

УДК: 51-77

Модель переключающегося режима воспроизводства с континуальным множеством производственных подсистем в условиях сбалансированного роста

С. Ю. Малков^а, А. А. Рубинштейн^б

Институт экономики РАН,
Россия, 117218, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 32

E-mail: ^а s@malkov.org, ^б rubinstein.alexander@gmail.com

Получено 06.01.2025, после доработки — 02.06.2025.

Принято к публикации 04.06.2025.

В данной работе представлены новые результаты исследований, которые с 2011 года проводятся в Институте экономики РАН под руководством академика РАН В. И. Маевского. Эти работы направлены на развитие теории переключающегося воспроизводства и соответствующих математических моделей, особенностью которых является то, что в них в явном виде моделируется взаимодействие финансового и реального секторов экономики, а сама экономика страны дезагрегируется не по отраслевому принципу (машиностроение, сельское хозяйство, услуги и т. д.), а на производственные подсистемы, отличающиеся друг от друга возрастом основного капитала. Одна из математических сложностей работы с подобными моделями, называемыми моделями переключающегося режима воспроизводства (ПРВ), заключается в сложности моделирования конкурентных отношений между подсистемами разного возраста. Поэтому до сих пор в моделях ПРВ рассматривалось взаимодействие конечного числа производственных подсистем, сами модели имели дискретно-непрерывный характер, расчеты делались исключительно на ЭВМ, получение аналитических зависимостей было затруднено. В настоящей работе показано, что для частного случая сбалансированного экономического роста и континуального множества производственных подсистем возможно получение аналитических выражений, позволяющих лучше понять особенности влияния денежно-кредитной политики на экономическую динамику. Кроме чисто научного интереса это имеет важное практическое значение, поскольку позволяет оценивать возможную реакцию реального сектора экономики на изменения в денежно-кредитной сфере без проведения сложных имитационных расчетов.

Ключевые слова: переключающийся режим воспроизводства, мезоэкономическая модель, поколения основного капитала, денежная эмиссия, экономический рост

Работа выполнена в рамках государственного задания «Институциональные основания и воспроизводственные факторы экономической политики России, способствующие переходу к экономике развития». Авторы благодарят акад. В. И. Маевского за ценные замечания и рекомендации.

UDC: 51-77

The model of switching mode of reproduction with a continuous set of production subsystems under the conditions of balanced growth

S. Yu. Malkov^a, A. A. Rubinstein^b

Institute of Economics of the Russian Academy of Sciences,
32 Nakhimovsky prospekt, Moscow, 117218, Russia

E-mail: ^a s@malkov.org, ^b rubinstein.alexander@gmail.com

*Received 06.01.2025, after completion — 02.06.2025.
Accepted for publication 04.06.2025.*

This paper presents new research results that have been conducted at the Institute of Economics of the Russian Academy of Sciences since 2011 under the leadership of Academician of the Russian Academy of Sciences V.I. Mayevsky. These works are aimed at developing the theory of switching mode of reproduction and corresponding mathematical models, the peculiarity of which is that they explicitly model the interaction of the financial and real sectors of the economy, and the country's economy itself is not disaggregated according to the sectoral principle (engineering, agriculture, services, etc.), but by production subsystems that differ from each other by the age of the fixed capital. One of the mathematical difficulties of working with such models, called models of switching mode of reproduction (SMR), is the difficulty of modeling competitive relationships between subsystems of different "ages". Therefore, until now, the interaction of a finite number of production subsystems has been considered in the SMR models, the models themselves were of a discrete-continuous nature, calculations were done exclusively on computers, and obtaining analytical dependencies was difficult. This paper shows that for the special case of balanced economic growth and a continuum of production subsystems, it is possible to obtain analytical expressions that allow a better understanding of the impact of monetary policy on economic dynamics. In addition to purely scientific interest, this is of great practical importance, since it allows us to assess the possible reaction of the real sector of the economy to changes in the monetary sphere without conducting complex simulation calculations.

Keywords: switching reproduction mode, mesoeconomic model, generations of fixed capital, monetary emission, economic growth

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 3, pp. 501–519 (Russian).

The work was carried out within the framework of the state assignment "Institutional foundations and reproductive factors of Russia's economic policy contributing to the transition to a development economy". The authors would like to thank Academician V.I. Mayevsky for his valuable comments and recommendations.

Введение

Проблема влияния денежно-кредитной политики на экономическую динамику в современной России является одной из самых острых тем экономических дискуссий. Одни настаивают, что для обеспечения экономического роста необходимо целенаправленное увеличение денежной массы (см., например, [Глазьев, 2018]), другие считают (см., например, [Кудрин и др., 2017]), что денежная эмиссия приведет лишь к росту инфляции и, соответственно, ухудшит условия для экономического роста. При этом ни та ни другая сторона, приводя различные аргументы и ссылаясь на примеры из экономической истории, не опирается на расчеты с использованием математических моделей (что было бы логично). Проблема заключается в том, что в экономической науке к настоящему времени, к сожалению, отсутствует апробированный математический инструментарий, позволяющий в условиях конкретных стран количественным образом оценивать долгосрочное влияние мер денежно-кредитной политики на экономический рост. Так, в широко используемых по всему миру¹ динамических стохастических моделях общего равновесия (DSGE) моделирование денежного обращения не проводится (см. обзор [Дементьев, 2015]). Более того, в экономическом мейнстриме на теоретическом уровне господствует представление о нейтральности денег в долгосрочном периоде [Mankiw, 2016]².

Чтобы восполнить этот пробел, коллективом Центра эволюционной экономики при Институте экономики РАН под руководством академика РАН В. И. Маевского на протяжении последних десяти лет разрабатываются новая теория воспроизводства и соответствующий математический аппарат³. Модели переключающегося режима воспроизводства (ПРВ) относятся к новому классу математических динамических моделей, описывающих на мезоуровне процессы производства и потребления на основе количественного анализа денежных кругооборотов без априорных постулатов о нейтральности денег в долгосрочном периоде. К настоящему времени предложено и исследовано несколько вариантов математических моделей ПРВ [Маевский, Малков, 2013; Маевский, Малков, 2014; Маевский и др., 2015; Маевский и др., 2016b; Маевский и др., 2016a; Маевский и др., 2018; Маевский и др., 2019; Маевский и др., 2020; Маевский и др., 2024]. Особенностью моделей является наличие N разновозрастных⁴ производственных подсистем (ПП), где $(N - 1)$ молодых и среднего возраста подсистем работает по программе В (выпуск продукции для рынка), а самая старая N -я подсистема работает по программе А (обновление основного капитала, то есть ремонт и замена оборудования, в общем случае сопровождающаяся внедрением инноваций). Подсистемы каждый год по очереди сменяют друг друга в выполнении этой программы. Каждой подсистеме соответствует свое домашнее хозяйство (ДХ), которое там работает, получает зарплату и тратит ее на произведенные подсистемами товары. Прибыль каждой из подсистем направляется ею на воспроизводство своего основного капитала (ОК). Базовая математическая модель ПРВ приведена в приложении А.

Таким образом, теория переключающегося режима воспроизводства имеет следующие принципиальные особенности:

- макроэкономическая система дезагрегирована по возрасту основного капитала ее подсистем и по его эффективности, которая может увеличиваться в процессе обновления;

¹ Включая Международный валютный фонд, Европейский центральный банк, Центральные банки США, Канады, Великобритании, Швеции, Швейцарии и других стран.

² При этом теоретические основания экономического мейнстрима все чаще подвергаются критике (см., например, [Stiglitz, 2017]).

³ В 2020 году коллективу ученых под руководством акад. В. И. Маевского за развитие данного научного направления была присуждена премия Президиума РАН имени Н. Д. Кондратьева.

⁴ С точки зрения возраста основного капитала.

- динамика переменных в моделях теории принципиально неравновесная, ее неравновесность обусловлена эндогенными факторами, связанными с конкуренцией разновозрастных производственных подсистем на рынке потребительских товаров¹;
- уравнения модели переключающегося режима воспроизводства явным образом описывают взаимодействие двух контуров денежного кругооборота: быстрого потребительского контура («зарплаты – покупки») и более медленного инвестиционного контура: накопление денежных средств (инвестиций) производственными системами в период работы по программе В с последующим их расходованием в период работы по программе А. Тем самым они позволяют в рамках одной модели описывать взаимодействие и взаимовлияние производственных и финансовых процессов;
- модели ПРВ носят непрерывно-дискретный характер, включают в себя достаточно большое количество параметров, для получения результатов требуется проведение численных экспериментов с использованием специализированной компьютерной программы.

