

УДК: 519.6

Методика анализа шумоиндуцированных явлений в двухкомпонентных стохастических системах реакционно-диффузионного типа со степенной нелинейностью

С. Е. Курушина^{1,a}, Е. А. Федорова^{2,b}, Ю. А. Гуровская^{1,c}

¹Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва,
Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

²Банк России,
Россия, 443099, г. Самара, ул. Куйбышева, д. 112

E-mail: ^a kurushina72@gmail.com, ^b geyn@inbox.ru, ^c Shapovalova.july@gmail.com

Получено 06.12.2024, после доработки — 03.03.2025.

Принято к публикации 13.03.2025.

В работе построена и исследуется обобщенная модель, описывающая двухкомпонентные системы реакционно-диффузионного типа со степенной нелинейностью и учитывающая влияние внешних шумов. Для анализа обобщенной модели разработана методология, включающая в себя линейный анализ устойчивости, нелинейный анализ устойчивости и численное моделирование эволюции системы. Методика проведения линейного анализа опирается на базовые подходы, в которых для получения характеристического уравнения используется матрица линеаризации. Нелинейный анализ устойчивости проводится с точностью до моментов третьего порядка включительно. Для этого функции, описывающие динамику компонент, раскладываются в ряд Тейлора до слагаемых третьего порядка. Затем с помощью теоремы Новикова проводится процедура усреднения. В результате полученные уравнения образуют бесконечную иерархично подчиненную структуру, которую в определенный момент необходимо прервать. Для этого пренебрегаем вкладом слагаемых выше третьего порядка как в самих уравнениях, так и при построении уравнений моментов. Полученные уравнения образуют набор линейных уравнений, из которых формируется матрица устойчивости. Эта матрица имеет довольно сложную структуру, в связи с чем ее решение может быть получено только численно. Для проведения численного исследования эволюции системы выбран метод переменных направлений. Из-за наличия в анализируемой системе стохастической части метод был модифицирован таким образом, что на целых слоях проводится генерация случайных полей с заданным распределением и функцией корреляции, отвечающих за шумовой вклад в общую нелинейность. Апробация разработанной методологии проведена на предложенной Barrio et al. модели реакции – диффузии, по результатам исследования которой им показана схожесть получаемых структур с пигментацией рыб. В настоящей работе внимание сосредоточено на анализе поведения системы в окрестности ненулевой стационарной точки. Изучена зависимость действительной части собственных значений от волнового числа. В линейном анализе получена область значений волновых чисел, при которых возникает неустойчивость Тьюринга. Нелинейный анализ и численное моделирование эволюции системы проводятся для параметров модели, которые, напротив, находятся вне области неустойчивости Тьюринга. В рамках нелинейного анализа найдены интенсивности аддитивного шума, при которых, несмотря на отсутствие условий для возникновения диффузионной неустойчивости, система переходит в неустойчивое состояние. Результаты численного моделирования эволюции апробируемой модели демонстрируют процесс образования пространственных структур тьюрингового типа при воздействии на нее аддитивного шума.

Ключевые слова: шумоиндуцированные переходы, метод переменных направлений, системы реакционно-диффузионного типа, анализ устойчивости

Настоящая статья отражает личную позицию авторов. Содержание и результаты данного исследования не следует рассматривать, в том числе цитировать в каких-либо изданиях, как официальную позицию Банка России или указание на официальную политику или решения регулятора. Любые ошибки в данном материале являются исключительно авторскими.

UDC: 519.6

Technique for analyzing noise-induced phenomena in two-component stochastic systems of reaction – diffusion type with power nonlinearity

S. E. Kurushina^{1,a}, E. A. Fedorova^{2,b}, I. A. Gurovskaia^{1,c}

¹Samara National Research University,
34 Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russia

²Bank of Russia,
112 Kuibyshev st., Samara, 443099, Russia

E-mail: ^a kurushina72@gmail.com, ^b geyn@inbox.ru, ^c Shapovalova.july@gmail.com

Received 06.12.2024, after completion – 03.03.2025.

Accepted for publication 13.03.2025.

The paper constructs and studies a generalized model describing two-component systems of reaction–diffusion type with power nonlinearity, considering the influence of external noise. A methodology has been developed for analyzing the generalized model, which includes linear stability analysis, nonlinear stability analysis, and numerical simulation of the system’s evolution. The linear analysis technique uses basic approaches, in which the characteristic equation is obtained using a linearization matrix. Nonlinear stability analysis realized up to third-order moments inclusively. For this, the functions describing the dynamics of the components are expanded in Taylor series up to third-order terms. Then, using the Novikov theorem, the averaging procedure is carried out. As a result, the obtained equations form an infinite hierarchically subordinate structure, which must be truncated at some point. To achieve this, contributions from terms higher than the third order are neglected in both the equations themselves and during the construction of the moment equations. The resulting equations form a set of linear equations, from which the stability matrix is constructed. This matrix has a rather complex structure, making it solvable only numerically. For the numerical study of the system’s evolution, the method of variable directions was chosen. Due to the presence of a stochastic component in the analyzed system, the method was modified such that random fields with a specified distribution and correlation function, responsible for the noise contribution to the overall nonlinearity, are generated across entire layers. The developed methodology was tested on the reaction–diffusion model proposed by Barrio et al., according to the results of the study, they showed the similarity of the obtained structures with the pigmentation of fish. This paper focuses on the system behavior analysis in the neighborhood of a non-zero stationary point. The dependence of the real part of the eigenvalues on the wavenumber has been examined. In the linear analysis, a range of wavenumber values is identified in which Turing instability occurs. Nonlinear analysis and numerical simulation of the system’s evolution are conducted for model parameters that, in contrast, lie outside the Turing instability region. Nonlinear analysis found noise intensities of additive noise for which, despite the absence of conditions for the emergence of diffusion instability, the system transitions to an unstable state. The results of the numerical simulation of the evolution of the tested model demonstrate the process of forming spatial structures of Turing type under the influence of additive noise.

Keywords: noise-induced transitions, alternating direction method, reaction–diffusion type systems, stability analysis

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 2, pp. 277–291 (Russian).

The views expressed herein are solely those of the authors. The content and results of this research should not be considered or referred to in any publications as the Bank of Russia’s official position, official policy, or decisions. Any errors in this document are the responsibility of the authors.

