

УДК: 519.6, 532.5

Компактная разностная схема для анизотропной задачи конвекции Дарси

А. А. Селищев^а, В. Г. Цибулин^б

Южный федеральный университет,
Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

E-mail: ^а selishev@sfedu.ru, ^б vgcibulin@sfedu.ru

Получено 15.01.2025.

Принято к публикации 14.02.2025.

Для моделирования гравитационной конвекции жидкости, насыщающей пористую среду, развивается компактная конечно-разностная схема. На основе закона Дарси с учетом анизотропии свойств проницаемости и теплопроводности рассматривается задача для прямоугольной области в переменных «функция тока» и «температура». На границах заданы условия непроницаемости и линейный по высоте профиль температуры. При определенных соотношениях между коэффициентами обратной проницаемости и теплопроводности данная система является косимметричной, при потере устойчивости механического равновесия от него ответвляется однопараметрическое семейство стационарных конвективных режимов. Разработана численная схема с конечно-разностной аппроксимацией четвертого порядка точности по пространственным координатам и с использованием метода Рунге – Кутты. Доказано, что построенная на девятиточечном шаблоне численная схема сохраняет свойство косимметрии исходной системы. Представлены результаты численного решения спектральной задачи по определению критических чисел Рэлея, отвечающих возникновению конвективных движений. Проведено сравнение с расчетами методом второго порядка точности и на основе комбинированной разностной схемы, обеспечивающей четвертый порядок аппроксимации по вертикальной координате. Показано, что с большой точностью критические числа являются двукратными при коэффициентах, обеспечивающих свойство косимметрии. Приведены результаты вычисления конвективных режимов и спектров устойчивости стационарных решений. Дана оценка эффективности предложенной компактной схемы.

Ключевые слова: компактная конечно-разностная схема, конвекция, модель Дарси, анизотропия, пористая среда, косимметрия

Работа выполнена в Южном федеральном университете при поддержке РФФ, грант № 23-21-00221.

UDC: 519.6, 532.5

Compact finite difference scheme for anisotropic convection Darcy

A. A. Selischev^a, V. G. Tsybulin^b

Southern Federal University,
8a Milchakova st., Rostov-on-Don, 344090, Russia

E-mail: ^a selishev@sfedu.ru, ^b vgcibulin@sfedu.ru

Received 15.01.2025.

Accepted for publication 14.02.2025.

A compact finite difference scheme has been developed for modeling convection in a porous medium saturated with a fluid. We consider the problem for a rectangular domain with anisotropic permeability and thermal conductivity properties in terms of stream function and temperature deviation, taking into account Darcy's law. Boundary conditions of impenetrability and a linear distribution of temperature are set. This model is cosymmetric when certain conditions are imposed on the permeability and thermal conductivities. One parametric family of stationary convection regimes arises when mechanical equilibrium loses stability. A numerical method with a fourth-order finite difference approximation for spatial variables and a Runge–Kutta integrator for time has been developed. It has been proved that this scheme preserves cosymmetry. Numerical results for evaluating the critical Rayleigh number have been presented. We compare them with results obtained using a second-order finite-difference method. We show that critical Rayleigh numbers are repeated twice with very high accuracy, which proves cosymmetry preservation. Numerical evaluation of convective regimes and spectral properties are presented. The efficiency of the developed compact finite difference scheme on a nine-point stencil is assessed.

Keywords: compact finite difference scheme, convection, Darcy's law, anisotropy, porous medium, cosymmetry

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 2, pp. 199–211 (Russian).

This work carried out at the Southern Federal University with the support of the Russian Science Foundation, grant No. 23-21-00221.

Введение

Моделирование конвективных движений в пористой среде, насыщенной несжимаемой жидкостью, является актуальной проблемой [Nield, Bejan, 2017]. В предположении малых скоростей фильтрации обычно применяются уравнения, основанные на законе Дарси [Гершуни, Жуховицкий, 1972]. В [Любимов, 1975] для плоской задачи фильтрационной конвекции было обнаружено ответвление семейства стационарных режимов от состояния механического равновесия. Это явление было объяснено на основе теории косимметрии [Юдович, 1991]. Конечномерные модели плоской задачи Дарси для прямоугольника рассматривались в [Bratsun, Lyubimov, Roux, 1995], а однопараметрические семейства стационарных режимов для систем большей размерности впервые были вычислены в [Говорухин, 1999] на основе метода Бубнова – Галёркина. Обзор работ по фильтрационной конвекции и другим задачам, в которых возможно возникновение семейств стационарных состояний, дан в работе [Govorukhin, Sumbatyan, Tsybulin, 2023].

Эффективными для численного решения задач конвекции – диффузии являются методы конечных элементов и конечных разностей, в частности компактные схемы, в которых повышение порядка точности достигается без введения дополнительных узлов в разностные шаблоны [Толстых, 2015]. Применение компактных схем на неравномерных сетках для трехмерной задачи конвекции – диффузии было рассмотрено в [Tingfu et al., 2023]. Компактные неявные разностные схемы, имеющие четвертый порядок точности по пространственным переменным и второй порядок по времени, использовались в [Keran, Wenyuan, 2022] для решения уравнения Гельмгольца, а также в [Mingyu, Wenyuan, 2024] для задачи реакции – диффузии. Для конвекции Дарси важно, чтобы разностная схема сохраняла свойство косимметрии. Такие схемы были предложены в [Karasozen, Tsybulin, 2005] и использованы для исследования анизотропной фильтрационной конвекции в [Абделхафиз, Цибулин, 2017; Абделхафиз, Цибулин, 2018]. Для изотропной задачи в [Селищев, Цибулин, 2023] развита компактная разностная схема повышенного порядка.

В настоящей работе развивается компактная разностная схема четвертого порядка точности по пространственным переменным, использующая девятиточечный шаблон и сохраняющая косимметрию исходной задачи. Рассматривается анизотропная задача конвекции Дарси, которая является косимметричной при дополнительных соотношениях на параметры системы. Проведены расчеты спектральной задачи и конвективных режимов, иллюстрирующие эффективность развитой схемы.

