенного LD-фильтра (алгоритм eLD-IF) имеет вид

$$J_{eLDIF}(\theta, Z_1^K) = \frac{Km}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left[\ln \det D_{\bar{R}_k}(\theta) + \ln \det D_{Y_k}(\theta) - \ln \det D_{Y_{k|k-1}}(\theta) + \right. \\ \left. + \|\widehat{d}_{k|k-1}(\theta)\|_{D_{Y_{k|k-1}}(\theta)}^2 - \|\widehat{d}_k(\theta)\|_{D_{Y_k}(\theta)}^2 + \left\| L_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta) z_k \right\|_{D_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta)}^2 \right], \quad (6)$$

где правая часть (6) содержит величины, доступные в алгоритме eLD-IF на каждом шаге его выполнения ($k = 1, \dots, K$).

Доказательство. Требуется доказать, что

$$\ln \det B_k(\theta) = \ln \det D_{\bar{R}_k}(\theta) + \ln \det D_{Y_k}(\theta) - \ln \det D_{Y_{k|k-1}}(\theta), \quad (7)$$

$$\|v_k(\theta)\|_{B_k^{-1}(\theta)}^2 = \|\widehat{d}_{k|k-1}(\theta)\|_{D_{Y_{k|k-1}}(\theta)}^2 - \|\widehat{d}_k(\theta)\|_{D_{Y_k}(\theta)}^2 + \left\| L_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta) z_k \right\|_{D_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta)}^2. \quad (8)$$

Для простоты изложения будем опускать параметр θ . Рассмотрим общий вид LD-разложения (5) и матричное равенство (20) из [Цыганов и др., 2023]. Учитывая, что $P_{k|k-1} = Y_{k|k-1}^{-1}$ и $P_k = Y_k^{-1}$ по определению, запишем верное равенство

$$\mathcal{W}^T \begin{bmatrix} D_{\bar{R}_k} & 0 \\ 0 & D_{Y_{k|k-1}^{-1}} \end{bmatrix} \mathcal{W} = \begin{bmatrix} D_{B_k} & 0 \\ 0 & D_{Y_k^{-1}} \end{bmatrix}.$$

Откуда

$$\det(\mathcal{W}^T D_{\bar{R}_k} D_{Y_{k|k-1}^{-1}} \mathcal{W}) = \det(D_{B_k} D_{Y_k^{-1}}). \quad (9)$$

С учетом того, что матрица $\mathcal{W}$ ортогональная, из (9) получим

$$\det D_{\bar{R}_k} \det D_{Y_{k|k-1}^{-1}} = \det D_{B_k} \det D_{Y_k^{-1}}.$$

Следовательно,

$$\det D_{B_k} = \frac{\det D_{\bar{R}_k} \cdot \det D_{Y_{k|k-1}^{-1}}}{\det D_{Y_k^{-1}}}. \quad (10)$$

Учитывая, что для любой квадратной невырожденной матрицы $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, выражение (10) можно переписать в виде

$$\det D_{B_k} = \frac{\det D_{\bar{R}_k} \cdot \det D_{Y_k}}{\det D_{Y_{k|k-1}}}. \quad (11)$$

С учетом (11) и известных свойств логарифма приходим к

$$\ln \det D_{B_k} = \ln \det D_{\bar{R}_k} + \ln \det D_{Y_k} - \ln \det D_{Y_{k|k-1}}.$$

Осталось показать, что $\det B_k = \det D_{B_k}$. Рассмотрим LD-разложение $B_k = L_{B_k} D_{B_k} L_{B_k}^T$ матрицы B_k . Тогда

$$\det B_k = \det(L_{B_k} D_{B_k} L_{B_k}^T) = \det L_{B_k} \cdot \det D_{B_k} \cdot \det L_{B_k}^T. \quad (12)$$

Поскольку матрица L_{B_k} нижняя треугольная, с единицами на диагонали, из (12) окончательно получим

$$\det B_k = 1 \cdot \det D_{B_k} \cdot 1 = \det D_{B_k}.$$

Таким образом, выражение (7) доказано.

Теперь докажем (8). Используем ранее доказанный факт [Bierman et al., 1990], что

$$\|v_k\|_{B_k^{-1}}^2 = \|\widehat{x}_{k|k-1}\|_{P_{k|k-1}^{-1}}^2 - \|\widehat{x}_k\|_{P_k^{-1}}^2 + \|z_k\|_{\bar{R}_k^{-1}}^2, \quad (13)$$

где $\widehat{x}_{k|k-1}$ и $\widehat{x}_k$ — оценки вектора состояния, $P_{k|k-1}$ и P_k — ковариационные матрицы ошибок оценивания в алгоритме 1.

Учитывая связь между величинами ковариационного фильтра (алгоритм 1) и информационных фильтров (алгоритмы 2 и 3), выражение (13) можно переписать в виде

$$\|v_k\|_{B_k^{-1}}^2 = \|Y_{k|k-1}^{-1} \widehat{y}_{k|k-1}\|_{Y_{k|k-1}}^2 - \|Y_k^{-1} \widehat{y}_k\|_{Y_k}^2 + \|L_{\bar{R}_k}^{-1} z_k\|_{D_{\bar{R}_k}^{-1}}^2, \quad (14)$$

где $\widehat{y}_{k|k-1}$ и $\widehat{y}_k$ — информационные оценки вектора состояния, $Y_{k|k-1}$ и Y_k — информационные матрицы в алгоритме 2.

Рассмотрим отдельно выражение

$$\|Y_{k|k-1}^{-1}\widehat{y}_{k|k-1}\|_{Y_{k|k-1}}^2 - \|Y_k^{-1}\widehat{y}_k\|_{Y_k}^2. \quad (15)$$

С учетом определения нормы перепишем (15) в виде

$$\widehat{y}_{k|k-1}^T Y_{k|k-1}^{-T} Y_{k|k-1} Y_{k|k-1}^{-1} \widehat{y}_{k|k-1} - \widehat{y}_k^T Y_k^{-T} Y_k Y_k^{-1} \widehat{y}_k. \quad (16)$$

Учитывая свойство симметричности информационных матриц, из (16) получим

$$\widehat{y}_{k|k-1}^T Y_{k|k-1}^{-1} \widehat{y}_{k|k-1} - \widehat{y}_k^T Y_k^{-1} \widehat{y}_k. \quad (17)$$

Осталось выразить (17) в терминах алгоритма 3. Для этого воспользуемся введенными выше определениями LD-оценки информационного фильтра $\widehat{d}_k = (L_{Y_k} D_{Y_k})^{-1} \widehat{y}_k$ и LD-разложения информационной матрицы $Y_k = L_{Y_k} D_{Y_k} L_{Y_k}^T$.

