

УДК: 532.593

Численное моделирование сходящихся сферических ударных волн с нарушенной симметрией

А. В. Конохов^а, Т. А. Ростиллов^б

Объединенный институт высоких температур Российской академии наук,
Россия, 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2

E-mail: ^а konyukhov_av@mail.ru, ^б t.rostillov@yandex.ru

Получено 09.12.2024.

Принято к публикации 12.12.2024.

На основе гидродинамического 3D-моделирования с использованием уравнения состояния газа твердых сфер Карнахана – Старлинга выполнено исследование развития периодических возмущений сходящейся сферической ударной волны, приводящих к ограничению кумуляции. Метод решения системы уравнений Эйлера на подвижных (сжимающихся) сетках позволяет с высокой точностью проследить эволюцию фронта сходящейся ударной волны в широком диапазоне изменения ее радиуса. Скорость сжатия расчетной сетки адаптируется к движению фронта ударной волны, при этом движение границ расчетной области выбирается из условия сверхзвуковой скорости ее движения относительно среды. Это приводит к тому, что решение на этапе сжатия определяется только начальными данными. Применена схема TVD второго порядка аппроксимации для реконструкции вектора консервативных переменных на границах расчетных ячеек в сочетании со схемой Русанова для расчета численного вектора потоков. Выбор обусловлен сильной тенденцией к проявлению в расчетах численной неустойчивости типа «карбункул», известной для других классов течений. Использование сжимающихся сеток позволило исследовать детальную картину течения на масштабе прекращения кумуляции, что невозможно в рамках метода геометрической динамики ударных волн Уизема (Whitham), применявшегося ранее другими авторами для расчета сходящихся ударных волн. Исследование показало, что ограничение кумуляции связано с переходом от маховского взаимодействия сегментов сходящейся ударной волны к регулярному вследствие прогрессирующего роста отношения азимутальной скорости на фронте ударной волны к радиальной при уменьшении ее радиуса. Установлено, что это отношение представляется в виде произведения ограниченной осциллирующей функции радиуса и степенной функции радиуса с показателем степени, зависящим от начальной плотности упаковки в модели твердых сфер. Показано, что увеличение параметра плотности упаковки в модели твердых сфер приводит к значительному увеличению давлений, достигаемых в ударной волне с нарушенной симметрией. Впервые в расчете показано, что на масштабе прекращения кумуляции течение сопровождается формированием высокоэнергетических вихрей, в которые вовлечено вещество, подвергшееся наибольшему ударно-волновому сжатию. Оказывая влияние на процессы тепло- и массопереноса в области наибольшего сжатия, это обстоятельство является важным для актуальных практических применений сходящихся ударных волн в целях инициирования реакций (детонации, фазовых переходов, управляемого термоядерного синтеза).

Ключевые слова: численное моделирование, сходящиеся ударные волны, нарушение симметрии, фокусировка ударной волны, кумуляция, газ твердых сфер

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-29-00659).

UDC: 532.593

Numerical simulation of converging spherical shock waves with symmetry violation

A. V. Konyukhov^a, T. A. Rostilov^b

Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences,
13/2 Izhorskaya st., Moscow, 125412, Russia

E-mail: ^a konyukhov_av@mail.ru, ^b t.rostilov@yandex.ru

Received 09.12.2024.

Accepted for publication 12.12.2024.

The study of the development of π -periodic perturbations of a converging spherical shock wave leading to cumulation limitation is performed. The study is based on 3D hydrodynamic calculations with the Carnahan–Starling equation of state for hard sphere fluid. The method of solving the Euler equations on moving (compressing) grids allows one to trace the evolution of the converging shock wave front with high accuracy in a wide range of its radius. The compression rate of the computational grid is adapted to the motion of the shock wave front, while the motion of the boundaries of the computational domain satisfy the condition of its supersonic velocity relative to the medium. This leads to the fact that the solution is determined only by the initial data at the grid compression stage. The second order TVD scheme is used to reconstruct the vector of conservative variables at the boundaries of the computational cells in combination with the Rusanov scheme for calculating the numerical vector of flows. The choice is due to a strong tendency for the manifestation of carbuncle-type numerical instability in the calculations, which is known for other classes of flows. In the three-dimensional case of the observed force, the carbuncle effect was obtained for the first time, which is explained by the specific nature of the flow: the concavity of the shock wave front in the direction of motion, the unlimited (in the symmetric case) growth of the Mach number, and the stationarity of the front on the computational grid. The applied numerical method made it possible to study the detailed flow pattern on the scale of cumulation termination, which is impossible within the framework of the Whitham method of geometric shock wave dynamics, which was previously used to calculate converging shock waves. The study showed that the limitation of cumulation is associated with the transition from the Mach interaction of converging shock wave segments to a regular one due to the progressive increase in the ratio of the azimuthal velocity at the shock wave front to the radial velocity with a decrease in its radius. It was found that this ratio is represented as a product of a limited oscillating function of the radius and a power function of the radius with an exponent depending on the initial packing density in the hard sphere model. It is shown that increasing the packing density parameter in the hard sphere model leads to a significant increase in the pressures achieved in a shock wave with broken symmetry. For the first time in the calculation, it is shown that at the scale of cumulation termination, the flow is accompanied by the formation of high-energy vortices, which involve the substance that has undergone the greatest shock-wave compression. Influencing heat and mass transfer in the region of greatest compression, this circumstance is important for current practical applications of converging shock waves for the purpose of initiating reactions (detonation, phase transitions, controlled thermonuclear fusion).

Keywords: numerical simulation, converging shock waves, symmetry violation, shock wave focusing, cumulation, hard sphere fluid

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 1, pp. 59–71 (Russian).

The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-29-00659).