Введение

В последние годы для изучения явлений и процессов окружающего нас мира все большей популярностью пользуется представление реальных систем в виде математических моделей, что является особенно удобным в тех случаях, когда проведение реальных экспериментов достаточно затруднено или невозможно. Широкий класс таких моделей представляют реакционно-диффузионные системы, которые, несмотря на различие области применимости, могут иметь схожую структуру. Например, модель, описывающая окрас рыб [Barrio, Varea, Aragon, 1999], модель BVAM, получившая свое название по первым буквам фамилий авторов [Ledesma-Duran, Aragon, 2019], модель Грэя – Скотта [Owolabi, 2020], модель «брюсселятор» [Prigogine, Lefever, 1968; Mazur, De Groot, 2013; Donnelly, Herman, Prigogine, 1966; Prigogine, Lefever, 1967], модель Шнакенберга [Yi, Gaffne, Aragon, 2017], модель ФитцХью – Нагумо [Carletti, Nakao, 2020], модель мемристивной клеточной нейронной сети [Buscatino et al., 2019]. Все указанные модели имеют в правой части нелинейную функцию со степенной нелинейностью, поэтому в статье разработана и исследуется обобщенная модель, имеющая следующий вид:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{j=0}^n (\alpha_{ji} x_1^j + \beta_{ji} x_2^j) + \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{jki} x_1^j x_2^{k-j} + D_i \nabla^2 x_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где x_i – функция состояния системы; α_{ji} , β_{ji} , γ_{jki} – параметры системы; D_i – коэффициенты диффузии соответствующей компоненты.

Вместе с тем большинство реальных систем являются стохастическими и находятся под влиянием шума. Воздействие шума на пространственно распределенные системы, находящиеся вдали от состояния равновесия, может приводить к совершенно новому поведению системы. Среди наиболее известных шумоиндуцированных явлений можно выделить: образование структур [Kozak, Eamonn, Klika, 2019; Tian, Ruan, 2019; Maini, Wooley, 2019; Gambino et al., 2013; Smith-Roberge, Iron, Kolokolnikov, 2019; Zhou, Shi, 2015; Alqahtani, 2018; Hoyle, 2018; Morton, 2005] и шумоиндуцированные фазовые переходы [Wu, Wang, Yuan, 2019; Kim, Park, Ryu, 1998; Dykman et al., 1990; Lin et al., 2024; Ducimetiere, Boujo, Gallaire, 2024; Huang et al., 2024; Llabres, San Miguel, Toral, 2023; Bashkirtseva et al., 2023; Coti Zelati, Hairer, 2021; Bashkirtseva, Ryashko, Zaitseva, 2020]. Таким образом, актуальным является изучение динамики и свойств обобщенного класса двухкомпонентных моделей, описываемых реакционно-диффузионными уравнениями со степенной нелинейностью и мультипликативным и аддитивным внешними шумами. Для исследования шумоиндуцированных явлений, возникающих в таких системах, требуется применение численных методов, позволяющих предсказывать динамику систем и выявлять общие статистические закономерности в их стохастическом поведении. Чаще всего для решения детерминированных уравнений параболического типа, с помощью которых записывается обобщенная математическая модель, прибегают к разностным методам. Одним из наиболее подходящих методов для этих целей является метод переменных направлений [Самарский, Николаев, 1978; Формалев, Резников, 2004]. Выбор метода объясняется его безусловной устойчивостью и экономичностью, обусловленной пропорциональностью числа узлов сетки и числа действий. Однако из-за наличия стохастической части в изучаемой модели данный метод был модифицирован таким образом, что на целых слоях проводится генерация случайных полей с заданным распределением и функцией корреляции, отвечающих за шумовой вклад в общую нелинейность. Вместе с тем моделирование динамики системы требует предварительного аналитического исследования приближенными методами, позволяющими определить область параметров и значений интенсивностей шума, при которых возникают шумоиндуцированные эффекты. Для этого в работе находятся стационарные точки, проводится линейный анализ устойчивости, а также нелинейный анализ устойчивости

с точностью до моментов третьего порядка. Целью настоящей статьи является разработка последовательной методологии численно-аналитического исследования стохастических реакционно-диффузионных систем со степенной нелинейностью и ее апробация на предложенной Barrio et al. модели реакции – диффузии, по результатам исследования которой им показана схожесть получаемых структур с пигментацией рыб.

Статья организована следующим образом. В § 1 приведена постановка задачи. В § 2 получено условие неустойчивости системы с помощью анализа моментов высших порядков. В § 3 представлены результаты линейного и нелинейного анализа устойчивости для апробируемой модели. В § 4 численно исследуется эволюция системы. В заключении приведены основные выводы.

1. Постановка задачи

В математических моделях [Barrio, Varea, Aragon, 1999; Ledesma-Duran, Aragon, 2019; Owolabi, 2020; Prigogine, Lefever, 1968; Mazur, De Groot, 2013; Donnelly, Herman, Prigogine, 1966; Prigogine, Lefever, 1967; Yi, Gaffne, Aragon, 2017; Carletti, Nakao, 2020; Buscatino et al., 2019] функции, определяющие взаимодействие компонент, представляют собой функцию со степенной нелинейностью, поэтому их можно обобщить следующим образом:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{j=0}^n (\alpha_{ji} x_1^j + \beta_{ji} x_2^j) + \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{jki} x_1^j x_2^{k-j} + (\alpha_{1i} x_1 + \beta_{1i} x_2) \xi_i(\mathbf{r}, t) + \eta_i(\mathbf{r}, t) + D_i \nabla^2 x_i, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где x_i – функция состояния системы; $\alpha_{ji}, \beta_{ji}, \gamma_{jki}$ – параметры системы; D_i – коэффициенты диффузии соответствующей компоненты. Как было отмечено ранее, на реальные динамические системы влияют случайные факторы, в связи с чем в полученную обобщенную модель включаются мультипликативный и аддитивный шумы (2). Мультипликативный шум линейно включается в систему, т. е. умножается на слагаемые, содержащие первые степени каждой из компонент задачи. Введение в систему мультипликативного шума, таким образом, обеспечивает эквивалентность порядков малости между детерминированной и стохастической частями уравнения. $\xi_i(\mathbf{r}, t)$ обладает свойствами однородности и изотропности в пространстве, имеет нулевое среднее и может иметь пространственную структуру, определяемую корреляционной функцией:

$$K[\xi_i(\mathbf{r}, t), \xi_i(\mathbf{r}', t')] = 2\theta_i \Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta(t - t') \delta_{ii'},$$

