

УДК: 530.182.1

## Локализованные волны уравнения $\varphi^4$ в модели с двумя протяженными примесями

М. И. Фахретдинов<sup>a</sup>, Е. Г. Екомасов<sup>b</sup>

Уфимский университет науки и технологий,  
Россия, 450076, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32

E-mail: <sup>a</sup> fmi106tf@gmail.com, <sup>b</sup> ekomasoveg@gmail.com

Получено 07.03.2025, после доработки — 22.04.2025.

Принято к публикации 25.04.2025.

В данной работе рассматривается взаимодействие кинка уравнения  $\varphi^4$  с двумя протяженными одинаковыми примесями. Протяженная примесь описывается с помощью функции прямоугольного вида. Анализируется случай притягивающей примеси. С помощью аналитических методов рассматривается случай малых амплитуд локализованных волн, когда возможно провести линеаризацию уравнений движения. Для численного решения использовался метод прямых для уравнений в частных производных. Для нахождения частот колебаний, локализованных на примесях волн, используется дискретное преобразование Фурье. Кинк запускался в направлении примесей с разными начальными скоростями. Изменялось также расстояние между двумя примесями. Показано, что при взаимодействии кинка с примесями на них возбуждаются долгоживущие локализованные волны бризерного типа. Исследована их структура и связанная динамика. Определено, как, изменяя параметры примесей и расстояние между ними, можно управлять типом и динамическими параметрами связанных колебаний, локализованных на примесях волн. Найдены возможные решения в виде синфазных, антифазных колебаний, в виде биений. Колебания локализованных волн происходят с излучением волн малой амплитуды. Спектр этих излучений состоит из двух частот. Первая приближенно равна  $\sqrt{2}$ , что соответствует величине частоты для хвоста воблинг-бризера уравнения  $\varphi^4$ . Вторая приближенно равна удвоенной частоте колебаний примесных мод. Найдено (как аналитически, так и численно) наличие двух возможных частот для связанных локализованных колебаний. Показано, что частоты сильно зависят от расстояния между примесями. С увеличением расстояния между примесями частоты сливаются в одну — частоту, полученную для случая одиночной примеси. Найденные численно и аналитически зависимости частот от расстояния между примесями хорошо совпадают для больших расстояний, когда взаимодействие между примесями слабое, и начинают заметно отличаться при малых расстояниях, когда взаимодействие между примесями сильное. Аналитическое значение величин полученных частот всегда больше численных. Показано, что зависимость амплитуды локализованных волн от начальной скорости кинка имеет несколько минимумов и максимумов.

Ключевые слова: уравнение  $\varphi^4$ , локализованные волны, кинк, бризер, примесь

Работа выполнена в рамках государственного задания, соглашение № 075-03-2024-123/1 от 15.02.2024, тема № 324-21.

UDC: 530.182.1

## Localized waves of the $\varphi^4$ equation in models with two extended impurities

M. I. Fakhretdinov<sup>a</sup>, E. G. Ekomasov<sup>b</sup>

Ufa University of Science and Technology,  
32 Zaki Validi st., Ufa, 450076, Russia

E-mail: <sup>a</sup> fmi106tf@gmail.com, <sup>b</sup> ekomasoveg@gmail.com

*Received 07.03.2025, after completion — 22.04.2025.*

*Accepted for publication 25.04.2025.*

In this paper, we consider the interaction of a kink of the  $\varphi^4$  equation with two identical extended impurities. An extended impurity is described using a rectangular function. The case of an attractive impurity is analyzed. Using analytical methods, we consider the case of small amplitudes of localized waves, when it is possible to linearize the equations of motion. For the numerical solution, the method of lines for partial differential equations was used. To find the oscillation frequencies of waves localized on impurities, the discrete Fourier transform is used. The kink was launched in the direction of the impurities with different initial velocities. The distance between the two impurities was also varied. It is shown that when a kink interacts with impurities, long-lived localized breather-type waves are excited on them. Their structure and coupled dynamics are investigated. It is determined how, by changing the parameters of the impurities and the distance between them, it is possible to control the type and dynamic parameters of the coupled oscillations of the waves localized on the impurities. Possible solutions in the form of in-phase, antiphase oscillations, in the form of beats are found. The oscillations of localized waves occur with the emission of small-amplitude waves. The spectrum of these emissions consists of two frequencies. The first is approximately equal to  $\sqrt{2}$ , which corresponds to the frequency value for the wobbling breather tail of the  $\varphi^4$  equation. The second is approximately equal to the doubled frequency of impurity mode oscillations. The presence of two possible frequencies for coupled localized oscillations is found both analytically and numerically. It is shown that the frequencies strongly depend on the distance between impurities. With increasing distance between impurities, the frequencies merge into one — frequency obtained for the case of a single impurity. The dependences of the frequencies on the distance between impurities found numerically and analytically coincide well for large distances, when the interaction between impurities is weak, and begin to differ noticeably at small distances, when the interaction between impurities is strong. The analytical value of the obtained frequencies is always greater than the numerical ones. It is shown that the dependence of the amplitude of localized waves on the initial kink velocity has several minima and maxima.

Keywords:  $\varphi^4$  equation, localized waves, kink, breather, impurity

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 3, pp. 437–449 (Russian).

The authors express gratitude for the financial support rendered to the work on this paper by the State Assignment (Order No. 075-03-2024-123/1 dated February 15, 2024, topic No. 324-21).

## Введение

Нелинейное дифференциальное уравнение  $\varphi^4$  относится к классу уравнений Клейна – Гордона (УКГ) и является одним из наиболее интересных как с точки зрения фундаментальной науки, так и прикладной. Это уравнение применялось в космологии, квантовой теории поля, биофизике [Kevrekidis, Cuevas-Maraver, 2019; Gani et al., 2014; Marjaneh et al., 2017]. Оно имеет много приложений в физике конденсированного состояния [Kevrekidis, Cuevas-Maraver, 2019; Yan et al., 2020]. Использовалось оно и для описания физических процессов в графене [Yamaletdinov et al., 2017; Yamaletdinov et al., 2019]. Для уравнения  $\varphi^4$  есть точное решение в виде кинка, но, в отличие от интегрируемой модели sine-Gordon (УСГ) [Kevrekidis, Cuevas-Maraver, 2019; Cuevas-Maraver et al., 2014], в нем нет локализованных в пространстве решений в виде солитонов и бризеров. Кинк уравнения  $\varphi^4$  отличается от кинка УСГ наличием внутренней моды колебаний [Fei et al., 1992].