Введение

Сходящиеся ударные волны являются инструментом генерации высоких плотностей энергии, находят применение в приложениях ударно-волнового синтеза, в целях инициирования детонации, как способ сжатия и нагрева топлива в задаче инерциального термоядерного синтеза [Попов и др., 2008]. Исследованию устойчивости сходящихся ударных волн в связи с гипотезой об ограничении кумуляции [Забабахин, 1979] посвящено большое количество экспериментальных и теоретических исследований. Значительная часть работ посвящена совершенному газу. Влияние термодинамических свойств среды (показателя адиабаты γ) на скорость роста возмущений сферической ударной волны установлено в работе К. В. Брушлинского [Брушлинский, 1982] в рамках линейной теории устойчивости, где показано, что рост малых возмущений описывается степенной зависимостью $r^{-\lambda}$, $0 < \lambda < 1$, где показатель степени возрастает с увеличением γ . В связи с явлением сонолюминисценции в жидкости в [Wu, Roberts, 1996] в линейном приближении рассматривалась устойчивость сходящейся сферической ударной волны в газе Ван-дер-Ваальса, этому вопросу также посвящены работы [Arora, Sharma, 2006; Somogyi, Roberts, 2007]. В [Somogyi, Roberts, 2007] сделан вывод, что существует пороговое значение исключенного объема, выше которого ударные волны устойчивы по отношению к нарушению симметрии и кумуляция является неограниченной. Согласно [Evans, 1996] сходящиеся ударные волны в газе Ван-дер-Ваальса неустойчивы, но неустойчивость более слабая, чем в случае идеального газа. В [Zhakhovskii, Nishihara, Abe, 2009] впервые методом молекулярного моделирования исследовалась сходящаяся ударная в плотном газе с потенциалом межмолекулярного взаимодействия Леннарда – Джонса. Рассматривалось развитие высших мод возмущений цилиндрической ударной волны, при этом, в силу особенностей метода, не рассматривалась вторая мода, развитие которой занимает большой диапазон изменения радиуса и потенциально приводит к ограничению кумуляции. Один из выводов, который можно сделать на основе результатов этой работы, состоит в том, что гидродинамическая картина ударно-волновых взаимодействий, включающая формирование трехволновых конфигураций [Ben-Dor, 2007] на фронте сходящейся ударной волны, сохраняется до наномасштабов. Соответственно, сохраняется возможность гидродинамического механизма ограничения кумуляции, состоящего в переходе от маховского взаимодействия сегментов сходящейся ударной волны к регулярному, как было показано на примере полигональной сходящейся ударной волны [Eliasson, Kjellander, Apazidis, 2007]. Свойства сходящихся ударных волн такого типа описаны в [Schwendeman, 2002]. В [Chefranov, 2020] ограничение кумуляции связывается с ростом азимутальной скорости за фронтом ударной волны. Термодинамическая неидеальность среды оказывает влияние как на рост возмущений и ограничение кумуляции, так и на автомодельное симметричное решение (см., например, [Anand, 2013; Bhardwaj et al., 2024] и приведенные в этих работах ссылки). Отличие от случая идеального газа состоит в том, что скорость роста давления и температуры за фронтом ударной волны при уменьшении радиуса зависит от плотности начального состояния. В настоящей работе эти аспекты влияния неидеальности рассматриваются в рамках 3D-расчета на основе уравнений Эйлера, замыкаемых уравнением состояния Карнахана – Старлинга (модель твердых сфер) [Carnahan, Starling, 1969], которое существенно точнее учитывает влияние потенциала отталкивания, чем уравнение Ван-дер-Ваальса. Расчет в широком диапазоне изменения радиуса выполняется с использованием подвижных сжимающихся сеток, адаптивных к поверхности сходящейся ударной волны. Преимуществом такого подхода по сравнению с методом геометрической динамики ударных волн (см. [Whitham, 1959; Kjellander, Tillmark, Apazidis, 2010], где этот подход применялся для исследования влияния ионизации в задаче о сходящейся ударной волне, а также [Ridoux et al., 2019; Mostert et al., 2018; Baskar, Prasad, 2005; Murakami, Sanz, Iwamoto, 2015]) является детальная гидродинамическая картина течения, что позволяет исследовать механизм ограничения кумуля-

ции и особенности течения на масштабе, на котором достигается максимально-ударно-волновое сжатие.

1. Постановка задачи

Пусть в пространстве с декартовой системой координат (x, y, z) задано распределение параметров, соответствующее сферической сходящейся ударной волне с радиусом поверхности, равным 1, и фокусом в начале координат. Внесем в решение возмущение, разрезав поле течения плоскостью $x = 0$ и выполнив сдвиг решения в полупространствах $x < 0$ и $x > 0$ в направлении оси y на величину $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) соответственно. Если $f(x, y, z)$ — распределение некоторой величины f в исходной сходящейся ударной волне, возмущенное распределение есть $f(x, y + \varepsilon, z)$ при $x < 0$ и $f(x, y - \varepsilon, z)$ при $x > 0$. Возмущенная форма поверхности ударно-волнового разрыва описывается уравнением $x^2 + (y - \text{sign}(x)\varepsilon)^2 + z^2 = 1$.