где θ_i – интенсивность мультипликативного шума, $\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ – пространственная корреляционная функция. Предполагается, что корреляционная функция экспоненциально зависит от радиуса корреляции:

$$\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \exp[-k_{fi}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)],$$

где k_{fi} – величина, обратная корреляционной длине. Обозначение, введенное для корреляционной функции, определяется выражением [Стратанович, 2004]

$$K[F_1, F_2] = \langle F_1, F_2 \rangle - \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle,$$

где F_i – случайная функция. Аддитивный шум имеет нулевое среднее и корреляционную функцию следующего вида:

$$K[\eta_i(\mathbf{r}, t), \eta_i(\mathbf{r}', t')] = 2\vartheta_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \delta_{ii'},$$

где ϑ_i — интенсивность аддитивного шума. Таким образом, построена обобщенная двухкомпонентная модель реакционно-диффузионного типа со степенной нелинейностью, учитывающая влияние внешних шумов (2). Для ее исследования требуется последовательный комплексный подход, включающий линейный анализ устойчивости, нелинейный анализ устойчивости с точностью до моментов третьего порядка и моделирование эволюции системы. Линейный анализ устойчивости для системы (2) проводится стандартным образом [Рабинович, Трубецков, 1984], поэтому в работе подробно рассматривается поиск области неустойчивости только в нелинейном приближении [Riaz, Dutta, Ray, 2005].

2. Анализ моментов высших порядков системы (2)

Влияние мультипликативных шумов на эволюцию системы (2) исследовалось в работе [Kurushina, Sharovalova, 2019]. Здесь мы ограничиваемся исследованием системы (2) только с аддитивными шумами.

Для упрощения дальнейших выводов запишем систему (2) в детерминированном случае в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t} &= f_1(x_1, x_2) + \nabla^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= f_2(x_1, x_2) + d\nabla^2 x_2,\end{aligned}\tag{3}$$

где d — отношение коэффициентов диффузии.

Введем небольшие пространственно распределенные возмущения x'_1, x'_2 относительно стационарного состояния x_{10}, x_{20} , таким образом, что $x_1 = x'_1 + x_{10}$, $x_2 = x'_2 + x_{20}$, и разложим функции, описывающие динамику компонент, в ряд Тейлора до слагаемых третьего порядка, тогда (3) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'_1}{\partial t} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} x'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_1} x'^2_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_2} x'^2_2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} x'_1 x'_2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_1}{\partial^3 x_1} x'^3_1 + \\ &+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_1}{\partial^3 x_2} x'^3_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_1}{\partial^2 x_1 \partial x_2} x'^2_1 x'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1 \partial^2 x_2} x'_1 x'^2_2 + \nabla^2 x'_1, \\ \frac{\partial x'_2}{\partial t} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} x'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_1} x'^2_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_2} x'^2_2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} x'_1 x'_2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_2}{\partial^3 x_1} x'^3_1 + \\ &+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_2}{\partial^3 x_2} x'^3_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_2}{\partial^2 x_1 \partial x_2} x'^2_1 x'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1 \partial^2 x_2} x'_1 x'^2_2 + d\nabla^2 x'_2.\end{aligned}\tag{4}$$

Система подвергается воздействию внешнего аддитивного шума $\eta_1(x, y, t)$ на x_1 и $\eta_2(x, y, t)$ на x_2 . Ниже представлены их средние значения и корреляции:

$$\begin{aligned}\langle \eta_1(x, y, t) \rangle &= \langle \eta_2(x, y, t) \rangle = 0, \\ \langle \eta_i(x, y, t) \eta_{i'}(x', y', t') \rangle &= 2\vartheta_i \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(t - t') \delta_{ii'}, \quad i, i' = 1, 2,\end{aligned}\tag{5}$$

ϑ_1 и ϑ_2 — интенсивности шума для первой и второй компоненты соответственно. Взаимная корреляция между шумами игнорируется, поэтому уравнения (4) можно записать следующим

образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_1}{\partial t} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} x'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_1} x'^2_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_2} x'^2_2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} x'_1 x'_2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_1}{\partial^3 x_1} x'^3_1 + \\ &+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_1}{\partial^3 x_2} x'^3_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_1}{\partial^2 x_1 \partial x_2} x'^2_1 x'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1 \partial^2 x_2} x'_1 x'^2_2 + \nabla^2 x'_1 + \eta_1(x, y, t), \\ \frac{\partial x'_2}{\partial t} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} x'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_1} x'^2_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_2} x'^2_2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} x'_1 x'_2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_2}{\partial^3 x_1} x'^3_1 + \\ &+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_2}{\partial^3 x_2} x'^3_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_2}{\partial^2 x_1 \partial x_2} x'^2_1 x'_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1 \partial^2 x_2} x'_1 x'^2_2 + d\nabla^2 x'_2 + \eta_2(x, y, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Пространственно-временные возмущения и возмущения, вызванные шумом, представим в следующем виде, исходя из общих представлений для решения уравнения Лапласа и физического смысла лапласиана:

$$\begin{aligned} x'_1(x, y, t) &= X_1(x, y, t) \cos k_x x \cos k_y y, \\ x'_2(x, y, t) &= X_2(x, y, t) \cos k_x x \cos k_y y, \\ \eta_1(x, y, t) &= \bar{\eta}_1(x, y, t) \cos k_x x \cos k_y y, \\ \eta_2(x, y, t) &= \bar{\eta}_2(x, y, t) \cos k_x x \cos k_y y. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем некоторые ограничения. Во-первых, так как в амплитудах пространственно-временных возмущений волновые векторы соответствуют только k_x, k_y , которые могут выбраны за счет определения размера области реакции вдоль направлений x, y , компонентами, соответствующими высшим пространственным гармоникам, можно пренебречь. Таким образом, представляя

$$\begin{aligned} \cos^2 k_x x &= \frac{1 + \cos 2k_x x}{2}, & \cos^3 k_x x &= \frac{\cos 3k_x x + 3 \cos k_x x}{4}, \\ \cos^2 k_y y &= \frac{1 + \cos 2k_y y}{2}, & \cos^3 k_y y &= \frac{\cos 3k_y y + 3 \cos k_y y}{4}, \end{aligned}$$

