

УДК: 517.958

Моделирование нелинейных аэроупругих колебаний стенки канала, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкого газа

А. А. Попова¹, В. С. Попов^{1,2,a}

¹Саратовский государственный технический университет имени Ю. А. Гагарина,
Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

²Институт проблем точной механики и управления – обособленное структурное подразделение
Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального исследовательского центра
«Саратовский научный центр РАН»,
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

E-mail: ^a vic_p@bk.ru

*Получено 04.02.2024, после доработки — 09.06.2025.
Принято к публикации 18.07.2025.*

В работе предложена математическая модель аэроупругих колебаний стенки узкого канала, имеющей нелинейно-упругий подвес и взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкого газа. В рамках данной модели определены и исследованы аэроупругий отклик стенки канала и соответствующий ему фазовый сдвиг. Сформулированная авторами модель позволяет одновременно исследовать влияние на колебания стенки нелинейной жесткости ее упругого подвеса, сжимаемости и диссипативных свойств газа, а также инерции его движения в канале под действием пульсирующего перепада давления. Модель разработана на базе постановки и решения плоской начально-краевой задачи математической физики, включающей систему уравнений динамики баротропного вязкого газа, уравнения динамики жесткой стенки как одномассового нелинейного осциллятора. Используя метод возмущений, проведен асимптотический анализ задачи с последующим решением уравнений динамики тонкого слоя вязкого газа методом итерации. В результате определен закон распределения давления газа в канале и исходная задача аэроупругости сведена к исследованию обобщенного уравнения ДUFFинга. Его решение осуществлено методом гармонического баланса, что позволило определить аэроупругий и фазовый отклики стенки канала в виде неявных функций. Проведено численное исследование данных откликов для оценки влияния инерции движения газа и его сжимаемости, а также сравнение полученных результатов с частными случаями ползущего движения вязкого газа и несжимаемой вязкой жидкости. Результаты проведенного исследования показали важность одновременного учета сжимаемости и инерции движения вязкого газа при моделировании аэроупругих колебаний стенки рассматриваемого канала.

Ключевые слова: моделирование, вязкий газ, нелинейные аэроупругие колебания, стенка канала, пульсирующий перепад давления, аэроупругий отклик, фазовый сдвиг

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание по теме 125020501400-6).

UDC: 517.958

Modeling of nonlinear aeroelastic oscillations of a channel wall interacting with a pulsating viscous gas layer

A. A. Popova¹, V. S. Popov^{1,2,a}

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
77 Politechnicheskaya st., Saratov, 410054, Russia

²Institute of Precision Mechanics and Control – Subdivision of the Federal State Budgetary Research Institution
Saratov Federal Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,
24 Rabochaya st., Saratov, 410028, Russia

E-mail: ^a vic_p@bk.ru

*Received 04.02.2024, after completion – 09.06.2025.
Accepted for publication 18.07.2025.*

The mathematical model for aeroelastic oscillations of a narrow channel wall with a nonlinear-elastic suspension and interacting with a pulsating viscous gas layer is proposed. Within the framework of this model, the aeroelastic response of the channel wall and its phase response were determined and investigated. The authors simultaneously studied the influence of the nonlinear stiffness elastic suspension of the wall, compressibility and dissipative properties of gas, as well as the inertia of its motion on the wall oscillations. The model was elaborated based on the formulation and solution of the initial boundary-value plane problem of mathematical physics. The problem governing equations include the equations of dynamics for barotropic viscous gas, equation of dynamics for the rigid wall as the spring-mass nonlinear oscillator. Using the perturbation method, the asymptotic analysis of the problem was carried out. The solution of the equations of dynamics for the thin layer of viscous gas was obtained by the iteration method. As a result, the law of gas pressure distribution in the channel was determined and the initial problem of aeroelasticity was reduced to the study of the generalized Duffing equation. Its solution was realized by the harmonic balance method, which allowed us to determine the aeroelastic and phase responses of the channel wall in the form of implicit functions. The numerical study of these responses was carried out to evaluate the influence for inertia of gas motion and its compressibility, as well as a comparison of the results obtained with the special cases of creeping motion of viscous gas and incompressible viscous fluid. The results of this study have shown the importance of simultaneous consideration of compressibility and inertia of viscous gas motion when modeling aeroelastic oscillations of the considered channel wall.

Keywords: modelling, viscous gas, nonlinear aeroelastic oscillations, channel wall, pulsating pressure drop, aeroelastic response, phase response

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 4, pp. 583–600 (Russian).

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state assignment on the topic 125020501400-6).

1. Введение

Моделирование взаимодействия жестких элементов на упругом подвесе или упругих элементов с жидкостью или газом (сжимаемой жидкостью) сопряжено с постановкой и исследованием начально-краевых задач математической физики, которые в современной механике составляют предмет теории аэрогидроупругости [Горшков и др., 2000]. Например, такие задачи характерны для упругоподатливых элементов, образующих ограничивающие жидкость или газ стенки [Païdoussis, 2016; Païdoussis, 2021]. Можно выделить исследования по данной тематике, в которых используют модели идеальной или вязкой жидкости. Среди ранних работ первого направления отметим [Lamb, 1921], где энергетическим методом определена собственная частота основной моды колебаний жестко заземленной круглой пластины, являющейся частью жесткой плоскости, пространство над которой заполнено несжимаемой идеальной жидкостью. Показаны уменьшение этой частоты в сравнении с частотой колебаний пластины в вакууме и демпфирование колебаний пластины за счет затрат энергии на волнообразование. В [Amabili, Kwak, 1996] для аналогичной проблемы поставлена и решена задача гидроупругости с учетом последующих мод колебаний пластины и случаев ее шарнирного и свободного опирания. В [Indeitsev, Osipova, 2000] исследована задача гидроупругости для штампа на линейно-упругой опоре, являющегося частью дна мелкого канала с идеальной несжимаемой жидкостью со свободной поверхностью. Показано, что вблизи штампа на поверхности жидкости возникают бегущие и стоячие волны, и установлена возможность сведения амплитуд последних к нулю за счет изменения частоты колебаний штампа. Собственные колебания и устойчивость прямоугольной пластины, являющейся стенкой канала прямоугольного сечения и взаимодействующей с протекающей в нем идеальной сжимаемой жидкостью, изучены в [Bochkarev et al., 2016] численно методом конечных элементов. В [Velmisov, Pokladova, 2019] рассмотрена осесимметричная задача гидроупругости круглой пластины, закрепленной на конце жесткой трубы с пульсирующей идеальной несжимаемой жидкостью. Получено интегро-дифференциальное уравнение гидроупругих колебаний пластины, которое исследовано численно-аналитическим методом. Математическое моделирование гидроупругих колебаний двух параллельных друг другу прямоугольных пластин, между которыми находится идеальная жидкость, и их демпфирование с помощью электромагнитной катушки были выполнены в работе [Kamenskikh, Lekomtsev, 2020] численно методом конечных элементов. В [Вельмисов и др., 2021] исследована задача гидроупругости балки кольцевого сечения как трубопровода с идеальной жидкостью внутри. Рассмотрены ее изгибно-крутильные и изгибно-продольно-крутильные колебания с учетом нелинейных реакций упруго-демпфирующих внешних связей, нелинейности изгибающего момента и центробежной силы, действующих на балку-трубопровод. Математическое моделирование колебаний ледового покрова в рамках линейной задачи гидроупругости пористой пластины, контактирующей с идеальной жидкостью, выполнено в [Zavyalova et al., 2021]. Отметим здесь также результаты экспериментального исследования собственных колебаний прямоугольных металлических пластин на свободной поверхности воды и в воздухе, представленные в [Bochkarev et al., 2020].