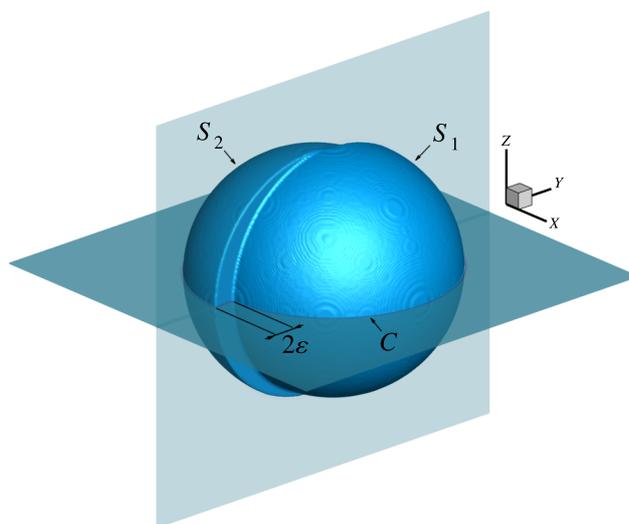


Рис. 1. Схема к постановке задачи: возмущенная поверхность ударно-волнового разрыва включает в себя две полусферы — S_1 и S_2 — с центрами, смещенными на расстояние 2ε ; контур C — сечение поверхности ударно-волнового разрыва плоскостью $z = 0$

Данное возмущение является π -периодическим относительно поворота вокруг оси z , и его разложение на сферические гармоники содержит вторую моду, приводящую к ограничению кумуляции в сходящейся ударной волне. Нарушение фокусировки состоит в том, что две полусферы — S_1 и S_2 — сфокусированы в точки, разнесенные на расстояние 2ε . Такая модель позволяет сделать максимальную оценку нелинейного роста возмущений. Пренебрегая влиянием вторичных волн (соответственно, потоками массы и энергии через плоскость $x = 0$), для отношения азимутальной (v_φ) и радиальной (v_r) составляющих скорости потока за фронтом ударной волны в экваториальной плоскости $z = 0$ имеем $\frac{v_\varphi}{v_r} = \frac{\varepsilon}{r} \sin \varphi$, где угол и радиус соответствуют сферической системе координат, связанной с декартовой системой координат (x, y, z) . В соответствии с этой оценкой азимутальная скорость, соответствующая закрутке относительно фокуса, являющегося центром симметрии течения, растет с уменьшением радиуса быстрее, чем радиальная составляющая. В то же время ударная волна устойчива, и кумуляция не ограничена, если в результате учета влияния вторичных волн $\frac{v_\varphi}{v_r} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, поскольку направление потока за фронтом ударной волны совпадает с нормалью к ее поверхности. В случае роста этого отношения в результате отклонения вектора нормали от радиального направления следует ожидать сначала появления изломов поверхности, соответствующих узловым линиям трехволновой

конфигурации, и в дальнейшем — перехода от маховского взаимодействия сегментов ударной волны к регулярному отражению аналогично случаю полигональных ударных волн. Вследствие роста v_φ с уменьшением радиуса можно ожидать закрутки потока в окрестности фокуса ударной волны в масштабе, на котором прекращается кумуляция. Здесь следует упомянуть гипотезу, связывающую ограничение кумуляции с ростом азимутальной скорости за фронтом ударной волны [Chefranov, 2020; Chefranov, 2021]. В условиях больших деформаций под радиусом будем понимать среднее расстояние от точек поверхности ударной волны до фокуса (центра симметрии), под средним давлением на фронте. Осреднение выполняется на контуре C (рис. 1), образованном сечением ударной волны экваториальной плоскостью. При одинаковом начальном перепаде давления на ударно-волновом разрыве будем рассматривать изменение $\frac{|v_\varphi|}{v_r}$ и рост давления на фронте в зависимости от радиуса. В момент прекращения кумуляции (образования 4-волновой конфигурации на фронте ударной волны) значение радиуса дает линейный размер области, в которую фокусируется ударная волна, а среднее давление, ввиду сегментации поверхности ударно-волнового разрыва, дает оценку максимального давления за фронтом сходящейся ударной волны.

2. Численный метод

Для расчета сходящихся ударных волн в широком диапазоне изменения радиуса применяется метод интегрирования уравнений Эйлера на подвижных (сжимающихся) сетках. Сжатие сетки определяется зависимостью

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \exp \left(- \int_0^t c(\tau) d\tau \right), \quad (1)$$

где \mathbf{x} — координаты узлов сетки в лабораторной декартовой системе координат, параметр (t) контролирует скорость сжатия сетки:

$$c(t) = \left\langle \frac{V_0}{r(t)} \left(\frac{p(t) - p_0}{V_0 - V(t)} \right)^{1/2} \right\rangle, \quad (2)$$

где V_0 , p_0 — удельный объем и давление в начальном состоянии, V , p — соответствующие величины на фронте ударной волны, R — расстояние до фокуса, а угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают осреднение по поверхности ударной волны. Определение (2) обладает тем свойством, что цилиндрическая и сферическая ударные волны являются стационарными на сжимающейся сетке в процессе схлопывания. Область интегрирования разбивается расчетной сеткой на конечные объемы. Скорости точек границы контрольного объема согласно (1) определяются формулой $\mathbf{v}_g = -\mathbf{x}c(t)$. Значения вектора консервативных переменных в точках интегрирования на гранях расчетных ячеек вычислялись с использованием схемы TVD второго порядка аппроксимации [Harten, 1983]. Особенностью задачи о сходящейся ударной волне на сжимающихся сетках является высокий риск развития многомерной численной неустойчивости типа «карбункул» [Quirk, 1994], известной по другим классам задач [Kitamura, Shima, Roe, 2012; Rodionov, 2018] (задачи гиперзвукового обтекания тела потоком газа, дифракции ударных волн, взаимодействие ударной волны с поверхностью клина). Известно, что в трехмерном случае проявление неустойчивости является более слабым, чем в двумерном [Kitamura, Shima, Roe, 2012; Rodionov, 2017]. В трехмерном случае на ударной волне, поверхность которой является вогнутой в направлении распространения, сильный карбункул-эффект наблюдается впервые, что объясняется спецификой течения: вогнутостью фронта ударной волны, неограниченным (в симметричном случае) ростом числа Маха и стационарностью фронта на расчетной сетке. В целях предотвращения развития этой неустойчивости

для расчета численного вектора потоков на границах расчетных ячеек применялся метод Русанова. Более точный способ расчета потоков на основе приближенного решения задачи Римана о распаде разрыва методом Roe [Roe, 1981] с энтропийной коррекцией Хартена приводил к проявлению карбункул-эффекта на малых радиусах. Следует отметить, что метод Годунова [Годунов, 1959] также подвержен влиянию неустойчивости типа «карбункул» и его стабилизация достигается введением искусственной вязкости по аналогии с уравнениями Навье – Стокса [Rodionov, 2018]. Положение границ расчетной области выбиралось таким образом, чтобы в процессе расчета нормальная составляющая скорости движения границы расчетной области относительно среды являлась сверхзвуковой. В этом случае возмущения от границы не проникают в область интегрирования и решение определяется только начальными данными.