можно исключить слагаемые, содержащие $\cos 2k_x x, \cos 2k_y y, \cos 3k_x x, \cos 3k_y y$. Во-вторых, амплитуды возмущений, вызванных шумом, также соответствуют только k_x, k_y , следовательно, они оказывают наибольшее влияние на систему. В-третьих, предполагается приближение медленно меняющегося профиля, в связи с чем $k^2 X_1 \gg \nabla^2 X_1, k^2 X_2 \gg \nabla^2 X_2$, где $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Учитывая данные ограничения, используя соотношения (7) и группируя слагаемые, содержащие $\cos k_x x \cos k_y y$, получим следующие уравнения для $X_1(x, y, t)$ и $X_2(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial t} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} X_2 + \frac{3}{32} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3} X_1^3 + \frac{3}{32} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_2^3} X_2^3 + \frac{9}{32} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} X_1^2 X_2 + \\ &+ \frac{9}{32} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} X_1 X_2^2 - k^2 X_1 + \bar{\eta}_1, \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} X_2 + \frac{3}{32} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^3} X_1^3 + \frac{3}{32} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_2^3} X_2^3 + \frac{9}{32} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} X_1^2 X_2 + \\ &+ \frac{9}{32} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} X_1 X_2^2 - dk^2 X_2 + \bar{\eta}_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Шумы $\bar{\eta}_1(x, y, t), \bar{\eta}_2(x, y, t)$ имеют следующие характеристики:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\eta}_1(x, y, t) \rangle &= \langle \bar{\eta}_2(x, y, t) \rangle = 0, \\ \langle \bar{\eta}_i(x, y, t) \bar{\eta}_{i'}(x', y', t') \rangle &= 2\bar{\vartheta}_i \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(t - t') \delta_{ii'}, \quad i, i' = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражения (5), (7) и (9) позволяют получить соотношения для интенсивности шума $\bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2$:

$$\bar{\vartheta}_i = 4\vartheta_i, \quad i = 1, 2.$$

Стоит отметить, что члены третьего порядка вносят значительный вклад в уравнения. Суть настоящего анализа заключается в изучении существенной роли этих нелинейных членов, приводящих к неустойчивости, индуцированной аддитивным шумом.

Перепишем дифференциальные уравнения из (8) в следующем виде (учитывая, что дискретизация предполагает соответствие точки пространства узлу решетки $(x, y) \rightarrow (i, j)$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{1ij}(t)}{\partial t} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} X_{1ij} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} X_{2ij} + \frac{3}{32} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3} X_{1ij}^3 + \frac{3}{32} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_2^3} X_{2ij}^3 + \frac{9}{32} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} X_{1ij}^2 X_{2ij} + \\ &+ \frac{9}{32} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} X_{1ij} X_{2ij}^2 - k^2 X_{1ij} + \bar{\eta}_{1ij}, \\ \frac{\partial X_{2ij}(t)}{\partial t} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} X_{1ij} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} X_{2ij} + \frac{3}{32} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^3} X_{1ij}^3 + \frac{3}{32} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_2^3} X_{2ij}^3 + \frac{9}{32} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} X_{1ij}^2 X_{2ij} + \\ &+ \frac{9}{32} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} X_{1ij} X_{2ij}^2 - dk^2 X_{2ij} + \bar{\eta}_{2ij}. \end{aligned} \quad (10)$$

Шумовые корреляции в дискретном пространстве приобретают вид

$$\begin{aligned} \langle \bar{\eta}_{1ij}(t) \bar{\eta}_{1kl}(t') \rangle &= 2\vartheta'_1 \delta_{ik} \delta_{jl} \delta(t - t'), \\ \langle \bar{\eta}_{2ij}(t) \bar{\eta}_{2kl}(t') \rangle &= 2\vartheta'_2 \delta_{ik} \delta_{jl} \delta(t - t'), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\vartheta'_1 = \frac{4\vartheta_1}{\Delta x \Delta y}$, $\vartheta'_2 = \frac{4\vartheta_2}{\Delta x \Delta y}$, где $\Delta x, \Delta y$ — шаги по соответствующим координатам.

Уравнения (10) совместно с шумовыми корреляциями (11) служат отправной точкой для формирования уравнений, содержащих моменты высших порядков. Для этого приступим к построению уравнений для первого момента из уравнений (10). Опуская для упрощения индексы i, j у переменных, перепишем уравнения (10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\langle X_1 \rangle}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \langle X_1 \rangle + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \langle X_2 \rangle + \frac{3}{32} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3} \langle X_1^3 \rangle + \frac{3}{32} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_2^3} \langle X_2^3 \rangle + \\ &+ \frac{9}{32} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} \langle X_1^2 X_2 \rangle + \frac{9}{32} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} \langle X_1 X_2^2 \rangle - k^2 \langle X_1 \rangle + \bar{\eta}_1, \\ \frac{d\langle X_2 \rangle}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \langle X_1 \rangle + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \langle X_2 \rangle + \frac{3}{32} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^3} \langle X_1^3 \rangle + \frac{3}{32} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_2^3} \langle X_2^3 \rangle + \\ &+ \frac{9}{32} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} \langle X_1^2 X_2 \rangle + \frac{9}{32} \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} \langle X_1 X_2^2 \rangle - dk^2 \langle X_2 \rangle + \bar{\eta}_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, для получения моментов первого порядка требуется знание моментов более высокого порядка. При этом, чтобы получить уравнение для $\langle X_1^2 \rangle$, воспользуемся тем, что $\frac{dX_1^2}{dt} = \frac{2X_1 dX_1}{dt}$, и умножим первое уравнение в (10) на $2X_1$:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1^2}{dt} &= 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} X_1^2 + 2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} X_1 X_2 + \frac{3}{16} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3} X_1^4 + \frac{3}{16} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_2^3} X_1 X_2^3 + \frac{9}{16} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} X_1^3 X_2 + \\ &+ \frac{9}{16} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} X_1^2 X_2^2 - 2k^2 X_1^2 + 2\bar{\eta}_1 X_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее мы используем теорему Новикова для усреднения:

$$\begin{aligned}\langle F(X_{1ij})\bar{\eta}_{1ij} \rangle &= \vartheta'_1 \left\langle F(X_{1ij}) \frac{\partial F(X_{1ij})}{\partial X_{1ij}} \right\rangle, \\ \langle F(X_{2ij})\bar{\eta}_{2ij} \rangle &= \vartheta'_2 \left\langle F(X_{2ij}) \frac{\partial F(X_{2ij})}{\partial X_{2ij}} \right\rangle.\end{aligned}\tag{14}$$