В связи с актуальностью темы влияния денежно-кредитной политики (ДКП) на развитие российской экономики в условиях специальной военной операции (СВО) интерес к моделям такого типа заметно возрос. Стали появляться публикации, в которых для анализа денежной политики применяются модели, использующие переключение режимов работы производственных подсистем, и делаются попытки выйти на получение аналитических зависимостей без необходимости проведения имитационных компьютерных расчетов (см., например, работу [Горюнов, 2023]). Однако такие попытки с неизбежностью подразумевают введение в модель априорных допущений и упрощений, которые могут привести к некорректным результатам (см. [Маевский и др., 2024]).

Таким образом, возникает коллизия:

- с одной стороны, модели ПРВ, по существу являющиеся моделями пересекающихся поколений основного капитала, открывают новые возможности в моделировании воспроизводственных процессов с учетом кругооборотов денег в экономике, что позволяет моделировать влияние ДКП на экономическую динамику;
- с другой стороны, в силу математической сложности модели возникает стремление ввести упрощающие допущения, но при этом велик риск «выплеснуть ребенка вместе с водой» и получить неверные (или существенно искаженные) результаты.

В настоящей статье рассматривается случай, когда возможно введение упрощающих допущений без нарушения логики модели, что позволяет выйти на получение аналитических зависимостей, имеющих важное прикладное значение.

Модель переключающегося режима воспроизводства (ПРВ) с континуальным множеством производственных подсистем

1. Математическая сложность модели ПРВ обусловлена тем, что она имеет непрерывно-дискретный характер и описывает внутренне неустойчивые конкурентные взаимодействия производственных подсистем, нелинейным образом зависящие от параметров модели и начальных условий. Эта специфика делает невозможным аналитическое представление результатов моделирования в общем случае. Однако, как показали исследования, существует частный (но достаточно важный) случай, когда аналитическое представление результатов моделирования становится

¹ Более «молодые» подсистемы имеют преимущество в конкурентной борьбе с более «старыми». Это одна из причин, которая вынуждает подсистемы периодически обновлять свой основной капитал.

возможным. Речь идет о режиме скоординированного экспоненциального роста (СЭР). Этот случай реализуется, когда производственные подсистемы описываются одинаковым набором параметров (поэтому ни одна из них не имеет априорного преимущества перед другими), а денежная эмиссия, осуществляемая центральным банком (ЦБ) в единицу времени, пропорциональна имеющейся в экономической системе денежной массе и равномерно распределяется между экономическими акторами (ПП и/или ДХ). В этом случае, как показали исследования [Маевский, Малков, 2013; Маевский и др., 2016а; Кирилюк, 2016], наблюдается экспоненциальный рост денежной массы, реального ВВП (общего выпуска продукции всеми ПП), уровня потребительских цен и при этом выполняется соотношение

$$\mu = g + \pi, \quad (1)$$

где μ — темп денежной эмиссии, g — темп роста реального ВВП, π — инфляция (темп роста уровня цен)¹.

Важным является то, что в режиме СЭР кругообороты денег и конкурентные отношения производственных подсистем сбалансированы и их в явном виде *можно не моделировать*. Это позволяет в данном частном случае упростить модель и получить важные аналитические результаты, не нарушая основной логики взаимодействия производственных подсистем с разным возрастом основного капитала. Более того, сбалансированность конкурентных отношений в режиме СЭР позволяет вывести аналитические зависимости для континуального множества производственных подсистем.

2. Важность рассмотрения в рамках модели ПРВ континуального множества производственных подсистем обусловлена следующим.

В исходной модели переключающегося режима воспроизводства вводилось следующее допущение: считалось, что отношение периода времени между обновлениями ОК и длительностью обновления ОК неизменно и равно N , при этом все производственные единицы в экономике (производства, фирмы, цеха предприятий) делятся на N групп (производственных подсистем), каждая из которых по очереди обновляет ОК ровно один год (с 1 января по 31 декабря этого года), а остальные $(N - 1)$ лет производят потребительскую продукцию на рынок. Такое допущение, безусловно, достаточно большая условность, принятая для упрощения математического алгоритма вычислений, и априори не очень ясно, насколько данная условность сильно влияет на результаты расчетов по модели.

Более естественным является допущение, что производственные единицы (производства, фирмы, цеха предприятий, представляющие собой континуальное множество) достаточно равномерно в течение года друг за другом начинают (и заканчивают) процесс обновления ОК; при этом в каждый момент времени из всего континуума производственных единиц доля $\frac{1}{N}$ из них находится в процессе обновления основного капитала, а доля $\frac{N-1}{N}$ производит продукцию на рынок. На рис. 1 изображена схема, отражающая функционирование данной экономической системы во времени.

Период обновления основного капитала имеет длительность T_2 , полный цикл от обновления до обновления имеет длительность T_1 . Соответственно²,

$$\frac{T_1}{T_2} = N. \quad (2)$$

¹ Темп — это отношение прироста рассматриваемого показателя в единицу времени к абсолютному значению этого показателя. По существу, уравнение (1) есть не что иное, как запись на языке темпов уравнения Фишера $M \cdot V = Q \cdot P$, где M — денежная масса, V — скорость оборота денег, Q — реальный ВВП, P — уровень цен.

² В рамках излагаемой модели параметры T_1 , T_2 , N являются постоянными величинами и не зависят от темпов денежной эмиссии. Обоснование этому приведено в работах [Маевский, Малков, 2013; Маевский, Малков, 2014; Маевский и др., 2015; Маевский и др., 2016b; Маевский и др., 2016a; Маевский и др., 2018; Маевский и др., 2019; Маевский и др., 2020].

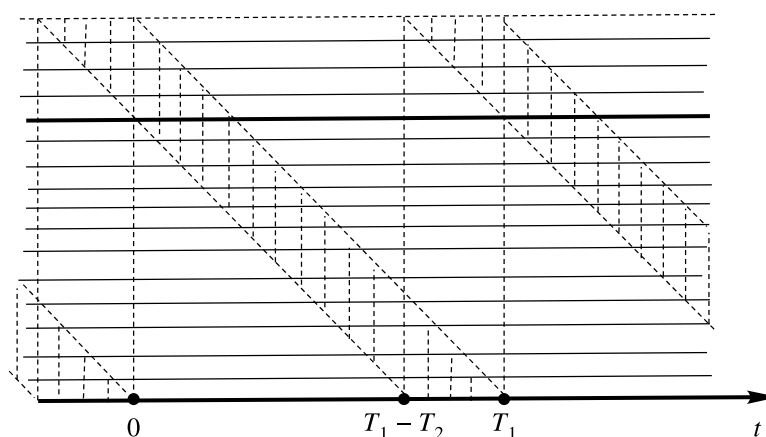


Рис. 1. Схема последовательного переключения режимов работы производственных единиц с выполнения программы А (обновление основного капитала) на выполнение программы В (работа на рынок) и обратно. На оси абсцисс отображается время (для определенности отсчет времени производится от точки $t = 0$). На оси ординат отображаются производственные единицы (ПЕ), входящие в рассматриваемую экономическую систему. ПЕ упорядочены по времени вступления в период обновления ОК и отображены горизонтальными линиями. Заштрихованные зоны на рисунке — это зоны, находясь в которых производственные единицы занимаются обновлением ОК, постепенно сменяя друг друга

В момент времени $t = 0$ самой молодой (с точки зрения возраста основного капитала) является производственная единица, линия которой располагается ниже всех на рисунке. Она к этому моменту времени обновила свой ОК и начала выпускать потребительскую продукцию на рынок. Новое обновление ОК у нее начнется в момент времени $t = T_1 - T_2$ и закончится в момент времени $t = T_1$.

Из всех производственных единиц, выпускающих потребительскую продукцию на рынок, самой старой (с точки зрения возраста ОК) в момент времени $t = 0$ является производственная единица, обозначенная на рисунке жирной линией. Она к этому моменту закончила производить потребительские товары и начала обновлять свой ОК. Производственные единицы, линии которых находятся выше жирной линии, обновляют свой ОК. Производственные единицы, линии которых находятся ниже жирной линии, производят потребительскую продукцию на рынок.