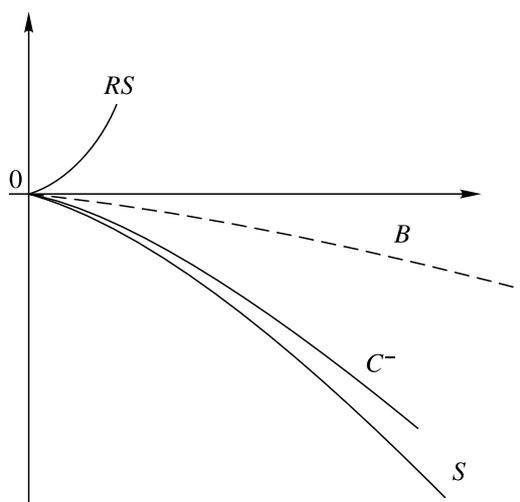


Рис. 2. Закон движения границы расчетной области (B) в области $(r - t)$: S — ударная волна, C^- — характеристика, приходящая в точку отражения ударной волны от фокуса, RS — отраженная ударная волна

Положения на плоскости (r, t) траектории ударной волны, особой характеристики, приходящей в точку отражения от фокуса, и границы расчетной области схематично представлены на рис. 2. Для оценки точности алгоритма расчета сходящихся ударных волн были выполнены расчеты сферических сходящихся ударных волн в идеальном газе с показателями адиабаты $\gamma = \frac{7}{5}$ и $\gamma = \frac{5}{3}$. Расчеты выполнялись на прямоугольной равномерной сетке с разрешением 400 сеточных интервалов, приходящихся на радиус ударной волны. Аппроксимация результатов расчета линейной зависимостью в переменных $(\lg(r), \lg(p))$ на интервале $2 < \lg(r^{-1}) < 4$ дает хорошее количественное согласие с автомодельным решением Гудерлея (см. [Whitham, 1974]), в соответствии с которым зависимость давления за фронтом сходящейся ударной волны имеет вид $p \sim r^{-2(1-n)/n}$, где n — показатель степени в зависимости радиуса ударной волны от времени $r \sim (-t)^n$. Сравнение рассчитанных и теоретических значений показателя степени n приведено в таблице 1, где σ — стандартное отклонение.

Расчеты сходящихся ударных волн при π -периодическом возмущении выполнялись с числом Куранта 0,1 на сетке, насчитывающей 13,5 млн расчетных ячеек. В расчетах использовалась модель твердых сфер Карнахана – Старлинга, в соответствии с которой сжимаемость $Z = \frac{pV}{RT}$ является функцией плотности упаковки $Z = \frac{1+\eta+\eta^2-\eta^3}{(1-\eta)^3}$, где $\eta = \frac{V_{sph}}{V}$, V_{sph} — объем, занимаемый сферами в объеме V . Из термодинамического тождества $e_V = T p_T - p$ следует, что внутренняя энергия в этом случае является функцией только температуры: $e = e(T)$. В расчетах принималась зависимость $e = c_V T$, $\frac{c_V}{R} = \frac{5}{3}$, с тем чтобы при $\eta \rightarrow 0$ уравнение состояния переходило в уравнение идеального одноатомного газа.

Таблица 1. Сравнение расчетов сферической сходящейся ударной волны с автомодельным решением Гудерля

$\gamma = \frac{5}{3}$		
$-\frac{2(1-n)}{n} = -0,904862, \quad \sigma = 0,002526$		
	Расчет	Теория Гудерля
n	0,688500	0,688377
$\gamma = \frac{7}{4}$		
$-\frac{2(1-n)}{n} = -0,788495, \quad \sigma = 0,005729$		
	Расчет	Теория Гудерля
n	0,717233	0,717173

3. Результаты

Для случая π -периодического возмущения выполнены расчеты сходящейся сферической ударной волны при различной начальной плотности упаковки η и двух значениях параметра ε , характеризующего нарушение фокусировки. Прекращение роста давления на фронте сходящейся ударной волны соответствует моменту, когда в результате соединения линий трехволновой конфигурации на поверхности ударной волны вместо маховского взаимодействия реализуется регулярное взаимодействие (отражение от плоскости контактного разрыва) с образованием 4-волновой конфигурации. В этот момент поверхность ударной волны, согласно расчетам, имела линзовидную форму (см. рис. 3, где показана форма поверхности ударной волны на различных масштабах до момента прекращения кумуляции при $\varepsilon = 0,02, \eta = 0,1$).