Уравнения конвекции Дарси

Рассматривается прямоугольная пористая область $\Omega = [0, a] \times [0, b]$, насыщенная несжимаемой жидкостью и подогреваемая снизу. На границе задан линейный по высоте (координата z) профиль распределения температуры. Используются безразмерные уравнения конвекции в анизотропной пористой среде, относительно функции тока $\psi(x, z, t)$ и девиации температуры $\theta(x, z, t)$ [Tuvand, Storesletten, 2015; Абделхафиз, Цибулин, 2017]:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \Delta_d \theta + \lambda \psi_x - J(\psi, \theta), \\ 0 &= \Delta_\mu \psi - \theta_x, \quad J(\psi, \theta) = \psi_x \theta_z - \psi_z \theta_x. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь λ – фильтрационное число Рэлея, $J(\psi, \theta)$ – якобиан. Точкой обозначена производная по времени. Дифференциальные операторы Δ_μ и Δ_d задаются формулами

$$\begin{aligned} \Delta_\mu &= \mu_{11} \partial_{zz} - \mu_{12} \partial_{xz} + \mu_{21} \partial_{zx} + \mu_{22} \partial_{xx}, \\ \Delta_d &= d_{11} \partial_{xx} + d_{12} \partial_{zx} + d_{21} \partial_{xz} + d_{22} \partial_{zz}, \end{aligned}$$

где μ_{ij} — компоненты тензора коэффициентов обратной проницаемости, d_{ij} — компоненты тензора коэффициентов теплопроводности. В случае ортотропии имеем

$$\Delta_\mu = \mu_{11}\partial_{zz} + \mu_{22}\partial_{xx}, \quad \Delta_d = d_{11}\partial_{xx} + d_{22}\partial_{zz}, \quad (2)$$

а при $\mu_{ii} = d_{ii} = 1$ получается изотропная пористая среда.

Граничные условия являются однородными:

$$\theta|_{\partial\Omega} = 0, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

Начальные условия задаются только для температуры:

$$\theta(x, z, 0) = \tilde{\theta}(x, z). \quad (4)$$

Задача (1)–(3) является косимметричной при $\mu_{22} = d_{11}$, $\mu_{11} = d_{22}$ [Абделхафиз, Цибулин, 2017]. Вектор косимметрии $L = (\psi, -\theta)$ ортогонален правой части системы (1):

$$\int_{\Omega} [\psi(\Delta_d\theta + \psi_x + J(\psi, \theta)) - \theta(\Delta_\mu\psi - \theta_x)] dx dz = 0. \quad (5)$$

Справедливость равенства (5) устанавливается интегрированием по частям и применением формулы Грина. Также выполняется соотношение для якобиана

$$\int_{\Omega} \theta J(\psi, \theta) dx dz = 0.$$

Система уравнений (1)–(3) имеет две симметрии в силу инвариантности относительно замен $(x, z, \psi, \theta) \rightarrow (a - x, z, -\psi, \theta)$ и $(x, z, \psi, \theta) \rightarrow (x, b - z, -\psi, -\theta)$.

Для определения критических чисел Рэлея решается спектральная задача

$$0 = \Delta_d\theta + \lambda\psi_x, \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6)$$

$$0 = \Delta_\mu\psi - \theta_x, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7)$$

При $\mu_{22} = d_{11}$, $\mu_{11} = d_{22}$ в [Абделхафиз, Цибулин, 2017] получены явные формулы для собственных значений задачи (6)–(7):

$$\lambda_{kl} = 4\pi^2 d_{11} \left(\frac{d_{11}}{a^2} k^2 + \frac{d_{22}}{b^2} l^2 \right), \quad k, l = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Первое собственное число λ_{11} отвечает потере устойчивости состояния покоя и возникновению конвективных движений. Для изотропной задачи в [Юдович, 1991] доказано, что первое критическое число λ_{11} всегда двукратно.

Конечно-разностная аппроксимация задачи

Для дискретизации по пространственным переменным в случае ортотропной среды используется метод конечных разностей. По координатам x и z вводятся равномерные сетки $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, n + 1\}$ и $\bar{\omega}_g = \{z^j = jg, j = 0, 1, \dots, m + 1\}$. Далее в работе используется обозначение $f_i^j = f(x_i, z^j)$ (верхний индекс отвечает номеру узла по z , нижний — по x) и применяются

следующие разностные операторы:

$$\begin{aligned} d_0 f_{i+1/2}^{j+1/2} &= \frac{f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1} + f_i^j + f_{i+1}^j}{4}, \\ D_h f_i^j &= \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{2h}, \quad D_g f_i^j = \frac{f_i^{j+1} - f_i^{j-1}}{2g}, \\ \Lambda_h f_i^j &= \frac{f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{h^2}, \quad \Lambda_g f_i^j = \frac{f_i^{j+1} - 2f_i^j + f_i^{j-1}}{g^2}, \\ d_h f_{i+1/2}^{j+1/2} &= \frac{f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1} - f_i^j + f_{i+1}^j}{2h}, \quad d_g f_{i+1/2}^{j+1/2} = \frac{f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1} - f_i^j - f_{i+1}^j}{2g}. \end{aligned} \quad (9)$$

С использованием операторов (9) конечно-разностная схема для задачи (1)–(4) записывается на пятиточечном шаблоне:

$$(d_{11}\Lambda_h + d_{22}\Lambda_g)\theta_i^j + \lambda D_h \psi_i^j + J_i^j = \dot{\theta}_i^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (10)$$

$$(\mu_{22}\Lambda_h + \mu_{11}\Lambda_g)\psi_i^j - D_h \theta_i^j = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (11)$$

$$\psi_i^0 = \psi_i^{m+1} = \theta_i^0 = \theta_i^{m+1} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (12)$$

$$\psi_0^j = \psi_{n+1}^j = \theta_0^j = \theta_{n+1}^j = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (13)$$

$$\theta_i^j(0) = \tilde{\theta}(x_i, z^j). \quad (14)$$

Для аппроксимации якобиана J применяются формулы [Моисеенко, Фрязинов, 1980]

$$J_i^j = \left[\frac{1}{3}(D_h(\theta D_g \psi) - D_g(\theta D_h \psi)) + \frac{2}{3}(d_h(d_0 \theta d_g \psi) - d_g(d_0 \theta d_h \psi)) \right]_i^j. \quad (15)$$

Для системы (10)–(13) дискретный аналог $L = (\psi, -\theta)$ является косимметрией при $d_{11} = \mu_{22}$, $d_{22} = \mu_{11}$. Критические значения числа Рэлея определяются из разностной спектральной задачи

$$(d_{11}\Lambda_h + d_{22}\Lambda_g)\theta_i^j + \lambda D_h \psi_i^j = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (16)$$

$$(\mu_{22}\Lambda_h + \mu_{11}\Lambda_g)\psi_i^j - D_h \theta_i^j = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (17)$$

с граничными условиями (12)–(13).

