

УДК: 532.5

К вопросу об определении ядра концевой вихря

Р. П. Степанов^a, С. А. Кусюмов, А. Н. Кусюмов^b, Е. В. Романова

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева,
Россия, 420111, г. Казань, ул. К. Маркса, д. 10

E-mail: ^a rpstepanov@kai.ru, ^b postbox7@mail.ru

Получено 21.05.2024, после доработки — 01.11.2024.
Принято к публикации 03.02.2025.

Дается обзор критериев, используемых при идентификации концевых вихрей, сходящих с несущих поверхностей летательного аппарата. В качестве основного метода идентификации вихря используется Q -критерий, в соответствии с которым ядро вихря ограничено поверхностью, на которой норма тензора завихренности равна норме тензора сдвиговых деформаций. При этом внутри ядра вихря должны выполняться следующие условия: (i) ненулевое значение нормы тензора завихренности, (ii) геометрия ядра вихря должна удовлетворять условию галилеевой инвариантности. На основе аналитических моделей вихря дается определение понятия центра двумерного вихря как точки, в которой Q -распределение принимает максимальное значение и много больше нормы тензора сдвиговых деформаций (для осесимметричного 2D-вихря норма тензора сдвиговых деформаций в центре вихря стремится к нулю). Поскольку необходимость существования оси вихря обсуждается в работах различных авторов и выглядит достаточно естественным требованием при анализе концевых вихрей, упомянутые выше условия (i), (ii) дополнены условием (iii): ядро вихря в трехмерном потоке должно содержать ось вихря. Анализируются течения, имеющие в 2D-сечениях осевую симметрию, а также форму ядра вихря, отличающуюся от окружности (в частности, эллиптического вида). Показывается, что в этом случае с использованием Q -распределения можно не только определить область ядра вихря, но и выделить ось ядра вихря. Для иллюстрации введенных понятий используются результаты численного моделирования обтекания крыла конечного размаха на базе решения осредненных по Рейнольдсу стационарных уравнений Навье – Стокса (RANS). Замыкание уравнений Навье – Стокса осуществлялось с использованием модели турбулентности $k-\omega$.

Ключевые слова: концевой вихрь, ядро вихря, Q -критерий, ось вихря, численное моделирование

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, тема 123030100016-5 FZSU-2023-0005.

© 2025 Роберт Петрович Степанов, Сергей Александрович Кусюмов, Александр Николаевич Кусюмов, Елена Владимировна Романова

Статья доступна по лицензии Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.
Чтобы получить текст лицензии, посетите веб-сайт <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
или отправьте письмо в Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

UDC: 532.5

On the identification of the tip vortex core

R. P. Stepanov^a, S. A. Kusyumov, A. N. Kusyumov^b, E. V. Romanova

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev,
10 K. Marx st., Kazan, 420111, Russia

E-mail: ^a rpstepanov@kai.ru, ^b postbox7@mail.ru

Received 21.05.2024, after completion — 01.11.2024.
Accepted for publication 03.02.2025.

An overview is given for identification criteria of tip vortices, trailing from lifting surfaces of aircraft. Q -distribution is used as the main vortex identification method in this work. According to the definition of Q -criterion, the vortex core is bounded by a surface on which the norm of the vorticity tensor is equal to the norm of the strain-rate tensor. Moreover, following conditions are satisfied inside of the vortex core: (i) net (non-zero) vorticity tensor; (ii) the geometry of the identified vortex core should be Galilean invariant. Based on the existing analytical vortex models, a vortex center of a two-dimensional vortex is defined as a point, where the Q -distribution reaches a maximum value and it is much greater than the norm of the strain-rate tensor (for an axisymmetric 2D vortex, the norm of the vorticity tensor tends to zero at the vortex center). Since the existence of the vortex axis is discussed by various authors and it seems to be a fairly natural requirement in the analysis of vortices, the above-mentioned conditions (i), (ii) can be supplemented with a third condition (iii): the vortex core in a three-dimensional flow must contain a vortex axis. Flows, having axisymmetric or non-axisymmetric (in particular, elliptic) vortex cores in 2D cross-sections, are analyzed. It is shown that in such cases Q -distribution can be used to obtain not only the boundary of the vortex core, but also to determine the axis of the vortex. These concepts are illustrated using the numerical simulation results for a finite span wing flow-field, obtained using the Reynolds-Averaged Navier–Stokes (RANS) equations with k - ω turbulence model.