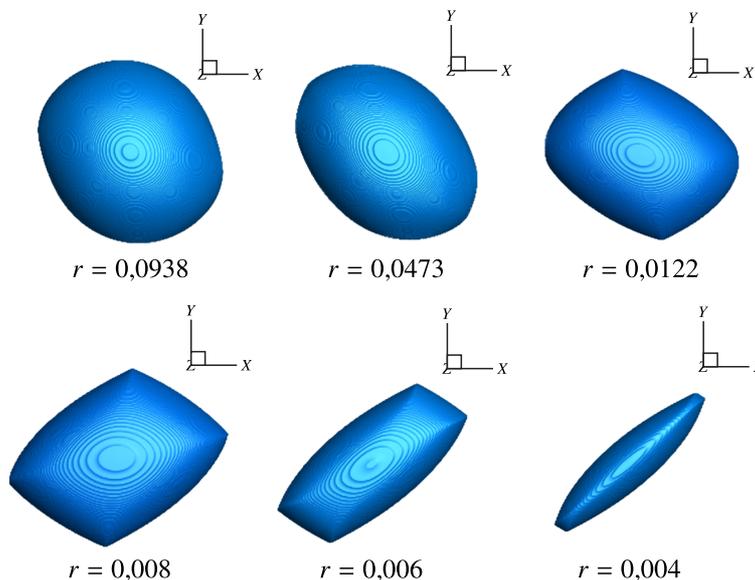


Рис. 3. Форма поверхности ударной волны на различных масштабах до момента прекращения кумуляции: r — значение коэффициента сжатия сетки

Дальнейшее уменьшение среднего расстояния от поверхности ударной волны до фокуса происходило без роста фронтового давления. Количественным показателем нарушения симметрии является величина $\frac{v_\varphi}{v_r}$. В начальный момент ($r = 1$) среднее значение модуля этой величины на контуре S , образованном сечением поверхности ударной волны экваториальной плоскостью $z = 0$ (см. рис. 1), оценивается величиной ε . В момент реализации регулярного отражения

среднее на контуре C значение модуля этой величины, в силу линзовидной формы ударной волны и острого угла между сегментами ударной волны при реализации их регулярного взаимодействия, имеет порядок 1. Зная закон изменения $\frac{\bar{v}_\phi}{\bar{v}_r}$ как функцию среднего радиуса r , можно оценить радиус, при котором прекращается кумуляция. Соответствующие кривые, полученные в расчетах для различных значений начальной плотности, приведены на рис. 3. Результаты расчетов аппроксимируются зависимостью от радиуса вида $\frac{\bar{v}_\phi}{\bar{v}_r} = \varepsilon \psi(\ln(r)) r^{m-1}$, $0 < m < 1$, где ψ — ограниченная осциллирующая функция переменной $\ln(r)$, $\psi(0) = 1$. Кривые $\psi(r) = \varepsilon^{-1} \frac{\bar{v}_\phi}{\bar{v}_r} r^{1-m}$ и значения параметра m для нескольких значений начальной плотности и начальной амплитуды представлены на рис. 4. Зависимости среднего на контуре C значения фронтового давления от средней величины радиуса r показаны на рис. 5.

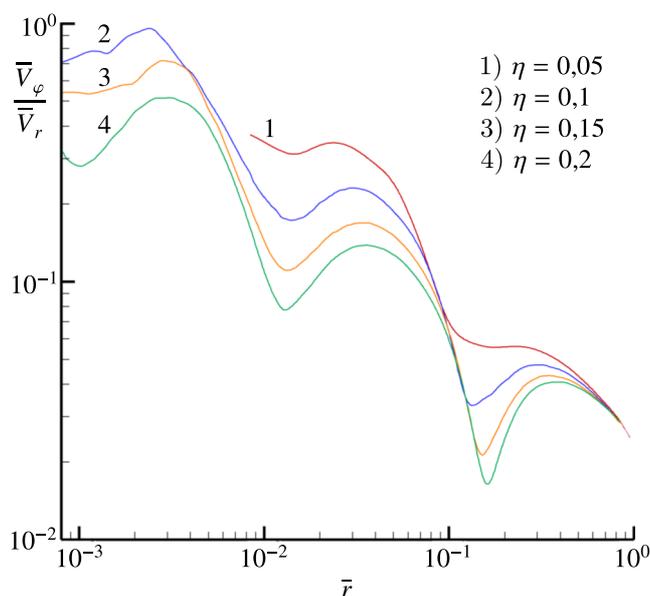


Рис. 4. Зависимость отношения средних абсолютных значений азимутальной и радиальной составляющих скорости на фронте ударной волны от среднего радиуса для различных значений параметра η в уравнении состояния Карнахана–Старлинга. Осреднение выполнено в сечении поверхности ударной волны экваториальной плоскостью $z = 0$ (контур C на рис. 1), где возмущение максимально

В проведенной серии расчетов наблюдался следующий сценарий нелинейного поведения возмущений сходящейся ударной волны. Нарушение симметрии в виде π -периодического возмущения приводит к возбуждению двух семейств вторичных азимутальных волн, распространяющихся вдоль поверхности ударной волны с противоположным направлением вращения относительно оси z . Интерференция этих волн приводит к периодическим колебаниям формы поверхности ударной волны, которые проявляются в колебаниях скорости роста азимутальной составляющей скорости течения на фронте ударной волны, но практически не проявляется в скорости роста среднего фронтового давления и средней радиальной составляющей скорости. В результате роста интенсивности вторичных волн, диагностируемого ростом v_ϕ , на гладкой поверхности ударной волны образуются изломы (рис. 3), соответствующие узловым линиям 3-волновых конфигураций (shock-shocks в терминах работы [Whitham, 1974]), что можно трактовать как результат нелинейного опрокидывания азимутальных волн. Рост фронтового давления прекращается, когда в результате соединения на поверхности ударной волны линий 3-волновой конфигурации образуется 4-волновая конфигурация. На рис. 3 изображение в масштабе 0,004