Таким образом, выражение (17) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \left(L_{Y_{k|k-1}} D_{Y_{k|k-1}} \widehat{d}_{k|k-1} \right)^T \left(L_{Y_{k|k-1}} D_{Y_{k|k-1}} L_{Y_{k|k-1}}^T \right)^{-1} L_{Y_{k|k-1}} D_{Y_{k|k-1}} \widehat{d}_{k|k-1} - \\ & - \left(L_{Y_k} D_{Y_k} \widehat{d}_k \right)^T \left(L_{Y_k} D_{Y_k} L_{Y_k}^T \right)^{-1} L_{Y_k} D_{Y_k} \widehat{d}_k. \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая свойства обратной и диагональной матрицы, из (18) получим

$$\begin{aligned} & \widehat{d}_{k|k-1}^T D_{Y_{k|k-1}} L_{Y_{k|k-1}}^T L_{Y_{k|k-1}}^{-T} D_{Y_{k|k-1}}^{-1} L_{Y_{k|k-1}}^{-1} L_{Y_{k|k-1}} D_{Y_{k|k-1}} \widehat{d}_{k|k-1} - \widehat{d}_k^T D_{Y_k} L_{Y_k}^T L_{Y_k}^{-T} D_{Y_k}^{-1} L_{Y_k}^{-1} L_{Y_k} D_{Y_k} \widehat{d}_k = \\ & = \widehat{d}_{k|k-1}^T D_{Y_{k|k-1}} \widehat{d}_{k|k-1} - \widehat{d}_k^T D_{Y_k} \widehat{d}_k = \|\widehat{d}_{k|k-1}\|_{D_{Y_{k|k-1}}}^2 - \|\widehat{d}_k\|_{D_{Y_k}}^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставив (19) в (14), приходим к (8).

Теорема 1 доказана полностью. $\square$

Алгоритм вычисления значений производных по модельному параметру θ в расширенном информационном LD-фильтре

Для вычисления градиента критерия идентификации (6) необходимо уметь вычислять значения производных входящих в него величин, которые зависят от параметра θ , а именно $L_{\bar{R}_k}(\theta)$,

$D_{\bar{R}_k}(\theta)$, $D_{Y_k}(\theta)$, $D_{Y_{k|k-1}}(\theta)$, $\widehat{d}_{k|k-1}(\theta)$, $\widehat{d}_k(\theta)$.

Для этого нам необходимо построить так называемый дифференцированный информационный LD-фильтр, который является модификацией алгоритма eLD-IF и позволяет вычислять значения производных величин, входящих в уравнения фильтра.

При построении алгоритма применим подход, аналогичный [Кувшинова и др., 2023; Tsyganov, Tsyganova, 2023], а также оригинальный метод вычисления производных в матричном ортогональном LD-преобразовании [Цыганова, Цыганов, 2018], основанном на прямой процедуре MWGS-ортогонализации.

Обозначим $A \triangleq A(\theta)$ и $D_w \triangleq D_w(\theta)$. Как было сказано выше, смысл LD-разложения заключается в том, чтобы по заданной паре матриц $\{A, D_w\}$ с помощью прямой процедуры модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта вычислить матрицы $\{\bar{L}, D_\beta\}$ такие, что

$$A^T = \bar{L} W^T \quad \text{и} \quad A^T D_w A = \bar{L} D_\beta \bar{L}^T, \quad (20)$$

где $A \in \mathbb{R}^{r \times s}$ и $W \in \mathbb{R}^{r \times s}$ — матрица MWGS-преобразования, $\bar{L} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ — нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали ($r \geq s$). Диагональные матрицы $D_w \in \mathbb{R}^{r \times r}$ и $D_\beta \in \mathbb{R}^{s \times s}$ удовлетворяют условиям $D_w > 0$ и $W^T D_w W = D_\beta$.

Лемма 1 (см. [Цыганова, Цыганов, 2018]). Пусть элементы матриц $\{A, D_w\}$ являются дифференцируемыми функциями по скалярному параметру θ . Рассмотрим преобразование (20). При известных матрицах производных A'_θ и $(D_w)'_\theta$ значения производных элементов матриц $\{\bar{L}, D_\beta\}$ при $\theta = \hat{\theta}$ можно вычислить как

$$\bar{L}'_\theta = \bar{L}(\bar{L}_0 + \bar{L}_2 + \bar{U}_0^T)D_\beta^{-1} \quad \text{и} \quad (D_\beta)'_\theta = 2D_0 + D_2, \quad (21)$$

где величины $\bar{L}_0, D_0, \bar{U}_0$ являются, соответственно, строго нижней треугольной, диагональной и строго верхней треугольной частями матричного произведения $W^T D_w A'_\theta \bar{L}^{-T}$, а матрицы D_2 и $\bar{L}_2$ являются, соответственно, диагональной и строго нижней треугольной частями матричного произведения $W^T (D_w)'_\theta W$.

Алгоритм для вычисления производных в матричном LD-преобразовании (20) может быть представлен в следующем виде.

Алгоритм 4. Алгоритм Diff-LD

Вход: $\mathcal{A}(\theta) \in \mathbb{R}^{r \times s}$, $\mathcal{D}_\mathcal{A}(\theta) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\theta = \hat{\theta} \in \mathbb{R}^p$, $\mathcal{A}'_{\theta_i} = \left\{ \frac{a_{kj}(\theta)}{\partial \theta_i} \right\}$, $(\mathcal{D}_\mathcal{A})'_{\theta_i} = \left\{ \frac{d_k(\theta)}{\partial \theta_i} \right\}$, $i = 1, \dots, p$