Keywords: tip vortex, vortex core, Q -criterion, vortex axis, numerical modeling

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2025, vol. 17, no. 1, pp. 9–27 (Russian).

This work was supported by the grant “FZSU-2023-0005” (No. 123030100016-5) of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation.

1. Введение

Понятие «концевой вихрь» чаще всего относят к классу изолированных (свободных) вихрей в неограниченном пространстве, образующихся в окрестности концевых частей несущих поверхностей летательного аппарата: крыло самолета, лопасть винта вертолета, фюзеляж под углом атаки и др. При этом в окрестности несущей поверхности может образовываться как один, так и несколько концевых вихрей (например, вихри за концевыми частями крыла и закрылка).

Концевые вихри являются источником индуктивного сопротивления и оказывают негативное влияние на летно-технические характеристики летательных аппаратов. Способность оценивать концевые вихри за самолетом является важным фактором обеспечения безопасности полетов и увеличения эффективности управления воздушным движением [ICAO, 2012]. Выбор подходящего метода идентификации вихревых структур, сходящих с несущих поверхностей летательных аппаратов, является важной задачей и сохраняет высокую актуальность [Ahmad, Proctor, 2014; Epps, 2017].

Концевые вихри крыла самолета представляют собой пример классической физической интерпретации понятия «вихрь». Определив циркуляцию концевой вихря с помощью теоремы Н. Е. Жуковского, можно оценить несущую способность крыла. Визуализация и анализ вихревой структуры потока в аэродинамических трубах позволяют локализовывать пространственное положение вихря. Интерес прежде всего представляет локализация ядра вихря, поскольку именно на границе ядра вихря реализуются максимальные окружные скорости.

В настоящее время анализ структуры течения и летно-технические характеристики летательных аппаратов определяются преимущественно путем численного моделирования. Однако обеспечение высокой точности численного моделирования обтекания летательного аппарата требует больших вычислительных мощностей. В тех случаях, когда необходимо провести численное моделирование вихревой структуры на большом удалении от самолета, затрачиваемые вычислительные ресурсы могут становиться недоступно высокими.

Характерной особенностью изолированных вихрей (включая концевые) является форма ядра вихря, близкая к поверхности конуса. Вихревые образования, близкие по структуре к концевому вихрю, могут встречаться и в областях течений в полуограниченном пространстве. Примером здесь являются вихри, возникающие при обтекании протяженных уступов на низких числах Рейнольдса. Вихри данного типа ограничены в пространстве (можно выделить начало и конец вихря), а сечение ядра вихря может иметь форму, близкую к эллипсу. Вместе с тем концевые вихри являются классическим примером понятия «вихрь». Те определения (физические и математические), которые используются в литературе, могут быть апробированы при анализе структуры концевой вихря. В этом смысле перед анализом структуры концевых вихрей по результатам физического эксперимента или численного моделирования следует рассмотреть более общее определение понятия «вихрь», выходящее за рамки понятия «концевой вихрь».

Интуитивно ядро вихря можно охарактеризовать как трубку, поверхность которой состоит из вихревых линий [Lamb, 1945]. Более строгое определение свойств ядра вихря дано в [Jeong, Hussain, 1995].

- (i) Ядро вихря должно иметь ненулевое значение тензора завихренности (а следовательно, и ненулевую циркуляцию). Поэтому области с потенциальным течением не рассматриваются.
- (ii) Геометрия идентифицированного ядра вихря должна удовлетворять условию галилеевой инвариантности.

В [Haller, 2005] отмечается, что не существует общепринятого единственно верного метода идентификации вихрей. В настоящее время используются различные эйлеровы методы идентификации вихрей. Согласно [Chong, Perry, Cantwell, 1990] вихрь представляет собой область с комплексными собственными значениями градиента скорости ∇u (Δ -критерий). В работе [Hunt, Wray, Moin, 1988] дается понятие ядра вихря как области, в которой норма тензора завихренности $\|\Omega\|$ принимает более высокие значения в сравнении с нормой тензора сдвиговых деформаций $\|S\|$. Условие $Q = \frac{1}{2}(\|\Omega\|^2 - \|S\|^2) > 0$, введенное в [Hunt, Wray, Moin, 1988] для нахождения области ядра вихря, известно как Q -критерий. В некоторых работах упоминается, что, помимо выполнения условия $Q > 0$, область ядра вихря должна быть связанной (connected) [Jeong, Hussain, 1995]. Существуют иные эйлеровы критерии определения ядра вихря, построенные на анализе поля скоростей потока: λ -критерий [Zhou et al., 1999], λ_2 -критерий [Jeong, Hussain, 1995], $\frac{\lambda_{cr}}{\lambda_i}$ -критерий [Chakraborty, Balachandar, Adrian, 2005] и др. [Erps, 2017].