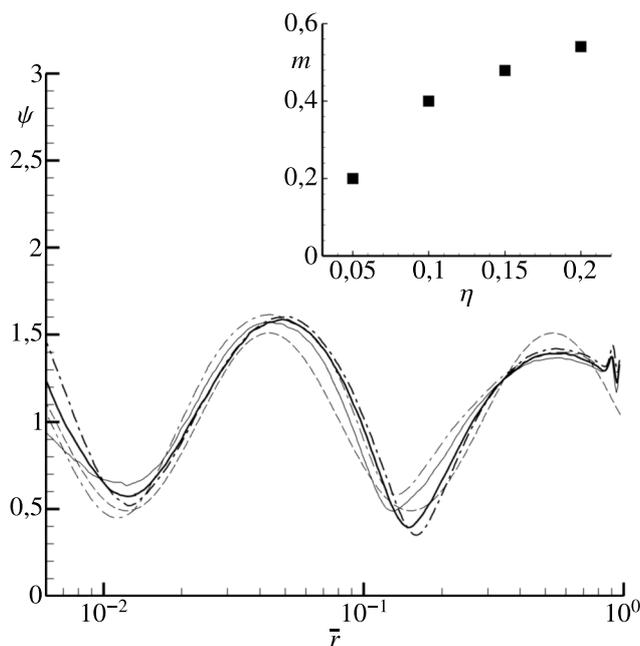


Рис. 5. Зависимость $\psi(r) = \varepsilon^{-1} \frac{\bar{v}_\varepsilon}{\bar{v}_r} r^{1-m}$ и значения параметра m для различных значений начальной плотности упаковки η

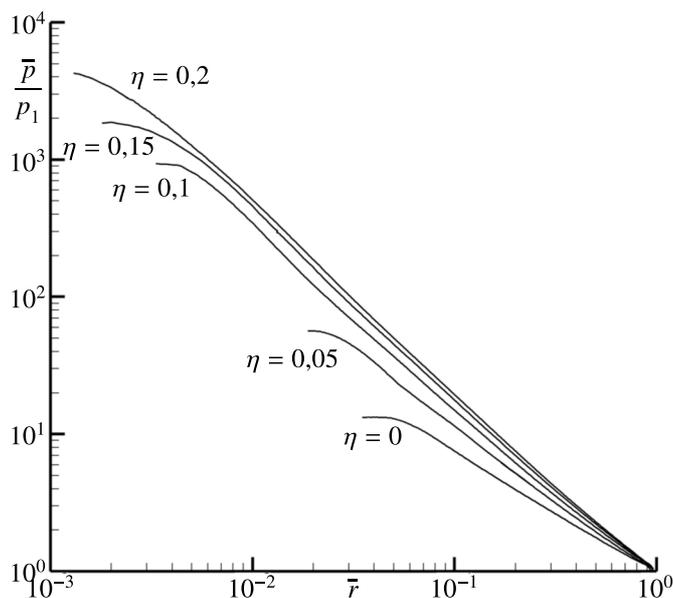


Рис. 6. Зависимость среднего давления на фронте сходящейся ударной волны, отнесенного к начальному фронтному давлению p_1 , от среднего радиуса: влияние начальной плотности упаковки твердых сфер η

начального радиуса ударной волны непосредственно предшествует этому соединению. Отметим следующие свойства численного решения.

1. Решение сохраняет симметрию относительно поворота на угол π .
2. В процессе фокусировки ударной волны сохраняется асимметрия вторичных азимутальных волн: волны, вращающиеся в противоположных направлениях относительно оси z , имеют

различную интенсивность. Это приводит к заметной закрутке течения относительно оси z на масштабе прекращения кумуляции.

3. При приближении к масштабу прекращения кумуляции ударная волна генерирует интенсивные энтропийно-вихревые возмущения — вихревые поверхности, исходящие из линий трехволновой конфигурации на поверхности ударной волны. Эволюция этих вихревых поверхностей приводит к формированию высокоэнергичной системы вихрей в окрестности фокуса.

Проиллюстрируем пункт 3 расчетом для случая комбинированного возмущения, в котором присутствуют π -периодическое возмущение, задаваемое сдвигом, и возмущение в виде сферической гармоники:

$$x^2 + (y - \text{sign}(x)\varepsilon)^2 + z^2 = 1 - 0,2 \sqrt{\frac{1309}{2\pi}} \cos(4\varphi) (65 \cos^4(\theta) - 26 \cos^2(\theta) + 1) \sin^4(\theta) \frac{3}{128}.$$

Плотность упаковки сфер в начальном состоянии — $\eta = 0,03$, величина сдвига — $\varepsilon = 0,025$. На рис. 7 визуализацией абсолютной величины ротора скорости показана вихревая структура в окрестности фокуса сходящейся ударной волны. Масштаб изображения составляет 0,05 начального радиуса. Положение фронта ударной волны в этот момент времени показано визуализацией плотности в экваториальной плоскости $z = 0$. Используемый метод расчета сходящейся ударной волны, основанный на решении уравнений Эйлера в трехмерной постановке, дает подробную информацию о характере течения на масштабе прекращения кумуляции.

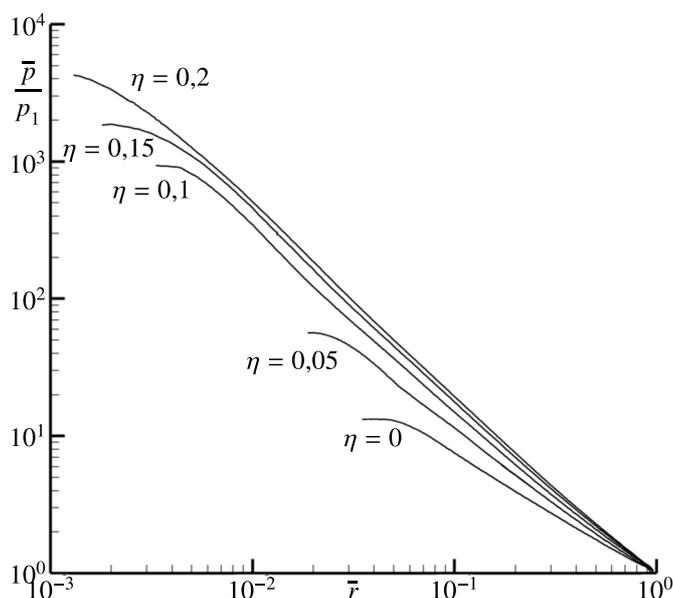


Рис. 7. Вихревая 3D-структура в окрестности фокуса ударной волны. Показаны изоповерхности абсолютной величины ротора скорости на уровне 0,3 максимального значения (2) и положение фронта расходящейся ударной волны в экваториальной плоскости $z = 0$ (1), r_0 — начальный радиус ударной волны