Следуя [Толстых, 2015], построим компактную схему для спектральной задачи (6)–(7). Для этого вычислим невязки (16), (17) при помощи разложения в ряд Тейлора по шагам сетки h и g :

$$\widehat{\Phi}_i^j = \frac{1}{12}(d_{11}h^2\theta_{xxxx} + d_{22}g^2\theta_{zzzz} + 2\lambda h^2\psi_{xxx})_i^j + O(h^4) + O(g^4), \quad (18)$$

$$\widetilde{\Phi}_i^j = \frac{1}{12}(\mu_{22}h^2\psi_{xxx} + \mu_{11}g^2\psi_{zzzz} - 2h^2\theta_{xxx})_i^j + O(h^4) + O(g^4). \quad (19)$$

Используя дифференциальные следствия уравнения (6):

$$\theta_{xxx} = \frac{1}{d_{11}}(-d_{22}\theta_{xxx} - \lambda\psi_{xxx}), \quad \theta_{zzz} = \frac{1}{d_{22}}(-d_{11}\theta_{xxx} - \lambda\psi_{zzz}), \quad (20)$$

можно переписать (18) в виде

$$\widehat{\Phi}_i^j = \left(-\frac{h^2}{12}(d_{22}\theta_{xxx} + \lambda\psi_{xxx}) - \frac{g^2}{12}(d_{11}\theta_{xxx} + \lambda\psi_{zzz}) + \frac{\lambda h^2}{6}\psi_{xxx} \right)_i^j + O(h^4) + O(g^4). \quad (21)$$

Аналогично, используя дифференциальные следствия уравнения (7), для невязки $\widetilde{\Phi}_i^j$ получим

$$\widetilde{\Phi}_i^j = \left(\frac{h^2}{12}(\mu_{11}\psi_{xxxz} + \theta_{xxx}) + \frac{g^2}{12}(\mu_{22}\theta_{xxxz} + \theta_{xzz}) + \frac{h^2}{6}\psi_{xxx} \right)_i^j + O(h^4) + O(g^4). \quad (22)$$

Дифференцируя по x уравнения (6)–(7), выразим

$$\psi_{xxx} = \frac{1}{\mu_{22}}(-\mu_{11}\psi_{xzz} + \theta_{xx}), \quad \theta_{xxx} = \frac{1}{d_{11}}(-d_{22}\theta_{xzz} - \lambda\psi_{xx})$$

и, подставляя в (21)–(22), получим невязки $\widehat{\Phi}$, $\widetilde{\Phi}$, в которых порядок производных по каждой координате не более двух. Заменяя в (21)–(22) смешанные производные θ_{xxxz} , ψ_{xxx} композициями операторов $\Lambda_h\Lambda_g$ и $D_h\Lambda_g$, получим построенную на девятиточечном шаблоне конечно-разностную аппроксимацию четвертого порядка для системы (6)–(7):

$$0 = A_d\theta_i^j + \lambda B_\mu\psi_i^j - \lambda C_\mu\theta_i^j, \quad (23)$$

$$0 = A_\mu\psi_i^j - B_d\theta_i^j - \lambda C_d\psi_i^j, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} A_d &= d_{11}\Lambda_h + d_{22}\Lambda_g + \frac{d_{22}h^2 + d_{11}g^2}{12}\Lambda_h\Lambda_g, & C_\mu &= \frac{h^2}{12\mu_{22}}\Lambda_h, \\ A_\mu &= \mu_{22}\Lambda_h + \mu_{11}\Lambda_g + \frac{\mu_{11}h^2 + \mu_{22}g^2}{12}\Lambda_h\Lambda_g, & C_d &= \frac{h^2}{12d_{11}}\Lambda_h, \\ B_\mu &= D_h + \frac{\mu_{11}h^2 + \mu_{22}g^2}{12}D_h\Lambda_g, & B_d &= D_h + \frac{d_{22}h^2 + d_{11}g^2}{12}D_h\Lambda_g. \end{aligned} \quad (25)$$

Введем векторы узловых значений девиации температуры и функции тока:

$$\begin{aligned} \Theta &= \{\theta_1^1, \theta_2^1, \dots, \theta_n^1, \theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_n^2, \theta_1^3, \dots, \theta_n^m\}, \\ \Psi &= \{\psi_1^1, \psi_2^1, \dots, \psi_n^1, \psi_1^2, \psi_2^2, \dots, \psi_n^2, \psi_1^3, \dots, \psi_n^m\} \end{aligned}$$

и матричные операторы \mathbf{A}_μ , \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_μ , \mathbf{B}_d , \mathbf{C}_μ , \mathbf{C}_d размерности N_s^2 , $N_s = nm$. Задача (23)–(24) запишется в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mu & -\mathbf{B}_d \\ \emptyset & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi \\ \Theta \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_d & \emptyset \\ \mathbf{B}_\mu & -\mathbf{C}_\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi \\ \Theta \end{bmatrix} = 0, \quad (26)$$

где \emptyset – нулевая матрица размерности N_s^2 . При $\mathbf{C}_d = \mathbf{C}_\mu = \emptyset$ получается схема четвертого порядка по z и второго по x [Селищев, Цибулин, 2023], развитая для изотропной задачи.

Лемма. Дискретный аналог $L = (\psi, -\theta)$ является косимметрией для компактной разностной схемы (23), (24), (12), (13) при $\mu_{11} = d_{22}$, $\mu_{22} = d_{11}$.

