

УДК: 62-529

Имитационная модель сплайн-интерполяции кусочно-линейной траектории для станков с ЧПУ

В. М. Иванов^а

Ульяновский государственный технический университет (УлГТУ),
Россия, 432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32

E-mail: ^а v.ivanov@ulstu.ru

*Получено 27.05.2024, после доработки — 10.03.2025.
Принято к публикации 13.03.2025.*

В традиционных системах ЧПУ каждый из отрезков кусочно-линейной траектории описывается отдельным кадром управляющей программы. При этом формируется трапециидальная траектория движения, а сшивание отдельных участков производится при нулевых значениях скорости и ускорения. Повышение производительности связано с непрерывностью обработки, которое в современных системах ЧПУ достигается за счет использования сплайн-интерполяции. Для кусочно-линейной траектории, которая является базовой для большинства изделий, наиболее приемлемым является сплайн первой степени. Однако даже в простейшем случае сплайновой интерполяции закрытость базового программного обеспечения ведущих производителей систем ЧПУ ограничивает возможности не только разработчиков, но и пользователей. С учетом этого целью данной работы является детальная проработка структурной организации и алгоритмов работы имитационной модели кусочно-линейной сплайн-интерполяции. В качестве основной меры, позволяющей снизить динамические ошибки обработки, рассматривается ограничение на рывок и ускорение. При этом особое значение уделяется S-образной форме кривой скорости на участках разгона и торможения. Это связано с условиями реализации сплайн-интерполяции, одним из которых является непрерывность движения, которое обеспечивается за счет равенства первой и второй производной при стыковке участков траектории. Подобная постановка соответствует принципам реализации комбинированных систем управления следящего электропривода, которые обеспечивают частичную инвариантность к управляющим и возмущающим воздействиям. В качестве базы структурной организации принята эталонная модель сплайн-интерполятора. Рассмотрены также вопросы масштабирования обработки, в основе которых заложено снижение скорости вектора по отношению к базовому значению. Это позволяет повысить точность перемещений. Показано, что диапазон изменений скорости перемещений может быть больше десяти тысяч и ограничен только возможностями регулирования скорости исполнительных приводов.

Ключевые слова: кусочно-линейная траектория, рывок, S-образная форма кривой скорости, сплайн, масштаб обработки, сервопривод

UDC: 62-529

Simulation model of spline interpolation of piecewise linear trajectory for CNC machine tools

V. M. Ivanov^a

Ulyanovsk State Technical University (UISTU),
32 Northern Venets st., Ulyanovsk, 432027, Russia

E-mail: ^a v.ivanov@ulstu.ru

Received 27.05.2024, after completion — 10.03.2025.

Accepted for publication 13.03.2025.

In traditional CNC systems, each segment of a piecewise linear trajectory is described by a separate block of the control program. In this case, a trapezoidal trajectory of movement is formed, and the stitching of individual sections is carried out at zero values of speed and acceleration. Increased productivity is associated with continuous processing, which in modern CNC systems is achieved through the use of spline interpolation. For a piecewise linear trajectory, which is basic for most products, the most appropriate is a first-degree spline. However, even in the simplest case of spline interpolation, the closed nature of the basic software from leading manufacturers of CNC systems limits the capabilities of not only developers, but also users. Taking this into account, the purpose of this work is a detailed study of the structural organization and operation algorithms of the simulation model of piecewise linear spline interpolation. Limitations on jerk and acceleration are considered as the main measure to reduce dynamic processing errors. In this case, special attention is paid to the S-shaped shape of the speed curve in the acceleration and deceleration sections. This is due to the conditions for the implementation of spline interpolation, one of which is the continuity of movement, which is ensured by the equality of the first and second derivatives when joining sections of the trajectory. Such a statement corresponds to the principles of implementing combined control systems of a servo electric drive, which provide partial invariance to control and disturbing effects. The reference model of a spline interpolator is adopted as the basis of the structural organization. The issues of processing scaling, which are based on a decrease in the vector speed in relation to the base value, are also considered. This allows increasing the accuracy of movements. It is shown that the range of changes in the speed of movements can be more than ten thousand, and is limited only by the speed control capabilities of the actuators.

Keywords: piecewise linear trajectory, jerk, S-shaped speed curve, spline, processing scale, servo drive

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 2, pp. 225–242 (Russian).

Введение

В современных системах ЧПУ станками существенно расширены возможности программного обеспечения. Наряду с многообразием подходов к разработке человеко-машинного интерфейса НМИ, объектно-ориентированного, диалогового, параметрического программирования значительное внимание уделяется функциям ядра ЧПУ [Сосонкин, Мартинов, 2005]. К тенденциям развития базового программного обеспечения можно отнести функции, обеспечивающие контроль и адаптацию к изменяющимся условиям обработки. Одним из наиболее значимых алгоритмов в системах ЧПУ является алгоритм опережающего просмотра (Look-ahead). Алгоритм предназначен для анализа ограничений и отклонений от расчетной траектории [Любимов, Мартинова, Обухов, 2016; Zhao, Zhu, Ding, 2013]. Результатом просмотра буфера кадров являются своевременная коррекция скорости подачи и повышение точности обработки. Вместе с тем подобные задачи фактически являются вспомогательными, и основное их назначение — устранение ошибок проектирования управляющих программ.

Не меньшее значение уделяется алгоритмам интерполяции, в том числе сплайн-интерполяции [Завьялов, Квасов, Мирошниченко, 1980; Де Бор, 1985; Гусев, Букреев, 2007]. Для кусочно-линейной траектории, которая является базовой для большинства изделий, наиболее приемлемым является сплайн первой степени. Однако, несмотря на простоту, данный вариант имеет наиболее жесткие условия реализации, так как нарушаются условия гладкости траектории, а ускорения разных сегментов представляют собой разрывы [Biagiotti, Melchiorri, 2008]. Известен ряд условий для сшивания отдельных участков траектории, в том числе при нулевых значениях скорости и ускорения. Каждый кадр управляющей программы в этом случае не зависит друг от друга. Однако при этом фактически теряется основное преимущество сплайн-интерполяции, которое связано с непрерывностью обработки.

Учитывая, что точность обработки определяется не только точностью задающих сигналов, но и исполнительными приводами, существенное значение имеют вопросы динамики электроприводов. В качестве дополнительной меры, позволяющей снизить динамические ошибки приводов подач, рассматривают ограничение на рывок и ускорение [Кривцов, Комбаров, Сорокин, 2012; Nam, Yang, 2004; Ni et al., 2019]. При этом особое значение уделяется S-образной форме кривой скорости на участках разгона и торможения. Это связано с условиями реализации сплайн-интерполяции, одним из которых является непрерывность движения, которое обеспечивается за счет равенства первой и второй производной при стыковке участков траектории. Подобная постановка соответствует принципам реализации комбинированных систем управления следящего электропривода, которые обеспечивают частичную инвариантность к управляющим и возмущающим воздействиям [Михайлов, 1989; Иванов, 2021].

В многочисленных работах приводятся основные понятия и ограничения, связанные с реализацией сплайн-интерполяции, в том числе NURBS-интерполяции [Зеленский, Абдуллин, Алеко, 2021; Zhang et al., 2011]. Вместе с тем переход от базовых функций B-сплайна к отработке их в реальном времени представлен недостаточно полно. В большинстве случаев результаты отработки траектории для предлагаемых решений не приводятся. В значительной степени это связано с трудностями натуральных экспериментов, так как доступ к базовому программному обеспечению ЧПУ ограничен, а пользовательских возможностей недостаточно для реализации предлагаемых решений. С учетом этого особое значение имеют рациональные принципы управления, позволяющие минимизировать ошибки отработки траектории и подготовительные действия при обработке исходных данных.