Среди ранних работ, в которых рассматривается вязкая жидкость, следует отметить [Громека, 1952], где рассмотрено движение вязкой несжимаемой жидкости в упругой круглой трубе с учетом инерции движения ее стенок. В работах [Womersley, 1955a; Womersley, 1955b] предложен метод исследования пульсирующего движения вязкой несжимаемой жидкости и рассмотрено его применение для изучения движения вязкой жидкости по упругой трубке применительно к движению крови в сосудах животных и человека. Обобщение исследования [Lamb, 1921] с учетом вязкости жидкости выполнено в [Kozlovsky, 2009]. В [Хасьянова, Мукутадзе, 2018] предложена плоская модель упорного гидравлического подшипника с жесткой направляющей и ползуном, имеющим адаптированный профиль. Динамика несущего смазочного слоя, находящегося между ними, моделировалась в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости с учетом

зависимости ее вязкости от давления и температуры. Плоская задача гидроупругости пластины, являющейся границей раздела двух вязких несжимаемых жидкостей, для исследования динамической устойчивости пластины рассмотрена в [Velmisov, Ankilov, 2017]. Моделирование собственных колебаний нанопластины, контактирующей с вязкой несжимаемой жидкостью, выполнено в [Hosseini-Hashemi et al., 2019]. В работах [Могилевич и др., 2017; Tulchinsky, Gat, 2019] рассмотрены плоские задачи гидроупругости для двух пластин Кирхгофа, образующих стенки узкого канала, опирающегося на основание Винклера, и взаимодействующих с пульсирующей несжимаемой вязкой жидкостью, заполняющей канал. В [Mogilevich et al., 2017] изучены вынужденные колебания шарнирно опертых пластин — стенок канала конечного размера, а в [Tulchinsky, Gat, 2019] рассмотрены колебания пластин при условии, что протяженность канала бесконечно большая.

Математическая модель для оценки влияния упругой деформации стенки подшипника на динамику его газового смазочного слоя как вязкого газа (сжимаемой жидкости) предложена в [Турчак, Шидловский, 2011]. Для кольцевого бесконечно длинного слоя газа выполнен переход к плоской задаче, а упругая деформация стенки учитывалась путем добавления к толщине слоя газа члена, пропорционального давлению, с коэффициентом, определяемым модулем упругости материала стенки. Аэроупругое взаимодействие жесткого диска-затвора клапана с газом численно исследовалось с помощью модифицированного метода Годунова в работах [Королева и др., 2018; Редер и др., 2020]. Динамика вязкого газа изучалась с учетом его сжимаемости и термодинамических эффектов при взаимодействии с жестким диском, рассматриваемым в рамках линейной системы «масса на пружине».

Моделирование гидроупругих колебаний торцевой стенки узкого канала, имеющей нелинейно-упругий подвес и взаимодействующей с вязкой жидкостью, заполняющей канал, проведено в [Varulina et al., 2022]. Исследование задач гидроупругости пластины, установленной на упругом основании с кубической нелинейностью, проведено в [Kondratov et al., 2023; Кондратов и др., 2023; Попов и др., 2023b]. Задачи, в которых рассмотрены упругие основания с жесткой нелинейностью, представлены в [Kondratov et al., 2023; Кондратов и др., 2023] при рассмотрении движения пульсирующей вязкой несжимаемой жидкости как ползущего тонкого слоя, а также с учетом инерции движения жидкости. В [Попов и др., 2023b] рассмотрена задача для основания с мягкой нелинейностью и вибрирующей противоположной стенкой канала. Работа [Попов и др., 2023a] посвящена рассмотрению аэроупругого взаимодействия жесткой стенки на нелинейно-упругом подвесе с ползущим слоем вязкого пульсирующего газа. В указанных работах развивается метод сведения рассматриваемых задач к обобщенному уравнению Дуффинга с последующим его исследованием методом гармонического баланса.

Однако среди работ приведенного обзора отсутствуют исследования взаимодействия жесткой стенки канала, имеющей нелинейно-упругий подвес с вязким газом, движение которого в канале обусловлено пульсацией давления на одном из его торцов при учете инерции движения газа.

2. Постановка задачи аэроупругих колебаний стенки канала

Рассмотрим узкий канал, образованный двумя параллельными жесткими стенками, прямоугольными в плане (см. рис. 1). Верхняя стенка канала неподвижна, а нижняя имеет упругий подвес с жесткой кубической нелинейностью [Пановко, 1991] и может перемещаться в вертикальном направлении. На левом торце канал примыкает к торцевой полости. Канал и торцевая полость заполнены вязким газом. В невозмущенном состоянии давление в торцевой полости, канале и на его правом торце постоянно: p_0 . В этом случае зазор между стенками канала $\delta \ll \ell$. Давление газа в полости имеет динамическую составляющую p_1 , которая изменяется во времени, над уровнем давления невозмущенного состояния p_0 . На правом торце истечение вязкого газа

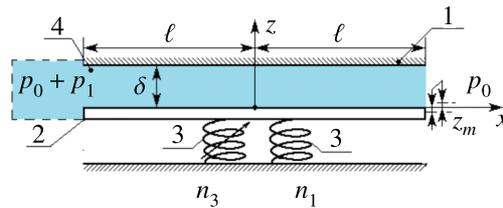


Рис. 1. Узкий канал, в котором перемещается вязкий газ за счет пульсации давления в полости, примыкающей к левому торцу канала: 1 — неподвижная жесткая стенка канала, 2 — жесткая стенка канала, имеющая упругий подвес, 3 — нелинейно-упругий подвес нижней стенки канала (n_1 — коэффициент жесткости при линейной составляющей реакции подвеса, n_3 — коэффициент жесткости при кубической составляющей реакции подвеса), 4 — вязкий пульсирующий газ

происходит в окружающую среду того же газа давлением p_0 . В результате возбуждаются нелинейные колебания упругозакрепленной стенки за счет пульсирующего перепада давления газа на торцах канала. Постоянный уровень давления p_0 будем принимать за начало отсчета давления и считать его равным нулю. Стенки канала в плане имеют размеры $2l \times b$. Введем в рассмотрение декартову систему координат x, z , начало которой совпадает с центром внутренней поверхности нижней стенки при ее невозмущенном состоянии. Полагаем, что $2l \ll b$, и исследуем плоскую задачу аэроупругости для нижней стенки канала, так как изменением параметров в направлении оси y можно пренебречь. Считаем, что температура газа в торцевой полости, канале и окружающей среде может быть принята постоянной, т. е. рассматриваем изотермическое состояние газа и стенок канала, а колебания стенки не выходят за звуковой диапазон. В этом случае, рассматривая динамическую и объемную вязкости газа, аналогично [Константинеску, 1968; Лойцянский, 2003] считаем, что они остаются постоянными и не зависящими от давления. Принятые допущения позволяют рассматривать газ как баротропную среду [Константинеску, 1968; Лойцянский, 2003]. Исследуя аэроупругие колебания стенки, примем во внимание, что вязкие силы трения газа в узком канале обуславливают быстрое затухание переходных процессов [Пановко, 1991; Пановко, Губанова, 2020]. Поэтому их можно исключить из рассмотрения, сосредоточив внимание на изучении установившихся вынужденных нелинейных колебаний [Nayfeh, Mook, 1979] стенки канала, учитывая, что их амплитуда $z_m \ll \delta$. Кроме того, будем принимать, что отношения $\frac{z_m}{\delta}$ и $\frac{\delta}{l}$ одного порядка малости. Далее перейдем к формулировке краевой задачи математической физики для пульсирующего вязкого газа, заполняющего канал, и взаимодействующего с ограничивающей его стенкой на нелинейно-упругом подвесе.

Пусть закон пульсации давления в левой торцевой полости задан в виде

$$p_1 = p_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1)$$

Здесь p_m — амплитуда пульсации давления, ω — заданная частота пульсации, t — время.

В рассматриваемой постановке динамика вязкого газа в канале описывается в подходе Эйлера двумерными уравнениями Навье–Стокса для сжимаемой среды [Лойцянский, 2003; Фабрикант, 1964]:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \left(\mu' + \frac{1}{3}\mu \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \\ \rho \left[\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \left(\mu' + \frac{1}{3}\mu \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

замыкаемыми уравнением неразрывности сжимаемой среды:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

а также уравнением состояния баротропной среды:

$$\frac{p}{\rho} = c^2. \quad (4)$$

Здесь p — давление газа, V_z — проекция скорости газа на ось Oz , V_x — проекция скорости газа на ось Ox , μ — коэффициент динамической вязкости, μ' — вторая или объемная вязкость, ρ — плотность газа, c — скорость звука в газе.

Уравнения (2)–(4) должны удовлетворять следующим краевым условиям:

- на границах контакта внутренних поверхностей стенок канала и вязкого газа, которые представляют собой условия прилипания вязкого газа к ограничивающим его стенкам [Валландер, 1978; Лойцянский, 2003]:

$$V_x = 0, \quad V_z + z \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{dz}{dt} \text{ при } z = z_m f(\theta t), \quad V_x = V_z = 0 \text{ при } z = \delta; \quad (5)$$

- в левом и правом торцевых сечениях канала, которые представляют собой условия совпадения давлений в этих сечениях с давлениями в левой торцевой полости и окружающей среде:

$$p = p_1(\omega t) \text{ при } x = -\ell, \quad p = 0 \text{ при } x = \ell. \quad (6)$$

Условия (5) записаны в лагранжево-эйлеровом подходе, а также принято во внимание, что закон движения нижней стенки канала в подходе Лагранжа представляется как $z = z_m f(\theta t)$, где $f(\theta t)$ — неизвестная функция времени, θ — характерная частота нелинейных колебаний стенки. При записи (6) учли, что постоянный уровень давления, соответствующий невозмущенному состоянию, принят за начало отсчета.