Доказательство. Дискретным аналогом вектор-функции L является $\mathbf{L}_h = (\Psi, -\Theta)$. Умножая скалярно правую часть (23)–(24) на \mathbf{L}_h , имеем

$$S = (\mathbf{A}_d\Theta + \lambda\mathbf{B}_\mu\Psi - \mathbf{C}_\mu\Theta, \Psi) - (\mathbf{A}_\mu\Psi - \mathbf{B}_d\Theta - \lambda\mathbf{C}_d\Psi, \Theta). \quad (27)$$

В покомпонентной записи

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\psi_i^j (A_d\theta_i^j + \lambda B_\mu\psi_i^j - C_\mu\theta_i^j) - \theta_i^j (A_\mu\psi_i^j - B_d\theta_i^j - \lambda C_d\psi_i^j)]. \quad (28)$$

Используя разностные формулы Грина и суммирования [Самарский, 1977], с учетом краевых условий (12)–(13) выводим следующие тождества для каждого j :

$$\sum_{i=1}^n (\theta_i^j \Lambda_h \psi_i^j - \psi_i^j \Lambda_h \theta_i^j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^n (\theta_i^j \Lambda_g \psi_i^j - \psi_i^j \Lambda_g \theta_i^j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^n \theta_i^j D_h \theta_i^j = 0, \quad \sum_{i=1}^n \psi_i^j D_h \psi_i^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (31)$$

Суммируя по индексу j и используя краевые условия (12)–(13), получаем

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\theta_i^j \Lambda_h \Lambda_g \psi_i^j - \psi_i^j \Lambda_h \Lambda_g \theta_i^j) = 0, \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\theta_i^j D_h \Lambda_g \psi_i^j - \psi_i^j D_h \Lambda_g \theta_i^j) = 0. \quad (33)$$

С помощью подстановки $\mu_{11} = d_{22}$, $\mu_{22} = d_{11}$ в (25) и с использованием (29)–(33) доказывается выполнение тождества $S \equiv 0$. \square

Таким образом, схема (23)–(24) аппроксимирует задачу (6)–(7) с четвертым порядком точности и сохраняет косимметрию исходной задачи.

Численный эксперимент

Для оценки точности построенной схемы были проведены расчеты критических чисел Рэлея и возникающих конвективных режимов. Результаты вычислений собственных чисел спектральной задачи (6)–(7) для изотропного случая ($d_{11} = d_{22} = \mu_{11} = \mu_{22} = 1$) приведены на рис. 1, 2.

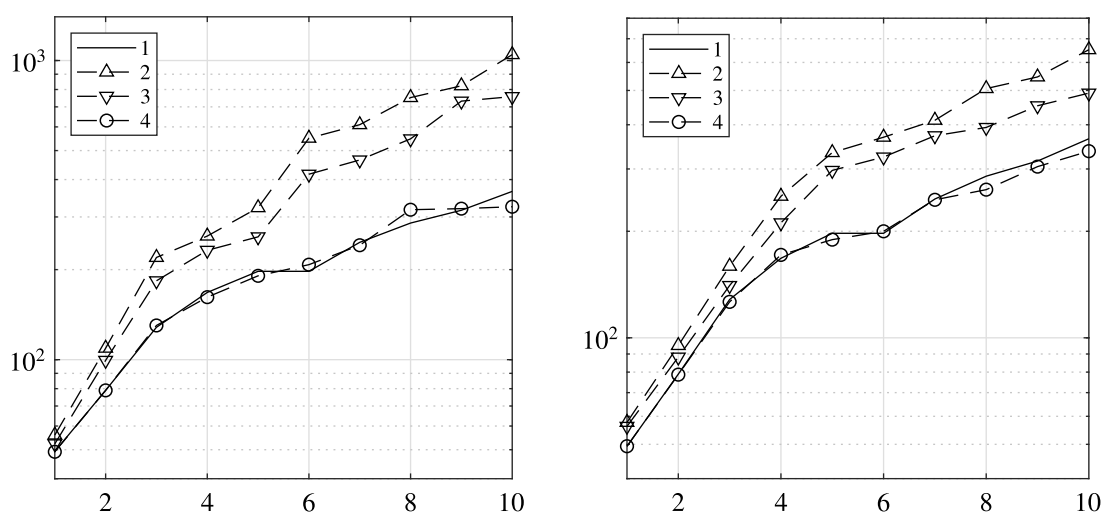


Рис. 1. Расчет первых десяти критических чисел Рэлея: $a = 2$, $b = 1$ (слева), $a = 1$, $b = 2$ (справа); 1 — точное значение (8), 2 — схема второго порядка точности, 3 — схема (26) при $C_d = C_\mu = \emptyset$, 4 — схема (26)

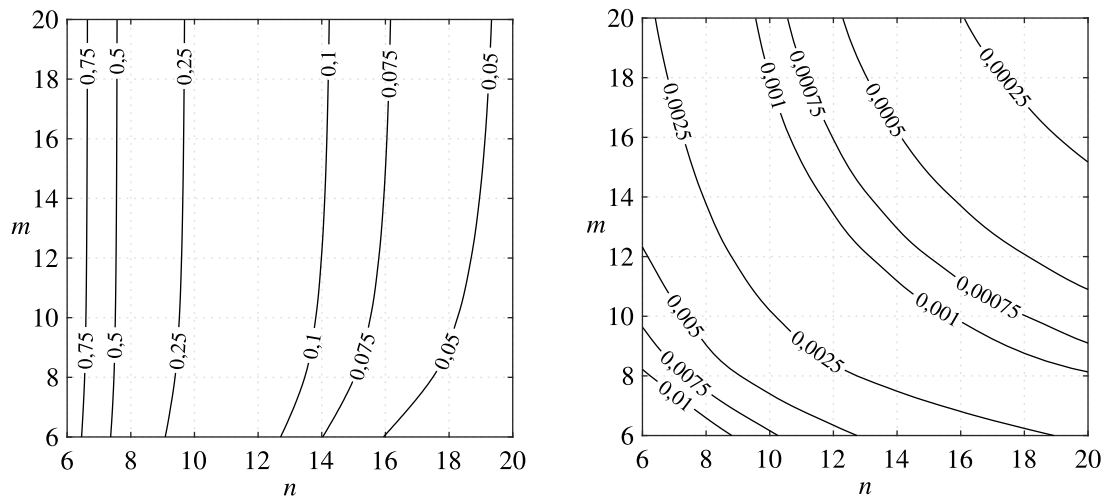


Рис. 2. Относительная погрешность вычисления λ_{11} на различных сетках: схема второго порядка (слева), компактная разностная схема (справа); $a = 2, b = 1$

На рис. 1 представлены результаты вычисления собственных чисел λ_{ij} спектральной задачи для узкого ($a = 1, b = 2$, сетка 8×16) и широкого ($a = 2, b = 1$, сетка 16×8) прямоугольников. Видно, что даже для первых десяти собственных значений схема второго порядка точности и схема [Селищев, Цибулин, 2023] дают заметные отклонения от точных значений (сплошная линия), значительно уступая компактной схеме (26).