Были попытки аналитического нахождения бризера для уравнения  $\varphi^4$  (см., например, [Eleonskii et al., 1984; Segur, Kruskal, 1987]). Считается в настоящее время [Kevrekidis, Cuevas-Maraver, 2019], что бризер уравнения  $\varphi^4$  — один из примеров слабонелокальных уединенных волн. Нелокальный — потому что пространственная локализация, присущая классическому определению уединенной волны, нарушается квазисинусоидальным излучением, неограниченным по пространству. Слабо — потому что амплитуда излучения очень мала. Существует ядро бризера  $\varphi^4$  — это центральная часть волны с большой амплитудой. Везде за пределами ядра есть хвосты, в которых преобладают крошечные синусоидальные пульсации. Причиной нелокальности такой волны является резонанс между уединенной волной и синусоидой, волны бесконечно малой амплитуды и определенного волнового числа [Kevrekidis, Cuevas-Maraver, 2019; Grimshaw, 2010]. Найдено также [Getmanov, 1976] долгоживущее нелинейное метастабильное связанное состояние трех кинков — тритон. Этот объект является продуктом симметричного столкновения двух кинков и антикинка.

Для практических приложений часто уравнение  $\varphi^4$  модифицируют, считая коэффициенты функциями от координат и времени [Kevrekidis, Cuevas-Maraver, 2019; Fei et al., 1992; Saadatmand et al., 2015; Saadatmand, Javidan, 2013; Marjaneh et al., 2022; Ghahraman, 2016]. Пространственную модуляцию потенциала часто называют примесью. Подробно рассмотрен случай одной (как точечной, так и протяженной) примеси. Было показано, что одиночные точечные примеси способны рассеивать или захватывать кинки, а также генерировать локализованную примесную моду [Kevrekidis, Cuevas-Maraver, 2019; Fei et al., 1992]. В [Lizunova et al., 2022], например, рассмотрена динамика кинков для модели с одиночными протяженными примесями, имеющими пространственные профили Гаусса или Лоренца. Показаны качественное согласие полученных результатов со случаем точечных примесей и существенное количественное влияние профиля примеси на форму локализованной примесной моды и рассеяние кинков на примесях. В [Lizunova et al., 2021] исследованы кинк-антикинковые столкновения в присутствии протяженной примеси гауссовского вида. В [Romańczukiewicz, Shnir, 2018] рассмотрены решения уравнения  $\varphi^4$  в модели с одиночной примесью, описываемой функцией гиперболического вида, в [Fakhretdinov et al., 2023; Fakhretdinov et al., 2024] — описываемой функцией прямоугольного вида. Динамика кинка для случая малых возмущений модели  $\varphi^4$  с помощью деформированного потенциала рассмотрена в [Dorey, Romańczukiewicz, 2018].

Для УСГ в модели с двумя и тремя примесями получено много интересных результатов [Екомасов et al., 2018; Самсонов и др., 2024; Екомасов и др., 2022; Екомасов и др., 2023], описывающих динамику кинков, возбуждение локализованных на примесях волн бризерного и солитонного типа, их структуру и эволюцию. Для уравнения  $\varphi^4$  в модели с двумя примесями рассмотрена пока только динамика кинка [Фахретдинов, Екомасов, 2025]. В данной же работе для уравнения  $\varphi^4$  рассмотрены структура и динамика локализованных на двух одинаковых

протяженных притягивающих примесей волн бризерного типа. Целью данного исследования являются поиск для уравнения  $\varphi^4$  возможности генерации на двух одинаковых протяженных притягивающих примесей связанных колебаний локализованных волн, описание возможного вида таких локализованных волн и нахождение частот их колебаний.

## 1. Основные уравнения и аналитическое решение

Рассмотрим уравнение  $\varphi^4$  с пространственной неоднородностью потенциала (или примесью) —  $K(x)$ :

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x)(u^2 - 1)u = 0. \quad (1)$$

Интересным с точки зрения практических приложений является случай, когда неоднородность потенциала в уравнении (1) является протяженной. Рассмотрим для определенности случай, уже хорошо исследованный для УСГ, когда функция  $K(x)$  имеет вид [Фахретдинов, Екомасов, 2025]

$$K(x) = \begin{cases} 1 - \Delta K, & 0 \leq x \leq W, W + d \leq x \leq 2W + d, \\ 1, & x < 0, W < x < W + d, x > 2W + d. \end{cases} \quad (2)$$

Выражение (2) описывает две примеси в виде двух прямоугольных ям (или барьеров при  $\Delta K \leq 0$ ) с одинаковой шириной  $W$  и глубиной  $\Delta K$ . Параметр  $d$  определяет расстояние между примесями.

Для аналитического исследования малоамплитудных локализованных на примесях волн будем искать малые возмущения уравнения (1) вида

$$u = -1 + \varepsilon \exp(-i\Omega t)\psi(x). \quad (3)$$

Подставив (3) в уравнение (1), получим следующее уравнение:

$$\psi''(x) + [\Omega^2 - 2K(x)]\psi = 0. \quad (4)$$

Это уравнение типа Шрёдингера. Для решения (4) разделим область значений координаты  $x$  на пять зон: до первой примеси, внутри первой примеси, между первой и второй примесью, внутри второй примеси, после второй примеси. Будем искать решение (4) в областях вне примесей в виде экспоненциальных функций, а внутри примесей — в виде тригонометрических:

$$\begin{cases} \psi_1(x) = A_1 \exp(-lx) + B_1 \exp(lx), \\ \psi_2(x) = A_2 \sin(kx) + B_2 \cos(kx), \\ \psi_3(x) = A_3 \exp(-lx) + B_3 \exp(lx), \\ \psi_4(x) = A_4 \sin(kx) + B_4 \cos(kx), \\ \psi_5(x) = A_5 \exp(-lx) + B_5 \exp(lx). \end{cases} \quad (5)$$

Используя условия равенства значений функций  $\psi_i$  и их первых производных на границах областей, получим из (4), (5) значения параметров  $k$  и  $l$ :

$$l = \sqrt{2 - \Omega^2}, \quad (6)$$

$$k = \sqrt{\Omega^2 - 2(1 - \Delta K)} \quad (7)$$

и дисперсионное соотношение вида

$$l^2 - k^2 + 2lk \operatorname{ctg} kW = \pm (l^2 + k^2) \exp(-ld). \quad (8)$$

При  $d \rightarrow \infty$  зависимость частоты от параметра  $\Delta K$ , полученная из дисперсионного соотношения (8), переходит в выражение, полученное для случая одной протяженной примеси в работе [Fakhretdinov et al., 2024]. При  $d = 0$  выражение (8) переходит в дисперсионное соотношение для случая одной протяженной примеси, но с параметром  $2W$ . Знаки «+» или «-» в выражении (8) соответствуют двум частотам связанных колебаний, локализованных на примесях волн  $\Omega_1, \Omega_2$ .