Целью настоящей работы является разработка имитационной модели сплайн-интерполятора как эталонной модели формирования управляющих величин. Дополнительные цели разработки имитационной модели кусочно-линейной сплайн-интерполяции связаны с проверкой и постановкой задач объектно ориентированного алгоритмического и программного обеспечения.

Линейная интерполяция с учетом рывка и ускорения

Линейная интерполяция и круговая интерполяция относятся к базовым функциям программного обеспечения станков с ЧПУ. К числу наиболее известных методов формирования траектории движения можно отнести метод оценочной функции и метод цифровых дифференциальных анализаторов. В традиционных системах ЧПУ траектория каждого из отрезков линии описывается отдельным кадром управляющей программы. При этом формируется трапециидальная траектория движения, содержащая участки разгона, движения с постоянной скоростью и торможения. Такой режим работы отрицательно влияет на динамику работы привода. Кроме того, в зависимости от угла наклона, неточное соотношение скоростей подач приводит к дополнительным погрешностям.

В зависимости от принципа реализации приводов подач у каждого из указанных методов есть свои преимущества и недостатки. Основное преимущество сплайновой интерполяции заключается в том, что привязка координат осуществляется к вектору движения.

Так как вектор \vec{s} характеризуется модулем, то его текущую оценку можно представить как $S = |\vec{s}|$, а заданное значение на текущем интервале — $S_n = \sum_{i=1}^n |\vec{s}_i|$, где $i = 1, 2, 3, \dots, n$ — номер участка траектории; $s_i = \{x_i, y_i, z_i\} - \{x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}\}$ — длина участка, определенная через координаты начальной и конечной точки отрезка. При линейно-кусочной траектории направляющие векторы определяются проекциями на соответствующие плоскости. В трехмерной системе декартовых координатах каждый участок траектории может быть представлен через проекции на плоскости $s_{i,xy}$, $s_{i,yz}$ или $s_{i,xy}$, $s_{i,xz}$. Причем основная отработка может быть привязана к координатам x и y , а вспомогательная по оси z — к одной из основных x или y . Для токарной обработки оси x и z тождественны друг другу. Вектор в этом случае определяется результатом движения по двум координатам. Для фрезерной обработки плоскостей можно принять аналогичное условие.

Абстрагируясь от направления движения, примем в качестве основной величины пройденный путь S .

Планирование скорости с учетом плавного сопряжения участков траектории предусматривает формирование S-образных участков разгона и торможения. Решение данной задачи представлено в ряде работ как линейная комбинация базисных функций В-сплайна [Piegl, Tiller, 1997; Biagiotti, Melchiorri, 2010; Lee et al., 2011]. Заметим, что переход от параметрического представления кривых к отработке их в реальном времени, как правило, выпадает из рассмотрения или представлен недостаточно полно. При обработке многоугольника обработка каждой из сторон однотипна, а участки разгона и торможения можно представить в виде комбинации базисных функций В-сплайна:

$$s(t) = \sum_{i=0}^m p_i^k B_i^k(t),$$

где p_i^k — коэффициенты; $i = 0, 1, \dots, m$ — набор точек, определяющих условия аппроксимации/интерполяции данных; $k = 0, 1, \dots, n$ — степень сплайна.

Базисная функция В-сплайна степени 0 равна 1 и определена на одном интервале:

$$B_i^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_i \leq t < t_{i+1}, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

К числу основных преимуществ использования В-сплайна является то, что базисные функции соответствуют условиям склеивания прямой и обратной функции, которые для i -го В-сплайна степени k определяется рекурсивно формулой Кокса – де Бура:

$$B_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(t).$$

Элементарные В-сплайны первой и второй степени на двух первых интервалах аппроксимации определяются следующим образом:

$$B_{i=1,2}^1(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}B_1^0(t) + \frac{t_2-t}{t_2-t_1}B_2^0(t) = \frac{t}{T}B_1^0(t) + \frac{1-t}{T}B_2^0(t),$$

$$B_{i=1,2}^2(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}B_1^1(t) + \frac{t_2-t}{t_2-t_1}B_2^1(t) = \left(\frac{t}{T}\right)^2 B_1^1(t) + \left(\frac{1-t}{T}\right)^2 B_2^1(t).$$

Данные выражения представляют прямую и обратную функции, характеризующие соответственно ускорение $a(t)$ и скорость $v(t)$ на участках разгона и выхода на установившиеся значения.

Переход от параметрического представления ускорения к временному представлению может быть записан следующим образом:

$$a(t) = \sum_{i=0}^2 p_i^1 B_i^1(t) \Rightarrow p_0^1 \int_0^T (\eta(t) - \eta(t-T)) dt - p_1^1 \int_T^{2T} (\eta(t-T) - \eta(t-2T)) dt = j \left(t|_0^T - t|_T^{2T} \right),$$

где $j = p_0^1 = p_1^1$ – рывок, $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$ – функция Хевисайда.

Аналогично можно представить функцию скорости на участке разгона:

$$v(t) = \sum_{i=0}^2 p_i^2 B_i^2(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^T p_0^2 \left(p_0^1 \int_0^T (\eta(t) - \eta(t-T)) dt \right) dt - \int_T^{2T} p_1^2 \left(p_1^1 \int_T^{2T} (\eta(t-T) - \eta(t-2T)) dt \right) dt = v_1 + v_2.$$

Вводя в рассмотрение коэффициент $k_a = p_0^2 p_0^1 = p_1^2 p_1^1$, получим значения скорости $v_1 = k_a \frac{j^2}{2} \Big|_0^T$, $v_2 = k_a \frac{j^2}{2} \Big|_T^{2T}$, каждое из которых равно $\frac{v_{\max}}{2}$ – половине максимального значения скорости.

Процесс формирования временных последовательностей с учетом sign составляющих можно представить дискретной функцией:

$$f_i^*(t) = \eta(t) - \sum_{i=1}^m p_i^0 \eta(t-T_i) \in [-1, 0, 1],$$

где $p_i^0 \in [-2, -1, 1, 2]$ – вес в зависимости от формируемой траектории, $T_i = t_{i+1} - t_i$.

При этом значение $f_i^*(t) = 0$ соответствует установившемуся движению, которое в свою очередь зависит от значения ускорения и скорости на текущем интервале.

Таким образом, переход от сплайна к уравнениям движения на интервале T_i можно представить следующей системой уравнений:

$$a = \int j dt = jt,$$

$$\omega = \int a dt = j \frac{t^2}{2},$$

$$\theta = \int \omega dt = j \frac{t^3}{6},$$

где j, a, ω, θ — соответственно рывок, угловое ускорение, скорость и угол поворота исполнительных двигателей. Преобразование угловых значений к линейным значениям $s(t) = k_f \theta(t)$ осуществляется через передаточное отношение, которое для станков с ЧПУ может быть определено как передаточный коэффициент $k_f = \frac{F_m}{60\omega_m}$ между максимальными значениями скорости подачи F_m и частотой вращения двигателя ω_m .

Математическая модель уравнений движения может быть представлена в виде обыкновенных дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

где \mathbf{x} — вектор состояния, \mathbf{u} — вектор управления, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \subseteq \mathbf{R}^m$, \mathbf{U} — компактное множество, $m \leq n$.

Для системы дифференциальных уравнений заданы начальное состояние

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 = [x_1^0 \ \dots \ x_n^0]^T$$

и терминальное состояние

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f = [x_1^f \ \dots \ x_n^f]^T,$$

где t_f — время достижения терминального состояния.

Частное решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$ при заданном времени достижения терминального состояния:

$$\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i(t, \mathbf{x}^0) - x_i^f)^2}.$$

Заметим, что каждое частное решение может содержать ошибку ε_i , а их накопление может привести к значительным отклонениям от расчетной траектории.