На рис. 2 представлены линии уровня относительной погрешности вычисления критического числа Рэлея λ_{11} для различных параметров сетки (n — число разбиений по x , m — число разбиений по z) в случае широкой области. Графики демонстрируют превосходство компактной схемы (26) при расчете на сетках с различными отношениями разбиений по координатным осям. Ранее в работе [Karasozen, Tsybulin, 2005] отмечалось, что для улучшения точности вычислений в случае схемы второго порядка нужна более густая сетка по координате x .

В таблицах 1, 2 и на рис. 3–6 представлены результаты расчета конвекции в анизотропной пористой среде.

Таблица 1. Критические числа Рэлея. $a = 1,5, b = 1, \mu_{11} = d_{22} = 1, \mu_{22} = d_{11} = 1,5$

Схема	Сетка	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
Формула (8)		98,69	98,69	217,3	217,3
(23)–(24)	12×10	100,21	100,21	220,49	220,49
	16×12	99,68	99,68	219,27	219,27
	24×16	99,21	99,21	218,25	218,25
(16)–(17)	24×16	100,20	100,20	228,10	228,10

В таблице 1 даны результаты вычислений первых четырех критических чисел Рэлея. Парные собственные значения показывают, что обе схемы сохраняют косимметрию при условии $\mu_{11} = d_{22}, \mu_{22} = d_{11}$. Для обеспечения сравнимой точности при использовании схемы второго порядка требуется в четыре раза больше узлов, чем в случае схемы четвертого порядка.

На рис. 3 приведены графики зависимости от λ главных значений спектра устойчивости состояния покоя. Видно, что при нарушении условий косимметрии ($\mu_{11} \neq d_{22}$) теряется двукратность критических чисел Рэлея.

Сравнение результатов, получаемых при помощи схемы (26) и схемы второго порядка точности, представлено в таблице 2. Для оценки точности использовалась формула расчета эф-

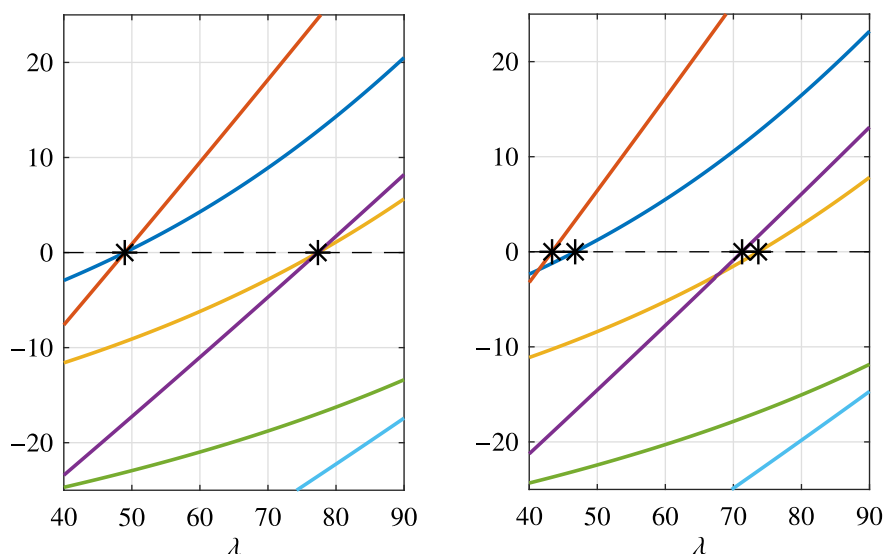


Рис. 3. Изменение спектра устойчивости состояния покоя в зависимости от λ : $\mu_{11} = 1,5$ (слева), $\mu_{11} = 1,4$ (справа); $a = 1$, $b = 2,5$, $\mu_{22} = d_{11} = 1$, $d_{22} = 1,5$

Таблица 2. Погрешность и эффективный порядок критического числа Рэлея $\lambda_1 = \lambda_2$ для анизотропной задачи; $a = 1$, $b = 1,5$, $\mu_{11} = d_{22} = 1,5$, $\mu_{22} = d_{11} = 1$. Точное $\lambda_1^{\text{exact}} = 65,797$

Схема	Сетка	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\frac{ \lambda_1^{\text{calc}} - \lambda_1^{\text{exact}} }{\lambda_1^{\text{exact}}}$	η_{eff}
Схема (16)–(17)	4×6	120,616	0,833	—
	8×12	75,361	0,145	2,518
	16×24	68,012	0,033	2,111
	32×48	66,341	$8,26 \cdot 10^{-3}$	2,026
Схема (23)–(24)	4×6	66,189	$5,95 \cdot 10^{-3}$	—
	8×12	65,821	$3,49 \cdot 10^{-4}$	4,089
	16×24	65,798	$2,15 \cdot 10^{-5}$	4,023
	32×48	65,797	$1,34 \cdot 10^{-6}$	4,006

эффективного порядка точности при известном аналитическом решении:

$$\eta_{\text{eff}} = \log_2 \frac{|\lambda_1^h - \lambda_1^{\text{exact}}|}{|\lambda_1^{h/2} - \lambda_1^{\text{exact}}|},$$

где λ_1^h , $\lambda_1^{h/2}$ — результаты расчетов на сетках с шагом h и $\frac{h}{2}$ соответственно. Вычисление эффективного порядка проводилось на сетках $h = g$.