На рис. 1 и рис. 2 непрерывной линией показана зависимость  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  от параметра  $\Delta K$  для разных значений параметров  $d$  и  $W$ . Видно, что с увеличением величин  $W$  и  $\Delta K$  величины  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  уменьшаются. Зависимость частот  $\Omega_1, \Omega_2$  от параметра  $d$  удобно проиллюстрировать на одном рисунке (см. рис. 3). Видно, что с увеличением значения расстояния между примесями кривые, описывающие зависимости  $\Omega_1, \Omega_2$ , сливаются в одну. Она равна частоте примесной моды для случая одной примеси. Ее можно вычислить из (8) для заданных параметров  $W, \Delta K$  при  $d \rightarrow \infty$ .

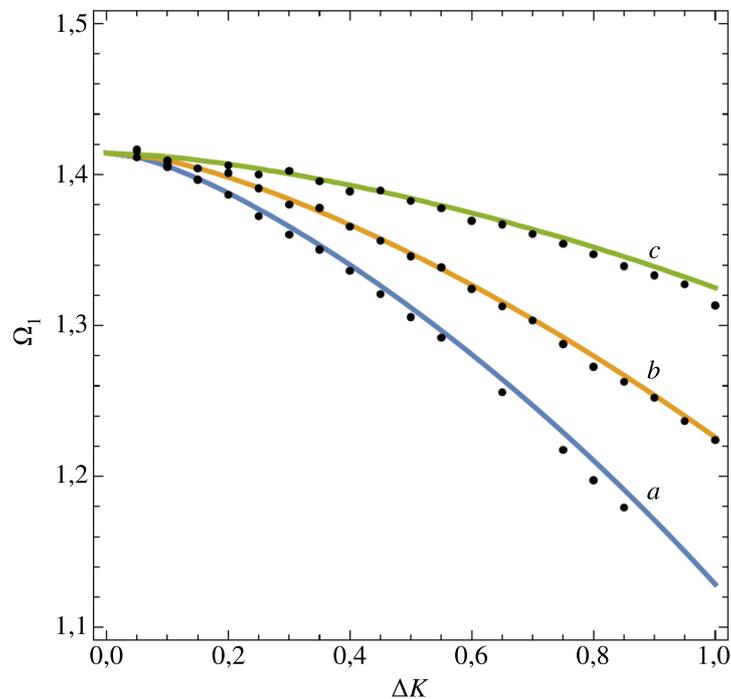


Рис. 1. Зависимость  $\Omega_1(\Delta K)$  (полученная численно обозначена точками, а аналитически — линиями):  $a$  — при  $W = 1,0, d = 2,0$ ;  $b$  — при  $W = 0,7, d = 2,0$ ;  $c$  — при  $W = 0,5, d = 5,0$

## 2. Результаты численного счета

Уравнение (1) было решено также численно методом прямых [Schiesser, 2012] на интервале по координате  $x \in [-L, L]$ ,  $L = 60$ , шаг по координате  $\Delta x = 0,01$ . Граничные условия имели вид  $u_x(x = -L) = u_x(x = L) = 0$ . В качестве начальных условий для решения уравнения (1) берется кинк невозмущенного уравнения  $\varphi^4$  при  $K(x) = 1$ :

$$u(t=0) = \tanh\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2(1-v_0^2)}}\right), \quad u_t(t=0) = -\frac{v_0}{\sqrt{2(1-v_0^2)}} \operatorname{sech}\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2(1-v_0^2)}}\right), \quad (9)$$

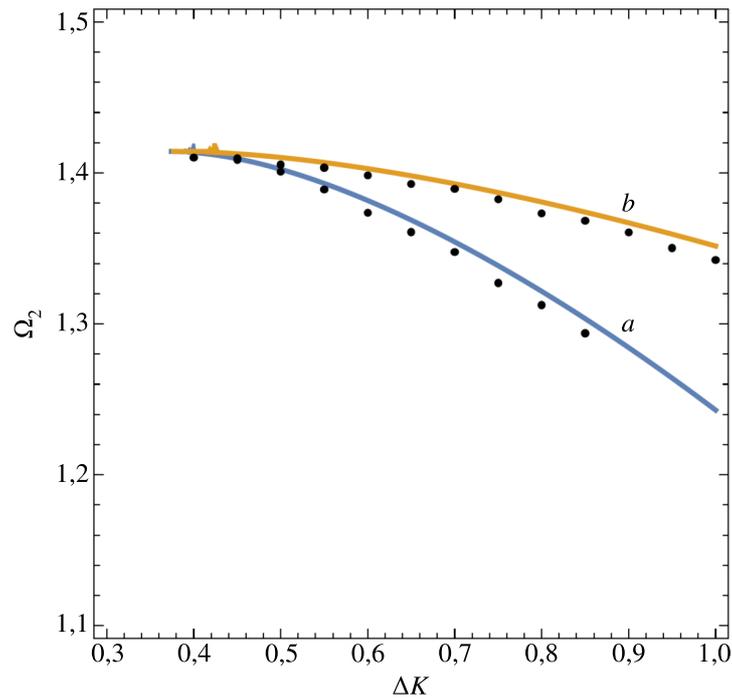


Рис. 2. Зависимость  $\Omega_2(\Delta K)$  (полученная численно обозначена точками, а аналитически — линиями):  $a$  — при  $W = 1,0$ ,  $d = 2,0$ ;  $b$  — при  $W = 0,7$ ,  $d = 2,0$