Поэтому при усреднении (13) с помощью уравнения (14) уравнение момента выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d\langle X_1^2 \rangle}{dt} &= 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \langle X_1^2 \rangle + 2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \langle X_1 X_2 \rangle + \frac{3}{16} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} \langle X_1^4 \rangle + \frac{3}{16} \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} \langle X_1 X_2^3 \rangle + \\ &+ \frac{9}{16} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} \langle X_1^3 X_2 \rangle + \frac{9}{16} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} \langle X_1^2 X_2^2 \rangle - 2k^2 \langle X_1^2 \rangle + 2\vartheta'_1 \langle X_1 \rangle.\end{aligned}$$

Действуя аналогичным образом, используя уравнения (10) и (14), можно записать уравнения для моментов $\langle X_1, X_2 \rangle$, $\langle X_1^2, X_2 \rangle$, $\langle X_1^3, X_2 \rangle$, $\langle X_1^2 X_2, X_2 \rangle$, $\langle X_1 X_2^2, X_2 \rangle$. Важно отметить, что полученные таким образом уравнения образуют бесконечную иерархично подчиненную структуру. Поэтому необходимо прервать эту многоступенчатую систему (иерархию) в определенный момент. Чтобы уловить в высшем порядке эффекты, полученные из-за влияния аддитивного шума, получим уравнения моментов до третьего порядка, или, другими словами, пренебрежем вкладом членов $\langle X_1 X_2^3 \rangle$, $\langle X_1^3 X_2 \rangle$, $\langle X_1^4 \rangle$, $\langle X_2^4 \rangle$ и т. д., как в самих уравнениях моментов, так и при построении уравнений моментов $\langle X_1 \rangle$, $\langle X_2 \rangle$, $\langle X_1^2 \rangle$, $\langle X_1, X_2 \rangle$, $\langle X_2^2 \rangle$, $\langle X_1^3 \rangle$, $\langle X_2^3 \rangle$, $\langle X_1^2 X_2 \rangle$, $\langle X_1 X_2^2 \rangle$. Эти уравнения образуют набор линейных уравнений, которые можно представить в виде

$$\dot{L} = AL,\tag{15}$$

где L — 9-компонентный вектор, а A — матрица 9×9 :

$$L = \begin{pmatrix} \langle X_1 \rangle \\ \langle X_2 \rangle \\ \langle X_1^2 \rangle \\ \langle X_2^2 \rangle \\ \langle X_1 X_2 \rangle \\ \langle X_1^3 \rangle \\ \langle X_2^3 \rangle \\ \langle X_1^2 X_2 \rangle \\ \langle X_1 X_2^2 \rangle \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} f_{1x_1} - & f_{1x_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{32}f_{1x_1x_1x_1} & \frac{3}{32}f_{1x_2x_2x_2} & \frac{9}{32}f_{1x_1x_1x_2} & \frac{9}{32}f_{1x_1x_2x_2} \\ -k^2 & & & & & & & & \\ f_{2x_1} & f_{2x_2} - & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{32}f_{2x_1x_1x_1} & \frac{3}{32}f_{2x_2x_2x_2} & \frac{9}{32}f_{2x_1x_1x_2} & \frac{9}{32}f_{2x_1x_2x_2} \\ -dk^2 & & & & & & & & \\ 2\vartheta'_1 & 0 & 2f_{1x_1} - & 0 & 2f_{1x_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -2k^2 & & & & & & \\ 0 & 2\vartheta'_2 & 0 & 2f_{2x_2} - & 2f_{2x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2dk^2 & & & & & \\ \vartheta'_2 & \vartheta'_1 & f_{2x_1} & f_{1x_2} & f_{1x_1} + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & +f_{2x_2} - & & & & \\ & & & & -(1+d)k^2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3f_{1x_1} - & 0 & 3f_{1x_2} & 0 \\ & & & & & -3k^2 + 6\vartheta'_1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3f_{2x_2} - & 0 & 3f_{2x_1} \\ & & & & & & 3dk^2 + & & \\ & & & & & & +6\vartheta'_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{2x_1} + & 0 & f_{2x_2} - & 2f_{1x_2} + \\ & & & & & 2\vartheta'_2 & & -dk^2 - & +2\vartheta'_1 \\ & & & & & & & -2k^2 + & \\ & & & & & & & +2f_{1x_1} + & \\ & & & & & & & +2\vartheta'_1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{1x_2} + & 2f_{2x_1} + & f_{1x_1} - \\ & & & & & & +2\vartheta'_1 & +2\vartheta'_2 & -k^2 - \\ & & & & & & & -2dk^2 + & \\ & & & & & & & +2\vartheta'_2 + & \\ & & & & & & & +f_{2x_2} & \end{pmatrix}.$$

Нижние индексы x_i , $i = 1, 2$, определяют компоненту, по которой берется производная функции f_i . Рассмотрим теперь решение уравнения (15). Представляя решение уравнения (15) в виде $L(t) \sim \exp^{\lambda t}$, мы получаем следующее детерминированное уравнение для задачи для собственных значений:

$$|A - \lambda I| = 0,$$

где λ — собственные значения, а I — единичная матрица. Мы начнем с условия $k = 0$ при отсутствии какого-либо шума, соответствующего динамически устойчивому состоянию. При $k \neq 0$ и при отсутствии шума система все еще может оставаться в однородном устойчивом состоянии, если выбрать область параметров таким образом, чтобы не возникла диффузионная (тьюринговская) неустойчивость. Далее приведено условие неустойчивости, возникающей из-за аддитивного шума:

$$\text{Re } \lambda(k^2) > 0$$

для заданного набора параметров в системе. Это означает, что пространственно-временные возмущения $\langle x'_1(x, y, t) \rangle$ и $\langle x'_2(x, y, t) \rangle$ расходятся во времени, как и $e^{\lambda t}$. Структура матрицы устойчи-

ности слишком сложная, поэтому исключаем возможность определения собственных значений аналитически. В этой связи мы прибегаем к численному вычислению, чтобы определить диапазон k^2 , для которого $\text{Re } \lambda$ положительная. Существование этого диапазона волновых чисел указывает на то, что флуктуации в определенном диапазоне волновых чисел, которые делают хотя бы одну $\text{Re } \lambda$ положительной, демонстрируют только неустойчивость, вызванную шумом.