Выход: $\{\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{s \times s}, \mathcal{D}_\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{s \times s}\}$, $\{\mathcal{L}'_{\theta_i}, (\mathcal{D}_\mathcal{L})'_{\theta_i}\}$, $i = 1, \dots, p$

```

1   $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\hat{\theta})$ ,  $\mathcal{D}_\mathcal{A} = \mathcal{D}_\mathcal{A}(\hat{\theta})$ 
2   $\mathcal{A}'_{\theta_i} = \mathcal{A}'_{\theta_i}|_{\theta_i=\hat{\theta}_i}$ ,  $(\mathcal{D}_\mathcal{A})'_{\theta_i} = (\mathcal{D}_\mathcal{A})'_{\theta_i}|_{\theta_i=\hat{\theta}_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ 
3   $\{\mathcal{L}, \mathcal{D}_\mathcal{L}, \mathcal{W}\} = \text{mwgs-ld}(\mathcal{A}, \mathcal{D}_\mathcal{A})$ 
4  for  $i = 1, \dots, p$  do
5       $X = \mathcal{W}^T \mathcal{D}_\mathcal{A} \mathcal{A}'_{\theta_i} \mathcal{L}^{-T}$ 
6       $\{\bar{L}_0, D_0, \bar{U}_0\} = \text{split-ldu}(X)$  //  $X = \bar{L}_0 + D_0 + \bar{U}_0$ 
7       $V = \mathcal{W}^T (\mathcal{D}_\mathcal{A})'_{\theta_i} \mathcal{W}$ 
8       $\{\bar{L}_2, D_2, \bar{L}_2^T\} = \text{split-ldu}(V)$  //  $V = \bar{L}_2 + D_2 + \bar{L}_2^T$ 
9       $(\mathcal{D}_\mathcal{L})'_{\theta_i} = 2D_0 + D_2$ 
10      $\mathcal{L}'_{\theta_i} = \mathcal{L}(\bar{L}_0 + \bar{L}_2 + \bar{U}_0^T)D_\mathcal{L}^{-1}$ 
11 end for
```

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В алгоритме 4 вызываемая функция $\text{mwgs-ld}(A, D_A)$ реализует прямую процедуру модифицированной взвешенной ортогонализации Грама–Шмидта для вычисления матричного LD-разложения.

Теперь перейдем к модификации алгоритма 3. Расширим его функциональность, добавив возможность вычислять значения производных величин, входящих в уравнения расширенного информационного LD-фильтра. Полученный результат представлен алгоритмом 5.

Обоснованием нового разработанного алгоритма 5 служит применение оригинального метода вычисления производных в матричном LD-преобразовании к парам блочных массивов $\{\mathcal{A}_i, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_i}\}$, $i = 1, \dots, 5$.

Алгоритм 5. Дифференцированный LD-фильтр (Diff-eLD-IF)**Вход:** $\theta, \bar{x}_0(\theta), \Pi_0(\theta)$ **Выход:** $\widehat{d}_{k|k-1}(\theta), D_{Y_{k|k-1}}(\theta), \widehat{d}_k(\theta), D_{Y_k}(\theta), D_{\bar{R}_k}(\theta); \frac{\partial \widehat{d}_{k|k-1}(\theta)}{\partial \theta}, \frac{\partial D_{Y_{k|k-1}}(\theta)}{\partial \theta}, \frac{\partial \widehat{d}_k(\theta)}{\partial \theta}, \frac{\partial D_{Y_k}(\theta)}{\partial \theta}, \frac{\partial D_{\bar{R}_k}(\theta)}{\partial \theta}, k = 1, 2, \dots, K$

$$1 \quad X_0(\theta) = \Pi_0(\theta) + \bar{x}_0(\theta)\bar{x}_0^T(\theta), Y_0(\theta) = \Pi_0^{-1}(\theta), \bar{y}_0(\theta) = Y_0(\theta)\bar{x}_0(\theta)$$

$$2 \quad X'_0(\theta) = \frac{\partial X_0(\theta)}{\partial \theta}, \{L_{X_0}(\theta), D_{X_0}(\theta)\} = \text{cholm}(X_0(\theta)), \{L'_{X_0}(\theta), D'_{X_0}(\theta)\} = \text{cholm}(X'_0(\theta))$$

$$3 \quad Y'_0(\theta) = \frac{\partial Y_0(\theta)}{\partial \theta}, \{L_{Y_0}(\theta), D_{Y_0}(\theta)\} = \text{cholm}(Y_0(\theta)), \{L'_{Y_0}(\theta), D'_{Y_0}(\theta)\} = \text{cholm}(Y'_0(\theta))$$

$$4 \quad \widehat{d}_0(\theta) = \left(L_{Y_0}(\theta)D_{Y_0}(\theta)\right)^{-1} \bar{y}_0(\theta)$$

5 **for** $k = 1, 2, \dots, K$ **do** **Обновление по времени**

$$6 \quad Q'_{k-1}(\theta) = \frac{\partial Q_{k-1}(\theta)}{\partial \theta}, \{L_{Q_{k-1}}(\theta), D_{Q_{k-1}}(\theta)\} = \text{cholm}(Q_{k-1}(\theta)), \{L'_{Q_{k-1}}(\theta), D'_{Q_{k-1}}(\theta)\} = \text{cholm}(Q'_{k-1}(\theta))$$

$$7 \quad \mathcal{A}_1^T(\theta) = \begin{bmatrix} \bar{F}_{k-1}(\theta)L_{X_{k-1}}(\theta) & G_{k-1}(\theta)L_{Q_{k-1}}(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_1 = \frac{\partial \mathcal{A}_1(\theta)}{\partial \theta}$$

$$8 \quad \mathcal{D}_{\mathcal{A}_1}(\theta) = \begin{bmatrix} \delta_\xi^2 D_{X_{k-1}}(\theta) & 0 \\ 0 & D_{Q_{k-1}}(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{D}'_{\mathcal{A}_1} = \frac{\partial \mathcal{D}_{\mathcal{A}_1}(\theta)}{\partial \theta}$$

$$9 \quad [\mathcal{L}_1, \mathcal{D}_{\mathcal{L}_1}, \mathcal{L}'_1, \mathcal{D}'_{\mathcal{L}_1}] = \text{Diff-LD}(\mathcal{A}_1, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_1}, \mathcal{A}'_1, \mathcal{D}'_{\mathcal{A}_1}),$$

$$\text{где } \mathcal{L}_1 = [L_{\bar{Q}_{k-1}}(\theta)], \mathcal{D}_{\mathcal{L}_1} = [D_{\bar{Q}_{k-1}}(\theta)]; \mathcal{L}'_1 = [L'_{\bar{Q}_{k-1}}(\theta)], \mathcal{D}'_{\mathcal{L}_1} = [D'_{\bar{Q}_{k-1}}(\theta)]$$