Таким образом, совокупность производственных единиц, входящих в экономическую систему, в каждый момент времени t может быть разделена на возрастные группы, возраст которых определяется в соответствии с тем, сколько времени тому назад (по отношению к моменту t) ею был обновлен ОК. Соответственно, характеристики этих групп являются функциями двух переменных: текущего времени t и возраста τ группы¹ (например, $W(t, \tau)$ — денежные накопления в группе возраста τ на момент времени t). Величина τ может принимать значения от 0 (для группы производственных единиц, только что обновивших свой ОК и приступивших к производству потребительской продукции) до T_1 (для группы ПЕ, заканчивающих обновление ОК и тем самым завершающих свой жизненный цикл). Соответственно, производственными подсистемами (ПП) в данной версии модели ПРВ выступают возрастные группы производственных единиц, представляющие собой поколение возраста τ (то есть включающие в себя все производственные единицы, имеющие в момент времени t возраст от τ до $\tau + d\tau$, где $d\tau$ — задаваемый в модели временной интервал).

Цель анализа модели ПРВ в режиме СЭР при континуальном множестве производственных подсистем (когда $d\tau$ в предельном случае стремится к нулю) заключается в следующем:

¹ Такой подход используется в демографических моделях (начиная с классической работы [McKendrick, 1926]), в которых население делится на возрастные группы и рассматривается динамика численности этих возрастных групп в различные моменты времени.

- 1) выяснить, насколько сильно отличаются расчеты по исходной модели ПРВ с N подсистемами, последовательно обновляющими свой ОК, от модели с континуальным множеством производственных подсистем (это нужно для понимания того, является ли модель ПРВ устойчивой по отношению к способу разбиения производственных единиц на возрастные группы);
- 2) выявить аналитические закономерности (что крайне затруднено в случае исходной непрерывно-дискретной модели ПРВ), которые можно было бы использовать в практических приложениях экономического анализа.

Рассмотрение модели ПРВ в режиме СЭР в случае континуального множества производственных подсистем будет проводится в несколько этапов:

- сначала будет рассмотрено функционирование экономической системы в режиме простого воспроизводства (денежная эмиссия отсутствует);
- затем будет рассмотрено функционирование экономической системы в режиме СЭР при наличии денежной эмиссии, которая направляется исключительно в домашние хозяйства;
- затем будет рассмотрено функционирование экономической системы в режиме СЭР при наличии денежной эмиссии, которая направляется исключительно в производственные подсистемы;
- наконец будет рассмотрено функционирование экономической системы в режиме СЭР при наличии денежной эмиссии, которая направляется частично в домашние хозяйства и частично — в производственные подсистемы.

3. Начнем с **режима простого воспроизводства** (РПВ) и рассмотрим динамику ОК у самой молодой в момент времени t возрастной группы производственных единиц ($\tau = 0$ при $t = 0$). В соответствии с моделью ПРВ в период времени $[0; T_1 - T_2]$ основной капитал у этой возрастной группы производственных единиц постепенно будет устаревать, но по абсолютной величине будет оставаться неизменным и характеризоваться значением y^* . При этом в этот период данная группа работает на рынок и откладывает часть выручки на обновление основного капитала. К моменту $t = T_1 - T_2$ накопленные средства в соответствии с моделью ПРВ (см. [Маевский и др., 2020]) при $q = 1$ составляют величину¹

$$W = \int_0^{T_1-T_2} y^* A \left(P(t) - P(t - T_2) \frac{N-1}{N} \right) dt, \quad (3)$$

где $y^* \cdot A$ — количество продукции (измеряемое в натуральных единицах), производимой данным поколением производственных единиц в единицу времени на рынок при наличии у нее основного капитала в размере y^* (в модели считается, что A — постоянный коэффициент²); $P(t)$ — уровень цен в момент времени t .

Поскольку в режиме простого воспроизводства уровень цен не меняется, то уравнение (3) упрощается и преобразуется в

$$W = \int_0^{T_1-T_2} y^* A P_0 \left(1 - \frac{N-1}{N} \right) dt = \int_0^{T_1-T_2} y^* A P_0 \frac{1}{N} dt = y^* A P_0 \frac{1}{N} (T_1 - T_2), \quad (4)$$

¹ Параметр q в исходной модели ПРВ отражает институциональные особенности рассматриваемой экономической системы (см. [Маевский и др., 2020]). Далее в этой статье для упрощения расчетов будет принято, что $q = 1$.

² То, что A — постоянный коэффициент, отражает условие постоянной отдачи от масштабов производства, принятое в излагаемой модели.

где P_0 — уровень цен при $t = 0$, который в режиме простого воспроизводства остается неизменным.

Эти накопленные денежные средства в период времени $[T_1 - T_2; T_1]$ равномерно расходуются этой поколенческой группой на обновление своего основного капитала. В результате в соответствии с моделью ПРВ (см. [Маевский и др., 2020]) эта поколенческая группа создаст новый основной капитал y^{**} , который будет составлять величину

$$y^{**} = \int_{T_1 - T_2}^{T_1} \frac{N}{N - 1} \cdot \frac{W}{P(t) \cdot T_2} dt. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (5), при условии неизменности цен получаем

$$y^{**} = \int_{T_1 - T_2}^{T_1} \frac{N}{N - 1} \cdot y^* A \frac{T_1 - T_2}{N \cdot T_2} dt = y^* \cdot A \cdot T_2. \quad (6)$$

Так как в условиях режима простого воспроизводства имеет место соотношение $y^* = y^{**}$ (поскольку основной капитал каждый раз воспроизводится в прежнем объеме), то из (6) следует

$$A \cdot T_2 = 1. \quad (7)$$

4. Рассмотрим теперь динамику основного капитала у самой молодой (в момент времени $t = 0$) поколенческой группой производственных единиц в условиях **режима сбалансированного экспоненциального роста** (СЭР), для которого справедливо соотношение (1). Начнем со случая, когда **вся эмиссия направляется в домашние хозяйства** (ДХ). В этом случае для накапливаемых средств справедлива формула (3), где уровень цен уже не постоянен, а экспоненциально растет с темпом π , то есть

$$P(t) = P_0 \cdot e^{\pi t}, \quad (8)$$

где отсчет времени для упрощения идет от момента $t = 0$. В этом случае вычисление интеграла по формуле (3) дает следующий результат:

$$W = y^* A P_0 \frac{1}{\pi} \left(e^{\pi(T_1 - T_2)} - 1 \right) \left(1 - \frac{N - 1}{N} e^{-\pi T_2} \right). \quad (9)$$

Соответственно, вычисление интеграла по формуле (5) дает следующий результат:

$$y^{**} = y^* \frac{N}{N - 1} A \frac{1}{T_2 \cdot \pi^2} \left(e^{\pi(T_1 - T_2)} - 1 \right) \left(1 - \frac{N - 1}{N} e^{-\pi T_2} \right) \left(e^{\pi T_2} - 1 \right) e^{-\pi T_1}. \quad (10)$$

Поскольку в режиме СЭР все величины растут экспоненциально, то

$$\frac{y^{**}}{y^*} = e^{g \cdot T_1}. \quad (11)$$

Из (10) с учетом (11)

$$\frac{N}{N - 1} A \frac{1}{T_2 \cdot \pi^2} \left(e^{\pi(T_1 - T_2)} - 1 \right) \left(1 - \frac{N - 1}{N} e^{-\pi T_2} \right) \left(e^{\pi T_2} - 1 \right) e^{-\pi T_1} = e^{g \cdot T_1}, \quad (12)$$

или с учетом (1)

$$\frac{N}{N-1} A \frac{1}{T_2 \cdot \pi^2} (e^{\pi \cdot (T_1 - T_2)} - 1) \left(1 - \frac{N-1}{N} e^{-\pi \cdot T_2} \right) (e^{\pi \cdot T_2} - 1) = e^{\mu \cdot T_1}. \quad (13)$$

В выражении (12) левая часть зависит только от π , а правая часть зависит только от g . Соответственно, в выражении (13) левая часть зависит только от π , а правая часть зависит только от μ . Тем самым эти выражения отражают аналитическую связь между g и π , а также между μ и π . Эта связь имеет нелинейный характер, но при умеренных значениях эмиссии¹ (когда еще не проявляются эффекты убывающей отдачи) она становится практически линейной.