Совместно с (2)–(6) рассмотрим уравнение динамики стенки канала на упругом подвесе с жесткой кубической нелинейностью, которое в подходе Лагранжа может быть записано в виде [Пановко, 1991; Nayfeh, Mook, 1979]

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + n_1 z + n_3 z^3 = F_f, \quad (7)$$

где m — масса стенки, n_1 — коэффициент жесткости при линейной составляющей реакции подвеса, n_3 — коэффициент жесткости при кубической составляющей реакции подвеса, F_f — сила, действующая на стенку со стороны пульсирующего вязкого газа в канале. Принимая во внимание, что рассматривается подвес с жесткой нелинейностью, полагаем $n_1, n_3 > 0$ [Пановко, 1991; Nayfeh, Mook, 1979].

Сила F_f в лагранжево-эйлеровом подходе определяется следующим выражением:

$$F_f = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-\ell}^{\ell} \left(q_{zz} + z \frac{\partial q_{zz}}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_m f} dx dy = b \int_{-\ell}^{\ell} \left(q_{zz} + z \frac{\partial q_{zz}}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_m f} dx. \quad (8)$$

Здесь q_{zz} — нормальное напряжение вязкого газа, рассматриваемое на границе контакта газа с перемещающейся нижней стенкой. Данное напряжение в подходе Эйлера записывается как [Лойцянский, 2003]

$$q_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} - \left(\frac{2}{3}\mu - \mu' \right) \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right). \quad (9)$$

3. Асимптотический анализ задачи аэроупругости, закон распределения давления в пульсирующем слое вязкого газа

В рамках поставленной задачи можно выделить характерные независимые малые параметры: геометрический ($\psi = \frac{\delta}{\ell} \ll 1$), характеризующий узость канала, и динамический ($\lambda = \frac{z_m}{\delta} \ll 1$), характеризующий малость амплитуд колебаний стенки. Учитывая введенные при постановке задачи допущения, полагаем $\frac{\psi}{\lambda} = O(1)$ и вводим безразмерные переменные ξ, ζ, τ , компоненты скорости U_ξ, U_ζ и давление P согласно следующим соотношениям:

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \quad \zeta = \frac{z}{\delta}, \quad \tau = \theta t, \quad U_\xi = \left(\frac{z_m \theta}{\psi}\right)^{-1} V_x, \quad U_\zeta = (z_m \theta)^{-1} V_z, \quad P = \left(\frac{\lambda \mu \theta}{\psi}\right)^{-1} p. \quad (10)$$

Будем принимать во внимание, что $\lambda \psi \sim \psi^2$, $p_1 = \lambda \mu \theta \psi^{-2} P_1 \left(\frac{\tau \omega}{\theta}\right)$, $\rho = \rho_0 + \rho_*$. Здесь ρ_0 — плотность газа, соответствующая невозмущенному состоянию, ρ_* — плотность газа возмущенного состояния (далее для плотности ρ_* нижний индекс * будем опускать).

Осуществив подстановку (10) в (2)–(9), получим задачу аэроупругости в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} & (\text{Wo}^2 + \lambda \text{Mo}^2 P) \left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2} + \psi^2 \left(\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\mu'}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi \partial \zeta} \right) \right), \\ & \psi^2 (\text{Wo}^2 + \lambda \text{Mo}^2 P) \left[\frac{\partial U_\zeta}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \psi^2 \left(\psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\mu'}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right) \right), \\ & \text{Mo}^2 \frac{\partial P}{\partial \tau} + \lambda \text{Mo}^2 \left(U_\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + (\text{Wo}^2 + \lambda \text{Mo}^2 P) \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} + \frac{n_1}{m\theta^2} f(\tau) + \frac{z_m^2 n_3}{m\theta^2} f^3(\tau) = \quad (12)$$

$$= -\frac{b\ell\mu}{z_m m \theta \psi} \int_{-1}^1 \left(1 + \lambda f(\tau) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{\lambda}{\psi} P + \psi^2 \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{\mu'}{\mu} \right) \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) - 2 \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right] \right)_{\zeta=\lambda f(\tau)} d\xi,$$

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta + \lambda f(\tau) \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = \frac{df(\tau)}{d\tau} \quad \text{при } \zeta = \lambda f(\tau), \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = 0 \quad \text{при } \zeta = 1, \quad (13)$$

$$P = P_1 \left(\frac{\tau \omega}{\theta} \right) \quad \text{при } \xi = -1, \quad P = 0 \quad \text{при } \xi = 1. \quad (14)$$

В уравнениях динамики вязкого газа (11) выделены числа подобия рассматриваемой задачи: $\text{Mo} = \frac{\theta \ell}{c}$ — число подобие, предложенное Л. И. Могилевичем в [Попов и др., 2023a], которое можно рассматривать как произведение числа Струхала и числа Маха; $\text{Wo}^2 = \frac{\rho_0 \delta^2 \theta}{\mu}$ — квадрат числа Уомерсли [Womersley, 1955a], $\text{Wo} = \delta \sqrt{\frac{\theta \rho_0}{\mu}}$.

В силу узости канала перейдем к уравнениям динамики тонкого слоя вязкого газа, как принято в гидродинамической теории смазки [Константинеску, 1968; Лойцянский, 2003], исключая

из рассмотрения в (11), (12) члены порядка ψ^2 , однако удерживая инерционные члены. В результате переходим к задаче аэроупругости стенки, взаимодействующей с тонким слоем вязкого газа, представленной ниже:

$$\begin{aligned} (\text{Wo}^2 + \lambda \text{Mo}^2 P) \left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] &= -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \\ \text{Mo}^2 \frac{\partial P}{\partial \tau} + \lambda \text{Mo}^2 \left(U_\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + (\text{Wo}^2 + \lambda \text{Mo}^2 P) \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} + \frac{n_1}{m\theta^2} f(\tau) + \frac{z_m^2 n_3}{m\theta^2} f^3(\tau) &= -\frac{b\ell}{z_m m \theta \psi \psi} \int_{-1}^1 \left(P + \lambda f(\tau) \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\lambda f(\tau)} d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (15) дополняются граничными условиями (13), (14).

Проведем асимптотический анализ данной задачи методом возмущений [Van Dyke, 1975] с целью линеаризации уравнений динамики вязкого газа. Для этого рассмотрим следующие разложения искомым функций гидродинамических параметров по малому параметру λ :

$$U_\xi = U_\xi^{(0)} + \lambda U_\xi^{(1)} + \dots, \quad U_\zeta = U_\zeta^{(0)} + \lambda U_\zeta^{(1)} + \dots, \quad P = P^{(0)} + \lambda P^{(1)} + \dots \quad (16)$$

Заметим, что согласно второму уравнению (15) давление не зависит от поперечной координаты ζ , и, ограничиваясь первым членом в (16), получим следующую задачу, включающую линеаризованные уравнения тонкого слоя вязкого газа и нелинейное интегро-дифференциальное уравнение динамики нижней стенки (верхний индекс (0) далее опущен):

$$\begin{aligned} \text{Wo}^2 \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \text{Mo}^2 \frac{\partial P}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} + \frac{n_1}{m\theta^2} f(\tau) + \frac{z_m^2 n_3}{m\theta^2} f^3(\tau) &= -\frac{b\ell}{z_m m \theta \psi \psi} \int_{-1}^1 P d\xi, \end{aligned} \quad (17)$$

с линеаризованными граничными условиями на невозмущенных границах контакта вязкого газа со стенками канала и условиями для давления на торцах канала:

$$\begin{aligned} U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df(\tau)}{d\tau} \text{ при } \zeta = 0, \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = 0 \text{ при } \zeta = 1, \\ P = P_1 \left(\frac{\tau\omega}{\theta} \right) \text{ при } \xi = -1, \quad P = 0 \text{ при } \xi = 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Для определения безразмерного давления P , входящего в правую часть четвертого уравнения (17), проведем решение линеаризованных уравнений динамики газа (17) с граничными условиями (18) методом итераций [Могилевич и др., 2017; Попов и др., 2023а]. На первой итерации исключаем из рассмотрения первое слагаемое в первом и третьем уравнениях системы (17), что эквивалентно пренебрежению инерцией движения и сжимаемостью газа, т. е. рассмотрению ползущего движения несжимаемого газа. При решении полученных уравнений с граничными условиями (18) найдено решение на первой итерации:

$$U_\xi = \frac{\zeta^2 - \zeta}{2} \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad U_\zeta = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} (3\zeta^2 - 2\zeta^3 - 1), \quad P = \frac{1 - \xi}{2} P_1 + 6 \frac{df(\tau)}{d\tau} (1 - \xi^2). \quad (19)$$