Из таблицы 2 видно, что даже на грубой сетке с 24 узлами (4×6) компактная схема (26) дает более точное значение первого критического значения числа Рэлея, чем схема второго порядка. Для всех расчетов значение эффективного порядка η_{eff} для схемы (26) превышает 4.

Для вычисления самих конвективных режимов использовался метод прямых, якобиан вычисляется по формуле (15). По времени интегрирование велось методом Рунге–Кутты 4-го порядка с постоянным шагом h_t и точность проверялась вычислениями для $\frac{h_t}{2}$. Например, для сетки 32×48 расчеты проводились при $h_t = 0,02$. В качестве характеристики найденных численных решений полной задачи используется число Нуссельта, которое характеризует тепловой

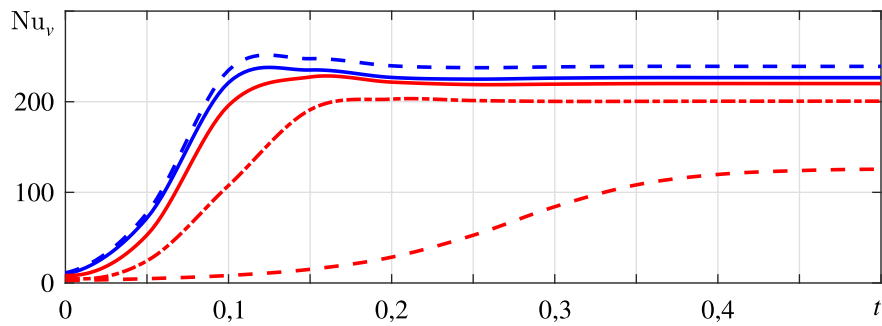


Рис. 4. Изменение числа Нуссельта Nu_v со временем; синие линии — компактная схема, красные линии — схема второго порядка; штриховая линия — сетка 6×12 , штрихпунктирная — 12×24 , сплошная — 24×48 ; $a = 1$, $b = 2$, $\mu_{11} = d_{22} = 1,5$, $\mu_{22} = d_{11} = 1$

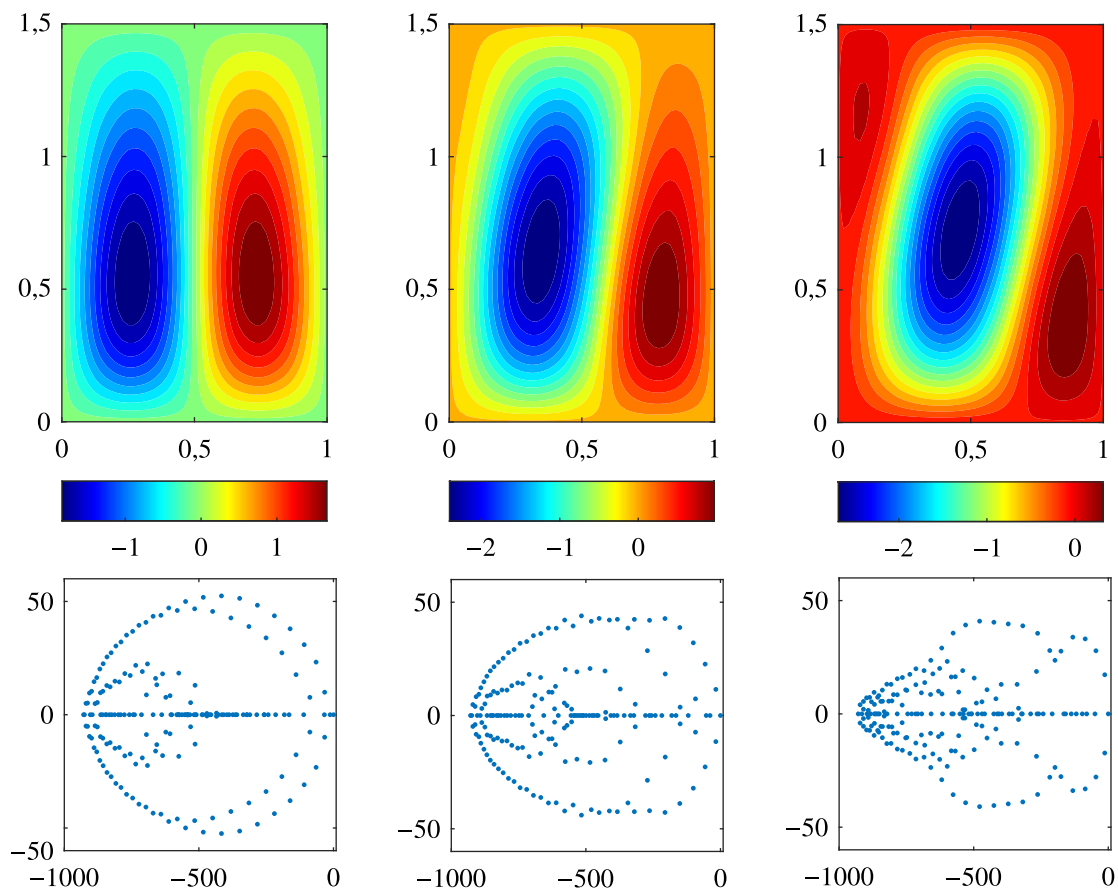


Рис. 5. Линии тока (сверху) и спектр устойчивости на комплексной плоскости (снизу) для трех стационарных режимов; $\lambda = 80$, $a = 1$, $b = 1,5$; $\mu_{11} = d_{22} = 1,5$, $\mu_{22} = d_{11} = 1$, сетка 12×18

поток, проходящий через нижнюю границу:

$$Nu_v = \int_0^a \theta_z|_{z=0} dx.$$

На рис. 4 представлены графики установления стационарного режима для компактной схемы (синий цвет) и схемы второго порядка точности (красный). Расчеты проведены на сетках 6×12 , 12×24 , 24×48 . В случае компактной схемы вычисления на сетках 12×24 и 24×48