Для траектории, заданной в виде множества точек в подпространстве \mathbf{R}^k , критерий минимальной ошибки движения по заданной траектории может быть представлен следующим образом:

$$J = \min_{t \in [0, t_f]} \sqrt{\min_u \sum_{i=1}^k (x_i^* - x(t, s_i^0))^2},$$

где k — количество точек на траектории в подпространстве \mathbf{R}^k .

Таким образом, задача формирования управления может быть сведена к терминальной задаче, где на основе метода аналитического конструирования оптимизация траектории достигается за счет введения обратных связей. Эта задача требует неформализованных процедур, которые зависят от модели объекта [Дивеев, Шмалько, 2020].

Слайн-интерполятор с привязкой развертки траектории к времени

Одной из наиболее существенных величин, влияющей на переходные процессы, является предельное значение величины ускорения. Рассмотрим возможный вариант формирования траектории с двумя равными участками линейного увеличения и уменьшения ускорения. Опуская индексы, примем в качестве исходных данных: $s = 20$ мм — заданное линейное перемещение; $\theta = \frac{s}{k_f} = 200$ рад — угловое перемещение с учетом передаточного отношения $k_f = 0,1$ мм/об.; $j^* = 50$ рад/с³ — базовое значение углового рывка; $a^* = 20$ рад/с² — базовое значение ускорения; $\omega^* = 100$ рад/с* — заданное значение угловой скорости. Разобьем кривую разгона на два участка: возрастающего (0...50) и убывающего (50...100) ускорения.

С учетом исходных данных длительность 1-го интервала равна $T_1 = \frac{a^*}{j^*} = 0,4$ с. Условие выхода на заданное значение скорости $\omega_1 = 50$ рад/с² запишем следующим образом:

$$\omega_1 = k_a j^* \frac{T_1^2}{2} = k_a a^* \frac{T_1}{2},$$

откуда определим коэффициент приведения ускорения $k_a = \frac{2\omega_1}{a^* T_1} = \frac{2 \cdot 50}{20 \cdot 0,4} = 12,5$.

Интервал выхода на установившееся значение скорости $T_2 = T_1$, соответствует движению с уменьшением ускорения до нуля. Определим угловые расстояния, пройденные на участке разгона и выхода на установившееся значение скорости:

$$\theta_1 = j k_a \frac{T_1^3}{6} = k_a a^* \frac{T_1^2}{6} \approx 6,667 \text{ рад},$$

$$\theta_2 = \int_{T_1}^{T_1+T_2} \omega_1 dt + \int_{T_1}^{T_1+T_2} k_a (a^* - jt) dt = \omega_1 T_2 + k_a a^* \frac{T_2^2}{2} - k_a j \frac{T_2^3}{6} \approx 33,333 \text{ рад},$$

$$\theta_p = \theta_1 + \theta_2 \approx 40 \text{ рад}.$$

Учитывая симметричность участков разгона и торможения, определим интервал движения с постоянной скоростью $T_3 = \frac{\theta - 2\theta_p}{\omega} = 1,2$ с.

Проверка результатов расчетов осуществлялась на имитационной модели интерполятора. В имитационных средах моделирования [Дьяконов, 2001] независимо от формы визуального представления блоков динамических звеньев формирование выходных величин, определяющих переходные процессы, сводится к решению дифференциальных уравнений методами численного интегрирования. Программная среда проектирования MatLab-Simulink [Герман-Галкин, 2002] относится к числу наиболее универсальных сред моделирования динамических систем. Библиотека Simulink представляет собой набор визуальных объектов, использование которых позволяет исследовать практически любую электромеханическую систему с различным уровнем детализации. В инженерной практике широко используется аппарат передаточных функций. Переход от оригинала $f(t)$ к изображению $F(s)$ осуществляется с помощью преобразования Лапласа:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

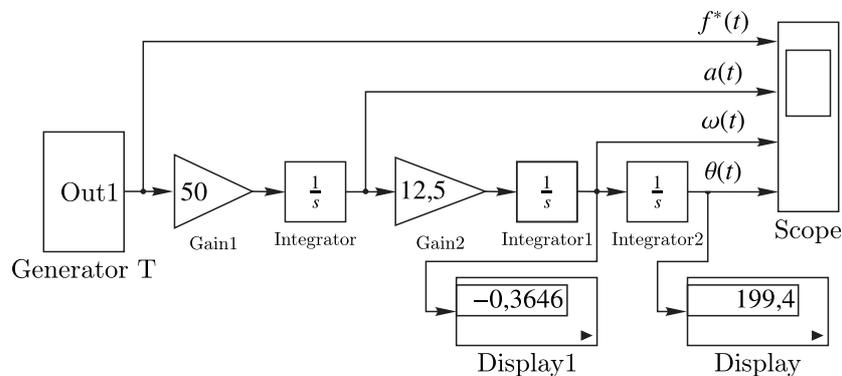


Рис. 1. Структурная схема сплайн-интерполятора с временной разверткой траектории

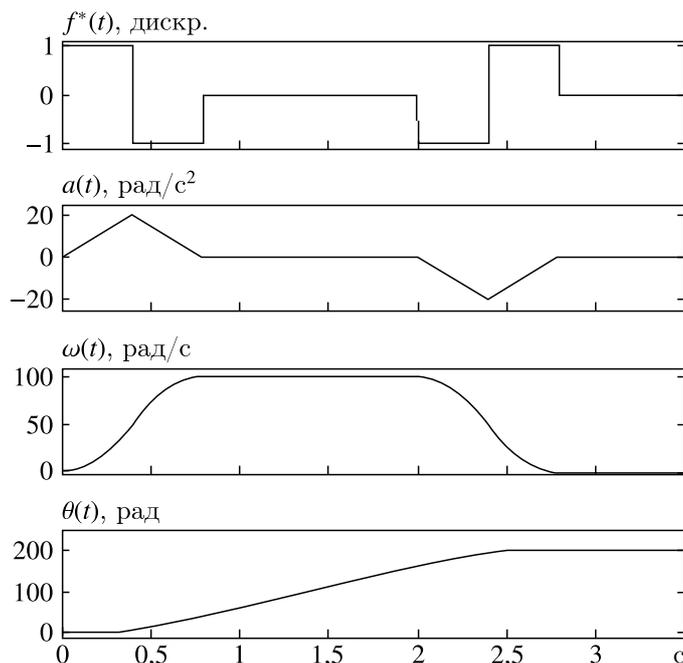


Рис. 2. Диаграммы формирования траектории

Структурная схема сплайн-интерполятора представлена на рис. 1. Формирование выходных величин осуществляется интеграторами с передаточной функцией $W(s) = \frac{1}{s}$, интервалы T_i существования базовых функций формируются генератором временных последовательностей (Generator T). В качестве метода численного интегрирования принят метод Рунге–Кутты 4-го порядка с фиксированным шагом 0,001 с. Вычислительная погрешность метода численного интегрирования зависит от исходной функции. С учетом этого погрешность отработки определялась по отношению к структуре, содержащей аналоговые интеграторы. Для вывода переходных процессов на график использовался осциллограф (Scope). Контроль результатов отработки траектории осуществлялся с помощью цифровых дисплеев (Display, Display1). Диаграммы формирования задающих сигналов приведены на рис. 2. Результаты проверки показали, что формирование заданий на отработку перемещений осуществляется с ошибками, зависящими как от разрядности округления иррациональных чисел, так и шага интегрирования. Причем накопление погрешности зависит от времени и, следовательно, от длины участка.

При обработке правильных выпуклых многоугольников длина стороны многоугольника, вписанного в окружность, равна $a = 2R \sin \frac{\pi}{n}$, где R – радиус, n – число сторон.

Площадь правильного многоугольника – $S_m^* = \frac{n}{4} a^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$.