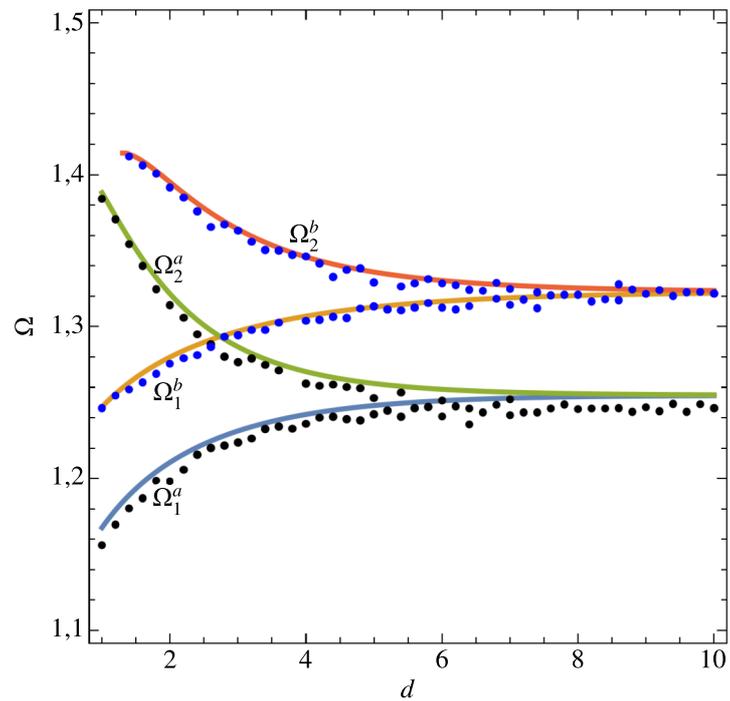


Рис. 3. Зависимость  $\Omega_1, \Omega_2$  от  $d$  (полученная численно обозначена точками, а аналитически — линиями):  $a$  — при  $W = 1,0$ ,  $\Delta K = 0,8$ ;  $b$  — при  $W = 0,7$ ,  $\Delta K = 0,8$

где  $x_0 = 10$  — начальное положение кинка,  $0 < v_0 < 1$  — начальная скорость кинка. Шаг по времени выбирался автоматически программой для решения, получившейся в ходе метода прямых систем ОДУ.

После прохождения кинка через примеси на них возбуждаются локализованные волны (рис. 4). Из рис. 4 видно, что, как и для случая одной протяженной примеси [Fakhretdinov et al., 2024], наблюдаются периодические колебания и на хвостах локализованных волн. Частоты примесных мод находились с помощью преобразования Фурье для  $u(x_1, t)$ ,  $u(x_2, t)$ . Здесь  $x_1 = \frac{W}{2}$  — центр первой протяженной примеси,  $x_2 = x + d + \frac{W}{2}$  — центр второй примеси. Рассмотрим далее, в частности, зависимость амплитуды и частоты колебаний примесных мод от расстояния между примесями  $d$  и начальной скорости кинка  $v_0$ . Будем рассматривать только случай установившихся колебаний, начиная с момента времени  $t = 1000$  до момента времени  $t = 2000$ .

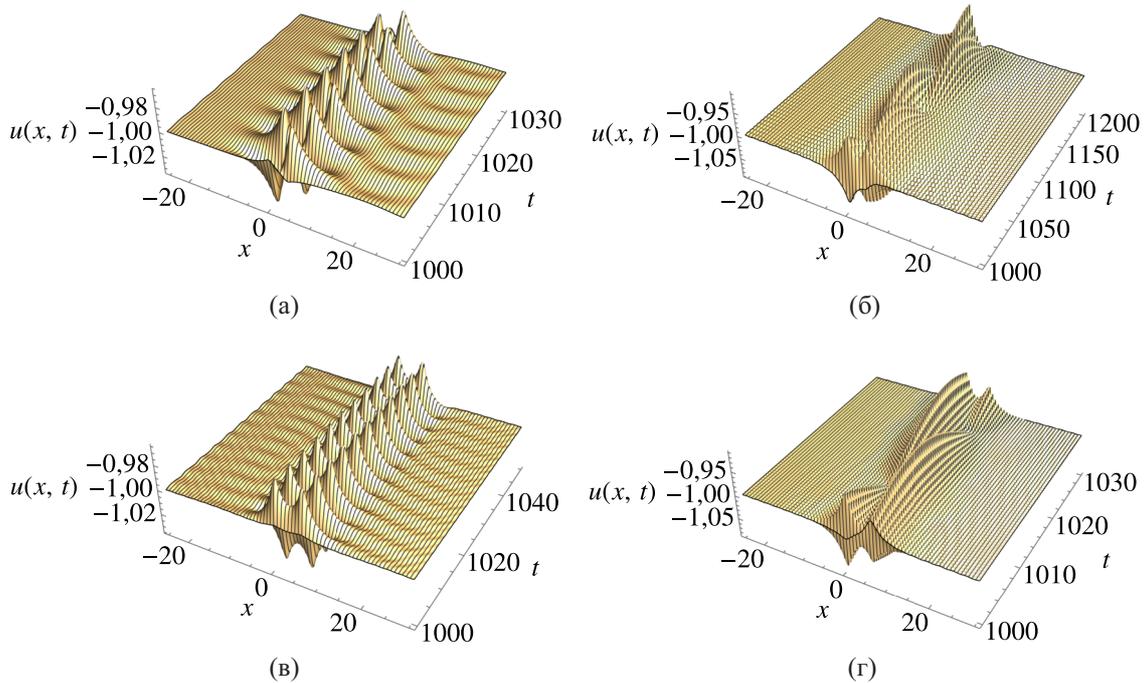


Рис. 4. Вид локализованных волн при  $W = 1,0$ ,  $\Delta K = 0,5$ : а)  $d = 3,0$ ,  $v_0 = 0,528$ ; б)  $d = 3,0$ ,  $v_0 = 0,623$ ; в)  $d = 5,0$ ,  $v_0 = 0,383$ , синфазные колебания; г)  $d = 5,0$ ,  $v_0 = 0,708$

Типичная полученная зависимость  $u(x_1, t)$  имеет вид биений (см. рис. 5). На рис. 5 обозначим  $R$  — амплитуду огибающей волны. Построим зависимость  $R$  от начальной скорости кинка  $v_0$  с шагом 0,001 для случая  $W = 1,0$ ,  $\Delta K = 0,5$ ,  $d = 3,0$  (см. рис. 6). На этом рисунке имеем минимум, близкий к нулю при  $v_0 = 0,528$  (см. первая пунктирная линия рис. 6). Такие колебания (см. рис. 7) соответствуют случаю антифазных колебаний, локализованных на первой и второй примесях волны (колебаний с одинаковой амплитудой и частотой, но с разными по знаку начальными фазами). Зависимость  $u(x, t)$  таких синфазных колебаний представлена на рис. 4, а. Максимум  $R(v_0)$  достигается при  $v_0 = 0,623$  (см. второй пунктир рис. 6), что соответствует случаю биений, когда амплитуда каждой из локализованных волн падает практически до нуля (см. рис. 8). Зависимость  $u(x, t)$  для этого случая представлена на рис. 4, б. При этом минимум амплитуды колебаний одной локализованной волны соответствует максимуму амплитуды колебаний второй локализованной волны, то есть происходит полный перенос энергии колебаний от одной примесной моды в другую.