Если экспоненты в выражении (12) разложить в ряд Тейлора² (при условии, что величины μ , g и π малы, а именно: значения $\mu \cdot T_1$, $g \cdot T_1$ и $\pi \cdot T_1$ заметно меньше единицы), то выражение (12) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{y^{**}}{y^*} &= e^{g \cdot T_1} \approx 1 + g \cdot T_1 + \frac{(g \cdot T_1)^2}{2} \approx \frac{A}{N-1} \frac{1}{T_2 \cdot \pi^2} \left(\pi \cdot (T_1 - T_2) + \frac{(\pi \cdot (T_1 - T_2))^2}{2} \right) \times \\ &\times \left(N - (N-1) \left(1 - \pi \cdot T_2 + \frac{(\pi \cdot T_2)^2}{2} \right) \right) \left(\pi \cdot T_2 + \frac{(\pi \cdot T_2)^2}{2} \right) \left(1 - \pi \cdot T_1 + \frac{(\pi \cdot T_1)^2}{2} \right) \approx \\ &\approx A \cdot T_2 \cdot \left(1 + \frac{\pi \cdot (T_1 - T_2)}{2} \right) \left(1 + (N-1) \left(\pi \cdot T_2 - \frac{(\pi \cdot T_2)^2}{2} \right) \right) \left(1 + \frac{\pi \cdot T_2}{2} \right) \left(1 - \pi \cdot T_1 + \frac{(\pi \cdot T_1)^2}{2} \right) \approx \\ &\approx A \cdot T_2 \cdot \left(1 + (N-1) \cdot \pi \cdot T_2 + \frac{\pi \cdot T_2}{2} - \pi \cdot T_1 + \frac{\pi \cdot (T_1 - T_2)}{2} - (N-1) \cdot \frac{(\pi \cdot T_2)^2}{2} + \frac{(\pi \cdot T_1)^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + N \cdot \frac{(\pi \cdot T_2)^2}{2} - N \cdot \pi^2 \cdot T_1 \cdot T_2 - \frac{(\pi \cdot T_2)^2}{2} + \pi^2 \cdot T_1 \cdot T_2 + (N-1) \cdot \frac{\pi^2 \cdot (T_1 - T_2) \cdot T_2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2 \cdot (T_1 - T_2) \cdot T_2}{4} - \frac{\pi^2 \cdot (T_1 - T_2) \cdot T_1}{2} + O(\pi^3) \right). \end{aligned}$$

Здесь $O(\pi^3)$ — члены третьей степени по π и выше.

Если сохранить только линейные члены разложения, то из данного выражения следует

$$\frac{y^{**}}{y^*} \approx 1 + g \cdot T_1 \approx A \cdot T_2 \cdot \left(1 + \pi \cdot \left(\frac{T_1}{2} - T_2 \right) \right). \quad (14)$$

Выше было сказано, что в рамках модели величины A и T_2 — постоянные коэффициенты, значения которых не зависят от темпа денежной эмиссии. Значение их произведения определяется при рассмотрении режима простого воспроизводства (см. уравнения (6) и (7)), который является частным случаем режима сбалансированного экспоненциального роста при нулевом темпе денежной эмиссии ($\mu = 0$, см. уравнение (1)). Поскольку при $\mu > 0$ величины A и T_2 не изменяются, то в соответствии с (7) имеет место $A \cdot T_2 = 1$.

С учетом этого, используя соотношение (2), получаем

$$g \approx \pi \cdot \frac{N-2}{2N}, \quad (15)$$

¹ В реальных ситуациях это условие, как показывает международная статистика, выполняется, поскольку в большинстве стран мира величины μ , g и π редко превышают 10 % в год.

² $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ при $x \ll 1$.

а с учетом (1) получаем

$$g \approx \mu \cdot \frac{N-2}{3N-2}, \quad (16)$$

$$\pi \approx \mu \cdot \frac{2N}{3N-2}. \quad (17)$$

Важно отметить, что в рассматриваемом случае рост накоплений производственных подсистем от цикла к циклу происходит вследствие увеличения потребительского спроса, который в свою очередь растет вследствие денежной эмиссии в домашние хозяйства. Особенность ситуации заключается в том, что дополнительные эмиссионные деньги сначала расходуются домашними хозяйствами на покупки (порождая инфляцию) и лишь затем поступают в производственные подсистемы, способствуя увеличению инвестиций в расширенное воспроизводство ОК. Поэтому рост инфляции опережает рост реального продукта.

Если же эмиссия направляется непосредственно в производственные подсистемы, то это убыстряет производство новой продукции и уменьшает рост инфляции. Данные эффекты рассмотрены ниже.

5. Рассмотрим случай, когда в условиях СЭР **вся эмиссия направляется в производственные подсистемы**. В этом случае накопление средств производственными единицами на обновление своего основного капитала идет более интенсивно и выражение (3) для накапливаемых средств W должно быть заменено на выражение

$$\underline{W} = W + \Delta W, \quad (18)$$

где величина W определяется по формуле (3) и связана с выручкой от продажи производственными единицами (ПЕ) произведенной ими потребительской продукции, а ΔW — это то, что поступает в ПЕ в результате целевой эмиссии.

Можно показать (подробные выкладки приведены в приложении В), что

$$\Delta W \approx \mu \frac{P_0}{2} y^* A \frac{T_2(T_1 - T_2)}{T_1} \int_{-T_2}^{T_1 - T_2} e^{\mu t} dt = \frac{P_0}{2} y^* A \cdot \frac{T_2(T_1 - T_2)}{T_1} \cdot e^{-\mu T_2} \cdot (e^{\mu T_1} - 1). \quad (19)$$

При малых значениях $\mu \cdot T_1$ выражение (19) в линейном приближении записывается следующим образом:

$$\Delta W \approx \mu \frac{P_0}{2} y^* A \cdot T_2(T_1 - T_2). \quad (20)$$

Учет этой добавки к накоплениям производственных единиц дает дополнительный прирост основного капитала в процессе обновления, равный

$$\Delta y^{**} \approx \mu \frac{T_1}{2} y^* A \cdot T_2. \quad (21)$$

Соответственно, выражение (14) преобразуется в

$$\frac{y^{**}}{y^*} = e^{g \cdot T_1} \approx 1 + g \cdot T_1 \approx A \cdot T_2 \cdot \left(1 + \pi \cdot \left(\frac{T_1}{2} - T_2 \right) \right) + \mu \frac{T_1}{2} A \cdot T_2, \quad (22)$$

откуда следует

$$g \approx \mu \cdot \frac{2(N-1)}{3N-2}, \quad (23)$$

$$\pi \approx \mu \cdot \frac{N}{3N-2}. \quad (24)$$

6. Из предыдущих выкладок следует, что если в условиях СЭР в производственные подсистемы направляется не вся эмиссия, а только ее доля ε , то темп роста производства g устанавливается на уровне

$$g \approx \mu \cdot \frac{N - 2 + \varepsilon N}{3N - 2}, \quad (25)$$

а величина инфляции π устанавливается на уровне

$$\pi \approx \mu \cdot \frac{2N - \varepsilon N}{3N - 2}, \quad (26)$$

где ε — доля эмиссии μ , направляемая целевым образом в производственные подсистемы (субсидии, госпрограммы и т. п.). Соответственно, оставшаяся часть эмиссии $\mu \cdot (1 - \varepsilon)$ целевым образом направляется в домашние хозяйства (индексация пенсий, стипендий, зарплат бюджетников и т. п.).

Анализ результатов моделирования

Выше в качестве одной из целей исследования было обозначено выяснение того, насколько сильно отличаются расчеты по исходной модели ПРВ с N подсистемами, последовательно обновляющими свой основной капитал (см. [Маевский и др., 2020] и приложение А), от модели с континуальным множеством производственных подсистем. На рис. 2–4 представлены результаты расчетов по исходной модели для нескольких случаев. (Пояснение к рисункам: во всех расчетных случаях вначале имеет место режим простого воспроизводства со значениями параметров $k_{Hi} = 1$, $q = 1$, $k_{sY} = k_{sH} = 0$, $h = \frac{N-1}{N}$. В момент времени $t = 10$ начинается денежная эмиссия с темпом 6% в год, параметры модели при этом не изменяются.)