Затем на второй итерации подставим найденные на первой итерации U_ξ и P из (19) в исключенные на первой итерации члены и решим полученные уравнения с граничными условиями (18). В результате определили выражение для функции давления вязкого газа:

$$P = \frac{1-\xi}{2}P_1 + \frac{1-\xi^2}{2} \left(12 \frac{df(\tau)}{d\tau} + \frac{6}{5} \text{Wo}^2 \frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2} \right) - \frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2} \left(6(5 + \xi^4 - 6\xi^2) \frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2} + (1 - \xi^2)(3 - \xi) \frac{dP_1}{d\tau} \right). \quad (20)$$

Необходимо отметить, что найденный закон (20), определяющий распределение давления вязкого газа в канале, допускает переход к случаю ползущего движения вязкого сжимаемого газа, т. е. без учета инерции его движения, если положить $\text{Wo}^2 \rightarrow 0$. Переход к случаю движения вязкого несжимаемого газа (вязкой жидкости) с учетом инерции его движения осуществляется, если принять $\frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2} \rightarrow 0$, т. е. при устремлении скорости звука в газе к бесконечности. Кроме того, возможен переход к ползущему движению вязкого несжимаемого газа (вязкой жидкости) при $\text{Wo}^2 \rightarrow 0$ и $\frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2} \rightarrow 0$, т. е. при исключении из рассмотрения инерции движения газа и его сжимаемости (в этом случае получаем (19) — решение, найденное на первой итерации).

4. Определение нелинейного аэроупругого отклика стенки канала

Подставляя (20) в последнее уравнение системы (17) и проводя вычисление интегралов правой части, получаем уравнение нелинейных аэроупругих колебаний стенки канала, записанное в размерном виде:

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + n_1 z + n_3 z^3 = -b\ell p_1 + b\ell \frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2} \frac{4}{\theta} \frac{dp_1}{dt} - \frac{b\mu}{\theta} \frac{\ell^3}{\delta^3} \left[8\theta \frac{dz}{dt} + \frac{12}{15} \text{Wo}^2 \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{192}{5} \frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2} \frac{d^2z}{dt^2} \right]. \quad (21)$$

Вводя обозначения

$$M_{g1} = \frac{12}{15} \frac{b\mu}{\theta} \frac{\ell^3}{\delta^3} \text{Wo}^2 = \frac{12}{15} \frac{b}{\delta} \ell^3 \rho_0, \quad M_{g2} = \frac{192}{5} \frac{b\mu}{\theta} \frac{\ell^3}{\delta^3} \frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2} = \frac{192}{5} \frac{\ell^5}{\delta^5} \frac{\mu^2 b}{c^2 \rho_0},$$

$$K_g = 8 \frac{\mu b \ell^3}{\delta^3}, \quad T_g = \frac{4}{\theta} \frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2} = 4 \frac{\ell^2}{\delta^2} \frac{\mu}{c^2 \rho_0}$$

и учитывая (1), представим (21) как

$$(m + (M_{g1} - M_{g2})) \frac{d^2z}{dt^2} + K_g \frac{dz}{dt} + n_1 z + n_3 z^3 = -\ell b \left(p_1 - 2T_g \frac{dp_1}{dt} \right) = 2\ell b p_m A(\omega) \sin(\omega t - \gamma(\omega)), \quad (22)$$

где $A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{4} + (T_g \omega)^2}$, $\text{tg } \gamma(\omega) = 2T_g \omega$, $2\ell b$ — площадь контакта вязкого газа со стенкой канала.

Уравнение (22) представляет собой обобщение уравнения Дуффинга. Отметим, что полученное уравнение позволяет промоделировать ряд частных случаев. Полагая $M_{g1} = 0$, переходим к случаю колебаний стенки при ползущем движении вязкого газа в канале, а если при этом положить $M_{g2} = 0$, $T_g = 0$ (эквивалентно устремлению скорости звука в газе к бесконечности), будет осуществлен переход к колебаниям стенки при ползущем движении вязкого несжимаемого газа (жидкости) в канале. Удерживая M_{g1} , но полагая $M_{g2} = 0$, $T_g = 0$, переходим к рассмотрению случая колебаний стенки при ее взаимодействии с вязким несжимаемым газом (жидкостью) с учетом инерции его движения. Кроме того, если положить $n_3 = 0$, то получим случай линейно-упругого подвеса стенки канала.

Известно, что уравнение Дуффинга допускает периодическое решение, проведем построение такого решения для (22), используя метод гармонического баланса [Krack, Gross, 2019]. Примем во внимание, что при реализации метода для уравнения Дуффинга без демпфирования последующий коэффициент члена ряда Фурье, соответствующий утроенной частоте вынуждающей силы, оказывается малым по сравнению с коэффициентом первого члена ряда, на частотах, близких к частоте вынуждающей силы [Пановко, 1991]. Поэтому, осуществляя процедуру метода, сосредоточим внимание на изучении основного отклика стенки при ее колебаниях в частотном диапазоне пульсации давления на левом торце канала [Пановко, 1991; Nayfeh, Mook, 1979]. В этом случае характерная частота нелинейных колебаний стенки канала $\theta \approx \omega$. Наличие демпфирующего члена в уравнении (22) приводит к дополнительному фазовому сдвигу ϕ в отклике стенки. Следуя [Пановко, 1991], учтем данный неизвестный фазовый сдвиг в правой части уравнения, записывая ее как $2\ell b p_m A(\omega) \sin(\omega t - \gamma + \phi)$. В этом случае вид решения (22) следующий:

$$z = z_m \sin(\omega t - \gamma). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) и проводя процедуру метода, получим

$$\left[n_1 + \frac{3}{4} n_3 z_m^2 - (m + (M_{g1} - M_{g2})) \omega^2 \right] z_m \sin(\omega t - \gamma) + K_g \omega z_m \cos(\omega t - \gamma) = 2\ell b p_m A(\omega) (\sin(\omega t - \gamma) \cos \phi + \cos(\omega t - \gamma) \sin \phi). \quad (24)$$

Приравнивая выражения при одинаковых тригонометрических функциях, перейдем к системе двух алгебраических уравнений:

$$\left[n_1 + \frac{3}{4} n_3 z_m^2 - (m + (M_{g1} - M_{g2})) \omega^2 \right] z_m = 2\ell b p_m A(\omega) \cos \phi, \quad K_g \omega z_m = 2\ell b p_m A(\omega) \sin \phi. \quad (25)$$

Из системы (24) получаем выражение искомой амплитуды колебаний стенки канала через амплитуду и частоту пульсации давления в левой торцевой полости:

$$\left(n_1 + \frac{3}{4} n_3 z_m^2 - (m + (M_{g1} - M_{g2})) \omega^2 \right)^2 z_m^2 + (K_g \omega z_m)^2 = \ell^2 b^2 p_m^2 (1 + (2T_g \omega)^2), \quad (26)$$

а также выражение для неизвестного фазового сдвига:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\frac{K_g \omega}{m + M_{g1} - M_{g2}}}{\frac{n_1 + \frac{3}{4} n_3 z_m^2}{m + M_{g1} - M_{g2}} - \omega^2}. \quad (27)$$

Заметим, что в выражениях (26), (27) можно ввести в рассмотрение так называемую скелетную характеристику:

$$\theta^2 = \Omega^2 + \frac{\frac{3}{4} n_3 z_m^2}{m + M_{g1} - M_{g2}},$$

определяющую собственные частоты нелинейной консервативной системы, соответствующей (22) при $K_g = 0$. В данном выражении $\Omega = \sqrt{\frac{n_1}{m + M_{g1} - M_{g2}}}$ — собственная частота линейной системы, соответствующей (22) при $n_3 = 0$. Тогда характерная частота нелинейных колебаний стенки канала может быть определена как $\theta = \Omega + \frac{3}{8} n_3 z_m^2 \Omega^{-1} (m + M_{g1} - M_{g2})^{-1}$ аналогично [Боголюбов, Митропольский, 1974].