Рассмотрим далее функцию  $R(v_0)$ , полученную для  $d = 5,0$  (см. рис. 9). Отметим, что в этом случае локализованная на первой примеси волна успевает совершить большее число колебаний за время, пока кинк доедет до второй примеси. Зависимости  $u(x_1, t)$ ,  $u(x_2, t)$ , соответствующие минимуму  $R(v_0)$ , равному 0,383, показаны на рис. 10. Колебания синфазные, с одинаковой ам-

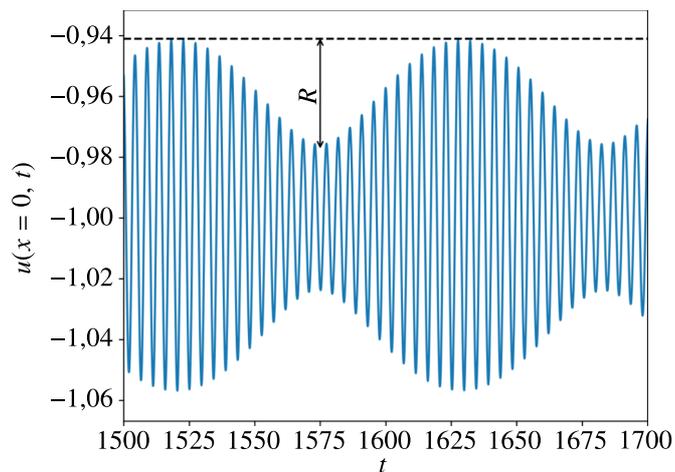


Рис. 5. Зависимость  $u(x_1, t)$  при  $W = 1,0$ ,  $\Delta K = 0,5$ ,  $d = 3,0$ ,  $v_0 = 0,56$

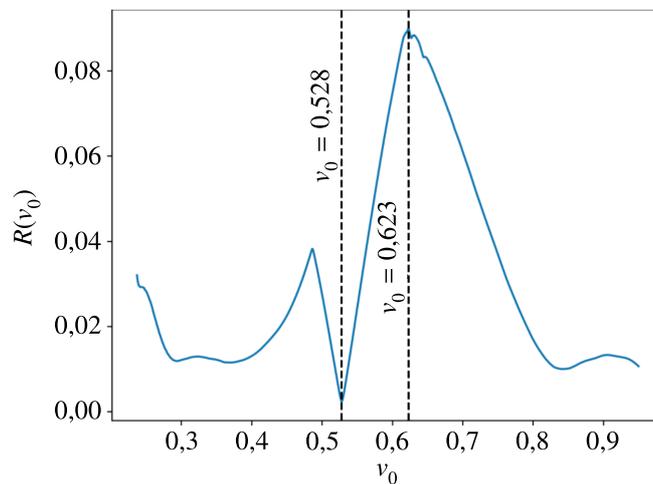


Рис. 6. Зависимость  $R(v_0)$ ,  $W = 1,0$ ,  $\Delta K = 0,5$ ,  $d = 3,0$

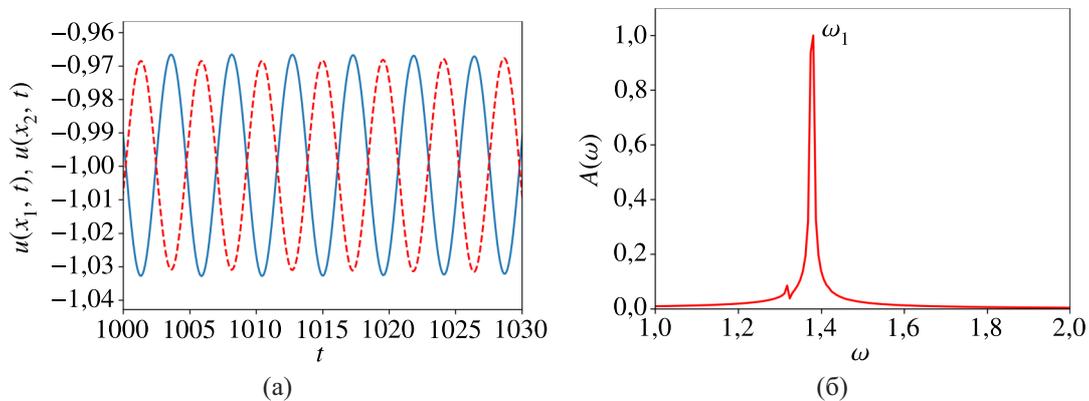


Рис. 7. а) Зависимость  $u(x_1, t)$  — сплошная линия,  $u(x_2, t)$  — пунктирная линия; б) фурье-преобразование  $\omega_1 \approx 1,4$ ,  $W = 1,0$ ,  $\Delta K = 0,5$ ,  $d = 3,0$ ,  $v_0 = 0,528$

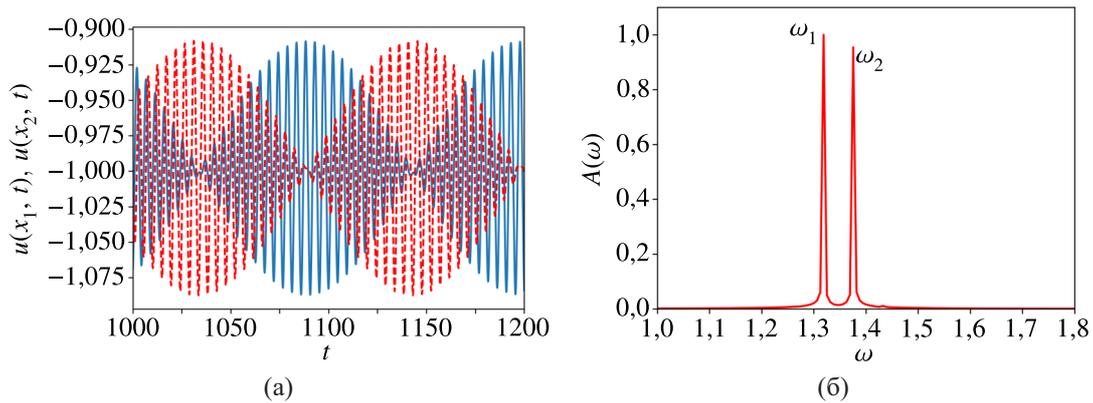


Рис. 8. а) Зависимость  $u(x_1, t)$  — сплошная линия,  $u(x_2, t)$  — пунктирная линия; б) фурье-преобразование  $\omega_1 \approx 1,32$ ,  $\omega_2 \approx 1,37$ ,  $W = 1,0$ ,  $\Delta K = 0,5$ ,  $d = 3,0$ ,  $v_0 = 0,623$