3. Апробация линейного и нелинейного анализа устойчивости

Апробируем развитые подходы на модели реакции–диффузии, предложенной в работе [Barrio, Varea, Aragon, 1999], соответствующей обобщенной модели (2) и имеющей следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha u(1 - r_1 v^2) + v(1 - r_2 u) + \delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \beta v \left(1 + \frac{\alpha r_1 u v}{\beta} \right) + u(\gamma + r_2 v) + d \delta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Коэффициенты располагаются подобным образом для сохранения взаимосвязи между химикатами. δ – параметр линейных размеров. r_1 и r_2 – параметры взаимодействия, соответствующие кубическому и квадратичному члену соответственно. Широко известно, что кубическое взаимодействие благоприятствует полосам и что квадратичное взаимодействие приводит к образованию пятен [Ermentrout, 1991]. α, β, γ – параметры модели (16).

Первое стационарное состояние, однородное по пространству (при условии $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$), имеет вид

$$u^0 = 0, \quad v^0 = 0.$$

Второе стационарное состояние:

$$u^0 = -v \frac{1 + \beta}{\alpha + \gamma}, \quad v_{1,2}^0 = \frac{-\frac{r_2}{r_1 \alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1 \alpha}\right)^2 - 4 \frac{\alpha + \gamma - \alpha(1 + \beta)}{r_1 \alpha(1 + \beta)}}}{4}.$$

Модель (16) в окрестности первой стационарной точки исследуется в работе [Riaz, Dutta, Ray, 2005], поэтому в настоящей работе исследуются результаты, полученные в окрестности второй стационарной точки.

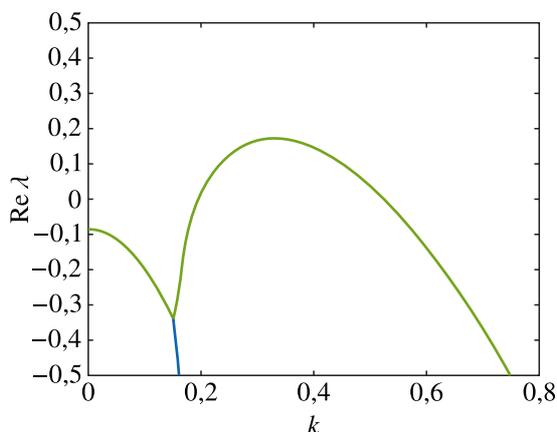


Рис. 1. Зависимость действительной части собственных значений, полученных в окрестности второй стационарной точки, от волнового числа для модели (16). Параметры модели: $\alpha = 0,53, \beta = -1,25, \gamma = -0,31, \delta = 2,0, r_1 = 0,02, r_2 = 0,2, d = 10,28$. Все величины безразмерны

На рис. 1 показана зависимость действительной части собственных значений от волнового числа в окрестности второй стационарной точки. Получено, что в области волновых чисел от 0,195 до 0,525 возникает неустойчивость Тьюринга. Данные результаты необходимы для проведения дальнейшего исследования рассматриваемой системы.

Теперь проведем нелинейный анализ устойчивости модели (16). Запишем для нее матрицу, с помощью которой можно найти собственные значения:

$$A = \begin{pmatrix} f_u^- & f_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{32}f_{uvv} \\ -k^2 & & & & & & & & \\ g_u & g_v^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{32}g_{uvv} \\ & -dk^2 & & & & & & & \\ 2\vartheta'_1 & 0 & \frac{2f_u^-}{2k^2} & 0 & 2f_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\vartheta'_2 & 0 & \frac{2g_v^-}{2dk^2} & 2g_u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta'_2 & \vartheta'_1 & g_u & f_v & \begin{matrix} f_u^+ \\ g_v^- \\ -(1+d)k^2 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} 3f_u^- \\ -3k^2+ \\ +6\vartheta'_1 \end{matrix} & 0 & 3f_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} 3g_v^- \\ -3dk^2+ \\ +6\vartheta'_2 \end{matrix} & 0 & 3g_u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} g_u^+ \\ +2\vartheta'_2 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} g_v^- \\ -dk^2- \\ -2k^2+ \\ +2f_u^+ \\ +2\vartheta'_1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2f_v^+ \\ +2\vartheta'_1 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} f_v^+ \\ +2\vartheta'_1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2g_u^+ \\ +2\vartheta'_2 \end{matrix} & \begin{matrix} f_u^- \\ -k^2- \\ -2dk^2+ \\ +2\vartheta'_2+ \\ +2g_v \end{matrix} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} f_u &= \delta(\alpha(1 - r_1v^{02}) - r_2v^0), \\ f_v &= \delta(-2\alpha r_1u^0v^0 + 1 - r_2u^0), \\ g_u &= \delta(\alpha r_1v^{02} + r_2v^0 + \gamma), \\ g_v &= \delta(2\alpha r_1u^0v^0 + \beta + r_2u^0), \\ f_{uvv} &= -2r_1\alpha\delta, \\ g_{uvv} &= 2r_1\alpha\delta. \end{aligned}$$

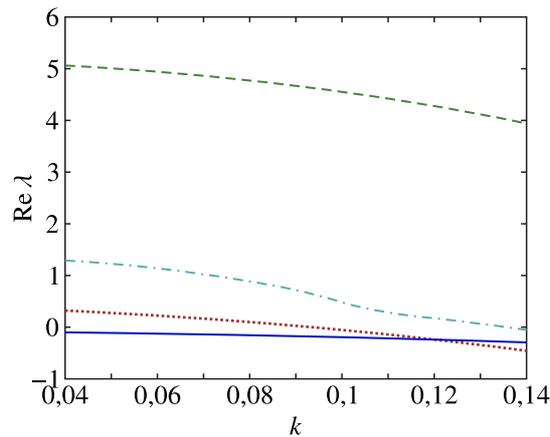


Рис. 2. Дисперсионные кривые для модели (16). Для второй стационарной точки, параметры модели: $d = 10,28$, $\alpha = 0,53$, $\beta = -1,25$, $\gamma = -0,31$, $\delta = 2,0$, $r_1 = 0,02$, $r_2 = 0,2$; $\vartheta'_1 = \vartheta'_2 = 0$ (сплошная линия), $\vartheta'_1 = \vartheta'_2 = 0,05$ (пунктирная линия), $\vartheta'_1 = \vartheta'_2 = 0,1$ (линия «точка-тире»), $\vartheta'_1 = \vartheta'_2 = 0,5$ (штриховая линия). Все величины безразмерны

На рис. 2 представлены дисперсионные зависимости максимальных значений действительной части собственного значения от волнового числа для второй стационарной точки, из которого следует, что с увеличением интенсивности шума возрастает и величина собственного значения. Видно, что полученные значения волновых чисел находятся вне области значений, соответствующей неустойчивости Тьюринга, представленной на рис. 1. Также найдены интенсивности шума, соответствующие области неустойчивости.