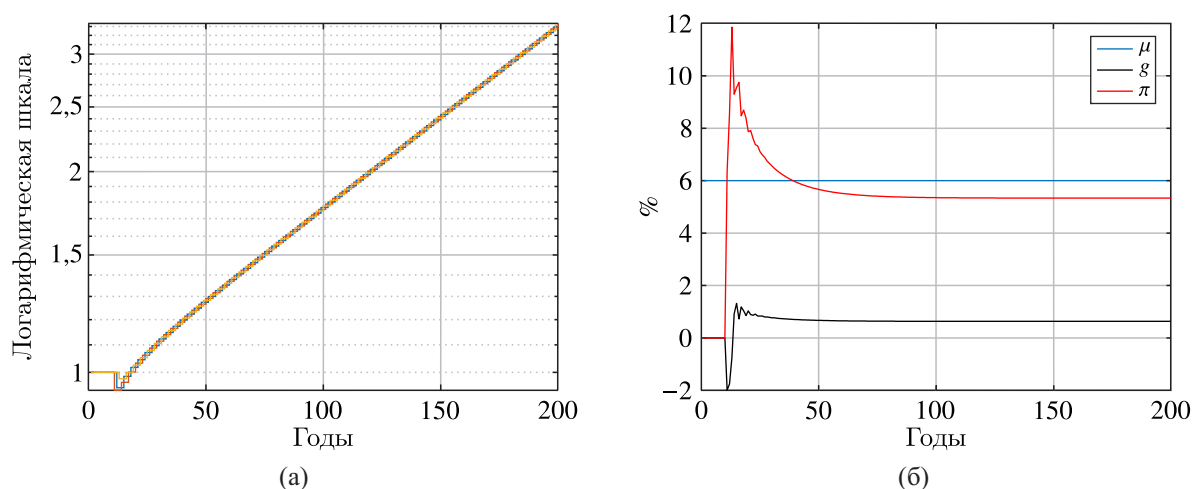


Рис. 2. Расчеты динамики показателей экономической системы, состоящей из трех производственных подсистем, в случае когда денежная эмиссия направляется исключительно в домашние хозяйства: а) динамика выпуска продукции каждой из подсистем, в относительных единицах; б) динамика темпов эмиссии μ , темпов реального ВВП g и инфляции π , в процентах; ось абсцисс — годы

Из графиков видно, что в режиме простого воспроизводства (при $t < 10$) выпуск продукции не изменяется с течением времени, а инфляция равна нулю. После начала денежной эмиссии сначала идет переходный процесс¹, а затем устанавливается режим СЭР, сопровожда-

¹ Видно, что в начале переходного процесса после начала эмиссии всегда происходит всплеск инфляции (причем если эмиссия направляется преимущественно в домашние хозяйства, то возможен и кратковременный спад производства вследствие этого всплеска, см. рис. 2), однако затем ситуация стабилизируется и устанавливается режим СЭР с постоянным соотношением $\frac{g}{\pi}$.

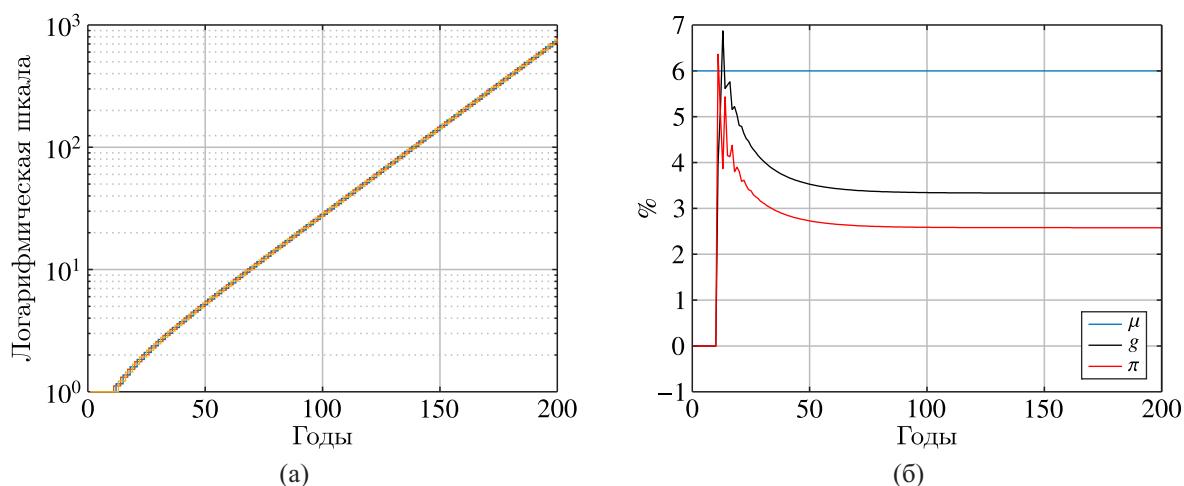


Рис. 3. Расчеты динамики показателей экономической системы, состоящей из трех производственных подсистем, в случае когда денежная эмиссия направляется исключительно в подсистемы: а) динамика выпуска продукции каждой из подсистем, в относительных единицах; б) динамика темпов эмиссии μ , темпов реального ВВП g и инфляции π , в процентах; ось абсцисс — годы

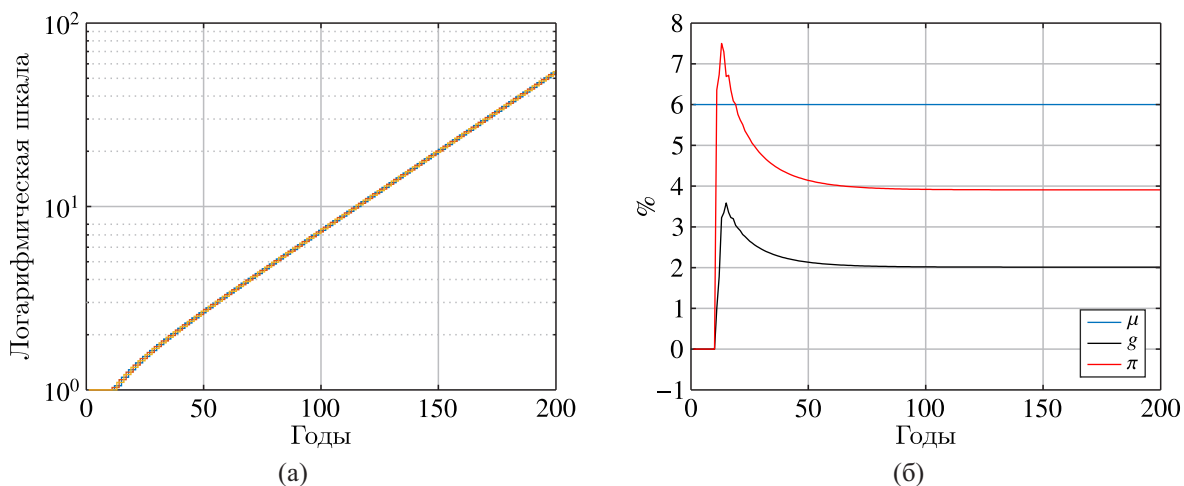


Рис. 4. Расчеты динамики показателей экономической системы, состоящей из трех производственных подсистем, в случае когда 50 % денежной эмиссии направляется в ДХ и 50 % — в подсистемы: а) динамика выпуска продукции каждой из подсистем, в относительных единицах; б) динамика темпов эмиссии μ , темпов реального ВВП g и инфляции π , в процентах; ось абсцисс — годы

ющийся экспоненциальным ростом объема выпуска продукции и значения дефлятора. Соответственно, величины g (темп роста ВВП) и π (инфляция) стабилизируются. При этом с хорошей точностью выполняется соотношение (1) (имеющаяся неточность обусловлена накоплением расчетных ошибок из-за конечного шага вычислений).

В таблице 1 приводится сравнение результатов вычислений по исходной модели ПРВ (некоторые из которых представлены на рис. 2–4) и расчетов по аналитическим формулам (25) и (26) для модели ПРВ с континуальным множеством производственных подсистем.