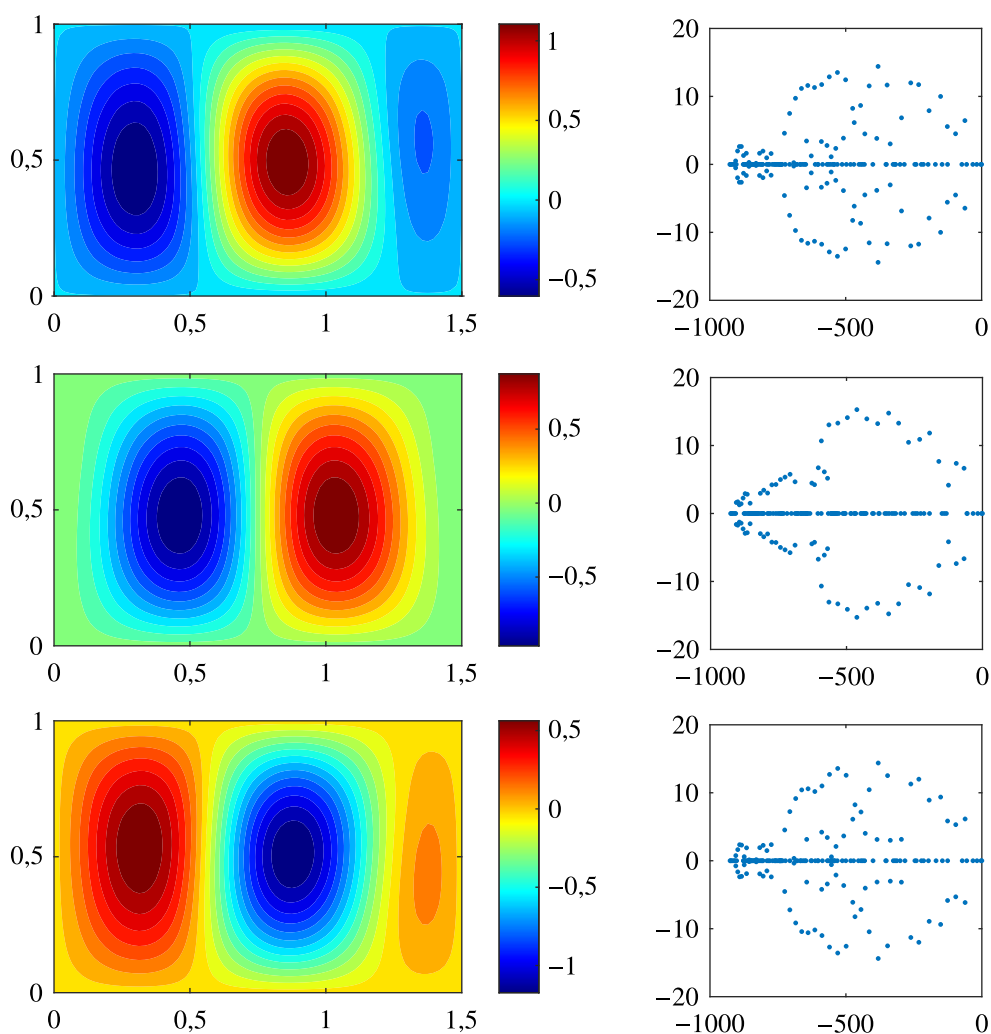


Рис. 6. Линии тока (слева) и спектр устойчивости на комплексной плоскости (справа) для трех стационарных режимов; $\lambda = 80$, $a = 1,5$, $b = 1$. $\mu_{11} = d_{22} = 1,5$, $\mu_{22} = d_{11} = 1$, сетка 18×12

практически совпадают, а для схемы второго порядка точности получение соответствующего результата требует сетки 48×96 . Отметим, что для схемы второго порядка сходимость к «точному» стационарному режиму идет «снизу». Это связано с тем, что получаемые в случае недостаточного сеточного разрешения критические значения первого перехода заметно больше точной величины λ_{11} . При этом для грубой сетки обнаружено замедленное развитие конвективного процесса. Сходимость в случае компактной схемы идет «сверху», и даже грубая дискретизация обеспечивает хорошие результаты.

При параметрах, сохраняющих косимметрию задачи, в расчетах реализуется семейство стационарных решений. На рис. 5 изображены три конвективных режима в узком прямоугольнике из этого семейства, полученных для разных начальных условий. В верхней части рис. 5 даны функции тока, показывающие формирование движений с двумя основными валами, а также с одним большим и двумя угловыми валами (рисунок справа). Для начальных условий $\bar{\theta}(x, y) = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{b}$ получены симметричные режимы (см. рис. 5 (слева)), а для $\bar{\theta}_2(x, y) = \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{b}$ реализовывались режимы, близкие к приведенным на рис. 5 (справа). Линейная комбинация $\bar{\theta}_1$ и $\bar{\theta}_2$ использовалась в качестве начальных данных для расчета других режимов. Видно, что спектр устойчивости этих режимов лежит в левой комплексной полуплоскости и различен. При

этом имеется практически нулевое собственное значение, отвечающее нейтральной устойчивости вдоль семейства.

В случае широкого прямоугольника (рис. 6) реализуются движения с тремя конвективными валами. Спектр устойчивости найденных стационарных режимов содержит близкое к нулю значение и лежит в левой комплексной полуплоскости.

Заключение

В работе развит конечно-разностный метод повышенного порядка точности для исследования анизотропной конвекции Дарси в прямоугольной области. Разработанная схема имеет четвертый порядок точности для соответствующей спектральной задачи и позволяет эффективно проводить расчеты по установлению стационарных состояний и вычислению нестационарных режимов даже на грубых сетках.

Построенная разностная схема является миметической (mimetic), т. е. сохраняющей свойства исходной системы дифференциальных уравнений. Для рассматриваемой задачи развитая дискретизация наследует дискретные симметрии и свойство косимметрии. В теории динамических систем понятие косимметрии объясняет появление семейств решений, возникновение которых не вызывается наличием какой-либо непрерывной группы симметрий [Юдович, 1991]. Для задач с анизотропией свойств пористого скелета и жидкости косимметричность уравнений реализуется при дополнительных условиях на параметры системы. Построенная миметическая схема повышенного порядка точности обеспечивает лучшие результаты и в некосимметричном (общем) случае.