Перейдем к безразмерной частоте η , понимая под ней отношение размерной частоты ω к собственной частоте рассматриваемой колебательной системы (22) при $n_3 = 0$ и $K_g = 0$, т. е. к собственной частоте линейной консервативной системы:

$$\eta = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{n_1}{m+M_{g1}-M_{g2}}}}. \quad (28)$$

Кроме того, введем в рассмотрение безразмерную характеристику собственных частот рассматриваемой нелинейной консервативной системы, т. е. безразмерную скелетную кривую:

$$\eta_*^2 = 1 + \frac{3}{4} \frac{n_3 z_m^2}{n_1}. \quad (29)$$

Принимая во внимание (28), (29), запишем выражения для безразмерного аэроупругого и фазового откликов (26), (27) стенки канала, имеющей упругий подвес с жесткой кубической нелинейностью и взаимодействующей со слоем вязкого пульсирующего газа, в следующем виде:

$$z_m = \frac{\ell b p_m}{n_1} \frac{\sqrt{1 + \frac{(2T_g \eta)^2 n_1}{m+M_{g1}-M_{g2}}}}{\sqrt{(\eta_*^2 - \eta^2)^2 + B^2 \eta^2}}, \quad (30)$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{B \eta}{\eta_*^2 - \eta^2}, \quad (31)$$

где введено обозначение

$$B^2 = \frac{K_g^2}{(m + M_{g1} - M_{g2}) n_1}.$$

5. Результаты расчетов

Полученные выражения для аэроупругого отклика (30) и фазового сдвига (31) представляют собой неявные функции от частоты пульсации и амплитуды давления на левом торце канала. Данные выражения позволяют исследовать установившиеся нелинейные колебания стенки канала, однако прямое их использование затруднительно в силу неявности (30), (31). Заметим, что для частного случая при $n_3 = 0$, т. е. линейно-упругого подвеса стенки канала, (30), (31) становятся явными функциями. Для остальных случаев необходимо проведение численного исследования указанных характеристик. Приведем пример численного моделирования аэроупругого отклика стенки по (30), (31) для канала со следующими параметрами: $\ell = 0,15$ м, $\delta_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $b = 5\ell$, $\rho_0 = 1,2$ кг/м³, $\mu = 18,1 \cdot 10^{-6}$ Па · с, $c = 290$ м/с, $n_1 = 7 \cdot 10^7$ Н/м, $n_3 = 4 \cdot 10^{15}$ Н/м³, $m = 3$ кг, $p_m = 10^4$ Па. В ходе расчетов были рассмотрены случаи: 1) взаимодействие стенки с пульсирующим вязким газом при учете его сжимаемости и инерции движения; 2) взаимодействие стенки с пульсирующим вязким газом при исключении из рассмотрения инерции его движения, т. е. ползущем движении, когда в (30), (31) $M_{g1} = 0$; 3) взаимодействие стенки с пульсирующим вязким несжимаемым газом (вязкой жидкостью) при учете инерции его движения, т. е. когда в (30), (31) $M_{g2} = 0$, $T_g = 0$; 4) взаимодействие стенки с пульсирующим вязким несжимаемым газом (вязкой жидкостью) в канале при ползущем его движении, т. е. когда в (30), (31) $M_{g1} = 0$, $M_{g2} = 0$, $T_g = 0$. Результаты расчетов представлены ниже на рис. 2–5. На рис. 6 представлен вид (30) для линейно-упругого подвеса стенки канала $n_3 = 0$, при этом кривые фазового сдвига (31) имеют классический вид, как у гармонического осциллятора.

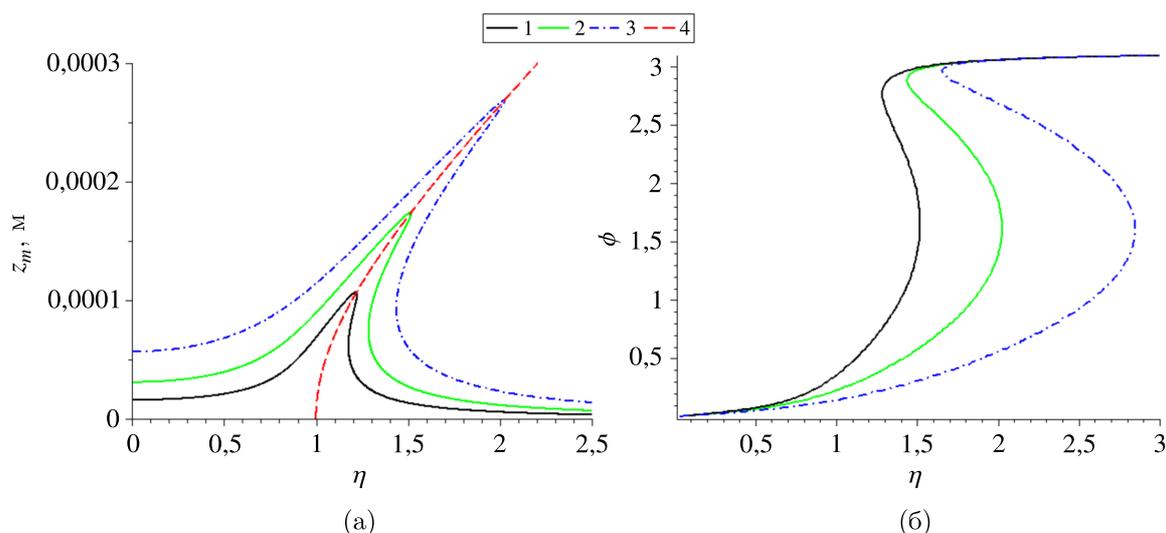


Рис. 2. Аэроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) стенки канала на упругом подвесе с жесткой кубической нелинейностью при учете сжимаемости и инерции движения вязкого газа: 1 — амплитуда пульсации давления $p_m = 10^4$ Па, 2 — амплитуда пульсации давления $p_m = 2 \cdot 10^4$ Па, 3 — амплитуда пульсации давления $p_m = 4 \cdot 10^4$ Па, 4 — скелетная кривая η_* ; здесь безразмерной частоте $\eta = 1$ соответствует размерная частота $\omega = 3028,35$ рад/с

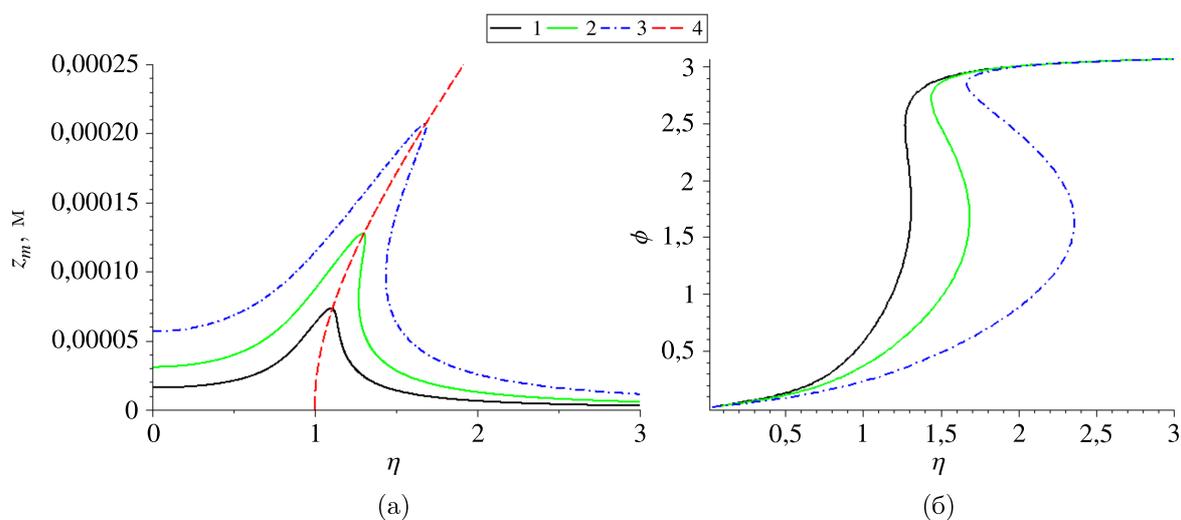


Рис. 3. Аэроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) стенки канала на упругом подвесе с жесткой кубической нелинейностью без учета инерции движения вязкого сжимаемого газа (ползущее течение): 1 — амплитуда пульсации давления $p_m = 10^4$ Па, 2 — амплитуда пульсации давления $p_m = 2 \cdot 10^4$ Па, 3 — амплитуда пульсации давления $p_m = 4 \cdot 10^4$ Па, 4 — скелетная кривая η_* ; здесь безразмерной частоте $\eta = 1$ соответствует размерная частота $\omega = 5024,45$ рад/с