$$10 \quad \mathcal{A}_2^T(\theta) = \begin{bmatrix} L_{\bar{Q}_{k-1}}^{-T}(\theta) & F_{k-1}^{-T}(\theta)L_{Y_{k-1}}(\theta) & 0 \\ 0 & F_{k-1}^{-T}(\theta)L_{Y_{k-1}}(\theta) & 0 \\ 0 & \widehat{d}_{k-1}^T(\theta) & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_2 = \frac{\partial \mathcal{A}_2(\theta)}{\partial \theta}$$

$$11 \quad \mathcal{D}_{\mathcal{A}_2}(\theta) = \begin{bmatrix} D_{\bar{Q}_{k-1}}^{-1}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & D_{Y_{k-1}}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{D}'_{\mathcal{A}_2} = \frac{\partial \mathcal{D}_{\mathcal{A}_2}(\theta)}{\partial \theta}$$

$$12 \quad [\mathcal{L}_2, \mathcal{D}_{\mathcal{L}_2}, \mathcal{L}'_2, \mathcal{D}'_{\mathcal{L}_2}] = \text{Diff-LD}(\mathcal{A}_2, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_2}, \mathcal{A}'_2, \mathcal{D}'_{\mathcal{A}_2}),$$

$$\text{где } \mathcal{L}_2 = \begin{bmatrix} L_{C_{k-1}}(\theta) & 0 & 0 \\ J_{k-1}(\theta)L_{C_{k-1}}(\theta) & L_{Y_{k|k-1}}(\theta) & 0 \\ \tau^T(\theta) & \widehat{d}_{k|k-1}^T(\theta) & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}_2} = \begin{bmatrix} D_{C_{k-1}}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & D_{Y_{k|k-1}}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(\theta) \end{bmatrix}; \mathcal{L}'_2 = \frac{\partial \mathcal{L}_2(\theta)}{\partial \theta},$$

$$\mathcal{D}'_{\mathcal{L}_2} = \frac{\partial \mathcal{D}_{\mathcal{L}_2}(\theta)}{\partial \theta}$$

$$13 \quad \mathcal{A}_3^T(\theta) = \begin{bmatrix} F_{k-1}(\theta)L_{X_{k-1}}(\theta) & L_{\bar{Q}_{k-1}}(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_3 = \frac{\partial \mathcal{A}_3(\theta)}{\partial \theta}$$

$$14 \quad \mathcal{D}_{\mathcal{A}_3}(\theta) = \begin{bmatrix} D_{X_{k-1}}(\theta) & 0 \\ 0 & D_{\bar{Q}_{k-1}}(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{D}'_{\mathcal{A}_3} = \frac{\partial \mathcal{D}_{\mathcal{A}_3}(\theta)}{\partial \theta}$$

$$15 \quad [\mathcal{L}_3, \mathcal{D}_{\mathcal{L}_3}, \mathcal{L}'_3, \mathcal{D}'_{\mathcal{L}_3}] = \text{Diff-LD}(\mathcal{A}_3, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_3}, \mathcal{A}'_3, \mathcal{D}'_{\mathcal{A}_3}),$$

$$\text{где } \mathcal{L}_3 = [L_{X_k}(\theta)], \mathcal{D}_{\mathcal{L}_3} = [D_{X_k}(\theta)]; \mathcal{L}'_3 = [L'_{X_k}(\theta)], \mathcal{D}'_{\mathcal{L}_3} = [D'_{X_k}(\theta)]$$

Несмотря на кажущуюся сложность алгоритма, его несомненным преимуществом является то, что он имеет однородную структуру, которая заключается в применении обобщенной операции, представленной алгоритмом 4, к парам блочных массивов. Следовательно, его ком-

Дифференцированный LD-фильтр (продолжение)

Обновление по измерениям

- 16 $R'_k(\theta) = \frac{\partial R_k(\theta)}{\partial \theta}, \{L_{R_k}(\theta), D_{R_k}(\theta)\} = \text{cholm}(R_k(\theta)), \{L'_{R_k}(\theta), D'_{R_k}(\theta)\} = \text{cholm}(R'_k(\theta))$
- 17 $\mathcal{A}_4^T(\theta) = [\widetilde{H}_k(\theta)L_{X_k}(\theta) \quad L_{R_k}(\theta)], \mathcal{A}'_4 = \frac{\partial \mathcal{A}_4(\theta)}{\partial \theta}$
- 18 $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_4}(\theta) = \begin{bmatrix} \delta_{\zeta}^2 D_{X_k}(\theta) & 0 \\ 0 & D_{R_k}(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{D}'_{\mathcal{A}_4} = \frac{\partial \mathcal{D}_{\mathcal{A}_4}(\theta)}{\partial \theta}$
- 19 $[\mathcal{L}_4, \mathcal{D}_{\mathcal{L}_4}, \mathcal{L}'_4, \mathcal{D}'_{\mathcal{L}_4}] = \text{Diff-LD}(\mathcal{A}_4, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_4}, \mathcal{A}'_4, \mathcal{D}'_{\mathcal{A}_4}),$
где $\mathcal{L}_4 = [L_{\bar{R}_k}(\theta)], \mathcal{D}_{\mathcal{L}_4} = [D_{\bar{R}_k}(\theta)]; \mathcal{L}'_4 = [L'_{\bar{R}_k}(\theta)], \mathcal{D}'_{\mathcal{L}_4} = [D'_{\bar{R}_k}(\theta)]$
- 20 $\mathcal{A}_5^T(\theta) = \begin{bmatrix} H_k^T(\theta)L_{\bar{R}_k}^{-T}(\theta) & L_{Y_{k|k-1}}(\theta) \\ z_k^T L_{\bar{R}_k}^{-T}(\theta) & \widehat{d}_{k|k-1}^T(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_5 = \frac{\partial \mathcal{A}_5(\theta)}{\partial \theta}$
- 21 $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_5}(\theta) = \begin{bmatrix} D_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta) & 0 \\ 0 & D_{Y_{k|k-1}}(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{D}'_{\mathcal{A}_5} = \frac{\partial \mathcal{D}_{\mathcal{A}_5}(\theta)}{\partial \theta}$
- 22 $[\mathcal{L}_5, \mathcal{D}_{\mathcal{L}_5}, \mathcal{L}'_5, \mathcal{D}'_{\mathcal{L}_5}] = \text{Diff-LD}(\mathcal{A}_5, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_5}, \mathcal{A}'_5, \mathcal{D}'_{\mathcal{A}_5}),$
где $\mathcal{L}_5 = \begin{bmatrix} L_{Y_k}(\theta) & 0 \\ \widehat{d}_k^T(\theta) & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}_5} = \begin{bmatrix} D_{Y_k}(\theta) & 0 \\ 0 & \gamma(\theta) \end{bmatrix}; \mathcal{L}'_5 = \frac{\partial \mathcal{L}_5(\theta)}{\partial \theta}, \mathcal{D}'_{\mathcal{L}_5} = \frac{\partial \mathcal{D}_{\mathcal{L}_5}(\theta)}{\partial \theta}$
- 23 **end for**