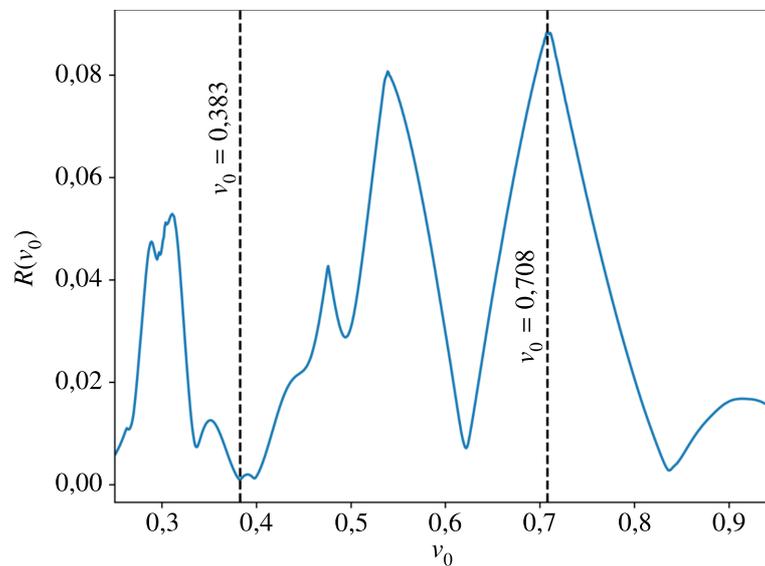


Рис. 9. Зависимость  $R(v_0)$ ,  $W = 1,0$ ,  $\Delta K = 0,5$ ,  $d = 5,0$

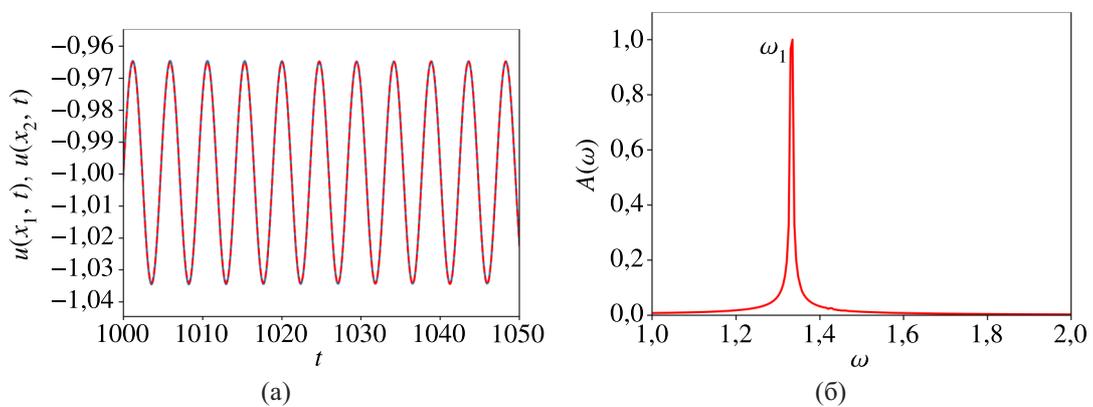


Рис. 10. а) Зависимость  $u(x_1, t)$  — сплошная линия,  $u(x_2, t)$  — пунктирная линия; б) фурье-преобразование  $\omega_1 \approx 1,33$ ,  $W = 1,0$ ,  $\Delta K = 0,5$ ,  $d = 5,0$ ,  $v_0 = 0,383$

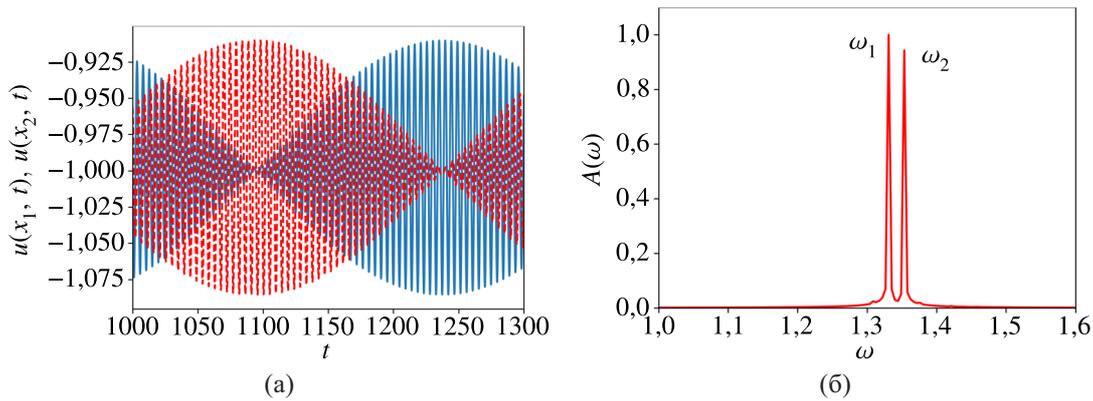


Рис. 11. а) Зависимость  $u(x_1, t)$  — сплошная линия,  $u(x_2, t)$  — пунктирная линия; б) фурье-преобразование  $\omega_1 \approx 1,33$ ,  $\omega_2 \approx 1,35$ ,  $W = 1,0$ ,  $\Delta K = 0,5$ ,  $d = 5,0$ ,  $v_0 = 0,708$

плитудой, фазой и частотой  $\omega_1 \approx 1,33$  (см. рис. 4, в и рис. 10). Колебания волны в центре примеси, соответствующие максимуму  $R(v_0)$ , равному 0,708, показаны на рис. 11. Это случай соответствует случаю биений, когда амплитуда каждой из локализованных волн падает практически до нуля, как и на рис. 8. При этом минимум амплитуды колебаний одной локализованной волны соответствует максимуму амплитуды колебаний второй локализованной волны, то есть происходит полный перенос энергии колебаний от одной примесной моды в другую. Колебания примесных мод состоят из двух близких частот:  $\omega_1 \approx 1,33$ ,  $\omega_2 \approx 1,35$ .