Заключение

На основе гидродинамического 3D-моделирования с использованием уравнения состояния Карнахана–Старлинга модели твердых сфер выполнено исследование развития π -периодических возмущений сферической ударной волны, приводящих к ограничению кумуляции. Созданная

расчетная методика на основе подвижных (сжимающихся) сеток позволяет с высокой точностью проследить эволюцию фронта сходящейся ударной волны в широком диапазоне изменения ее радиуса. Расчеты, выполненные для начального возмущения формы поверхности ударно-волнового разрыва вида $x^2 + (y + \text{sign}(x)\varepsilon)^2 + z^2 = 1$, где ε — малый параметр, показали, что отношение тангенциальной и радиальной составляющих скорости за фронтом ударной волны аппроксимируется зависимостью от радиуса вида $\frac{\bar{v}_\varphi}{\bar{v}_r} = \varepsilon\psi(\ln r)r^{m-1}$, $0 < m < 1$, где ψ — ограниченная осциллирующая функция переменной $\ln(r)$, $\psi(0) = 1$, а m является функцией плотности упаковки сфер в начальном состоянии. Степенная зависимость амплитуды возмущения от радиуса согласуется с результатами анализа устойчивости ударной волны, а наличие осцилляций объясняется интерференцией азимутальных вторичных волн с противоположным направлением распространения вдоль поверхности сходящейся ударной волны.

Известно, что уравнение состояния Ван-дер-Ваальса дает грубую аппроксимацию влияния сил межмолекулярного взаимодействия. Уравнение состояния Карнахана–Старлинга является более точным, что важно при анализе влияния термодинамической неидеальности на фокусировку сходящихся ударных волн, от которой, как показали полученные результаты, сильно зависит ограничение кумуляции вследствие нарушения симметрии.

Расчеты с использованием уравнения состояния модели твердых сфер подтвердили вывод о стабилизирующем влиянии на сходящуюся ударную волну термодинамической неидеальности, который был сделан ранее другими авторами на основе исследования устойчивости сходящихся ударных волн в газе Ван-дер-Ваальса [Evans, 1996; Somogyi, Roberts, 2007]: показано, что увеличение параметра плотности упаковки в модели твердых сфер приводит к существенному увеличению давлений, достигаемых в ударной волне с нарушенной симметрией. Преимуществом расчета сходящейся ударной волны на основе уравнений Эйлера с использованием сжимающихся сеток по сравнению с методом геометрической динамики ударных волн (см. [Whitham, 1959; Kjellander, Tillmark, Apazidis, 2010], где этот подход применялся для исследования влияния ионизации в задаче о сходящейся ударной волне, а также [Ridouh et al., 2019; Mostert et al., 2018; Baskar, Prasad, 2005; Murakami, Sanz, Iwamoto, 2015]) является детальная гидродинамическая картина течения.

На основе проведенного моделирования можно сделать следующие выводы.

1. Гидродинамический механизм ограничения кумуляции связан с переходом от маховского взаимодействия сегментов сходящейся ударной волны к регулярному отражению вследствие опережающего роста азимутальной составляющей скорости по сравнению с радиальной.

Это согласуется с выводом о возможной определяющей роли вихревого (азимутального) течения в сходящейся ударной волне на ограничение кумуляции [Chefranov, 2020; Chefranov, 2021].

2. На масштабе прекращения кумуляции течение сопровождается формированием высокоэнергетичных вихрей, в которые вовлечено вещество, подвергшееся наибольшему ударно-волновому сжатию. Оказывая влияние на процессы тепло- и массопереноса в области наибольшего сжатия, это обстоятельство является важным для актуальных практических применений сходящихся ударных волн в целях инициирования реакций (детонации, фазовых переходов, управляемого термоядерного синтеза). Эта особенность сходящихся ударных волн с нарушенной симметрией не нашла отражения в существующей литературе.

Список литературы (References)