пьютерная реализация очень простая и не зависит от размеров матриц, определяющих модель стохастической системы.

Второе преимущество данного алгоритма заключается в том, что он позволяет одновременно вычислять как LD-оценки $\widehat{d}_k$ информационного вектора и LD-факторы информационной матрицы Y_k , так и значения их производных при заданном значении параметра θ .

Следует отметить, что вычисление значений производных в данном случае выполняется алгоритмически и не требует применения методов численного дифференцирования, что позволяет избежать всех недостатков, присущих данному классу методов.

В случае векторного параметра $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T$ алгоритм 5 позволяет организовать вычисления значений производных для каждого $\theta_i, i = 1, \dots, p$.

Вычислительная сложность алгоритма 5 зависит от порядка системы (1), а также от размера p векторного параметра θ . Анализ и оценки вычислительной сложности LD-разложения методом MWGS, а также основанных на ней алгоритмов можно найти в [Цыганова, Цыганов, 2018; Tsyganova et al., 2022]. В частности, в [Цыганова, Цыганов, 2018] приводятся экспериментальные оценки времени выполнения процедуры Diff-LD в системе MATLAB.

Следует также отметить, что процедура Diff-LD требует при ее вызове только одного матричного разложения методом MWGS, которое несет на себе основную вычислительную нагрузку. Оставшаяся часть — операции сложения и умножения с диагональной и треугольными матрицами. Требуется только одно тривиальное обращение диагональной матрицы и простое обращение треугольной матрицы. Несмотря на кажущуюся сложность алгоритма 5, он имеет простую программную реализацию за счет обобщенной операции Diff-LD.

Вычисление градиента критерия идентификации в терминах дифференцированного LD-фильтра

В данном разделе мы предлагаем новый метод вычисления градиента критерия идентификации (6) в терминах разработанного алгоритма 5. Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Пусть элементы матриц, определяющих систему (1), зависят от параметра $\theta \in D(\theta)$, причем $\theta \in \mathbb{R}^p$ и элементы системных матриц являются дифференцируемыми по θ функциями. Тогда градиент критерия идентификации (6) в терминах дифференцированного расширенного информационного LD-фильтра (алгоритм 5) имеет вид

$$\nabla_{\theta} J_{eLDIF}(\theta, Z_1^K) = \left[\frac{\partial J_{eLDIF}(\theta, Z_1^K)}{\partial \theta_1} \mid \dots \mid \frac{\partial J_{eLDIF}(\theta, Z_1^K)}{\partial \theta_p} \right]^T,$$

где для $i = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} J_{eLDIF}(\theta, Z_1^K) = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\ln \frac{\det D_{\bar{R}_k}(\theta) \cdot \det D_{Y_k}(\theta)}{\det D_{Y_{k|k-1}}(\theta)} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\|\widehat{d}_{k|k-1}(\theta)\|_{D_{Y_{k|k-1}}(\theta)}^2 - \|\widehat{d}_k(\theta)\|_{D_{Y_k}(\theta)}^2 + \left\| L_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta) z_k \right\|_{D_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta)}^2 \right) \right\}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\ln \frac{\det D_{\bar{R}_k}(\theta) \cdot \det D_{Y_k}(\theta)}{\det D_{Y_{k|k-1}}(\theta)} \right) = \\ = \operatorname{tr} \left(D_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta) \frac{\partial D_{\bar{R}_k}(\theta)}{\partial \theta_i} \right) + \operatorname{tr} \left(D_{Y_k}^{-1}(\theta) \frac{\partial D_{Y_k}(\theta)}{\partial \theta_i} \right) - \operatorname{tr} \left(D_{Y_{k|k-1}}^{-1}(\theta) \frac{\partial D_{Y_{k|k-1}}(\theta)}{\partial \theta_i} \right), \quad (23) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \|\widehat{d}_{k|k-1}(\theta)\|_{D_{Y_{k|k-1}}(\theta)}^2 = 2 \frac{\partial \widehat{d}_{k|k-1}^T(\theta)}{\partial \theta_i} D_{Y_{k|k-1}}(\theta) \widehat{d}_{k|k-1}(\theta) + \widehat{d}_{k|k-1}^T(\theta) \frac{\partial D_{Y_{k|k-1}}(\theta)}{\partial \theta_i} \widehat{d}_{k|k-1}(\theta), \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \|\widehat{d}_k(\theta)\|_{D_{Y_k}(\theta)}^2 = 2 \frac{\partial \widehat{d}_k^T(\theta)}{\partial \theta_i} D_{Y_k}(\theta) \widehat{d}_k(\theta) + \widehat{d}_k^T(\theta) \frac{\partial D_{Y_k}(\theta)}{\partial \theta_i} \widehat{d}_k(\theta), \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \left\| L_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta) z_k \right\|_{D_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta)}^2 = 2 \left(L_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta) z_k \right)^T D_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta) \frac{\partial L_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta)}{\partial \theta_i} z_k - \left(L_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta) z_k \right)^T D_{\bar{R}_k}^{-2}(\theta) \frac{\partial D_{\bar{R}_k}(\theta)}{\partial \theta_i} \left(L_{\bar{R}_k}^{-1}(\theta) z_k \right). \quad (26)$$

Доказательство. Рассмотрим критерий (6). Применяя к нему операцию дифференцирования по параметру θ , получим общее выражение (22).