Зависимость амплитуды примесной моды от начальной скорости кинка была найдена из соотношения  $U_{\max} = \max(u(x_1, t)) - \min(u(x_1, t))$  для  $t > 1000$  для параметров  $W = 1,0$ ,  $\Delta K = 0,5$ . Она представлена на рис. 12 для случаев  $d = 3,0$  (рис. 12, а) и  $d = 5,0$  (рис. 12, б). Полученные кривые имеют более сложный вид, чем для случая одной примеси [Fakhretdinov et al., 2023], с несколькими минимумами и максимумами. Отметим также, что при увеличении параметров  $W$  и  $\Delta K$  не удастся получить решение в виде солитонного типа, как в случае УСГ [Самсонов и др., 2024].

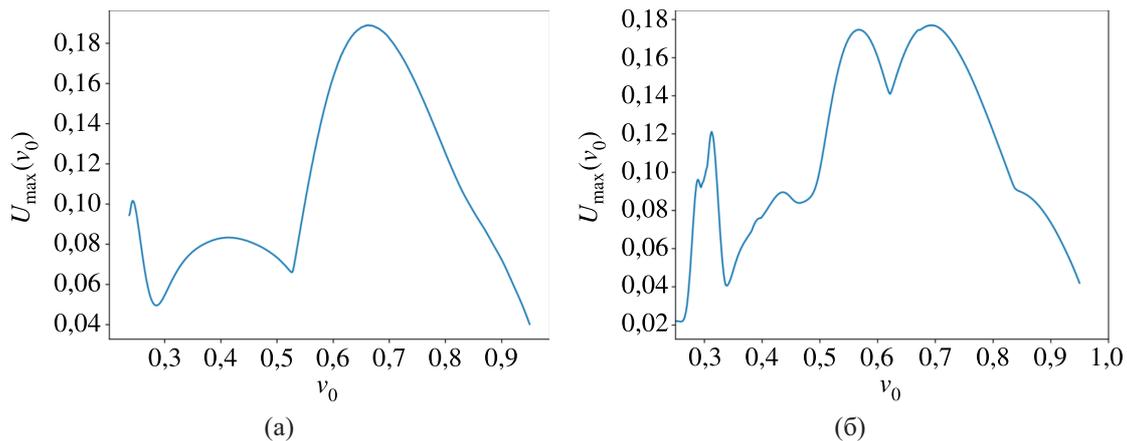


Рис. 12. Зависимость амплитуды примесной моды от начальной скорости кинка при  $W = 1,0$ ,  $\Delta K = 0,5$ : а)  $d = 3,0$ ; б)  $d = 5,0$

Для сравнения с полученным аналитически дисперсионным соотношением (8) численно рассчитаем частоты примесных мод в зависимости от параметров  $W$ ,  $\Delta K$  и  $d$  для тех же значений параметров, что и в рассмотренном выше аналитическом случае. На рис. 1 и рис. 2

численно полученная зависимость  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  от параметра  $\Delta K$  для разных значений параметров  $d$  и  $W$  обозначена точками. Видно хорошее совпадение численных и аналитических результатов. Отметим, что численно полученные значения частот оказываются немного меньше теоретических. С увеличением параметра  $\Delta K$  (т.е. с увеличением нелинейности задачи) разница между аналитическими и численными значениями увеличивается.

На рис. 3 показано сравнение численного и аналитического результата для зависимости частот  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  примесной моды от расстояния между примесями  $d$  для разных значений параметров примеси. Частоты  $\Omega_1^a$  и  $\Omega_2^a$  соответствуют параметрам  $W = 1,0$ ,  $\Delta K = 0,8$ , а частоты  $\Omega_1^b$ , и  $\Omega_2^b$  — параметрам  $W = 0,7$ ,  $\Delta K = 0,8$ . Как видно из графиков, для протяженных примесей теория достаточно хорошо предсказывает зависимость частот от параметров примесей. Численно полученные значения частот для выбранных для счета параметров оказываются немного меньше теоретических.

## Заключение

Для уравнения  $\varphi^4$  впервые показана возможность, вследствие кинк-примесного взаимодействия, как и для случая уравнения синус-Гордона, генерации связанных колебаний локализованных на двух одинаковых притягивающих протяженных примесях волн бризерного типа. Изучены особенности их структуры и динамических свойств. Показано, что коллективное влияние примесей приводит к существенному изменению волновой динамики.

В отличие от случая одной примеси, исследованного ранее, найдено уже три возможных вида колебаний: синфазные, антифазные колебания и колебания в виде биений. Определены условия для реализации каждого типа колебаний. Найдена зависимость параметров и вида связанных колебаний локализованных волн от начальных условий.

Показано (как аналитически, так и численно) наличие двух частот для связанных колебаний локализованных волн. Для случая малых амплитуд аналитически найдена зависимость частот связанных колебаний локализованных волн от параметров примеси и расстояния между ними. Полученные численно зависимости частот от расстояния между примесями хорошо совпадают с аналитическими при достаточно больших расстояниях между ними. При этом величины полученных аналитически частот больше полученных численно. Показано, что зависимость амплитуды локализованных волн от начальной скорости кинка, в отличие от случая одной примеси, имеет уже несколько минимумов и максимумов.

Результаты исследования расширяют представление о структуре и динамике нелинейных локализованных волн в неинтегрируемых нелинейных системах, что актуально при решении задач в области физики конденсированного состояния, теории поля и др., использующих уравнение  $\varphi^4$  при описании сред с дефектами. Продемонстрированная возможность управления параметрами (амплитуда, частота) возбуждаемых на примесях связанных колебаний, путем варьирования начальных условий и геометрии системы, может быть использована в практических приложениях.

## Список литературы (References)

- Екомасов Е. Г., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В., Дмитриев С. В., Назаров В. Н. Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми примесями // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2022. — Т. 30, № 6. — С. 749–765. — DOI: 10.18500/0869-6632-003011
- Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N.* Struktura i dinamika lokalizovannykh nelineinykh voln uravneniya sinus-Gordona v modeli s odinakovymi primesyami [Structure and dynamics of localized nonlinear waves of the sine-Gordon equation in a model with identical impurities] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Prikladnaya nelineinaya dinamika. — 2022. — Vol. 30, No. 6. — P. 749–765 (in Russian).