6. Выводы и заключение

В работе на базе постановки и решения задачи аэроупругости стенки канала, имеющей упругий подвес с жесткой кубической нелинейностью и взаимодействующей со слоем вязкого пульсирующего газа показано, что данная проблема может быть сведена к исследованию обобщенного уравнения Дуффинга вида (22). Анализ этого уравнения позволяет отметить следующие моменты. Коэффициенты уравнения M_{g1} , M_{g2} можно рассматривать как присоединенные массы,

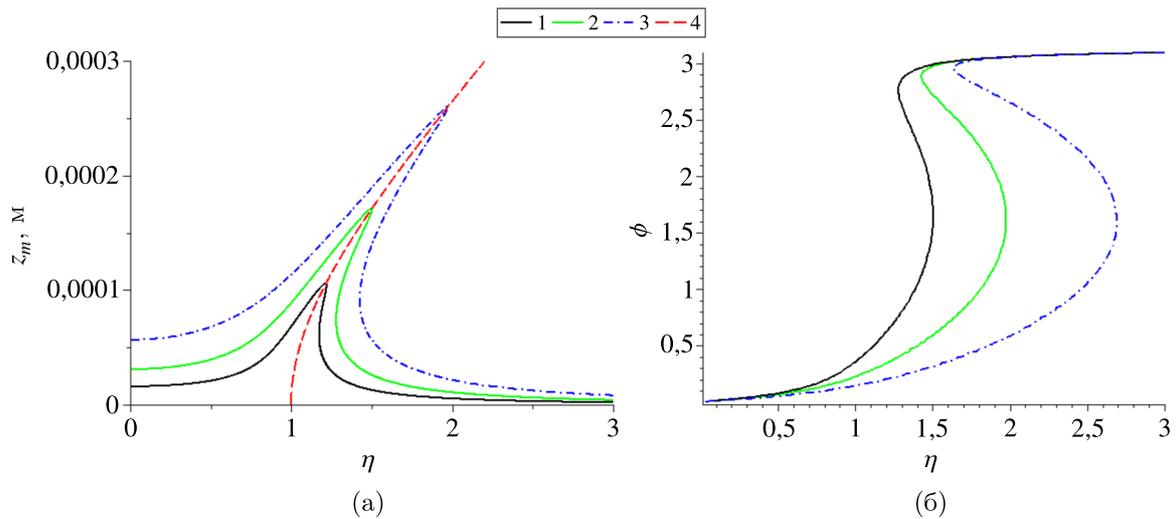


Рис. 4. Аэроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) стенки канала на упругом подвесе с жесткой кубической нелинейностью при учете инерции движения несжимаемого вязкого газа: 1 — амплитуда пульсации давления $p_m = 10^4$ Па, 2 — амплитуда пульсации давления $p_m = 2 \cdot 10^4$ Па, 3 — амплитуда пульсации давления $p_m = 4 \cdot 10^4$ Па; 4 — скелетная кривая η_* ; здесь безразмерной частоте $\eta = 1$ соответствует размерная частота $\omega = 2984,27$ рад/с

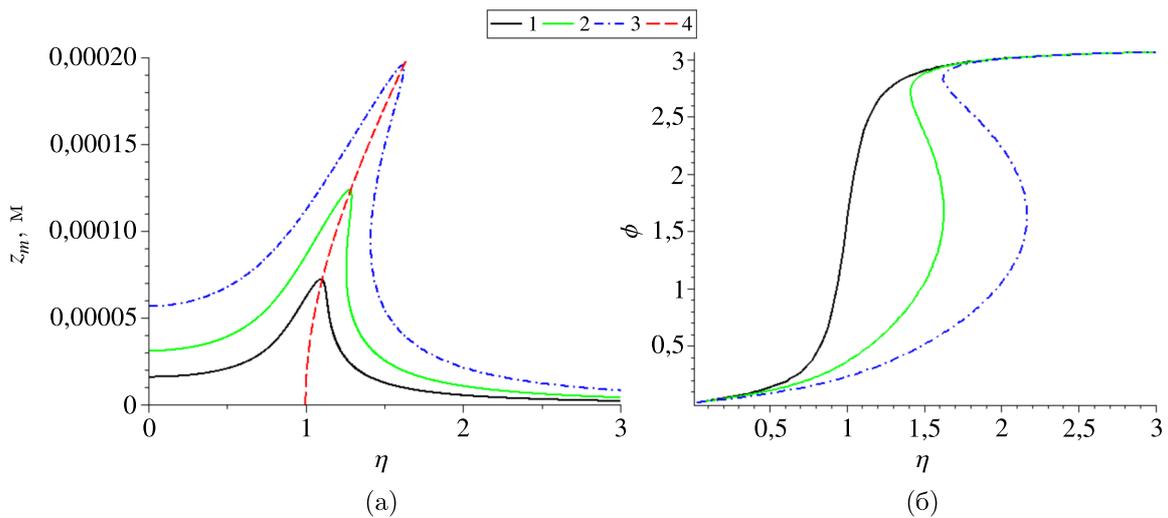


Рис. 5. Аэроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) стенки канала на упругом подвесе с жесткой кубической нелинейностью без учета инерции движения (ползущее течение) несжимаемого вязкого газа: 1 — амплитуда пульсации давления $p_m = 10^4$ Па, 2 — амплитуда пульсации давления $p_m = 2 \cdot 10^4$ Па, 3 — амплитуда пульсации давления $p_m = 4 \cdot 10^4$ Па, 4 — скелетная кривая η_* ; здесь безразмерной частоте $\eta = 1$ соответствует размерная частота $\omega = 4830,46$ рад/с

определяющие разнонаправленные силы, пропорциональные ускорению движения стенки канала. Первая из них представляет собой силу инерции пульсирующего газа в канале. Вторая сила определяется изменением массы газа в канале при его ускорении/торможении (сжатии/расширении) за счет его взаимодействия с вибрирующей стенкой. Данная сила направлена против сил инерции пульсирующего газа и колеблющейся стенки. В результате учет силы инерции движения газа ведет к увеличению инерционных свойств рассматриваемой колебательной системы, а учет сжимаемости газа — к уменьшению данных свойств. Кроме того, сжатие/расширение (ускоре-

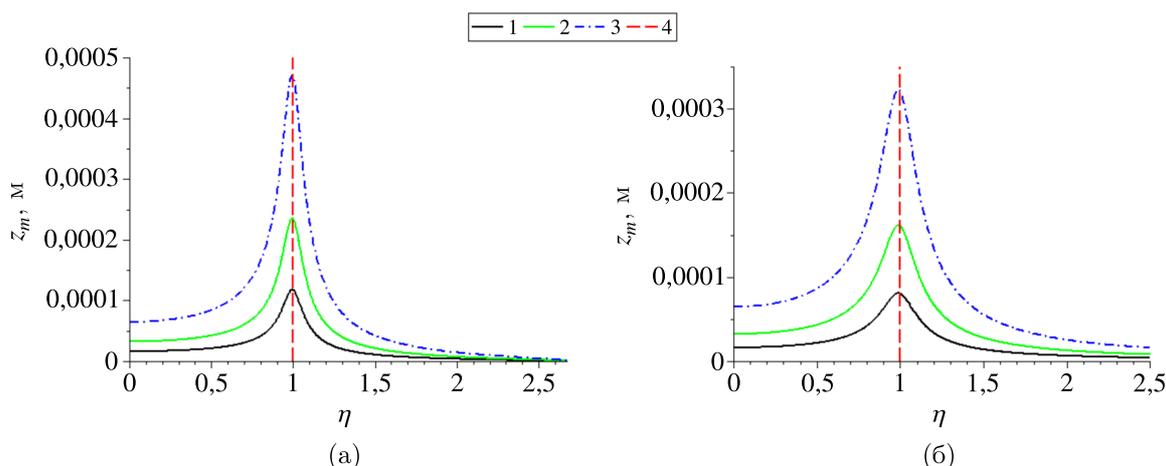


Рис. 6. Аэроупругие отклики стенки на линейно-упругом подвесе ($n_3 = 0$), взаимодействующей с вязким сжимаемым газом при учете инерции его движения (а) и для ползущего его течения (б): 1 — амплитуда пульсации давления $p_m = 10^4$ Па, 2 — амплитуда пульсации давления $p_m = 2 \cdot 10^4$ Па, 3 — амплитуда пульсации давления $p_m = 4 \cdot 10^4$ Па, 4 — собственная частота консервативной линейной системы (соответствует точке на скелетной кривой η_* при $z_m = 0$); здесь безразмерной частоте $\eta = 1$ соответствует размерная частота $\omega = 3028,35$ рад/с для (а) и $\omega = 5024,45$ рад/с для (б)

ние/торможение) вязкого газа в канале происходят за счет пульсации давления в левой торцевой полости. Это обуславливает запаздывание возмущающей силы (правой части (22)), что выражается в появлении ее второй составляющей, пропорциональной производной по времени от закона пульсации давления на торце. Амплитуда данной составляющей характеризуется коэффициентом T_g . В результате сжатие/расширение газа за счет заданного гармонического возмущения давления на торце канала проявляются как фазовый сдвиг γ в суммарной возмущающей силе.