Результаты расчетов показали важную вещь: аналитические формулы (25) и (26) для континуальной модели и результаты расчетов по исходной дискретной модели с количеством подсистем N практически совпадают. Это указывает на то, что, несмотря на формальное отличие этих вариантов моделей ПРВ (в первом из них количество производственных подсистем бесконечно,

Таблица 1. Сравнение значений g и π , полученных в результате расчетов по исходной модели ПРВ и по формулам (25) и (26)

Расчетный случай	$N = 3$; ДХ		$N = 10$; ДХ		$N = 3$; ПП		$N = 10$; ПП		$N = 3$; ДХ, ПП	
	1		2		3		4		5	
Показатели	g	π	g	π	g	π	g	π	g	π
Вычисления по исходной модели, %	0,6	5,3	1,2	4,8	3,3	2,6	3,7	2,2	2,0	3,9
Расчеты по формулам (25) и (26), %	0,8	5,2	1,7	4,3	3,4	2,6	3,8	2,2	2,1	3,9

Примечание к таблице:

- для всех расчетных случаев денежная эмиссия составляет 6 % в год;
- расчетные случаи 1 и 2: денежная эмиссия направляется в домашние хозяйства (ДХ); расчетные случаи 3 и 4: денежная эмиссия направляется в производственные подсистемы (ПП); расчетный случай 5: 50 % денежной эмиссии направляется в ДХ, другие 50 % — в ПП.

а во втором из них — равно N), они дают качественно (и количественно) близкие результаты. Соответственно, можно сделать вывод, что модель ПРВ устойчива по отношению к способу разбиения производственных единиц на возрастные группы. Также это указывает на то, что в случае отклонения от режима СЭР результаты расчетов по дискретной модели ПРВ будут не слишком отличаться от континуального ее варианта как в качественном, так и в количественном отношениях.

В содержательном плане формулы (25) и (26) свидетельствуют о следующем. Если мы хотим добиться экономического роста ($g > 0$), то необходимо увеличивать денежную массу — «кровь экономики» ($\mu > 0$) — и осуществлять денежную эмиссию. Однако это, в соответствии с формулой (26), неизбежно вызывает инфляцию ($\pi > 0$). При этом если эмиссия направляется исключительно в домашние хозяйства (ДХ), то $\pi > g$ и при низких значениях N возможна ситуация, когда $g = 0$, то есть реализуется нейтральность денег в долгосрочном периоде (что принимается за аксиому в мейнстриме). Если же эмиссия целевым образом направляется в производственные подсистемы (например, в виде субсидий, целевых инвестиций), то $g > \pi$ и темпы роста реального продукта обгоняют рост инфляции (такая ситуация имеет место в Китайской Народной Республике).

В реальных ситуациях эмиссия направляется как в производственные подсистемы (субсидии, госпрограммы и т. п.), так и в домашние хозяйства (индексация пенсий, стипендий, зарплат госслужащих и т. п.), поэтому в результате может быть как $g > \pi$, так и $\pi > g$. Государственная политика и политика Центрального банка РФ должны быть направлены на то, чтобы максимизировать отношение $\frac{g}{\pi}$.

Приложение А

Базовая модель ПРВ¹

Модель ПРВ, с одной стороны, имитирует динамику и обращение денежных средств как домашних хозяйств $\{H_1, H_2, \dots, H_N\}$, так и макроэкономических подсистем $\{G_1, G_2, \dots, G_N\}$. Это делается с помощью выражений для скоростей их изменения (приращений количеств денежных средств за единицу времени) с использованием дифференциальных уравнений. За единицу

¹ Описание базовой модели ПРВ приводится в соответствии со следующей работой: Маевский В. И., Малков С. Ю., Рубинштейн А. А., Красильникова Е. В. Об одном направлении развития мезоэкономической теории // Journal of Institutional Studies. — 2019. — № 11 (3). — С. 21–38.

времени τ в модели принят один месяц, поэтому экономические параметры в уравнениях модели имеют месячное измерение (зарплата за месяц, производство продукции за месяц и т. д.).

Переменные модели:

Y_i — месячный выпуск продукции подсистемы G_i в ценах базового года;

M_{Y_i} — накопления денежных средств подсистемы G_i ;

ΔM_{Y_i} — эмиссия в подсистемы G_i ;

M_{H_i} — текущие денежные средства домашних хозяйств ($\widehat{M}_{H_j}$ — те же средства в начале месяца);

ΔM_{H_i} — эмиссия в домашние хозяйства.

Коэффициенты модели:

k_i — доля денежных средств, расходуемых в месяц на покупки потребительских благ;

h_i — коэффициент, отражающий соотношение доходов i -го домашнего хозяйства и стоимости произведенного продукта Y_i в условиях простого воспроизводства;

w — коэффициент индексации доходов домашних хозяйств;

q — коэффициент распределения денежных потоков;

k_{sY} — коэффициент налогообложения подсистем G_i ;

k_{sH} — коэффициент налогообложения домашних хозяйств;

$\delta(t - k \cdot \tau)$ — дельта-функция; выражение $M \cdot \delta(t - k \cdot \tau)$ означает импульсное увеличение количества денег на сумму M в моменты времени $k \cdot \tau$.

Уравнения базовой модели с учетом инфляционных процессов

А. Уравнения динамики денежных средств первых i подсистем (i принимает значения от 1 до $(N - 1)$), выпускающих в течение года (t_0, t_1) потребительские товары (программа В), имеют следующий вид.

1. Динамика накоплений денежных средств подсистемы G_i внутри периода (t_0, t_1) :

$$\frac{dM_{Y_i}}{dt} = \sum_{j=1}^N k_{H_j} \frac{\widehat{M}_{H_j}}{\tau} \left[\frac{Y_i}{\sum_{j=1}^{N-1} Y_j} \right] (1 - k_{sY}) - wh_i Y_i \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) + \Delta M_{Y_i} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau), \quad (\text{A.1})$$

где первый член в правой части уравнения — денежные доходы подсистемы G_i в результате продажи на рынке произведенной ею продукции; второй член — денежные средства, поступающие из подсистемы G_i в i -ю группу домашних хозяйств; третий член — денежная эмиссия (принято, что эмиссия происходит в начале каждого месяца).

Коэффициент индексации доходов домашних хозяйств w зависит от инфляционных процессов и вычисляется по отношению к базисному году. В рамках модели принято следующее выражение для w :

$$w = qP_{t-1},$$

где P_{t-1} — уровень цен (дефлятор) предыдущего года, q — коэффициент распределения денежных потоков.

2. Динамика денежных средств домашних хозяйств M_{Hi} в группе i :

$$\frac{dM_{Hi}}{dt} = wh_i Y_i (1 - k_{sH}) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) - \frac{k_{Hi} \widehat{M}_{Hi}}{\tau} + \Delta M_{Hi} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau), \quad (\text{A.2})$$

где первый и третий члены в правой части уравнения — доходы i -й группы домашних хозяйств с учетом субсидий и налогов (считается, что денежные доходы поступают в домашние хозяйства в начале каждого месяца); второй член — текущие расходы на покупки потребительских товаров.

3. Динамика уровня цен на потребительскую продукцию в год t :

$$P_t = \frac{\sum_{j=1}^N k_{Hj} \frac{\widehat{M}_{Hj}}{\tau}}{\sum_{j=1}^{N-1} Y_j}. \quad (\text{A.3})$$

При определении динамики уровня цен в базовой модели считается, что домашние хозяйства покупают все произведенные товары.

Б. Уравнения для подсистемы G_N , обновляющей в период (t_0, t_1) основной капитал (программа А), имеют следующий вид.