С учетом накопления погрешности на каждом участке траектории площадь многоугольника будет

$$S_m = \frac{n}{4} (a + \nabla a)^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = \frac{n}{4} (a^2 + 2a\nabla a + \nabla a^2) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

Оценка разности площадей

$$\nabla S_m = S_m - S_m^* = \frac{n}{4} (2a\nabla a + \nabla a^2) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$$

показывает, что увеличение длины участка траектории может привести к значительному приращению площади (металлоемкости изделия).

Повышение точности расчетов связано с повышением разрядности вещественных чисел, что приводит к значительным затратам времени и повышенным требованиям к быстрдействию

оборудования. Принципиально данные ошибки не устранимы и требуется другой качественный подход к алгоритмам вычислений [Амосов, Дубинский, Копченова, 2023].

Переход к алгоритму обработки с контролем длины на каждом участке траектории позволяет исключить данную ошибку, по крайней мере в n раз, где n — число сторон многоугольника. С учетом критерия наиболее рациональным решением для устранения накопления погрешностей является изменение принципов работы сплайн-интерполятора.

Сплайн-интерполятор с контролем длины участков траектории

Для повышения точности обработки задающих воздействий в системах управления используется принцип отрицательной обратной связи. Данный принцип предполагает, что регулятор компенсирует рассогласование в функции ошибки между заданным и фактическим значением контролируемой величины. Дальнейшее исследование связано с разработкой структуры сплайн-интерполятора с обратными связями и контролем длины участков кусочно-линейной траектории.

Рассмотрим вариант, соответствующий более детальному представлению структуры задатчика ускорения $\alpha_{\max} = \int_0^{T_m} j dt = jT_m \equiv k_j T_m$, где k_j — нормированный коэффициент, соответствующий фиксированному значению рывка j , $T_m = \frac{a_{\max}}{j}$ — интервал времени, соответствующий выходу на максимальное значение ускорения. Формирование скорости с равными участками разгона и выхода на установившееся значение можно записать следующим образом:

$$\frac{\omega_{\max}}{2} = \int_0^{T_m} \alpha dt \equiv \int_0^{T_m} k_a t dt = k_a \frac{T_m^2}{2},$$

где $k_a = k_j k_3$ — нормированный коэффициент ускорения, k_3 — коэффициент приведения ускорения к его заданному значению.

Таким образом, в качестве величин, соответствующих условиям переключения и выхода на установившиеся значения, можно принять предельные значения скорости и ускорения.

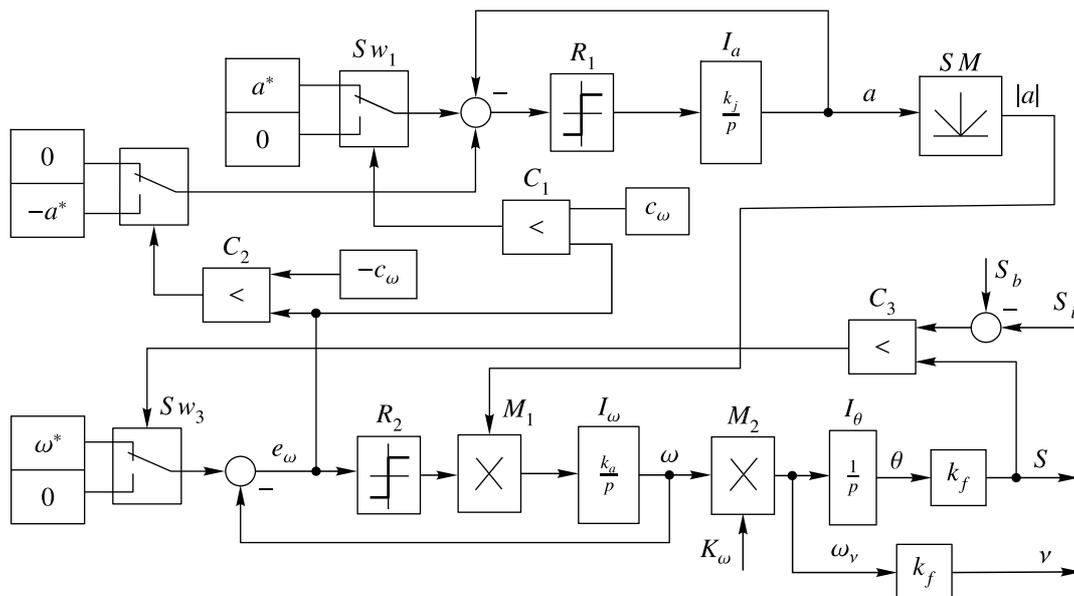


Рис. 3. Структурная схема формирователя S-образной формы кривой скорости совместно с блоком задания углового и линейного положения

Структурная схема формирователя S-образной кривой скорости представлена на рис. 3. Блок ускорения и блок скорости реализованы на базе интеграторов I_a , I_ω с отрицательной обратной связью. Изменение выходных величин интеграторов и их ограничение обеспечиваются за счет регуляторов релейного типа R_1 , R_2 . Формирование S-образной формы скорости основано на использовании параметрического звена (блока умножения M_1) в канале входного сигнала интегратора I_ω . При этом можно выделить две основные ветви кривой скорости, соответствующие участкам разгона и торможения. На участке разгона ускорение положительное, а на участке торможения — отрицательное. В соответствии с этим знак входного сигнала задатчика ускорения a^* должен изменяться с плюса на минус.

В начале на вход задатчика ускорения через переключатель Sw_1 подается положительное значение ускорения a^* . Выходной сигнал задатчика a линейно возрастает до его максимального значения a^* , после чего релейный элемент R_1 переходит в скользящий режим работы, стабилизируя выходное значение на заданном уровне. Учитывая, что выходная величина a блока ускорения используется как параметр, ее значение формируется блоком SM в виде модуля. Одновременно формируется значение скорости, темп изменения которой первоначально определяется возрастающим значением ускорения, а затем — постоянным ускорением. При выходе ошибки контура скорости e_ω на пороговое значение c_ω компаратор C_1 переходит в состояние, соответствующее логическому нулю, и производится переключение сигнала задания ускорения на 0. Далее формируется линейное уменьшение ускорения до 0 с выходом на участок движения с постоянной скоростью.

Отработка участка траектории осуществляется до тех пор, когда пройденный путь S не будет равен значению $(S_i - S_b)$, где S_b — длина участка торможения равна участку разгона. Переход на участок торможения сопровождается переключением задания скорости с его максимального значения ω^* на 0. При этом на выходе сумматора задатчика скорости формируется отрицательное значение ошибки $-e_\omega$, что приводит к срабатыванию компаратора C_2 и переключению задания ускорения с 0 на $-a^*$. Это соответствует формированию отрицательной ветви ускорения. С учетом знака ошибки $-e_\omega$ спадающий участок скорости формируется по модулю ускорения $|-a^*|$. Далее, аналогично участку разгона, при достижении порога срабатывания релейного звена R_1 значение скорости уменьшается с постоянным ускорением. Затем (при возврате компаратора C_2 в исходное состояние) осуществляется переход на параболический участок движения с уменьшением значения скорости до нуля.

Модель сплайн-интерполятора

Рассмотренные принципы формирования траектории можно использовать в технологических процессах, где основным понятием служат типовые формы, которые определяют области удаляемого материала заготовки. Идеология обработки типовых форм предполагает использование специализированного программного обеспечения, в котором технологическая и геометрическая задачи взаимосвязаны и дополняют друг друга. Все программные компоненты, характеризующие процесс обработки, целесообразно собирать в одном программном модуле. Это относится как к формированию траектории движения, так и к логике управления, определяющей последовательность операционных переходов. Данная задача на уровне модели может быть реализована на базе языков высокого уровня, что соответствует практически конечной стадии разработки. Однако неопределенность задачи на начальной стадии разработки и многообразие процессов реальной системы затрудняют процесс исследования. По сути, программная среда MatLab+Simulink представляет собой набор готовых программных и логических компонентов, оформленных в виде блоков, что значительно ускоряет процесс исследования и проектирования. В этом случае более наглядны реальные процессы, фрагментация которых позволяет производить автономную отладку модулей с последующей компоновкой их в единое целое.