Упомянутые выше методы определяют ядро вихря как некоторую локализованную трехмерную пространственную структуру. В [Haller, 2005] используется неградиентный метод лагранжевых когерентных структур (LCS), основанный на анализе траекторий частиц жидкости в трехмерном пространстве.

Существуют также двумерные неградиентные методы, которые можно использовать при анализе вихрей: Γ_1 - и Γ_2 -критерии [Graftieaux, Michard, Grosjean, 2001; Huang, Green, 2015; Coletta et al., 2019], метод поперечных линий (Cross-Sectional Lines или CSL-метод) [Vollmers, 2001; Bussi ere, Nobes, Koch, 2012], метод линий тока (Winding Angle или WA-метод) [Portela, 1999; Sadarjoeen, 2000] и метод Корсиглии [Corsiglia, Schwind, Chigier, 1973].

Следует отметить, что, несмотря на использованный в [Hunt, Wray, Moin, 1988] термин «вихрь» (eddy zone, vortex tube), в более поздних работах с применением Q -критерия используется термин «вихревая структура». Объяснение применению данного термина можно обосновать двумя причинами. Во-первых, как следует из определения Q -критерия, изоповерхность $Q = \text{const}$ может ограничивать область, которая при детальном рассмотрении не является вихрем [Haller, 2005] (в силу наличия значительных сдвиговых деформаций). Во-вторых, на значительных удалениях от источника возмущений (например, от несущей поверхности) может происходить распад вихря, и изоповерхность Q -распределения в этом случае не является связанной поверхностью, а имеет вид некоторой вихревой структуры, состоящей из изолированных подобластей.

Другим важным вопросом при исследовании вихревых структур является нахождение пространственного положения оси вихря, поскольку в ряде работ (см., например, [Wu, Xiong, Yang, 2005; Wu, Ma, Zhou, 2006]) отмечается, что методы идентификации вихрей должны позволять находить ось вихря в трехмерном потоке. Один из первых подходов к определению оси вихря, предложенный в [Sujudi, Haimes, 1995], основан на теории критических точек. Собственные числа и собственные векторы тензора градиента скорости, рассчитанные в окрестности критической точки, определяют локальную картину течения около этой точки. Ищется критическая точка, в которой имеется одно вещественное собственное значение и комплексно-сопряженная пара. В этом случае критическая точка полагается точкой, лежащей на оси вихря.

Необходимость построения оси вихря упоминается среди требований к методам идентификации вихрей в [Kolar, 2007]. В [Kolar, 2007] предложен также метод идентификации вихрей, основанный на тройной декомпозиции движения жидкой частицы: вращательного, деформации сдвига и деформации растяжения. В [Hoffman, 2021] отмечается, что возможность такой декомпозиции доказана в простейших модельных случаях.

В [Gao et al., 2019] ось вихря рассматривается как линия, в точках которой векторное произведение некоторого вектора (Liutex) и градиента его магнитуды равно нулю. Техника вычислений в данном подходе требует преобразования системы координат [Gao et al., 2019], адаптированного к рассматриваемому вихрю. Основное внимание в работах с использованием вектора

Liutex уделяется построению оси вихря, тогда как выделение области ядра вихря осуществляется с применением алгоритма, не связанного с построением вектора Liutex.

Поскольку существование оси вихря выглядит достаточно естественным требованием при анализе концевых вихрей, упомянутые выше условия (i), (ii) можно дополнить еще одним:

(iii) ядро вихря в трехмерном потоке должно содержать ось вихря.

Из пункта (iii) следует, что методы идентификации вихрей должны позволять определять центр вихря в двумерном сечении. Помимо концевых вихрей, согласно некоторым существующим аналитическим моделям вихревые атмосферные структуры (например, торнадо) также могут рассматриваться как осевые вихри. В некоторых работах на основе простых аналитических моделей рассматривается взаимное влияние вихрей (см., например, [Kida, 1981]).