4. Численное моделирование эволюции системы (16)

Проведем численное исследование системы (16). Система (16) с аддитивным шумом имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha u(1 - r_1 v^2) + v(1 - r_2 u) + \eta_1(\mathbf{r}, t) + \delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \beta v \left(1 + \frac{\alpha r_1 u v}{\beta} \right) + u(\gamma + r_2 v) + \eta_2(\mathbf{r}, t) + d\delta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Как было отмечено выше, для моделирования эволюции системы (17) используются модифицированный метод переменных направлений с беспотоковыми граничными условиями и прямоугольная сетка с постоянными шагами. В качестве начальных условий выбрано однородное стационарное состояние.

На рис. 3 представлен результат численного моделирования эволюции системы (17). Полученные результаты демонстрируют процесс установления пространственной структуры при интенсивности аддитивного шума, соответствующей области неустойчивости, для второй стационарной точки. Несмотря на то что параметры системы находятся вне области неустойчивости Тьюринга, в модели возникают диссипативные структуры тьюрингового типа.

Заключение

В работе построена новая математическая модель, полученная путем обобщения ранее известных моделей со степенной нелинейностью. Разработана методология ее численно-аналитического исследования, состоящая из последовательного проведения линейного анализа устой-

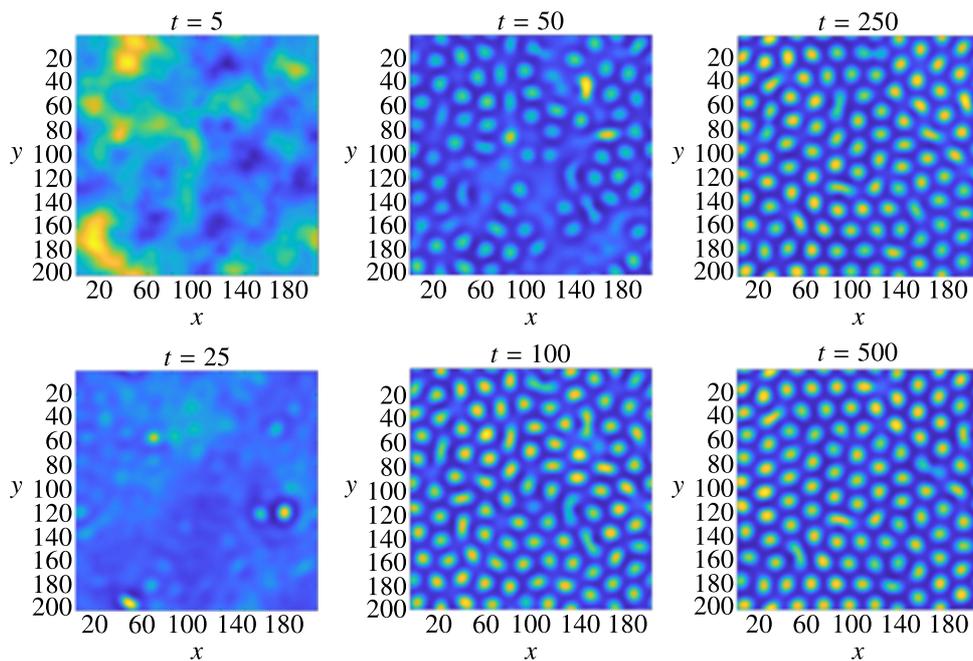


Рис. 3. Эволюция системы (17) для второй стационарной точки. Параметры модели: $d = 10,28$, $\alpha = 0,53$, $\beta = -1,25$, $\gamma = -0,31$, $\vartheta'_1 = \vartheta'_2 = 0,1$, $\delta = 2,0$, $r_1 = 0,02$, $r_2 = 0,2$. Все величины безразмерны

чивости, нелинейного анализа устойчивости с точностью до моментов третьего порядка включительно и численного моделирования эволюции системы. Проведена апробация методологии на предложенной Vargio et al. модели реакции – диффузии, по результатам исследования которой им показана схожесть получаемых структур с пигментацией рыб. С помощью линейного анализа получен диапазон значений волновых чисел, при которых в системе возникает неустойчивость Тьюринга. Нелинейный анализ демонстрирует возможность появления шумоиндуцированной неустойчивости в системе при учете нелинейности третьего порядка в области параметров, где отсутствует диффузионная неустойчивость. В рамках данного анализа найдены значения интенсивности аддитивного шума, при которых система переходит в неустойчивое состояние, способствующее возникновению пространственных структур тьюрингового типа. Процесс их образования продемонстрирован с помощью численного моделирования эволюции системы.

Разработанная методология является универсальной для моделей, структура которых соответствует (1), и позволяет анализировать системы из разных предметных областей (биологии, химии, физики, экономики, социологии и т. д.), что свидетельствует о ее широкой применимости. Описанный в статье нелинейный анализ устойчивости может быть расширен для определения условий возникновения неустойчивости и образования структур в системе путем учета моментов порядка выше третьего.

Список литературы (References)

- Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984. — 432 с.
Rabinovich M. I., Trubetskov D. I. Vvedenie v teoriyu kolebaniy i voln [Introduction to the theory of oscillations and waves]. — Moscow: Nauka, 1984. — 432 p. (in Russian).
- Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 589 с.
Samarskii A. A., Nikolaev E. S. Metody resheniya setochnykh uravnenii [Methods for solving grid equations]. — Moscow: Nauka, 1978. — 589 p. (in Russian).