- Брушлинский К. В.* Неустойчивость сходящейся сферической ударной волны // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1982. — Т. 22, № 6. — С. 1468–1479.
Brushlinskii K. V. Instability of a convergent spherical shock wave // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1982. — Vol. 22, No. 6. — P. 193–205. (Original Russian paper: *Brushlinskii K. V.* Neustoichivost' skhodyashcheisya sfericheskoi udarnoi volny // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 1982. — Vol. 22, No. 6. — P. 1468–1479.)
- Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. — 1959. — Т. 47, № 3. — P. 271–306.
Godunov S. K. Raznostnyi metod chislennogo rascheta razryvnykh reshenii uravnenii gidrodinamiki [Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics] // Matematicheskii Sbornik. — 1959. — Vol. 47. — P. 271–306 (in Russian).
- Забабакхин Е. И.* Неустойчивость неограниченной кумуляции // Письма в ЖЭТФ. — 1979. — Т. 30, № 2. — С. 97–99.
Zababakhin E. I. Neustoichivost' neogranichennoi kumulyatsii [Instability of unlimited cumulation] // Pisma v ZhETF. — 1979. — Vol. 30, No. 2. — P. 97–99 (in Russian).
- Попов Н. А., Щербakov В. А., Минеев В. Н., Зайдель Р. М., Фунтиков А. И.* О термоядерном синтезе при взрыве физического заряда (проблема газодинамического термоядерного синтеза) // Успехи физических наук. — 2008. — Т. 178, № 10. — С. 1087–1094.
Popov N. A., Shcherbakov V. A., Mineev V. N., Zaidel R. M., Funtikov A. I. Thermonuclear fusion in the explosion of a spherical charge (the problem of a gas-dynamic thermonuclear fusion) // Physics-Uspokhi. — 2008. — Vol. 51, No. 10. — P. 1047–1053. (Original Russian paper: *Popov N. A., Shcherbakov V. A., Mineev V. N., Zaidel' R. M., Funtikov A. I.* O termoyadernom sinteze pri vzryve fizicheskogo zaryada (problema gazodinamicheskogo termoyadernogo sinteza) // Uspokhi fizicheskikh nauk. — 2008. — Vol. 178, No. 10. — P. 1087–1094.)
- Anand R. K.* Shock dynamics of weak imploding cylindrical and spherical shock waves with non-ideal gas effects // Physica Scripta. — 2013. — Vol. 87, No. 6. — P. 065404.
- Arora R., Sharma V. D.* Convergence of strong shock in a Van der Waals gas // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 2006. — Vol. 66, No. 5. — P. 1825–1837.
- Baskar S., Prasad P.* Propagation of curved shock fronts using shock ray theory and comparison with other theories // Journal of Fluid Mechanics. — 2005. — Vol. 523. — P. 171–198.
- Ben-Dor G.* Shock wave reflection phenomena // NASA STI/Recon Technical Report A. — 2007. — Vol. 93. — P. 11439.
- Bhardwaj S., Mata S. R., Apazidis N., Liverts M.* Influence of flow nonuniformities and real gas effects on cylindrical shock wave convergence // Physics of Fluids. — 2024. — Vol. 36. — P. 126103.
- Carnahan N. F., Starling K. E.* Equation of state for nonattracting rigid spheres // Journal of Chemical Physics. — 1969. — Vol. 51, No. 7. — P. 635–636.
- Chauhan A., Arora R., Tomar A.* Converging shock waves in a Van der Waals gas of variable density // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 2020. — Vol. 73, No. 2. — P. 101–118.
- Chefranov S. G.* Dissipative instability of converging cylindrical shock wave // Physics of Fluids. — 2020. — Vol. 32, No. 11. — P. 114103.
- Chefranov S. G.* Instability of cumulation in converging cylindrical shock wave // Physics of Fluids. — 2021. — Vol. 33, No. 9. — P. 096111.
- Eliasson V., Kjellander M., Apazidis N.* Regular versus Mach reflection for converging polygonal shocks // Shock Waves. — 2007. — Vol. 17. — P. 43–50.
- Evans A. K.* Instability of converging shock waves and sonoluminescence // Physical Review E. — 1996. — Vol. 54, No. 5. — P. 5004–5011.
- Harten A.* Approximate Riemann solvers // High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. — 1983. — Vol. 49. — P. 357–393.
- Kitamura K., Shima E., Roe P.* Carbuncle phenomena and other shock anomalies in three dimensions // AIAA Journal. — 2012. — Vol. 50, No. 12. — P. 2655–2669.

- Kjellander M., Tillmark N., Apazidis N.* Shock dynamics of strong imploding cylindrical and spherical shock waves with real gas effects // *Physics of Fluids*. — 2010. — Vol. 22, No. 11 — P. 116102.
- Mostert W., Pullin D., Samtaney R., Wheatley V.* Spontaneous singularity formation in converging cylindrical shock waves // *Physical Review Fluids*. — 2018. — Vol. 3. — Article ID 071401(R).
- Murakami M., Sanz J., Iwamoto Y.* Stability of spherical converging shock wave // *Physics of Plasmas*. — 2015. — Vol. 22, No. 7. — Article ID 072703.
- Quirk J.J.* A contribution to the great Riemann solver debate // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 1994. — Vol. 18. — P. 555–574.
- Ridoux J., Lardjane N., Monasse L., Coulouvrat F.* Beyond the limitation of geometrical shock dynamics for diffraction over wedges // *Shock Waves*. — 2019. — Vol. 29. — P. 833–855.
- Rodionov A.V.* Artificial viscosity in Godunov-type schemes to cure the carbuncle phenomenon // *Journal of Computational Physics*. — 2017. — Vol. 345. — P. 308–329.
- Rodionov A.V.* Artificial viscosity to cure the carbuncle phenomenon: The three-dimensional case // *Journal of Computational Physics*. — 2018. — Vol. 361. — P. 50–55.
- Roe P.L.* Approximate Riemann solvers // *Journal of Computational Physics*. — 1981. — Vol. 43. — P. 357–372.
- Schwendeman D.W.* On converging shock waves of spherical and polyhedral form // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2002. — Vol. 454. — P. 365–386.
- Somogyi Z., Roberts P.H.* Stability of an imploding spherical shock wave in a Van der Waals gas II // *The Quarterly Journal of Mechanics*. — 2007. — Vol. 60, No. 5. — P. 289–309.
- Whitham B.G.* A new approach to problems of shock dynamics. Part II. Three-dimensional problems // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1959. — Vol. 5. — P. 369–386.
- Whitham B.G.* *Linear and non-linear waves*. — New York: John Wiley and Sons, 1974.
- Wu C.C., Roberts P.H.* Structure and stability of a spherical shock wave in a Van der Waals gas // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. — 1996. — Vol. 49, No. 4. — P. 501–543.
- Zhakhovskii V., Nishihara K., Abe M.* Molecular dynamics simulation on stability of converging shocks // *arXiv*. — 2009. — <https://arxiv.org/abs/0904.3394>