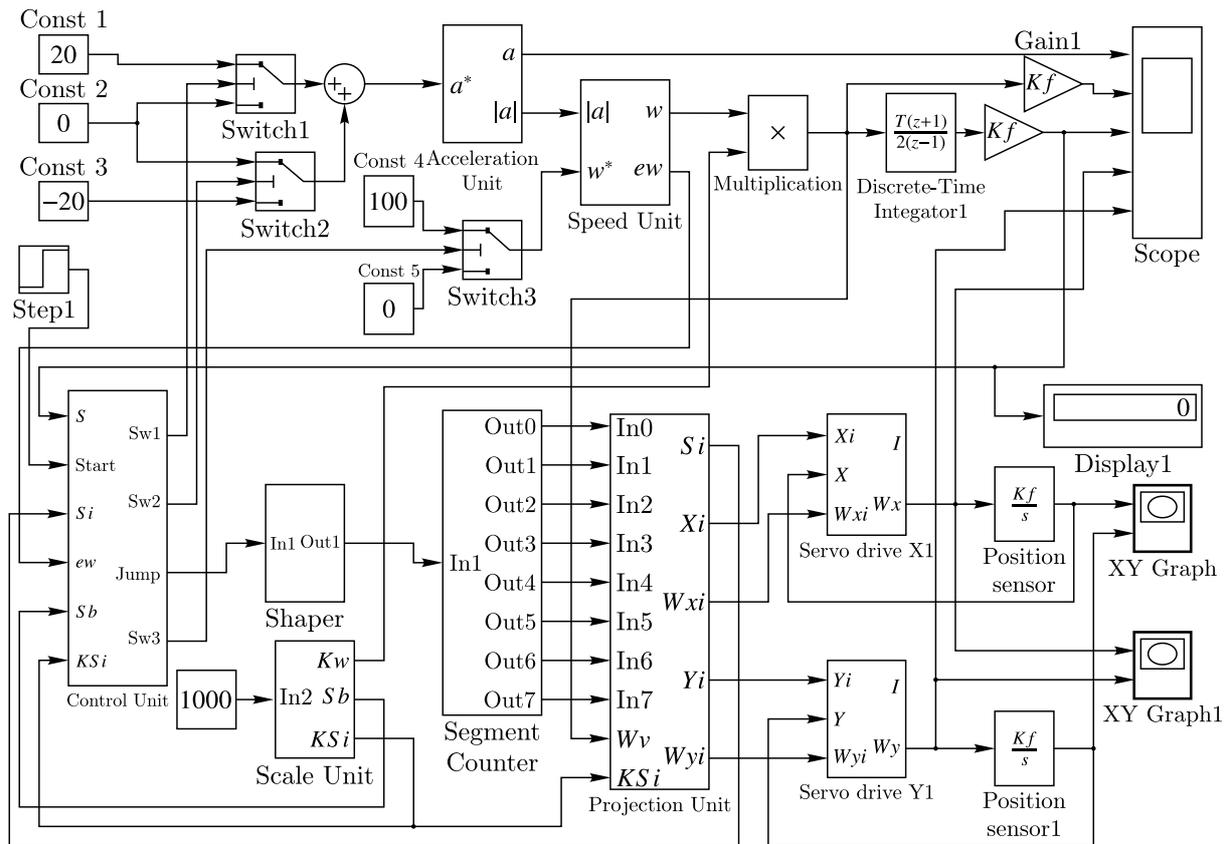


Рис. 4. Имитационная модель сплайн-интерполятора для формирования кусочно-линейной траектории совместно с исполнительными приводами

Цифровая модель сплайн-интерполятора представлена на рис. 4. Основные задачи обработки траектории представляют собой взаимосвязанный процесс, в котором можно выделить ввод исходных данных участка траектории и их обработку. Основным отличием структур блоков ускорения и скорости от аналогового прототипа (рис. 3) является использование дискретных интеграторов. Разработка дискретных систем осуществляется на основе z-преобразований [Смит, 1980; Изерман, 1984]. Для перехода к дискретному интегратору, свойства которого приближены к свойствам непрерывного интегратора, в структуру преобразования вводят экстраполятор нулевого порядка

$$W_0(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$$

и корректирующее звено

$$W_k(p) = e^{\gamma Tp}.$$

Раскладывая функцию $e^{\gamma Tp}$ в ряд Маклорена, получим

$$e^{\gamma Tp} = 1 + \gamma Tp + \frac{(\gamma Tp)^2}{2!} + \frac{(\gamma Tp)^3}{3!} + \dots \approx 1 + \gamma Tp.$$

С учетом этого дискретная передаточная функция интегратора будет

$$W(z) = \frac{x(z)}{\dot{x}(z)} = Z \left\{ \frac{1 + e^{-Tp}}{p} \frac{1 + \gamma Tp}{p} \right\} = \frac{T}{z-1} + \gamma T,$$

где символ Z подразумевает, что функция $x(z)$, соответствующая $x(p)$, отыскивается непосредственно по таблице z -преобразований.

При выборе $\gamma = 0$ дискретный интегратор

$$W(z) = \frac{T}{z-1} = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}$$

и его разностное уравнение

$$x[n] = x[n-1] + T\dot{x}[n-1]$$

соответствует методу Эйлера, а при выборе $\gamma = 0,5$ интегратор

$$W(z) = \frac{T(z+1)}{2(z-1)} = \frac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})}$$

— преобразованию Тастина

$$x[n] = x[n-1] + \frac{T}{2}(\dot{x}[n] + \dot{x}[n-1]).$$

Учитывая неоднозначность выходных сигналов на такте T интегрирования при sign-формировании сигнала ошибки в блоках ускорения Acceleration Unit и скорости Speed Unit (рис. 4), в качестве интеграторов использованы простейшие накопители Эйлера.

Для формирования углового положения вектора и его линейных значений, а также угловых проекций по координатам использованы интеграторы, работающие по методу трапеций, или, если иначе, Тастина.

Каждый участок траектории представлен параметрами, характеризующими длину вектора S_i , и его проекциями на обрабатываемом участке. После запуска начальное значение вектора $S_1 = \{X_1, Y_1\} - \{X_0, Y_0\}$, равное расстоянию между начальной и конечной точками отрезка, поступает с выхода блока проекций Projection Unit на блок управления Control Unit, где производится сравнение его значения с пройденным расстоянием S . Специфика фактически аппаратной модели, функциональных блоков заключается в том, что, например, вместо операции программного сравнения переменных, соответствующих формируемому пути S и выбранному из массива заданному значению S_i , используется блок сравнения двух величин: S на выходе интегратора и константы S_i , для выборки которой используется счетчик совместно с дешифратором. Причем адрес выборки определяется кодом счетчика, а дешифратор определяет линию выборки константы S_i , поступающей через мультиплексор на вход блока управления.

Формирование текущих значений на участке траектории осуществляется блоками ускорения Acceleration Unit, скорости Speed Unit и интегратора Discrete_Time Integrator1. Данные блоки в совокупности представляют собой эталонную модель формирования задающих величин.