4. Динамика расходования M_{Y_N} — средств G_N -й подсистемы:

$$\frac{dM_{Y_N}}{dt} = -\frac{\widehat{M}_{Y_N}}{12} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) + \Delta M_{Y_N} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau), \quad (\text{A.4})$$

где первый член в правой части уравнения — денежные средства, поступающие из подсистемы G_N в N -ю группу домашних хозяйств (считается, что эти выплаты производятся в начале очередного месяца). Принято, что подсистема G_N в течение годового периода (t_0, t_1) расходует накопленные в предыдущие $(N - 1)$ лет средства на обновление основного капитала (эти средства идут на выплату зарплат работникам, участвующим в обновлении основного капитала). Величина обновленного подсистемой G_N основного капитала в постоянных ценах базового года определяется в рамках модели по формуле

$$Y_N = \frac{W_N}{h_N P_t} = \frac{\widehat{M}_{Y_N}}{h_N P_t}, \quad (\text{A.5})$$

где W_N — годовой фонд номинальной зарплаты (при этом считается, что все накопленные средства подсистема G_N тратит на обновление основного капитала, то есть на зарплату)¹. В следующие несколько лет (до следующего обновления основного капитала) величина Y_N будет соответствовать объему продукции (в постоянных ценах базового года), производимой данной подсистемой на потребительский рынок.

¹ Формула (А.5) справедлива при условии пропорциональной отдачи, то есть когда производимый основной капитал Y_N пропорционален выплачиваемой зарплате W_N . Выражение для Y_N в случае убывающей отдачи, связанной с наличием различных ресурсных и технологических проблем при расширении объемов производства, приведено в работе [Маевский и др., 2019, с. 65].

5. Динамика денежных средств домашних хозяйств M_{H_N} в группе N :

$$\frac{dM_{H_N}}{dt} = \frac{\widehat{M}_{Y_N}}{12}(1 - k_{sH}) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) - \frac{k_{H_N} \widehat{M}_{H_N}}{\tau} + \Delta M_{H_N} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau), \quad (\text{A.6})$$

где первый и третий члены в правой части уравнения — доходы N -й группы домашних хозяйств с учетом субсидий и налогов (считается, что денежные доходы поступают в домашние хозяйства в начале каждого месяца); второй член — текущие расходы на покупки потребительских товаров.

Уравнения (A.1)–(A.6) описывают динамику экономической системы в течение годового периода (t_0, t_1) , когда подсистема G_N обновляет свой основной капитал. После этого в следующий годовой период (t_1, t_2) подсистема G_N начинает выпускать потребительские товары, а подсистема G_{N-1} начинает обновлять свои изношенные основные фонды. Таким образом, подсистема G_N в период (t_1, t_2) занимает место подсистемы G_1 , подсистема G_1 занимает место подсистемы G_2 , подсистема G_2 занимает место G_3 , ..., подсистема G_{N-1} занимает место подсистемы G_N , и расчеты проводятся снова для следующего временного периода (t_1, t_2) . И так далее для периодов (t_2, t_3) , (t_3, t_4) , ..., (t_n, t_{n+1}) , ...

Приложение В

Вывод формулы (19)

В режиме СЭР денежная масса M растет по экспоненциальному закону:

$$M(t) = M(0) \cdot e^{\mu \cdot t}. \quad (\text{B.1})$$

Увеличение денежной массы равно

$$\frac{dM(t)}{dt} = \mu \cdot M(t). \quad (\text{B.2})$$

Это увеличение происходит за счет эмиссии, которая направляется в рассматриваемом случае в производственные подсистемы и распределяется между ними равномерным образом. Если обозначить через $m(t, \tau)$ эмиссию, направляемую в производственную подсистему с возрастом τ , то при равномерном распределении имеем

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_0^{T_1} m(t, \tau) d\tau = \mu \cdot M(t), \quad \text{откуда} \quad m(t, \tau) = \mu \cdot \frac{M(t)}{T_1}. \quad (\text{B.3})$$

Соответственно, выражение для ΔW — величины денежных средств, поступающих в самую молодую (в момент времени $t = 0$) поколенческую группу ПЕ в результате целевой эмиссии за период между обновлениями ОК, — имеет вид

$$\Delta W = \int_{-T_2}^{T_1 - T_2} \mu \cdot \frac{M(0)}{T_1} \cdot e^{\mu \cdot t} dt. \quad (\text{B.4})$$

Для определения ΔW по формуле (B.4) необходимо знать выражение для денежной массы M в момент времени $t = 0$.

В модели ПРВ (см. [Маевский и др., 2020]) в простейшем случае считается, что домашние хозяйства не делают накоплений и, получив от ПЕ заработную плату, расходуют ее целиком

на приобретение потребительских товаров. Тем самым деньги снова возвращаются в производственный сектор, но при этом могут переместиться в другую возрастную группу ПЕ. С другой стороны, производственные подсистемы в процессе своего функционирования накапливают денежные средства, чтобы иметь возможность обновить свой ОК, когда для этого настанет срок. Таким образом, можно считать, что денежная масса M в момент времени $t = 0$ — это сумма денежных накоплений всех возрастных групп ПЕ в этот момент времени:

$$M(0) = \int_0^{T_1} W(0, \tau) d\tau. \quad (\text{B.5})$$

Как уже говорилось выше, производственные группы с возрастом τ от 0 до $(T_1 - T_2)$ работают на рынок и накапливают денежные средства на предстоящее обновление. Накопленные к моменту времени $t = 0$ в этих возрастных группах денежные средства равны (см. выражение (B.3))

$$W(0, \tau) = \int_{-\tau}^0 y^*(0, \tau) \cdot A \cdot \left(P(t) - P(t - T_2) \frac{N-1}{N} \right) dt. \quad (\text{B.6})$$

В условиях простого воспроизводства основной капитал у всех возрастных групп от $\tau = 0$ до $\tau = T_1 - T_2$ одинаков и равен y^* . В режиме СЭР производственные подсистемы, обновившиеся в более поздний период времени, имеют больший ОК:

$$y^*(0, \tau) = y^*(0, 0) \cdot e^{g \cdot \tau}. \quad (\text{B.7})$$

Вычисляя (B.6) с учетом (B.7), получаем

$$W(0, \tau) = y^*(0, 0) \cdot A \cdot P_0 \cdot \left(1 - \frac{N-1}{N} e^{-\pi \cdot T_2} \right) \frac{1}{\pi} (1 - e^{-\pi \cdot \tau}) e^{-g \cdot \tau}, \quad (\text{B.8})$$

где P_0 — уровень цен при $t = 0$.

Если экспоненты в выражении (B.8) разложить в ряд Тейлора (при условии, что величины g и π малы) и оставить только линейные члены разложения, то получаем

$$W(0, \tau) \approx y^*(0, 0) \cdot A \cdot P_0 \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \tau. \quad (\text{B.9})$$

Суммарные накопления производственных групп, работающих на рынок, равны

$$\begin{aligned} M_1(0) &= \int_0^{T_1-T_2} W(0, \tau) d\tau = \\ &= y^*(0, 0) \cdot A \cdot P_0 \cdot \left(1 - \frac{N-1}{N} e^{-\pi \cdot T_2} \right) \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - e^{-g \cdot (T_1-T_2)}}{g} - \frac{1 - e^{-(\pi+g) \cdot (T_1-T_2)}}{\pi+g} \right) \approx \\ &\approx y^*(0, 0) \cdot A \cdot P_0 \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{(T_1 - T_2)^2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Производственные группы с возрастом τ от $(T_1 - T_2)$ до T_1 обновляют свой ОК и постепенно расходуют накопленные средства. К моменту $t = 0$ в группе возраста τ остаются средства:

$$W(0, \tau) = W_{\max}(\tau) \frac{T_1 - \tau}{T_2}, \quad (\text{B.11})$$

где $W_{\max}(\tau)$ — накопленные денежные средства в группе возраста τ к началу обновления ею своего ОК.

Суммарные денежные средства производственных групп, обновляющих ОК, равны

$$M_2(0) = \int_{T_1-T_2}^{T_1} W(0, \tau) d\tau \approx y^*(0, 0) \cdot A \cdot P_0 \cdot (T_1 - T_2) \cdot \frac{T_2^2}{2 \cdot T_1}. \quad (\text{B.12})$$

Таким образом, денежная масса в экономической системе в момент времени $t = 0$ имеет величину:

$$M(0) = M_1(0) + M_2(0) \approx y^*(0, 0) \cdot A \cdot P_0 \cdot \frac{(T_1 - T_2) \cdot T_2}{2}. \quad (\text{B.13})$$

Из уравнений (B.4) и (B.13) имеем

$$\Delta W = \int_{-T_2}^{T_1-T_2} \mu \cdot \frac{M(0)}{T_1} \cdot e^{\mu t} dt \approx \mu \frac{P_0}{2} y^* A \frac{T_2(T_1 - T_2)}{T_1} \int_{-T_2}^{T_1-T_2} e^{\mu t} dt, \quad (\text{B.14})$$

что совпадает с формулой (19).