В соответствии с условиями (i)–(iii) определение ядра вихря опирается на метод идентификации вихря. В работах [Kolar, 2007; Gao et al., 2019] определяются требования к методам идентификации вихря. В то же время в [Wu, Xiong, Yang, 2005] дается общее определение понятия вихря без обозначения требований к методу идентификации вихря: *общая формулировка вихря должна включать требование наличия оси вихря при произвольных осевых деформациях, при этом в поперечном сечении потока должны преобладать только осевая компонента завихренности или вращательное движение жидкости, в сопоставлении со сдвиговыми напряжениями в этой плоскости.*

Центр вихря может определяться с использованием различных методов идентификации вихрей. Например, Γ_1 -критерий задает безразмерную скалярную функцию, которая определяет положение центра ядра вихря как точку, в которой средний угол между радиус-вектором и вектором скорости стремится к значению $\frac{\pi}{2}$. Γ_1 -критерий не обладает свойством галилеевой инвариантности. Галилеева инвариантность Γ_2 -критерия достигается учетом местной (локальной) конвективной скорости в рассматриваемой области интегрирования [Graftieaux, Michard, Grosjean, 2001]. Несмотря на то что Γ_2 -критерий является надежным методом, который можно использовать при анализе PIV-данных, точность этого метода сильно зависит от выбора размера области интегрирования [Coletta et al., 2019].

Пространственное положение центра вихря можно определять по максимальным значениям завихренности [Gerz, Holzapfel, Darracq, 2002; Cheng et al., 2019; Schauerhamer, Robinson, 2017]. Однако данный подход не позволяет отделять вихрь от сдвигового слоя, особенно в случаях, когда значения сдвиговых деформаций сопоставимы со значениями завихренности [Jeong, Hussain, 1995]. Метод контурных линий завихренности (Contour Lines of Vorticity или CLV-метод) определяет центр вихря как точку, в которой значение завихренности соответствует локальному экстремуму [Vollmers, 2001]. WA-метод также можно использовать для нахождения центра вихря, но получаемые результаты могут зависеть от принятой системы координат [Vollmers, 2001].

CSL-метод позволяет находить центр вихря и определять поперечную скорость вихря. Центр вихря можно найти путем соединения противоположно направленных векторов скорости (Opposite Velocity Directions или ODV-метод) [Vollmers, 2001], но такой подход является достаточно грубым.

Метод Корсиглии [Corsiglia, Schwind, Chigier, 1973] основан на допущении, что вектор скорости, измеренный ортогонально по отношению к оси вихря, соответствует азимутальной скорости вихря. В [Gao et al., 2019] центр вихря определяется как точка пересечения вектора Liutex с плоскостью рассматриваемого сечения вихря.

Из анализа литературы следует, что Q -критерий является наиболее распространенным методом идентификации вихрей при анализе результатов численного и физического моделирования. Поэтому далее в данной работе вопросы идентификации вихрей будут рассматриваться с точки зрения применения Q -критерия.

В некоторых работах [Kolar, 2007; Gao et al., 2019] утверждается, что эйлеровы методы (включая Q -критерий) не дают определение понятия оси вихря. Поэтому основное внимание в работе фокусируется на обсуждении возможности построения оси вихря с использованием Q -распределения.

В настоящей работе на основе аналитических вихревых моделей (в частности, применяемых при изучении концевых вихрей, генерируемых поверхностью летательного аппарата), в дополнение к понятию ядра вихря на базе Q -распределения, даются определение понятия центра вихря для двумерного случая и определение оси вихря для трехмерного случая.

Работа состоит из нескольких разделов. Во втором разделе приводится определение Q -критерия для двумерного и трехмерного течения. В третьем разделе определяется вид выражения для распределения окружной скорости течения изолированного вихря, для которого линии тока в окрестности центра ядра вихря имеют форму окружности. Полученное выражение для окружной скорости сопоставляется с аналитическими моделями вихря. Далее в этом же разделе рассматривается векторное поле более общего характера, для которого форма линий тока близка к эллиптической. Определяется соотношение между значениями нормы тензоров завихренности $\|\Omega\|$ и сдвиговых деформаций $\|S\|$ в зависимости от эксцентриситета эллипса. В четвертом разделе на основе определения центра двумерного вихря формулируется определение оси вихря для трехмерного потока. Кроме того, переформулировано определение понятия вихря работы [Wu, Xiong, Yang, 2005]. Для иллюстрации введенных понятий в пятом разделе используются результаты численного моделирования обтекания крыла конечного размаха, полученные с применением пакета VMB (версия пакета IBM 2.0 [Barakos et al., 2005], адаптированная для КНИТУ-КАИ) на базе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса (RANS). В шестом разделе приводится модельный пример идентификации пары 2D-вихрей при высоком и низком разрешении дискретного поля скоростей. Визуализация поля скоростей осуществлялась в программе Tecplot.