Между линейными и угловыми перемещениями, а также угловой частотой и линейной скоростью вектора существует однозначное соответствие, определенное коэффициентом k_f . Для следящих приводов в качестве основных обратных связей используются обратная связь по частоте вращения двигателя и положению. Причем в зависимости от выбранного варианта обратная связь по положению реализуется на основе датчиков углового или линейного перемещения. В рассматриваемой структуре в качестве основной величины, определяющей формирование управляющих воздействий на сервоприводы подачи, используется угловая частота ω_v , на выходе блока умножения Discrete Time Integrator1. Переход от сегментов вектора основан на формировании угловых проекций вектора на оси X, Y . При этом в блоке Segment Unit формируются проекции частоты вращения $\omega_{xi} = \omega_v \cos \varphi_i$ и $\omega_{yi} = \omega_v \sin \varphi_i$, которые поступают на входы индивидуальных дискретных интеграторов для формирования сигналов задания положения X_i, Y_i

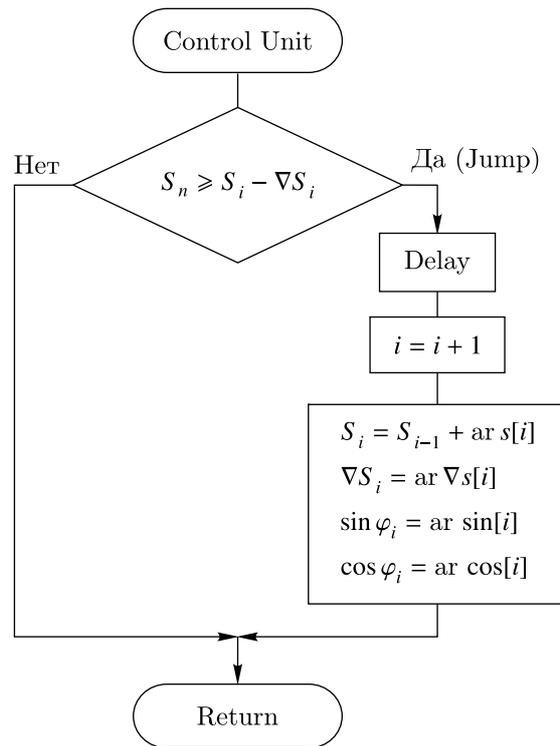


Рис. 5. Алгоритм перехода на следующий участок обработки

сервоприводов. Выборка значений угла φ_i и тригонометрических зависимостей осуществляется в соответствии с номером i сегмента, значение которого определяется счетчиком сегментов Segment Counter. В рассматриваемом варианте реализации модели это активная линия выходов блока Segment Counter. Данная линия, кроме того, определяет выборку задания на перемещение S_i , поступающего на вход блока управления Control Unit. Основные операции по формированию S-образной формы скорости на участках траектории рассмотрены ранее (рис. 3) и реализуются аналогичным образом. Рассмотрим условия, при которых осуществляется переход на следующий сегмент обработки. Выход на конечную точку участка траектории осуществляется по условию $S \geq S_i - \Delta S_i$, где ΔS_i определяет упреждение. На выходе блока Control Unit формируется сигнал Jump, счетчик сегментов (Segment counter) переводится в следующее состояние, производятся выборка и ввод параметров для отработки следующего участка траектории. Особенности здесь связаны с кратковременным формированием сигналов Jump при прохождении через i точки траектории. Корректность работы счетчика достигается за счет формирователя Shape, синхронизирующего входной сигнал с тактовой частотой генератора. Заметим, что рассмотренный вариант формирования сигнала Jump представлен в модели разностью фронтов сигнала срабатывания и задержанного на время ∇T , что потребовало тщательной отладки моментов перехода, так как данный вариант критичен к переходу через нулевое значение скорости. Однако если рассмотреть алгоритм (см. рис. 5), то подобных проблем не возникает, так при повторном вхождении в алгоритм условие перехода > 0 или $= 0$ исключает подобные ситуации. Здесь основные величины соответствуют ранее введенным обозначениям. Дополнительно введены обозначения следующих величин: S_n — путь на n -цикле времени выполнения программы интерполятора T_c , $ar s[i]$ — массив длин элементарных участков траектории, $ar \nabla s[i]$ — массив упреждающих значений участка торможения, $ar \cos[i]$, $ar \sin[i]$ — массив угловых проекций вектора на оси X , Y .

Сервоприводы подачи Servo drive X , Y представлены цифровыми моделями трехконтурных систем подчиненного регулирования параметров. Для повышения быстродействия контуры тока, скорости и положения настроены на модульный оптимум. Учитывая сложности организации работы привода по ускорению, в комбинированной системе управления использованы только два задающих воздействия: угловая частота и положение. Ограничение рывка в данном случае является дополнительным фактором, снижающим требования к системе управления.

Обработка возможна с изменением значения скорости. В этом случае дополнительно требуется автоматически изменять настроечные параметры базовых значений констант, определяющих переход на участки торможения. В исходной структуре управления (рис. 4) это осуществляется зависимым изменением констант в функции масштаба скорости. Если этого не требуется, то расчетные значения данных констант целесообразно масштабировать на стадии подготовки и загрузить их в соответствующие массивы.

Результаты моделирования

Диаграммы формирования задающих значений и их отработка следящими приводами подачи представлены на рис. 6.

Временные затраты на прохождение отрезков траектории в рассматриваемом случае сопоставимы с участками разгона и торможения. Учитывая критичность переходов на малых скоростях, упреждающие значения ΔS_i , определяющие переход на следующий участок траектории, определялись индивидуально. В зависимости от углов обрабатываемой траектории для минимизации отклонений от нулевых значений скорости и ускорения исполнительных приводов формирование сигнала Jump производилось с фиксированной задержкой по времени. Наиболее критичными углами в этом смысле являются углы, соответствующие изменению направления движения исполнительных приводов.

Пилообразная форма кривых ускорения на участках перехода здесь обусловлена требованиями минимизации времени работы на пониженных скоростях, так как в противном случае временные затраты на обработку изделия существенно могут возрасти.

Формирование S-образной формы кривой скорости позволяет минимизировать ошибки отработки траектории. При реверсе движения прохождение зазоров передач осуществляется на низких скоростях приводов, что позволяет осуществить безударное переключение. Переходные процессы приводов подачи в этом случае соответствуют линейному диапазону и не переходят в зону насыщения регулируемых величин.

При обработке малоразмерных изделий скорость приводов подачи существенно ниже. Изменение скорости осуществляется за счет блока масштаба Scale Unit и блока умножения Multiplication (см. рис. 4). Значение приращений, поступающих на вход цифрового интегратора Discrete-Time Integrator, может изменяться в 10 000 раз и более. При изменении масштаба обработки одновременно осуществляется изменение базовых размеров и установок. Настройки основного канала управления, включающего блоки ускорения и скорости, остаются без изменения. На рис. 7 приведен годограф траектории движения при обработке правильного шестиугольника.

Масштаб перемещений и рабочих скоростей здесь уменьшен в 10 000 раз по отношению к максимальным значениям. Фактически за счет эталонной модели формирования траектории и изменения ее масштаба можно перейти в диапазон работы, соответствующий долям микрометра.

Принципиально данный переход ограничен лишь диапазоном регулирования скорости. Внизу диапазона основные ограничения приводов подачи связаны с разрешающей способностью датчиков информации, дискретностью управляющих величин и выходных параметров преобразователей энергии.