Далее, выражение (23) следует из правила дифференцирования матричного выражения вида

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln A(\theta) = \operatorname{tr} \left(A^{-1}(\theta) \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right),$$

где $A(\theta)$ — квадратная невырожденная матрица, tr — след матрицы.

Выражения (24)–(26) также получены по правилам векторно-матричного дифференцирования.

Значения производных, входящих в (23)–(26), вычисляются в дифференцированном LD-фильтре (алгоритм 5) для текущего значения параметра $\theta = \theta_j$ на j -й итерации алгоритма параметрической идентификации градиентного типа.

Теорема 2 доказана. $\square$

Результаты численных экспериментов

С помощью компьютерного моделирования проведем серию вычислительных экспериментов для проверки работоспособности предложенного подхода.

Рассмотрим четырехмассовую механическую систему с пружинами и демпферами, изображенную на рис. 1 [Li et al., 2005].

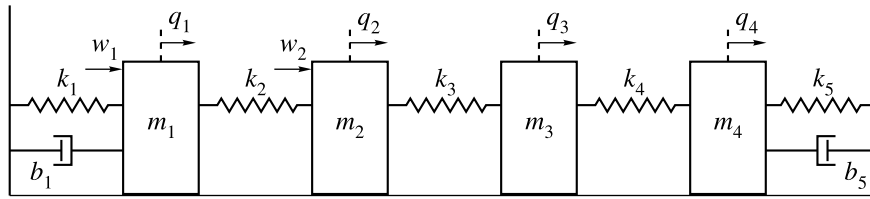


Рис. 1. Четырехмассовая механическая система с пружинами и демпферами: m_i — массы, q_i — смещения масс, k_i — коэффициенты упругости, b_i — коэффициенты демпфирования, w_i — случайные возмущения

Динамика системы в дискретном времени описывается моделью в пространстве состояний (1), в которой уравнение объекта имеет следующий вид:

$$x_k = \left(\begin{bmatrix} I & \Delta I \\ -\Delta M^{-1}K & I - \Delta M^{-1}B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix} \xi_{k-1} \right) x_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}_{k-1}, \quad (27)$$

где Δ — шаг дискретизации, I — единичная матрица размером 4×4 , а матрицы M , K , B и D имеют вид

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. По сравнению с [Li et al., 2005] в уравнение объекта добавлен мультипликативный шум.

Вектор состояния имеет вид $x_k = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_4]^T$, где q_i и $\dot{q}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — смещения и скорости масс соответственно.

Матрицы H и $\tilde{H}$ в уравнении измерений имеют вид

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_4}{m_4} & -\frac{k_4+k_5}{m_4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_5}{m_4} \end{bmatrix}, \quad \tilde{H} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Зададим следующие параметры системы:

$$\Delta = 0,01, \quad x_0 = [0,5 \ 0 \ 0 \ -0,5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$m_1 = m_2 = m_4 = 1, \quad m_3 = 2, \quad b_1 = 5, \quad b_5 = 2,$$

$$k_1 = k_3 = k_4 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_5 = 4.$$

Пусть $w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2 I_{2 \times 2})$, $v_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2 I_{2 \times 2})$, $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\zeta_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Моделирование динамики системы и процесса идентификации выполнялось в системе MATLAB. Минимизация критерия идентификации выполнялась с использованием стандартной функции `fmincon` с параметром `SpecifyObjectiveGradient=true`, для которой были реализованы целевая функция вычисления критерия идентификации и его градиента (алгоритм 5, формулы (6), (22)–(26)), а также ряд вспомогательных функций.

Эксперимент 1 (скалярный случай). Пусть $\theta = m_4$ (истинное значение параметра $\theta^* = 1$), $\alpha = 0,01$, $\beta = 0,001$, $\gamma = 0,5$, $\sigma_w^2 = 0,01$, $\sigma_v^2 = 0,1$.

На рис. 2 приведены графики смещений масс и их скоростей, а на рис. 3 — графики критерия идентификации и его градиента для $K = 1000$.

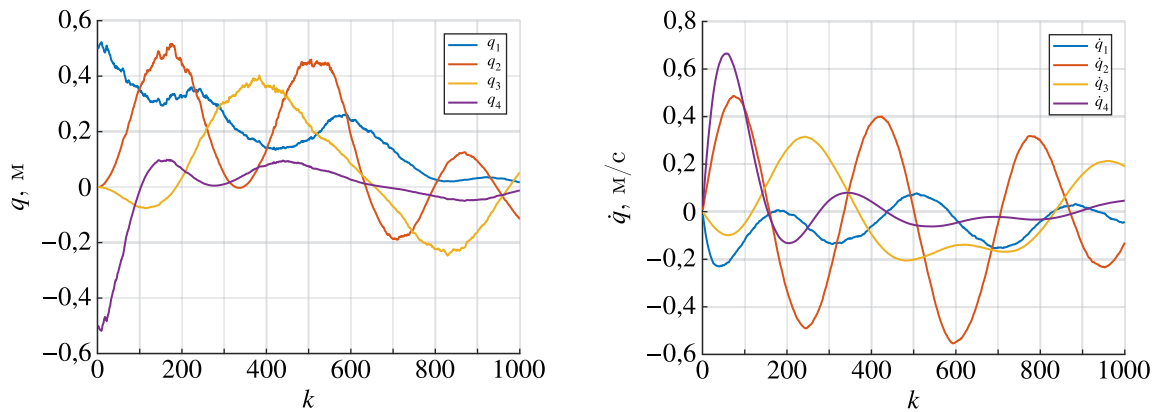


Рис. 2. Графики смещений и скоростей масс: q_i — смещения масс, $\dot{q}_i$ — скорости масс, k — дискретные моменты времени