Список литературы (References)

- Абделхафиз М. А., Цибулин В. Г.* Моделирование анизотропной конвекции бинарной жидкости, насыщающей пористую среду // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 6. — С. 801–816.
- Abdelhafez M. A., Tsybulin V. G.* Modelirovanie anizotropnoj konvekcii binarnoj zhidkosti, насыщayushchej poristuyu sredu [Modeling of anisotropic convection for the binary fluid in porous medium] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 6. — P. 801–816 (in Russian).
- Абделхафиз М. А., Цибулин В. Г.* Численное моделирование конвективных движений в анизотропной пористой среде и сохранение косимметрии // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017. — Т. 57, № 10. — С. 1734–1747.
- Abdelhafez M. A., Tsybulin V. G.* Numerical simulation of convective motion in an anisotropic porous medium and cosymmetry conservation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 57, No. 10. — P. 1706–1719. (Original Russian paper: *Abdelhafes M. A., Tsybulin V. G.* Численnoe modelirovanie konvektivnyh dvizhenij v anizotropnoj poristoj srede i sohranenie kosimmetrii // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki. — 2017. — Vol. 57, No. 10. — P. 1734–1747.)
- Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1972. — 392 с.
- Gershuni G. Z., Zhukhovitskiy E. M.* Konvektivnaya ustoychivost neshhimayemoy zhidkosti [Convective stability of incompressible fluid]. — Moscow: Nauka, 1972. — 392 p. (in Russian).
- Говорухин В. Н.* Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задаче о плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 1999. — № 5. — С. 53–62.
- Govorukhin V. N.* Analysis of families of secondary steady-state regimes in the problem of plane flow through a porous medium in a rectangular vessel // Fluid Dynamics. — 1999. — Vol. 34, No. 5. — P. 652–659. (Original Russian paper: *Govoruhin V. N.* Analiz semejstv vtorichnyh stacionarnykh rezhimov v zadache o ploskoj fil'tracionnoj konvekcii v pryamougol'nom kontejnere // Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza. — 1999. — No. 5. — P. 53–62.)
- Любимов Д. В.* О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // Прикладная математика и техническая физика. — 1975. — № 2. — С. 131–137.
- Lyubimov D. V.* Convective motions in a porous medium heated from below // Journal of applied mechanics and technical physics. — 1975. — Vol. 16. — P. 257–261. (Original Russian paper: *Lyubimov D. V.* O konvektivnyh dvizheniyah v poristoj srede, podogrevaemoy snizu // Prikladnaya matematika i tekhnicheskaya fizika. — 1975. — No. 2. — P. 131–137.)

- Моисеенко Б. Д., Фрязинов И. В.* Полностью нейтральная схема для уравнений Навье–Стокса // Изучение гидродинамической неустойчивости численными методами. — 1980. — С. 186–209.
Moiseenko B. D. Fryazinov I. V. Polnost'yu nejtral'naya skhema dlya uravnenij Nav'e–Stoksa [Completely neutral scheme for the Navier–Stokes method] // Numerical Investigation of Hydrodynamical Instability. — 1980. — P. 186–209 (in Russian).
- Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
Samarskij A. A. Teoriya raznostnyh skhem. — Moscow: Nauka, 1977. — 656 p. (in Russian).
- Селищев А. А., Цибулин В. Г.* Разностная схема повышенного порядка для анализа фильтрационной конвекции // Таврический вестник информатики и математики. — 2023. — Т. 61, № 4. — С. 92–102.
Selischev A. A., Tsybulin V. G. Raznostnaya skhema povyshennogo poryadka dlya analiza fil'tracionnoj konvekcii [High-order difference scheme for the analysis of filtration convection] // Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics. — 2023. — Vol. 61, No 4. — P. 92–102 (in Russian).
- Толстых А. И.* Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2015. — 350 с.
Tolstykh A. I. Kompaktnye i mul'tioperatornye approksimacii vysokoj tochnosti dlya uravnenij v chastnyh proizvodnyh [High-precision compact and multioperator approximations for partial differential equations.]. — Moscow: Nauka, 2015. — 350 p. (in Russian).
- Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. — 1991. — Т. 49, № 2. — С. 142–148.
Yudovich V. I. Cosymmetry, degeneration of solutions of operator equations, and onset of a filtration convection // Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. — 1991. — Vol. 49. — P. 540–545. (Original Russian paper: *Yudovich V. I.* Kosimmetriya, vyrozhdienie reshenij operatornyh uravnenij, vzniknovenie fil'tracionnoj konvekcii // Mat. zametki. — 1991. — Vol. 49, No. 2. — P. 142–148.)
- Bratsun D. A., Lyubimov D. V., Roux B.* Co-symmetry breakdown in problems of thermal convection in porous medium // Physica D. — 1995. — Vol. 82. — P. 398–417.
- Govorukhin V. N., Sumbatyan M. A., Tsybulin V. G.* Multistability of convective flows in a porous enclosure // Advanced Structured Materials. — 2023. — Vol. 170. — P. 305–320.
- Karasozen B., Tsybulin V. G.* Mimetic discretization of two-dimensional Darcy convection // Computer Physics Communications. — 2005. — Vol. 167. — P. 321–329.
- Keran L., Wenyan L.* An efficient and high accuracy finite-difference scheme for the acoustic wave equation in 3D heterogeneous media // Journal of Computational Science. — 2020. — Vol. 40. — P. 101063.
- Mingyu H., Wenyan L.* A compact ADI finite difference method for 2D reaction–diffusion equations with variable diffusion coefficients // Journal of Computational and Applied Mathematic. — 2024. — Vol. 436. — P. 115400.
- Nield D. A., Bejan A.* Convection in Porous Media. — New York: Springer, 2017. — 988 p.
- Tingfu M., Bin L., Yongbin G., Lili W.* Higher-order blended compact difference scheme on nonuniform grids for the 3D steady convection–diffusion equation // Axioms.— 2023. — Vol. 12, No. 7. — P. 651.
- Tyvand P. A., Storesletten L.* Onset of convection in an anisotropic porous layer with vertical principal axes // Transport in Porous Media. — 2015. — Vol. 108. — P. 581–593.