- Екомасов Е. Г., Кудрявцев Р. В., Самсонов К. Ю., Назаров В. Н., Кабанов Д. К. Динамика кинка уравнения синус-Гордона в модели с тремя одинаковыми притягивающими или отталкивающими примесями // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2023. — Т. 31, № 6. — С. 693–709. — DOI: 10.18500/0869-6632-003069
- Ekomasov E. G., Kudryavtsev R. V., Samsonov K. Yu., Nazarov V. N., Kabanov D. K.* Dinamika kinka uravneniya sinus-Gordona v modeli s trema odinakovymi prityagivayushchimi ili ottalkivayushchimi primesyami [Kink dynamics of the sine-Gordon equation in a model with three identical attracting or repelling impurities] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Prikladnaya nelineinaya dinamika. — 2023. — Vol. 31, No. 6. — P. 693–709 (in Russian).
- Самсонов К. Ю., Кабанов Д. К., Назаров В. Н., Екомасов Е. Г. Локализованные нелинейные волны уравнения синус-Гордона в модели с тремя протяженными примесями // Компьютерные исследования и моделирование. — 2024. — Т. 16, № 4. — С. 855–868. — DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-4-855-868
- Samsonov K. Yu., Kabanov D. K., Nazarov V. N., Ekomasov E. G.* Lokalizovannye nelineinye volny uravneniya sinus-Gordona v modeli s trema protyazhennymi primesyami [Localized nonlinear waves of the sine-Gordon equation in a model with three extended impurities] // Computer Research and Modeling. — 2024. — Vol. 16, No. 4. — P. 855–868 (in Russian).
- Фахретдинов М. И., Екомасов Е. Г. Динамика кинка в модели  $\phi^4$  с двумя протяженными примесями // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2025. — Т. 33, № 3. — С. 412–425.
- Fakhretdinov M. I., Ekomasov E. G.* Dinamika kinka v modeli  $\phi^4$  s dvumya protyazhennymi primesyami [Kink dynamics in the  $\phi^4$  model with two extended impurities] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Prikladnaya nelineinaya dinamika. — 2025. — Vol. 33, No. 3. — P. 412–425 (in Russian).
- Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P. G., Williams F. (eds.) The sine-Gordon model and its applications: from pendula and Josephson junctions to gravity and high-energy physics. — Cham: Springer, 2014. — 350 p.
- Dorey P., Romańczukiewicz T. Resonant kink–antikink scattering through quasinormal modes // Physics Letters B. — 2018. — Vol. 779. — P. 117–123.
- Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N. Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities // Brazilian Journal of Physics. — 2018. — Vol. 48, No. 6. — P. 576–584.
- Eleonskii V. M., Kulagin N. E., Novozhilova N. S., Silin V. P. Theory of molecular spectra and quantum fields in curved spacetime // Theoretical and Mathematical Physics. — 1984. — Vol. 60, No. 3. — P. 896–905.
- Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Yu., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G. Kink dynamics in the  $\phi^4$  model with extended impurity // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2023. — Vol. 19, No. 3. — P. 303–320. — DOI: 10.20537/nd230603
- Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Yu., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G. Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the  $\phi^4$  model // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2024. — Vol. 20, No. 1. — P. 15–26. — DOI: 10.20537/nd231206
- Fei Z., Kivshar Y. S., Vázquez L. Resonant kink-impurity interactions in the  $\phi^4$  model // Physical Review A. — 1992. — Vol. 46, No. 8. — P. 5214–5223.
- Gani V. A., Kudryavtsev A. E., Lizunova M. A. Kink interactions in the (1 + 1)-dimensional  $\phi^6$  model // Physical Review D. — 2014. — Vol. 89, No. 12. — P. 125009.
- Getmanov B. S. Soliton solutions of the nonlinear Klein–Gordon equation // JETP Letters. — 1976. — Vol. 24, No. 6. — P. 291–294.
- Ghahraman A. Dynamics of  $\phi^4$  kinks by using Adomian decomposition method // American Journal of Numerical Analysis. — 2016. — Vol. 4, No. 1. — P. 8–10.
- Grimshaw R. Asymptotic methods in fluid mechanics: survey and recent advances // CISM International Centre for Mechanical Sciences. — 2010. — Vol. 523. — P. 71–104.
- Kevrekidis P. G., Cuevas-Maraver J. (Eds.) A dynamical perspective on the  $\phi^4$  model: past, present and future. — Cham: Springer, 2019. — 400 p.

- Lizunova M. A., Kager J., van Wezel J.* Emergence of oscillons in kink-impurity interactions // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2021. — Vol. 54, No. 31. — P. 315701.
- Lizunova M. A., Kager J., van Wezel J.* Kinks and realistic impurity models in  $\phi^4$ -theory // *International Journal of Modern Physics B*. — 2022. — Vol. 36, No. 5. — P. 2250042.
- Marjaneh A. M., Saadatmand D., Zhou K., Dmitriev S. V., Zomorrodian M. E.* High energy density in the collision of  $n$  kinks in the  $\phi^4$  model // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2017. — Vol. 49. — P. 30–38.
- Marjaneh A. M., Simas F. C., Bazeia D.* Collisions of kinks in deformed  $\phi^4$  and  $\phi^6$  models // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2022. — Vol. 164. — P. 112723. — DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112723
- Romańczukiewicz T., Shnir Y.* Oscillons in the presence of external potential // *Journal of High Energy Physics*. — 2018. — Vol. 2018, No. 1. — P. 101.
- Saadatmand D., Dmitriev S. V., Borisov D. I., Kevrekidis P. G.* Effect of the  $\phi^4$  kink's internal mode at scattering on a PT-symmetric defect // *JETP Letters*. — 2015. — Vol. 101, No. 8. — P. 497–502.
- Saadatmand D., Javidan K.* Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory // *Brazilian Journal of Physics*. — 2013. — Vol. 43, No. 1–2. — P. 48–56.
- Schiesser W. E.* The numerical method of lines: integration of partial differential equations. — London: Academic Press, 2012. — 326 p.
- Segur H., Kruskal M. D.* Nonexistence of small-amplitude breather solutions in  $\phi^4$  theory // *Physical Review Letters*. — 1987. — Vol. 58, No. 8. — P. 747–750. [Erratum: *Ibid.* — 1987. — Vol. 58, No. 11. — P. 1158.]
- Yamaletdinov R. D., Romańczukiewicz T., Pershin Y. V.* Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects // *Carbon*. — 2019. — Vol. 141. — P. 253–257.
- Yamaletdinov R. D., Slipko V. A., Pershin Y. V.* Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the  $\phi^4$  field model // *Physical Review B*. — 2017. — Vol. 96, No. 9. — P. 094306.
- Yan H., Zhong Y., Liu Y. X., Maeda K. I.* Kink-antikink collision in a Lorentz-violating  $\phi^4$  model // *Physics Letters B*. — 2020. — Vol. 807. — P. 135542.