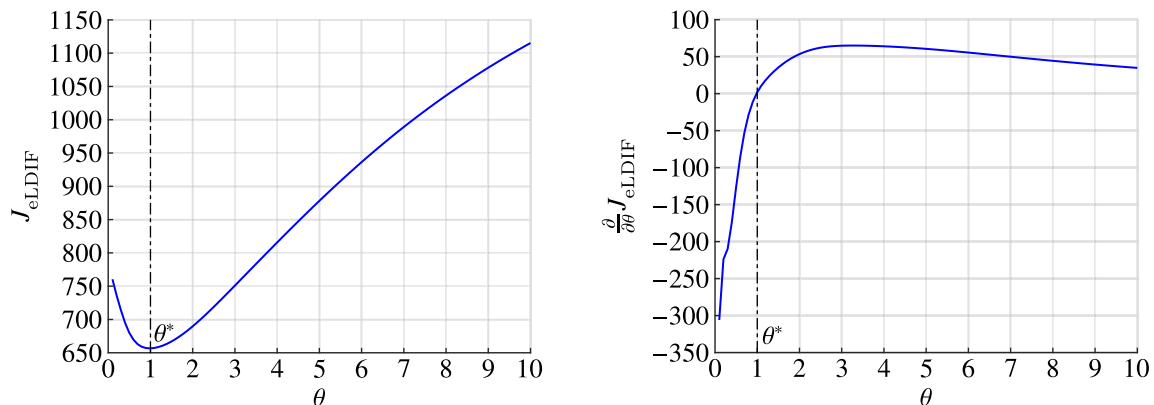


Рис. 3. Графики критерия идентификации $J_{\text{eLDIF}}(\theta, Z_1^K)$ и его градиента $\frac{\partial}{\partial \theta} J_{\text{eLDIF}}(\theta, Z_1^K)$ для $K = 1000$

Поиск оценки параметра θ выполнялся на промежутке $[0, 1; 10]$ по результатам 500 измерений, в качестве начального приближения выбиралась середина отрезка. В таблице 1 приведены среднее значение, среднеквадратическая и средняя абсолютная процентная ошибки оценок параметра θ по результатам 100 экспериментов.

Таблица 1. Результаты идентификации параметра θ (скалярный случай): $\bar{\theta}$ — среднее значение, RMSE — среднеквадратическая ошибка, MAPE — средняя относительная процентная ошибка

$\bar{\theta}$	RMSE	MAPE
1,011045	0,058184	4,721488

Эксперимент 2 (векторный случай). Пусть $\theta = (m_4, b_1, b_5)^T$ (истинное значение параметра $\theta^* = (1, 5, 2)^T$), $\alpha = 0,001$, $\beta = 0,001$, $\gamma = 0,005$, $\sigma_w^2 = 0,01$, $\sigma_v^2 = 0,01$.

Поиск оценки параметра θ выполнялся в области $[0, 1; 10] \times [0, 1; 20] \times [0, 1; 20]$ по результатам 500 измерений, в качестве начального приближения выбиралась центральная точка

области. В таблице 2 приведены среднее значение, среднеквадратическая и средняя абсолютная процентная ошибки оценок параметра θ по результатам 100 экспериментов.

Таблица 2. Результаты идентификации параметра θ (векторный случай): $\bar{\theta}$ — среднее значение оценок, RMSE — среднеквадратическая ошибка, MAPE — средняя относительная процентная ошибка

$\bar{\theta}$	RMSE	MAPE
$(1,005701; 5,087936; 2,024584)^T$	0,287596	4,044441

Таким образом, результаты численных экспериментов подтверждают корректность полученных теоретических результатов и демонстрируют практическую применимость предложенного подхода.

Заключение

В работе разработан общий подход к построению градиентных методов параметрической идентификации на основе процедуры модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта и алгоритмов дискретной фильтрации информационного типа. Предлагаемый подход предназначен для решения задач параметрической идентификации в классе дискретных линейных стохастических систем, в рамках которого получены следующие теоретические результаты:

- построен новый критерий идентификации в терминах расширенного информационного LD-фильтра; сформулирована и доказана теорема 1;
- разработан новый алгоритм 5 вычисления значений производных по модельному параметру θ в расширенном информационном LD-фильтре на основе прямой процедуры MWGS-ортогонализации;
- предложен новый метод вычисления градиента критерия идентификации на основе разработанного дифференцированного расширенного информационного LD-фильтра.

Преимуществом предложенного подхода является применение численно устойчивой к ошибкам округления процедуры модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта, лежащей в основе разработанных методов и алгоритмов. Информационный LD-фильтр позволяет поддерживать необходимые свойства симметричности и положительной определенности информационных матриц. Вычисление значений производных в алгоритме 5 выполняется алгоритмически и не требует применения методов численного дифференцирования, что позволяет избежать всех недостатков, присущих данному классу методов. Разработанные алгоритмы имеют блочно-матричную структуру, удобную для программной реализации.

Разработанные алгоритмы могут быть использованы при построении численных методов решения задачи параметрической идентификации математических моделей, представленных дискретными линейными стохастическими системами с аддитивными и мультипликативными шумами.

Результаты работы могут получить свое развитие в классе нелинейных дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами. Одно из возможных решений заключается в разработке новой LD-модификации алгоритма расширенного фильтра Калмана (EKF) и далее, уже на его основе, построении градиентного метода параметрической идентификации. Эта задача является предметом дальнейших исследований.

Список литературы (References)