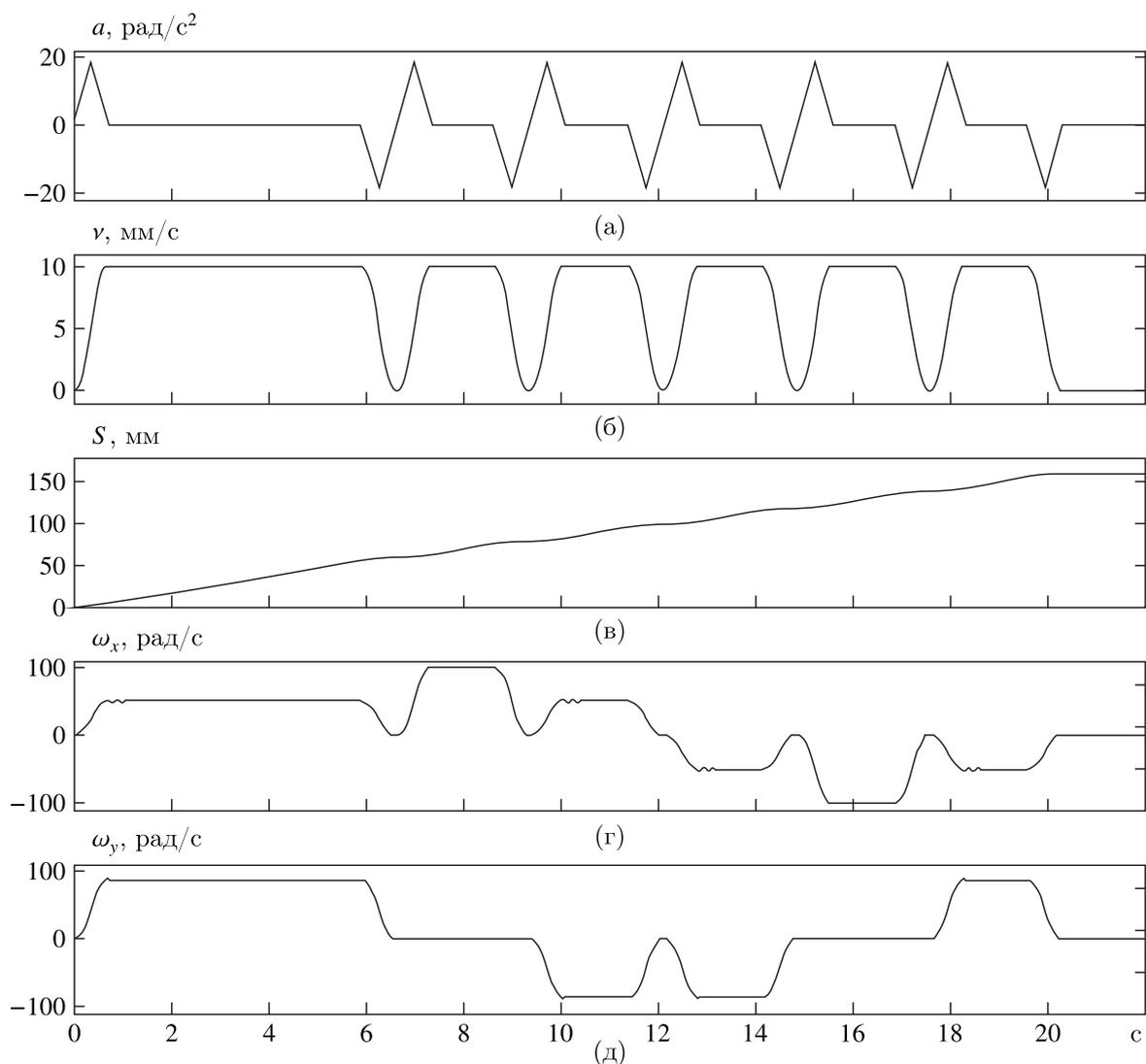


Рис. 6. Диаграммы формирования и отработки кусочно-линейной траектории: а) базовое ускорение; б) линейная скорость развертки вектора; в) развертка длины вектора; г), д) угловые скорости подач сервоприводов по координатам x , y

Заключение

Рассмотренные принципы реализации сплайн-интерполяции могут быть использованы для формирования произвольной кусочно-линейной траектории. Формирование траектории с использованием интеграторов с отрицательной обратной связью гарантирует выход на заданные значения ускорения и скорости. Это обеспечивает независимость работы сплайн-интерполятора от интервалов времени, определяющих длительность участков траектории. Дополнительные преимущества связаны с возможностью зависимого масштабирования скорости и длины участков траектории. С одной стороны, это позволяет формировать подобные траектории, а с другой — не вносит ограничения на их линейные размеры. Функции рассмотренного варианта интерполятора можно расширить за счет совмещения линейной и круговой параметрической интерполяции [Иванов, 2022]. Это, например, целесообразно при обработке прямоугольников, где прямолинейные участки сопрягаются дугами окружности. Изменение структуры управления следящими приводами в этом случае достигается за счет дополнительного канала, формирующего триго-

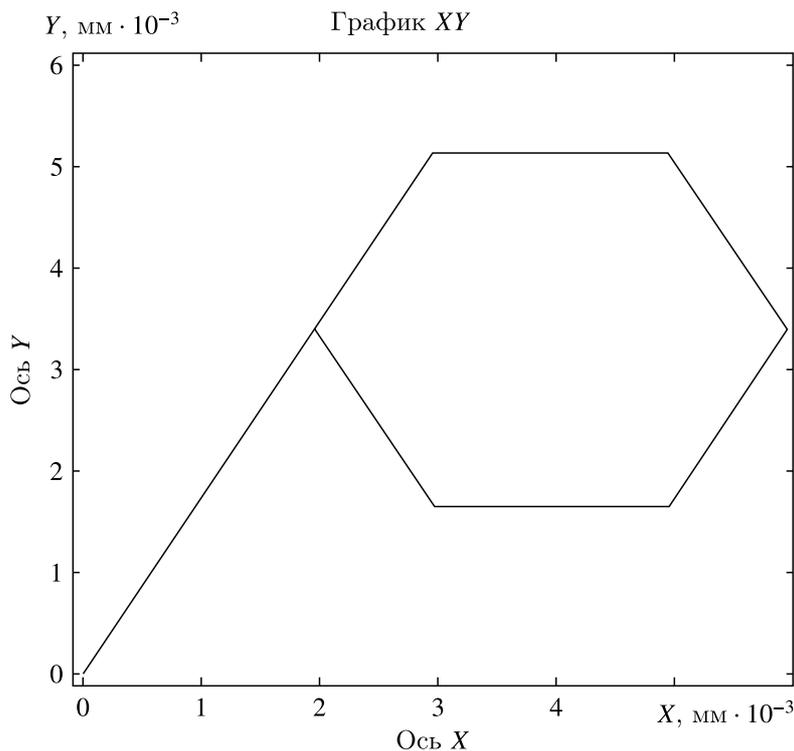


Рис. 7. Годограф траектории движения

нометрические зависимости в функции угла поворота. При этом переход на участки дугового сопряжения и их обработка тождественны участкам линейного сопряжения.

Список литературы (References)

- Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы: учебное пособие. — 5-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2023. — 672 с.
Amosov A. A., Dubinsky Yu. A., Kopchenova N. V. Vichislitelnie metodi [Computational methods]: textbook. — 5th ed., erased. — St. Petersburg: Lan, 2023. — 672 p. (in Russian).
- Герман-Галкин С. Г. Силовая электроника. Лабораторные работы на ПК. — СПб.: Учитель и ученик, КОРОНА принт, 2002. — 304 с.
German-Galkin S. G. Silovaya elektronika. Laboratornyye raboty na PK [Power electronics. Lab work on PC]. — St. Petersburg: Teacher and student, KORONA print, 2002. — 304 p. (in Russian).
- Гусев Н. В., Букреев В. Г. Системы цифрового управления многокоординатными следящими приводами: учебное пособие. — Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007. — 213 с.
Gusev N. V., Bukreev V. G. Sistemy tsifrovogo upravleniya mnogokoordinatnymi sledyashchimi privodami [Digital control systems for multi-axis servo drives]: textbook. — Tomsk: Tomsk Polytechnic University Publishing House, 2007. — 213 p. (in Russian).
- Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам / пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1985. — 304 с.
De Bor K. Prakticheskoye rukovodstvo po splaynam [Practical guide to splines] / transl. from English. — Moscow: Radio and Communications, 1985. — 304 p. (in Russian).
- Дивеев А. И., Шмалько Е. Ю. К практической реализации решения задачи оптимального управления // Надежность и качество сложных систем. — 2020. — № 2 (30). — С. 37–46. — DOI: 10.21685/2307-4205-2020-2-6
Diveev A. I., Shmalko E. Yu. K prakticheskoy realizatsii resheniya zadachi optimal'nogo upravleniya [On the practical implementation of the solution to the optimal control problem] // Reliability and quality of complex systems. — 2020. — No. 2 (30). — P. 37–46.