Список литературы (References)

- Глазьев С. Ю. Рывок в будущее. Россия в новых технологическом и мирохозяйственном укладах. — М.: Книжный мир, 2018.
- Glaz'ev S. Yu. Ryvok v budushchee. Rossiya v novykh tekhnologicheskome i mirohozyajstvennom ukladah* [A leap into the future. Russia in the new technological and world economic structures.] — Moscow: Knizhnyj mir, 2018 (in Russian).
- Горюнов Е. Л. Анатомия теории переключающихся режимов воспроизводства: откуда берутся ненейтральность денег и экономические колебания? // Вопросы экономики. — 2023. — № 12. — С. 120–140.
- Goryunov E. L. AnATOMiya teorii pereklyuchayushchihsiya rezhimov vosproizvodstva: otкуда berutsya nenejtral'nost' deneg i ekonomicheskie kolebaniya?* [Theory of the shifting modes of reproduction: Where do the non-neutrality of money and economic cycles come from?] // Voprosy ekonomiki. — 2023. — No. 12. — P. 120–140 (in Russian).
- Дементьев В. Е. Микро- и мезооснования макроэкономической динамики // Вестник университета (государственный университет управления). — 2015. — № 8. — С. 103–109.
- Dement'ev V. E. Mikro- i mezoosnovaniya makroekonomicheskoy dinamiki* [Micro- and meso foundations of macroeconomic dynamics] // Vestnik universiteta (gosudarstvennyj universitet upravleniya). — 2015. — No. 8. — P. 103–109 (in Russian).
- Кирилюк И. Л. Дискретная форма уравнений в теории переключающегося воспроизводства с различными вариантами финансовых потоков // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 5. — С. 803–815.
- Kirilyuk I. L. Diskretnaya forma uravnenij v teorii pereklyuchayushchegosya vosproizvodstva s razlichnymi variantami finansovyh potokov* [The discrete form of the equations in the theory of the shifting mode of reproduction with different variants of financial flows] // Computer Research and Modeling. — 2016. — Vol. 8, No. 5. — P. 803–815 (in Russian).
- Кудрин А., Горюнов Е., Трунин П. Стимулирующая денежно-кредитная политика: мифы и реальность // Вопросы экономики. — 2017. — № 5. — С. 5–28.
- Kudrin A., Goryunov E., Trunin P. Stimuliruyushchaya denezhno-kreditnaya politika: mify i real'nost'* [Stimulating monetary policy: myths and reality] // Voprosy ekonomiki. — 2017. — No. 5. — P. 5–28 (in Russian).
- Маевский В. И., Малков С. Ю. Новый взгляд на теорию воспроизводства: монография. — М.: ИНФРА-М, 2013.
- Maevsky V. I., Malkov S. Yu. Novyj vzgljad na teорию vosproizvodstva: monografiya* [A new approach to the theory of reproduction]. — Moscow: INFRA-M, 2013 (in Russian).
- Маевский В. И., Малков С. Ю. Перспективы макроэкономической теории воспроизводства // Вопросы экономики. — 2014. — № 4. — С. 137–155.
- Maevsky V. I., Malkov S. Yu. Perspektivy makroekonomicheskoy teorii vosproizvodstva* [Perspectives of the macroeconomic Reproduction Theory] // Voprosy ekonomiki. — 2014. — No. 4. — P. 137–155 (in Russian).

- Маевский В. И., Малков С. Ю., Рубинштейн А. А.* Анализ связи между эмиссией, инфляцией и ростом с помощью модели переключающегося режима воспроизводства // Вопросы экономики. — 2019. — № 8. — С. 45–66.
- Maevsky V. I., Malkov S. Yu., Rubinstein A. A.* Analiz svyazi mezhdu emissiej, inflyaciej i rostom s pomoshch'yu modeli pereklyuchayushchegosya rezhima vosproizvodstva [Analysis of the relationship between issuing money, inflation and economic growth with the help of the SMR-model] // Voprosy ekonomiki. — 2019. — No. 8. — P. 45–66 (in Russian).
- Маевский В. И., Малков С. Ю., Рубинштейн А. А.* К дискуссии о переключающемся режиме воспроизводства // Вопросы экономики. — 2024. — № 7. — С. 136–153.
- Maevsky V. I., Malkov S. Yu., Rubinstein A. A.* K diskussii o pereklyuchayushchemsya rezhime vosproizvodstva [To a discussion on the shifting mode of reproduction] // Voprosy ekonomiki. — 2024. — No. 7. — P. 136–153 (in Russian).
- Маевский В. И., Малков С. Ю., Рубинштейн А. А.* Новая теория воспроизводства капитала: развитие и практическое применение: монография. — М.; СПб.: Нестор-История, 2016а.
- Maevsky V. I., Malkov S. Yu., Rubinstein A. A.* Novaya teoriya vosproizvodstva kapitala: razvitie i prakticheskoe primeneniye: monografiya [The new theory of capital reproduction: development and practical application]. — Moscow; Saint Petersburg: Nestor-Istoriya, 2016a (in Russian).
- Маевский В. И., Малков С. Ю., Рубинштейн А. А.* Об эволюции моделей переключающегося режима воспроизводства // Актуальные проблемы экономики и права. — 2018. — Т. 12, № 4. — С. 816–827.
- Maevsky V. I., Malkov S. Yu., Rubinstein A. A.* Ob evolyucii modelej pereklyuchayushchegosya rezhima vosproizvodstva [On the evolution of the model of shifting mode of reproduction] // Aktual'nye problemy ekonomiki i prava. — 2018. — Vol. 12, No. 4. — P. 816–827 (in Russian).
- Маевский В. И., Малков С. Ю., Рубинштейн А. А.* Развитие модели переключающегося режима воспроизводства и сравнение ее с DSGE-моделью // Новые исследования в гетеродоксальной экономике: российский вклад: монография / отв. ред. В. И. Маевский, С. Г. Кирдина. — М.: ИЭ РАН, 2016b. — С. 268–289.
- Maevsky V. I., Malkov S. Yu., Rubinstein A. A.* Razvitie modeli pereklyuchayushchegosya rezhima vosproizvodstva i sravneniye ee s DSGE-model'yu [Development of the switching regime model of reproduction and its comparison with the DSGE model] // Novye issledovaniya v geterodoks'al'noj ekonomike: rossijskij vklad: monografiya [New research in heterodox economics: Russian contribution] / ed. V. I. Maevsky, S. G. Kirdina. — Moscow: IE RAN, 2016b. — P. 268–289 (in Russian).
- Маевский В. И., Малков С. Ю., Рубинштейн А. А.* Теория и модель перекрывающихся поколений основного капитала. — М.: Институт экономики РАН, 2015.
- Maevsky V. I., Malkov S. Yu., Rubinstein A. A.* Teorija i model' perekryvajushhihsja pokolenij osnovnogo kapitala [Overlapping generations of fixed capital theory and model]. — Moscow: Institut ekonomiki RAN, 2015 (in Russian).
- Маевский В. И., Малков С. Ю., Рубинштейн А. А., Красильникова Е. В.* Теория воспроизводства капитала и не-нейтральность денег: монография / под редакцией акад. РАН В. И. Маевского. — М.; СПб.: Нестор-История, 2020.
- Maevsky V. I., Malkov S. Yu., Rubinstein A. A., Krasil'nikova E. V.* Teoriya vosproizvodstva kapitala i ne-nejtral'nost' deneg: monografiya [The theory of capital reproduction and the non-neutrality of money] / ed. V. I. Maevsky. — Moscow; Saint Petersburg: Nestor-Istoriya, 2020 (in Russian).
- Mankiw N.* Macroeconomics. — Harvard University, Worth Publishers, 2016.
- McKendrick A. G.* Applications of mathematics to medical problems // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. — 1926. — No. 44. — P. 98–130.
- Stiglitz J. E.* Where modern macroeconomics went wrong // NBER Working Paper 23795. — 2017. — <http://www.nber.org/papers/w23795>