- Стратанович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961. — 558 с.
Stratanovich V.F. Izbrannyye voprosy teorii flyuktuatsii v radiotekhnike [Selected topics in the theory of fluctuations in radio engineering]. — Moscow: Sov. radio, 1961. — 558 p. (in Russian).
- Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л.* Численные методы. — М.: Физматлит, 2004. — 400 с.
Formalev V.F., Reviznikov D.L. Chislennyye metody [Numerical methods]. — Moscow: Fizmatlit, 2004. — 400 p. (in Russian).
- Alqahtani A.M.* Numerical simulation to study the pattern formation of reaction–diffusion Brusselator model arising in triple collision and enzymatic // *Phys. Rev. E*. — 2018. — Vol. 56. — P. 1543–1566.
- Barrio R.A., Varea C., Aragon J.L.* A two dimensional numerical study of spatial pattern formation in interacting Turing systems // *Bulletin of Mathematical*. — 1999. — Vol. 61. — P. 483–505.
- Bashkirtseva I., Pavletsov M., Perevalova T., Ryashko L.* Analysis of noise-induced transitions in a thermo-kinetic model of the autocatalytic trigger // *Mathematics*. — 2023. — Vol. 11. — P. 4302.
- Bashkirtseva I., Ryashko L., Zaitseva S.* Stochastic sensitivity analysis of noise-induced transitions in a biochemical model with birhythmicity // *Phys. A: Math. Theor.* — 2020. — Vol. 53. — P. 265601.
- Buscatino A., Corradino C., Fortuna L., Frasca M.* Turing patterns via pinning control in the simplest memristive cellular nonlinear networks // *Chaos*. — 2019. — Vol. 29. — P. 103145.
- Carletti T., Nakao H.* Turing patterns in a network-reduced FitzHugh–Nagumo model // *Phys. Rev. E*. — 2020. — Vol. 101. — P. 022203.
- Coti Zelati M., Hairer M.* A noise-induced transition in the Lorenz system // *Commun. Math. Phys.* — 2021. — Vol. 383. — P. 4302.
- Donnelly R., Herman R., Prigogine I.* Non-equilibrium thermodynamics, variational techniques, and stability. — The University of Chicago Press, 1966. — Vol. 50. — 313 p.
- Ducimetiere Y., Boujo E., Gallaire F.* Noise-induced transitions past the onset of a steady symmetry-breaking bifurcation: the case of the sudden expansion // *Phys. Rev. Fluids*. — 2024. — Vol. 9. — P. 053905.
- Dykman M.I., Mannella R., McVintock P.V., Stocks N.G.* Fluctuation-induced transitions between periodic attractors: observation of supernarrow spectral peaks near a kinetic phase transition // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — Vol. 65. — P. 48–51.
- Ermentrout B.* Stripes or spot? Nonlinear effects in bifurcation of reaction–diffusion equations on the square // *Proc. R. Soc. Lond. A*. — 1991. — Vol. 434. — P. 413–417.
- Gambino G., Lombardo M.C., Sammartino M., Sciacca V.* Turing pattern formation in the Brusselator system with nonlinear diffusion // *Phys. Rev. E*. — 2013. — Vol. 88. — P. 042925.
- Hoyle R.* Pattern formation: an introduction to methods. — Cambridge: Cambridge University Press, 2018. — 147 p.
- Huang M., Yang A., Yuan S., Zhang T.* Stochastic sensitivity analysis and feedback control of noise-induced transitions in a predator–prey model with anti-predator behavior // *Mathematical Biosciences and Engineering*. — 2024. — Vol. 20. — P. 4219–4242.
- Kim S., Park S.H., Ryu C.S.* Colored-noise-induced multistability in nonequilibrium phase transitions // *Phys. Rev. E*. — 1998. — Vol. 58. — P. 7994–7997.
- Kozak M., Eamonn A.G., Klika V.* Pattern formation in reaction–diffusion systems with piece-wise kinetic modulation: an example study of heterogeneous kinetics // *Phys. Rev. E*. — 2019. — Vol. 100. — P. 042220.
- Kurushina S.E., Shapovalova E.A.* How disorder originates and grows inside order // *J. Stat. Phys.* — 2019. — Vol. 176. — P. 69–84.
- Ledesma-Duran A., Aragon J.L.* Primary and secondary instabilities of the mixed mode solution in a reaction–diffusion system near the codimension–two Turing–Hopf point. — Elsevier, 2019. — Vol. 124. — P. 68–77.

- Lin Z., Lu Z., Di Z., Tang Y.* Learning noise-induced transitions by multi-scaling reservoir computing // *Nature Communications*. — 2024. — Vol. 15. — P. 6584.
- Llabres J., San Miguel M., Toral S.* Partisan voter model: Stochastic description and noise-induced transitions // *Phys. Rev. E*. — 2023. — Vol. 108. — P. 054106.
- Maini P., Wooley T.* The Turing model for biological pattern formation // *The Dynamics of Biological Systems*. — 2019. — Vol. 4. — P. 189–204.
- Mazur P., De Groot S. R.* *Non-equilibrium thermodynamics*. — Mineola: Courier Corporation, 2013. — 528 p.
- Morton K. W.* *Numerical solution of partial differential equations: an introduction*. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005. — 278 p.
- Owolabi K. M.* High-dimensional spatial patterns in fractional reaction–diffusion system arising in biology. — Elsevier, 2020. — Vol. 134. — P. 109723.
- Prigogine I., Lefever R.* *Introduction to thermodynamics of irreversible processes*. — California: Interscience Publishers, 1967. — 147 p.
- Prigogine I., Lefever R.* Symmetry breaking instabilities in dissipative systems // *J. Chem. Phys.* — 1968. — Vol. 48. — P. 1696–1697.
- Riaz S. S., Dutta S., Ray D. S.* Pattern formation induced by additive noise: a moment-based analysis // *Eur. Phys. B*. — 2005. — Vol. 2. — P. 255–263.
- Smith-Roberge J., Iron D., Kolokolnikov T.* Pattern formation in bacterial colonies with density-dependent diffusion // *J. Appl. Math.* — 2019. — Vol. 30. — P. 196–218.
- Tian C., Ruan S.* Pattern formation and synchronism in an allelopathic plankton model with delay in a network // *SIAM J. Applied Dynamical Systems*. — 2019. — Vol. 18. — P. 531–557.
- Wu D., Wang H., Yuan S.* Stochastic sensitivity analysis of noise-induced transitions in a predator–prey model with environmental toxins // *Mathematical biosciences and engineering*. — 2019. — Vol. 16. — P. 2141–2153.
- Yi F., Gaffne E. A., Aragon J.* The bifurcation analysis of Turing pattern formation induced by delay and diffusion in Schnakenberg system // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. — 2017. — Vol. 22. — P. 647–668.
- Zhou J., Shi J.* Pattern formation in a general glycolysis reaction–diffusion system // *J. Appl. Math.* — 2015. — Vol. 80. — P. 1703–1738.