- Дьяконов В.* MATLAB 6: учебный курс. — СПб.: Питер, 2001. — 592 с.
D'yakonov V. MATLAB 6: uchebnyy kurs [MATLAB 6: training course]. — St. Petersburg: Peter, 2001. — 592 p. (in Russian).
- Завьялов Ю. С., Квасов В. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980. — 352 с.
Zavyalov Yu. S., Kvasov V. I., Miroshnichenko V. L. Metody splayn-funktsiy [Methods of spline functions]. — Moscow: Nauka, 1980. — 352 p. (in Russian).
- Зеленский А. А., Абдуллин Т. Х., Аленко А. В.* Особенности построения в реальном времени s-образной кривой разгона/торможения при кусочно-линейной интерполяции поверхностей сложной формы // Робототехника и техническая кибернетика. — 2021. — Т. 9, № 3. — С. 186–195.
Zelensky A. A., Abdullin T. Kh., Alepko A. V. Osobennosti postroyeniya v real'nom vremeni s-obraznoy krivoy razgona/tormozheniya pri kusochno-lineynoy interpolyatsii poverkhnostey slozhnoy form [Features of constructing in real time an s-shaped acceleration/deceleration curve during piecewise linear interpolation of surfaces of complex shapes] // Robotics and technical cybernetics. — 2021. — Vol. 9, No. 3. — P. 186–195 (in Russian).
- Иванов В. М.* Динамическая компенсация параметров в следящих электроприводах // Изв. вузов. Электромеханика. — 2021. — Т. 64, № 3. — С. 36–44.
Ivanov V. M. Dinamicheskaya kompensatsiya parametrov v sledyashchikh elektroprivodakh [Dynamic compensation of parameters in servo drives] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeii. Elektromekhanika. — 2021. — Vol. 64, No. 3. — P. 36–44 (in Russian).
- Иванов В. М.* Имитационная модель сферической обработки на токарном станке с ЧПУ // Вестник МГТУ «Станкин». — 2022. № 2 (61). — С. 32–37.
Ivanov V. M. Imitatsionnaya model' sfericheskoy obrabotki na tokarnom stanke s CHPU [Simulation model of spherical machining on a CNC lathe] // Bulletin of MSTU "Stankin". — 2022. — No. 2 (61). — P. 32–37 (in Russian).
- Изерман Р.* Цифровые системы управления / пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 541 с.
Izerman R. Tsifrovyye sistemy upravleniya [Digital control systems] / per. from English. — Moscow: Mir, 1984. — 541 p.
- Кривцов В. С., Комбаров В. В., Сорокин В. Ф.* Проблемы сплайновой интерполяции с гладко-ограниченными кинематическими параметрами движения в задачах числового программного управления высокоскоростным оборудованием // Авиационно-космическая техника и технология. — 2012. — № 9 (96). — С. 11–19.
Krivtsov V. S., Kombarov V. V., Sorokin V. F. Problemy splaynovoy interpolyatsii s gladko-ogranichennymi kinematcheskimi parametrami dvizheniya v zadachakh chislovogo programmnoy upravleniya vysokoskorostnym oborudovaniyem [Problems of spline interpolation with smoothly limited kinematic parameters of motion in problems of numerical program control of high-speed equipment] // Aerospace engineering and technology. — 2012. — No. 9 (96). — P. 11–19 (in Russian).
- Любимов А. Б., Мартинова Л. И., Обухов А. И.* Построение алгоритма опережающего просмотра кадров для линейных и нелинейных законов управления подачей в системах ЧПУ // Автоматизация в промышленности. — 2016. — № 5. — С. 10–13.
Lyubimov A. B., Martinova L. I., Obukhov A. I. Postroyeniye algoritma operezhayushchego prosmotra kadrov dlya lineynykh i nelineynykh zakonov upravleniya podachey v sistemakh ChPU [Construction of an algorithm for forward viewing of frames for linear and nonlinear laws of feed control in CNC systems] // Automation in industry. — 2016. — No. 5. — P. 10–13 (in Russian).
- Михайлов О. П.* Динамика электромеханического привода металлорежущих станков. — М.: Машиностроение, 1989. — 224 с.
Mikhailov O. P. Dinamika elektromekhanicheskogo privoda metallovezhushchikh stankov [Dynamics of electromechanical drive of metal-cutting machines]. — Moscow: Mechanical Engineering, 1989. — 224 p. (in Russian).
- Смит Дж. М.* Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей / пер. с англ. Н. П. Ильиной; под. ред. О. А. Чембровского. — М.: Машиностроение, 1980. — 271 с.
Smith J. M. Matematicheskoye i tsifrovoye modelirovaniye dlya inzhenerov i issledovateley [Mathematical and digital modeling for engineers and researchers] / transl. from English N. P. Ilyina; ed. O. A. Chembrovsky. — Moscow: Mechanical Engineering, 1980. — 271 p. (in Russian).
- Сосонкин В. Л., Мартинов Г. М.* Системы числового программного управления: учеб. пособие. — М.: Логос, 2005. — 296 с.
Sosonkin V. L., Martinov G. M. Sistemy chislovogo programmnoy upravleniya [Systems of numerical program control]. — Moscow: Logos, 2005. — 296 p. (in Russian).
- Biagiotti L., Melchiorri C.* B-spline based filters for multi-point trajectories planning // IEEE International Conference on Robotics and Automation Anchorage Convention District May 3–8, 2010, Anchorage, Alaska, USA.

- Biagiotti L., Melchiorri C.* Trajectory planning for automatic machines and robots. — Springer, 2008.
- Biagiotti L., Melchiorri C., Moriello L.* Optimal trajectories for vibration reduction based on exponential filters // IEEE Transactions on Control Systems Technology. — 2016. — Vol. 24, No. 2. — P. 609–622.
- Lee A.-C., Lin M.-T., Pan Y.-R., Lin W.-Y.* The feedrate scheduling of NURBS interpolator for CNC machine tools // Computer-Aided Design. — 2011. — Vol. 43, No. 6. — P. 612–628.
- Nam S.-H., Yang M.-Y.* A study on a generalized parametric interpolator with real-time jerk-limited acceleration // Computer-Aided Design. — 2004. — Vol. 36, No. 1. — P. 27–36.
- Ni H., Zhang C., Chen Q., Ji S., Liu Y.* A novel time rounding-up-based feedrate scheduling method based on s-shaped acc/dec algorithm // International Journal of Advanced manufacturing Technology. — 2019. — Vol. 104, No. 1. — P. 2073–2088.
- Piegl L., Tiller W.* The NURBS books. — Second ed. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1997. — 648 p.
- Zhang L. B., You Y. P., He J., Yang X. F.* The transition algorithm based on parametric spline curve for high-speed machining of continuous short line segments // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. — 2011. — Vol. 52. — P. 245–254.
- Zhao H., Zhu L., Ding H.* A real-time look-ahead interpolation methodology with curvature-continuous B-spline transition scheme for CNC machining of short line segments // International Journal of Machine Tools & Manufacture. — 2013. — Vol. 65. — P. 88–98.