- Васильев В. П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Мир, 1982.
Vasiliev V. P. Chislennyye metody resheniya ekstremalnykh zadach [Numerical methods for solving extremal problems]. — Moscow: Mir, 1982 (in Russian).
- Кувишинова А. Н., Цыганов А. В., Цыганова Ю. В. О вычислении производных в алгоритме параметрической идентификации градиентного типа для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами // Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии: материалы IX Международной научно-практической конференции, Елец, 24–25 апреля 2023 года. — Елец: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2023. — С. 79–84.
Kuvshinova A. N., Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V. O vychislenii proizvodnykh v algoritmakh parametricheskoy identifikatsii gradientnogo tipa dlya diskretnykh stokhasticheskikh sistem s mul'tiplikativnymi i additivnymi shumami [On derivative calculation in gradient-type parameter identification algorithms for discrete stochastic systems with multiplicative and additive noises] // Sistemy upravleniya, slozhnye sistemy: modelirovanie, ustoychivost', stabilizatsiya, intellektual'nye tekhnologii: materialy IX Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii, Elets, 24–25 aprelya 2023 goda. — Elets: Eletskiy gosudarstvennyy universitet im. I. A. Bunina, 2023. — P. 79–84 (in Russian).
- Цыганов А. В., Цыганова Ю. В., Кувишинова А. Н., Голубков А. В. Алгоритмы дискретной фильтрации на основе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама–Шмидта для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами // Вычислительные технологии. — 2023. — Т. 28, № 5. — С. 70–86. — DOI: 10.25743/ICT.2023.28.5.007
Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Kuvshinova A. N., Golubkov A. V. Algoritmy diskretnoy filtratsii na osnove modifitsirovannoy veshchennoy ortogonalizatsii Grama–Shmidta dlya diskretnykh stokhasticheskikh sistem s mul'tiplikativnymi i additivnymi shumami [Algorithms of discrete filtration based on modified weighted Gram–Schmidt orthogonalization for discrete stochastic systems with multiplicative and additive noises] // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2023. — Vol. 28, No. 5. — P. 70–86. — DOI: 10.25743/ICT.2023.28.5.007 (in Russian).
- Цыганова Ю. В., Куликова М. В. О современных ортогонализированных алгоритмах оптимальной дискретной фильтрации // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. — 2018. — Т. 11, № 4. — С. 5–30. — <https://doi.org/10.14529/mmp180401>
Tsyganova Yu. V., Kulikova M. V. O sovremennykh ortogonalizovannykh algoritmah optimal'noy diskretnoy fil'tratsii [On modern array algorithms for optimal discrete filtering] // Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. model. progr. — 2018. — Vol. 11, No. 4. — P. 5–30. — <https://doi.org/10.14529/mmp180401> (in Russian).
- Цыганова Ю. В., Цыганов А. В. О вычислении значений производных в LD-разложении параметризованных матриц // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. — 2018. — Т. 23. — С. 64–79.
Tsyganova Yu. V., Tsyganov A. V. O vychislenii znacheniy proizvodnykh v LD-razlozhenii parametrizovannykh matrits [On computing derivatives in LD-decomposition of parameterized matrices] // Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika. — 2018. — Vol. 23. — P. 64–79 (in Russian).
- Bierman G. J.* Factorization methods for discrete sequential estimation. — New York, NY, USA: Academic Press, 1977.
- Bierman G. J., Belzer M. R., Vandergraft J. S., Porter D. W.* Maximum likelihood estimation using square root information filters // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1990. — Vol. 35, No. 12. — P. 1293–1298. — <https://doi.org/10.1109/9.61004>
- Cattivelli F. S., Sayed A. H.* Diffusion strategies for distributed Kalman filtering and smoothing // IEEE Transactions on automatic control. — 2010. — Vol. 55, No. 9. — P. 2069–2084. — <https://doi.org/10.1109/TAC.2010.2042987>
- Chen D., Yu Y., Xu L., Liu X.* Kalman filtering for discrete stochastic systems with multiplicative noises and random two-step sensor delays // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 2015. — 809734. — 11 p. — <http://dx.doi.org/10.1155/2015/809734>
- Gibbs B. P.* Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling: a practical handbook. — Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- Golub G. H., Van Loan C. F.* Matrix computations. — 4th ed. — Philadelphia, PA: Johns Hopkins University Press, 2013.
- Grewal M. S., Weill L. R., Andrews A. P.* Global positioning systems, inertial navigation, and integration. — 2nd edition. — Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

- Grewal M. S., Andrews A. P. Kalman filtering: theory and practice using MATLAB. — 4th ed. — New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2015.
- Henderson H. V., Searle S. R. On deriving the inverse of a sum of matrices // SIAM Review. — 1981. — Vol. 23, No. 1. — P. 53–60. — <https://www.jstor.org/stable/2029838>
- Kailath T., Sayed A. H., Hassibi B. Linear estimation. — New Jersey: Prentice Hall, 2000.
- Kureneva T. N., Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Volkova N. A. Square-root filtering for discrete-time systems with multiplicative and additive noises // Journal of Physics: Conference Series. — 2022. — Vol. 1745, No. 1. — P. 012114. — <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012114>
- Li W., Todorov E., Skelton R. E. Estimation and control of systems with multiplicative noise via linear matrix inequalities // Proc. of the 2005 American Control Conference (June 8–10, 2005. Portland, OR, USA). — 2005. — P. 1811–1816.
- Liu W. Optimal filtering for discrete-time linear systems with multiplicative and time-correlated additive measurement noises // IET Control Theory & Applications. — 2015. — Vol. 9, No. 6. — P. 831–842.
- Ljung L. Convergence analysis of parametric identification methods // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1978. — Vol. 23, No. 5. — P. 770–783.
- Ljung L. System Identification: theory for the user. — 2nd ed. — Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall PTR, 1999.
- Mahmoud M. S., Khalid H. M. Distributed Kalman filtering: a bibliographic review // IET Control Theory & Applications. — 2013. — Vol. 7, No. 4. — P. 483–501. — <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2012.0732>
- Nocedal J., Wright S. J. Numerical optimization. — Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. — Berlin/Heidelberg, Germany: Springer Nature, 2006.
- Olfati-Saber R. Distributed Kalman filtering for sensor networks // 2007 46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, USA. — 2007. — P. 5492–5498. — <https://doi.org/10.1109/CDC.2007.4434303>
- Ryu K., Back J. Distributed Kalman-filtering: Distributed optimization viewpoint // 2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC), Nice, France. — 2019. — P. 2640–2645. — <https://doi.org/10.1109/CDC40024.2019.9029645>
- Thornton C. L. Triangular covariance factorizations for Kalman filtering. — Ph.D. thesis. — University of California at Los Angeles, School of Engineering, 1976.
- Tsyganov A. V., Tsyganova J. V., Kureneva T. N. UD-based linear filtering for discrete-time systems with multiplicative and additive noises // Proc. of the 19th European Control Conference (May 12–15, 2020. Saint Petersburg, Russia). — 2020. — P. 1389–1394.
- Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V. Parameter identification of the discrete-time stochastic systems with multiplicative and additive noises using the UD-based state sensitivity evaluation // Mathematics. — 2023. — Vol. 11. — 4964. — <https://doi.org/10.3390/math11244964>
- Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Kureneva T. N. Extended square-root covariance filtering algorithm for discrete-time systems with multiplicative and additive noises // Lobachevskii J. Math. — 2022. — Vol. 43. — P. 1438–1445. — <https://doi.org/10.1134/S199508022209027X>
- Tsyganova J. V., Kulikova M. V., Tsyganov A. V. A general approach for designing the MWGS-based information-form Kalman filtering methods // European Journal of Control. — 2020. — Vol. 56. — P. 86–97. — <https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2020.02.001>
- Wu Y., Zhang Q., Shen Z. Kalman filtering with multiplicative and additive noises // Proc. of the 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA). — 2016. — P. 483–487.