2. Q -критерий

Q -критерий является одним из наиболее известных подходов к идентификации вихрей, основанных на локальном анализе поля скоростей в областях с ненулевыми значениями нормы тензора завихренности Ω . Помимо этого, ненулевые значения в рассматриваемой области течения может иметь и норма тензора сдвиговых деформаций S . Согласно Q -критерию и следуя условию (i), ядро вихря рассматривается как область где евклидова норма тензора завихренности $\|\Omega\|$ превышает норму тензора сдвиговых деформаций $\|S\|$ [Hunt, Wray, Moin, 1988; Haller, 2005]:

$$Q = \frac{1}{2} (\|\Omega\|^2 - \|S\|^2) = \frac{1}{2} (\Omega_{ij}\Omega_{ji} - S_{ij}S_{ji}) > 0. \quad (1)$$

Здесь $\Omega_{ij} = \frac{u_{i,j} - u_{j,i}}{2}$ и $S_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}$, где $u_{i,j}$ – пространственные производные компонентов вектора скорости. Для двумерного несжимаемого потока критерий (1) называют критерием Окубо – Вейса [Okubo, 1970; Weiss, 1991].

При исследовании концевых вихрей крыла Q -критерий можно представить в безразмерном виде по отношению к хорде крыла b и скорости невозмущенного потока V_∞ :

$$\bar{Q} = \frac{b^2}{2\pi^2 V_\infty^2} Q = (\bar{\Omega}^2 - \bar{S}^2) > 0. \quad (2)$$

Здесь

$$|\bar{\Omega}|^2 = \frac{b^2}{V_\infty^2} \frac{\|\Omega\|^2}{4\pi^2},$$

$$|\bar{S}|^2 = \frac{b^2}{V_\infty^2} \frac{\|S\|^2}{4\pi^2}.$$

В тех случаях, когда рассматривается двумерное поле скоростей (для некоторого фиксированного сечения вихря), значения $\|\Omega\|$ и $\|S\|$ определяются выражениями

$$\|\Omega\| = \sqrt{2}|\Omega_{23}|, \quad (3)$$

$$\|S\| = \sqrt{2S_{23}S_{23} + S_{22}S_{22} + S_{33}S_{33}}, \quad (4)$$

где

$$\Omega_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (5)$$

$$S_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad S_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad S_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (6)$$

Геометрия ядра вихря по Q -критерию обладает свойством галилеевой инвариантности [Haller, 2005]. Сравнительно простой алгоритм определения границы ядра вихря обуславливает популярность Q -критерия как рабочего инструмента идентификации ядра вихря при рассмотрении широкого круга задач.

3. Нахождение центра ядра вихря с использованием Q -распределения

При анализе структуры вихревых 2D-течений значения норм тензоров завихренности и сдвиговых деформаций для вектора скорости $\bar{U} = f(v, w)$ в общем случае отличны от нуля: $\|\Omega\| \neq 0$ и $\|S\| \neq 0$. Рассмотрим изолированный вихрь ($\|\Omega\| \neq 0$) на плоскости, локализованный условием (1) в начале системы координат ($y = 0, z = 0$). Если при этом в окрестности точки локализации вихря выполняется условие

$$\|S\|^2 = 0, \quad (7)$$

то течение является чисто вихревым (деформационная составляющая отсутствует). В этом случае для $r = 0$ также естественно принять

$$v = w = 0, \quad (8)$$

где $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ — модуль радиус-вектора \bar{r} в декартовой системе координат. Условие (8) согласуется с методикой работы [Sujudi, Haimes, 1995], где ось вихря проходит через критические точки течения.

Для стационарного течения несжимаемой жидкости компоненты связаны между собой через уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

Отметим, что в общем случае $\|S\| \neq 0$, т. е. в начале системы координат течение может не быть чисто вихревым.

Большинство известных аналитических моделей вихревого течения являются трехмерными, и вектор скорости течения имеет три компоненты: осевую, окружную и радиальную [Vasistas,

1998]. При этом в сравнении с окружной компонентой радиальная и осевая компоненты имеют порядок Re^{-1} (Re — число Рейнольдса, определяемое характерными параметрами течения).