Представленные на рис. 2–5 результаты моделирования указывают на необходимость принятия во внимание сжимаемости и инерции движения вязкого газа в канале. Учет инерции движения газа вызывает, вследствие увеличения инерционных свойств колебательной системы, существенное снижение значений резонансных частот колебаний стенки. С другой стороны, включение в рассмотрение сжимаемости газа ведет к незначительному их росту.

Амплитуды колебаний стенки в случае сжимаемого газа оказываются выше, чем для случая несжимаемого газа как при ползущем течении, так и при учете инерции движения газа. С другой стороны, учет инерции движения газа ведет к возрастанию амплитуд колебаний по сравнению со случаем ползущего движения газа.

Влияние жесткой кубической нелинейности упругого подвеса стенки проявляется в виде изгиба кривых аэроупругого отклика в правую сторону. При этом наблюдается рост значений резонансных частот с ростом амплитуды пульсации давления на торце канала. Кроме того, нелинейные свойства подвеса вызывают изгиб вправо кривых фазового сдвига. Интенсивность этого изгиба увеличивается с ростом амплитуды пульсации давления на торце канала. В случае линейно-упругого подвеса стенки $n_3 = 0$ выражения для аэроупругого отклика и фазового сдвига имеют классический вид, соответствующий гармоническому осциллятору с вязким трением. Изгиб кривых аэроупругого отклика отсутствует, а резонансные частоты не зависят от амплитуды пульсации давления. Кривые фазового сдвига плавно изменяются от 0 до π и не зависят от амплитуды пульсации давления на торце, а резонансной частоте соответствует фаза $\frac{\pi}{2}$. Однако сохраняются установленные и указанные выше особенности, связанные с изменениями значений амплитуд колебаний и резонансных частот при учете (или исключении из рассмотрения) сжимаемости газа и инерции его движения.

Известно [Пановко, 1991; Nayfeh, Mook, 1979], что при вынужденных нелинейных колебаниях осциллятора Дуффинга с вязким трением присутствует диапазон частот, на котором возникают неустойчивые колебания. Особо отметим, что результаты расчетов при учете нелинейных свойств подвеса стенки (см. рис. 2–5) для всех рассмотренных случаев показывают, что в области изгиба кривых аэроупругого отклика вправо одному значению частоты η соответствует два или три значения амплитуды колебаний z_m . Это обуславливает возможность гистерезисных переходов. Согласно [Боголюбов, Митропольский, 1974] в указанной области ветви кривых аэроупругого отклика, лежащие левее скелетной кривой и возрастающие вместе с ростом частоты η , соответствуют устойчивым значениям амплитуд колебаний. Ветви, лежащие правее скелетной кривой и возрастающие при уменьшении частоты η , соответствуют неустойчивым амплитудам колебаний, однако после резонансной частоты последние ветви, при возрастании частоты η , соответствуют устойчивым колебаниям. Следовательно, на неустойчивых участках нижних ветвей наблюдается гистерезисный перескок на устойчивые ветви с большими амплитудами колебаний. С другой стороны, при достижении резонансного пика на устойчивых верхних ветвях и при дальнейшем росте частоты η наблюдается перескок на нижние ветви с меньшими амплитудами. В результате в указанной области возникают неустойчивые колебания. Данные колебания характеризуются скачкообразным изменением амплитуд [Brennan et al., 2008]. Проведенные расчеты показали, что в рассматриваемой колебательной системе возможно возникновение таких колебаний. При этом исключение из рассмотрения сжимаемости и инерции движения газа (см. рис. 5) ведет к незначительному изгибу кривых аэроупругого отклика. Поэтому в данном случае модель либо не предскажет наличие области частот неустойчивых колебаний (при малых амплитудах пульсации давления на торце), либо покажет зауженный частотный диапазон неустойчивых колебаний.

Представленные в работе модель и результаты численных расчетов можно рассматривать в качестве фундаментального задела в области моделирования и анализа нелинейных аэроупругих колебаний стенок каналов, имеющих нелинейно-упругий подвес и заполненных пульсирующим вязким газом, а также приборных чувствительных элементов, взаимодействующих с пульсирующим слоем вязкого газ и имеющих нелинейно-упругие опоры.

Список литературы (References)

- Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 503 с.
Bogolyubov N. N., Mitropol'skii Yu. A. Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebaniy [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. — Moscow: Nauka, 1974. — 503 p. (in Russian).
- Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. — Л.: ЛГУ, 1978. — 296 с.
Vallander S. V. Lektsii po gidroaeromekhanike [Lectures on hydroaeromechanics]. — Leningrad: LGU, 1978. — 296 p. (in Russian).
- Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А., Покладова Ю. В. Исследование динамической устойчивости изгибно-крутильных деформаций трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. — 2021. — Т. 23, № 1. — С. 72–81.
Vel'misov P. A., Tamarova Yu. A., Pokladova Yu. V. Issledovanie dinamicheskoi ustoichivosti izgibno-krutit'nykh deformatsii truboprovoda [Investigation of the dynamic stability of bending-torsional deformations of the pipeline] // Middle Volga Mathematical Society Journal. — 2021. — Vol. 23, No. 1. — P. 72–81 (in Russian).
- Горшков А. Г., Морозов В. И., Пономарев А. Т., Шклярчук Ф. Н. Аэрогидроупругость конструкций. — М.: Физматлит, 2000.
Gorshkov A. G., Morozov V. I., Ponomarev A. T., Shkljarchuk F. N. Ajerogidrouprugost' konstrukcij [Aerohydroelasticity of structures]. — Moscow: Fizmatlit, 2000 (in Russian).
- Громека И. С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубах. — Собр. соч. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — С. 172–183.
Gromeka I. S. O skorosti rasprostraneniya volnoobraznogo dvizheniya zhidkosti v uprugikh trubkakh [On the velocity of propagation of wave-like motion of fluids in elastic tubes]. — Sobr. soch. — Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1952. — P. 172–183 (in Russian).

- Кондратов Д. В., Кондратова Т. С., Попов В. С., Попова А. А.* Моделирование гидроупругого отклика пластины, установленной на нелинейно-упругом основании и взаимодействующей с пульсирующим слоем жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. — 2023. — Т. 15, № 3. — С. 581–597.
- Kondratov D. V., Kondratova T. S., Popov V. S., Popova A. A.* Modelirovanie gidrouprugogo otklika plastiny, ustanovlennoi na nelineino-uprugom osnovanii i vzaimodeistvuyushchei s pul'siruyushchim sloem zhidkosti [Modelling hydroelastic response of a plate resting on a nonlinear foundation and interacting with a pulsating fluid layer] // Computer Research and Modeling. — 2023. — Vol. 15, No. 3. — P. 581–597 (in Russian).
- Константинеску В. Н.* Газовая смазка. — М.: Машиностроение, 1968. — 718 с.
- Konstantinesku V. N.* Gazovaya smazka [Gas lubrication]. — Moscow: Mashinostroenie, 1968. — 718 p. (in Russian).
- Королева М. Р., Мищенкова О. В., Редер Т., Тенев В. А., Чернова А. А.* Численное моделирование процесса срабатывания предохранительного клапана // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 4. — С. 495–509.
- Koroleva M. R., Mishenkova O. V., Reder T., Tenenev V. A., Chernova A. A.* Chislennoe modelirovanie processa sbratyvaniya predokhranitel'nogo klapana [Numerical simulation of the process of activation of the safety valve] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 4. — P. 495–509 (in Russian).
- Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с.
- Loitsyanskiy L. G.* Mekhanika zhidkosti i gaza [Mechanics of liquids and gases]. — Moscow: Drofa, 2003. — 840 p. (in Russian).
- Могилевич Л. И., Попов В. С., Скородумов Е. С.* Динамика сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости, взаимодействующего с упругой пластиной // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. — 2017. — № 1. — С. 53–63.
- Mogilevich L. I., Popov V. S., Skorodumov E. S.* Dinamika sdavlivayemogo sloja vjazkoj neshzhimaemoj zhidkosti, vzaimodeistvuyushhego s uprugoy plastinoy [Dynamics of viscous incompressible liquid constricted layer, interacting with elastic walls] // Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyj i naturnyj jeksperiment v estestvennyh naukah. — 2017. — No. 1. — P. 53–63 (in Russian).
- Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. — М.: Наука, 1991.
- Panovko Ya. G.* Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebanij [Introduction to the theory of mechanical vibrations]. — Moscow: Nauka, 1991 (in Russian).
- Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем: современные концепции, парадоксы и ошибки. — М.: Ленанд, 2020.
- Panovko Ya. G., Gubanova I. I.* Ustoichivost' i kolebaniya uprugikh sistem [Stability and oscillations of elastic systems]. — Moscow: Lenand, 2020 (in Russian).
- Попов В. С., Могилевич Л. И., Попова А. А.* Колебания стенки канала на нелинейно-упругом подвесе под воздействием пульсирующего слоя вязкого газа, находящегося в канале // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. — 2023а. — Т. 66, № 10. — С. 822–835.
- Popov V. S., Mogilevich L. I., Popova A. A.* Kolebaniya stenki kanala na nelineino-uprugom podvese pod vozdeistviem pul'siruyushchego sloya vyzkogo gaza, nakhodyashchegosya v kanale [Oscillations of the channel wall on a nonlinear-elastic suspension due to interaction with a pulsating layer of viscous gas in the channel] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Radiofizika. — 2023a. — Vol. 66, No. 10. — P. 822–835 (in Russian).
- Попов В. С., Попова А. А., Попова М. В., Христофорова А. В.* Моделирование динамики взаимодействия пластины на упругом основании с мягкой кубической нелинейностью с вибрирующим штампом через слой вязкой жидкости // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2023б. — № 4 (145). — С. 110–130.
- Popov V. S., Popova A. A., Popova M. V., Khristoforova A. V.* Modelirovanie dinamiki vzaimodeistviya plastiny na uprugom osnovanii s myagkoi kubicheskoi nelineinost'yu s vibriruyushchim shtampom cherez sloj vyzkoi zhidkosti [Simulating interaction between a plate on elastic foundation with the softening cubic nonlinearity and a vibrating die via the viscous fluid layer] // Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Ser. Priborostroenie [Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering]. — 2023b. — No. 4 (145). — P. 110–130 (in Russian).
- Редер Т., Тенев В. А., Чернова А. А.* Численное моделирование неустойчивых режимов работы предохранительного клапана // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2020. — № 68. — С. 141–157.
- Reder T., Tenenev V. A., Chernova A. A.* Chislennoe modelirovanie neustoichivykh rezhimov raboty predokhranitel'nogo klapana [Numerical simulation of unstable modes for a safety valve] // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. — 2020. — No. 68. — P. 141–157 (in Russian).
- Турчак Л. И., Шидловский В. П.* Математическое моделирование проблем газовой смазки // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51, № 2. — С. 329–348.

- Turchak L. I., Shidlovskii V. P.* Matematicheskoe modelirovanie problem gazovoi smazki [Mathematical modeling of gas lubrication problems] // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 2011. — Vol. 51, No. 2. — P. 329–348 (in Russian).
- Хасьянова Д. У., Мукутадзе М. А.* Оптимизация опорной поверхности подшипника скольжения по параметру несущей способности с учетом зависимости вязкости смазочного материала от давления и температуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2018. — № 4. — С. 66–72.
- Khas'yanova D. U., Mukutadze M. A.* Optimizatsiya opornoj poverkhnosti podshipnika skol'zheniya po parametru nesushchei sposobnosti s uchetom zavisimosti vyazkosti smazochnogo materiala ot davleniya i temperatury [Optimization of the supporting surface of a slider bearing according to the load-carrying capacity taking into account the lubricant viscosity depending on pressure and temperature] // Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin. — 2018. — No. 4. — P. 66–72 (in Russian).
- Фабрикант Н. Я.* Аэродинамика. — М.: Наука, 1964. — 816 с.
- Fabrikant N. Ya.* Aerodinamika [Aerodynamics]. — Moscow: Nauka, 1964. — 816 p. (in Russian).
- Amabili M., Kwak M. K.* Free vibrations of circular plates coupled with liquids: revising the lamb problem // J. Fluids Struct. — 1996. — Vol. 10, No. 7. — P. 743–761.
- Barulina M., Santo L., Popov V., Popova A., Kondratov D.* Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations // Mathematics. — 2022. — Vol. 10. — 3844.
- Bochkarev S. A., Kamenskikh A. O., Lekomtsev S. V.* Experimental investigation of natural and harmonic vibrations of plates interacting with air and fluid // Ocean Engineering. — 2020. — Vol. 206. — 10734.
- Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P.* Hydroelastic stability of a rectangular plate interacting with a layer of ideal flowing fluid // Fluid Dynamics. — 2016. — Vol. 51, No. 6. — P. 821–833.
- Brennan M. J., Kovacic I., Carrella A., Waters T. P.* On the jump-up and jump-down frequencies of the duffing oscillator // Journal of Sound and Vibration. — 2008. — Vol. 318. — Nos. 4–5. — P. 1250–1261.
- Hosseini-Hashemi S., Arpanahi R. A., Rahmanian S., Ahmadi-Savadkoohi A.* Free vibration analysis of nano-plate in viscous fluid medium using nonlocal elasticity // European Journal of Mechanics A. Solids. — 2019. — Vol. 74. — P. 440–448.
- Indeitsev D. A., Osipova E. V.* Nonlinear effects in trapped modes of standing waves on the surface of shallow water // Technical Physics. — 2000. — Vol. 45, No. 12. — P. 1513–1517.
- Kamenskikh A. O., Lekomtsev S. V.* Control of hydro-elastic vibrations of two parallel plates by electromagnetic coil // AIP Conf. Proc. — 2020. — Vol. 2239. — 020020.
- Kondratov D. V., Kondratova T. S., Popov V. S., Popova M. V.* Modeling hydroelastic response of the channel wall resting on a nonlinear elastic foundation // Lecture Notes in Mechanical Engineering. — 2023. — P. 261–270. — https://doi.org/10.1007/978-3-031-38126-3_27
- Kozlovsky Y.* Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model // Journal of Sound and Vibration. — 2009. — Vol. 326. — P. 332–339.
- Krack M., Gross J.* Harmonic balance for nonlinear vibration problems. — New York: Springer, 2019.
- Lamb H.* On the vibrations of an elastic plate in contact with water // Proc. Roy. Soc. A. — 1921. — Vol. 98. — P. 205–216.
- Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A.* Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. — 2017. — Vol. 46, No. 1. — P. 12–19.
- Nayfeh A. H., Mook D. T.* Nonlinear oscillations. — New York: Wiley, 1979.
- Païdoussis M. P.* Dynamics of cylindrical structures in axial flow: A review // Journal of Fluids and Structures. — 2021. — Vol. 107. — 103374. — <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2021.103374>

- Païdoussis M. P.* Fluid-structure interactions: Slender structures and axial flow. — Vol. 2. — 2nd ed. — London: Academic Press, 2016.
- Tulchinsky A., Gat A. D.* Frequency response and resonance of a thin fluid film bounded by elastic sheets with application to mechanical filters // *Journal of Sound and Vibration*. — 2019. — Vol. 438. — P. 83–98.
- Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid mechanics. — Stanford: The Parabolic Press, 1975.
- Velmisov P. A., Ankilov A. V.* Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid // *Cybernetics and Physics*. — 2017. — Vol. 6, No. 4. — P. 262–270.
- Velmisov P. A., Pokladova Y. V.* Mathematical modelling of the “Pipeline–pressure sensor” system // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2019. — Vol. 1353. — 01208.
- Womersley J. R.* Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known // *The Journal of Physiology*. — 1955a. — Vol. 127, No. 3. — P. 553–563.
- Womersley J. R.* Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I. The linear approximation for long waves // *Phil. Mag.* — 1955b. — Vol. 46. — P. 199–221.
- Zavyalova K. N., Shishmarev K. A., Korobkin A. A.* The response of a poroelastic ice plate to an external pressure // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. — 2021. — Vol. 14, No. 1. — P. 87–97.