В наиболее простом случае ограничимся рассмотрением течения, имеющего окружной характер в окрестности начала координат (центра вихря): считаем $\text{Re} \gg 1$ и пренебрегаем влиянием радиальной и осевой компонент вектора скорости течения на значения нормы тензоров завихренности и сдвиговых деформаций. Для такого течения вектор скорости $\overline{U}(v, w)$ ориентирован ортогонально по отношению к радиус-вектору \overline{r} , и проекции вектора скорости \overline{U} на координатные оси представляются выражениями

$$\begin{aligned} v(y, z) &= -U(y, z) \sin \theta, \\ w(y, z) &= U(y, z) \cos \theta, \end{aligned} \quad (10)$$

где $U(y, z)$ — некоторая гладкая функция, $\cos \theta = \frac{y}{r}$, $\sin \theta = \frac{z}{r}$.

Согласно данному представлению, линии тока течения имеют форму окружностей, вдоль которых модуль вектора скорости течения изменяется по произвольному закону при $r = \text{const}$. Чтобы исключить особенность в начале системы координат в представлении (10), с учетом (8) полагаем, что

$$U(0, 0) = 0. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (9), можно показать, что функция $U(y, z)$ имеет осесимметричный характер:

$$U(y, z) = F(r), \quad (12)$$

где $F(r)$ — произвольная функция.

В общем случае течение в ограниченном пространстве не обязательно имеет осевую симметрию, при этом в окрестности ядра вихря форма линий тока может быть близка к окружности. Такая модель течения дается, в частности, в [Danaila, Kaplanski, Sazhin, 2015], где рассматривается вихревое течение около твердой стенки.

С учетом (11) в окрестности начала координат ($r \approx 0$) функцию $F(r)$ представим в виде сходящегося степенного ряда [Маркушевич, 1950]:

$$F(r) = a_n r^n + a_{n+1} r^{n+1} + \dots, \quad (13)$$

где a_n, a_{n+1}, \dots — константы, $n \geq 1$ — целое число. Подстановка (13) в (3)–(6) дает выражения

$$\begin{aligned} \|\Omega\|^2 &= \frac{a_n^2}{2} (n+1)^2 r^{2(n-1)} + O_\Omega(r^m), \\ \|\mathbf{S}\|^2 &= \frac{a_n^2}{2} (n-1)^2 r^{2(n-1)} + O_S(r^k). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $O_\Omega(r^m)$ и $O_S(r^k)$ — полиномы, содержащие слагаемые, пропорциональные r^m и r^k , где $m, k \geq 1$ — целые числа.

Из (14) следует, что при $r \rightarrow 0$ условие $\|\Omega\| \neq 0$ выполняется только если $n = 1$. Это соответствует линейной зависимости модуля вектора скорости от радиуса. В этом случае также выполняется условие (7) равенства нулю нормы тензора сдвиговых деформаций.

Существуют различные 2D-модели вихря, которые согласуются с зависимостью (12): модель Рэнкина, Лэмба–Осина [Holzäpfel et al., 2012], Проктора [Ahmad, Proctor, 2014], Бернхема–Халлока [Burnham, Hallock, 2013; Proctor, 1998] и др. Модели Лэмба–Осина, Проктора, Бернхема–Халлока используются, в частности, при анализе концевых вихрей самолета [Ahmad, Proctor, 2014]. Линейное радиальное распределение окружной скорости используется в одной из

моделей торнадо [Loree, 2020]. Согласно модели Рэнкина тангенциальная скорость $v_\theta(r)$ в полярной системе координат задается соотношениями

$$\begin{aligned} v_\theta(r) &= \frac{\Gamma_0}{2\pi r_c} \frac{r}{r_c} && \text{при } r \leq r_c, \\ v_\theta(r) &= \frac{\Gamma_0}{2\pi r} && \text{при } r > r_c, \end{aligned} \quad (15)$$

где r — расстояние от центра вихря, r_c — радиус ядра вихря, Γ_0 — значение циркуляции вихря.

Путем подстановки (15) в (3)–(6) можно получить следующие выражения для вихря Рэнкина:

$$\|\Omega\| = \sqrt{2}|\Omega_{23}|_{\text{Rankine}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma_0}{\pi r_c^2}, \quad \|\mathcal{S}\| = 0.$$

В модели Бернхема–Халлока зависимость тангенциальной скорости от радиуса вихря определяется выражением

$$v_\theta(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \frac{r^2}{r^2 + r_c^2}.$$

Так же как и для вихря Рэнкина, модель Бернхема–Халлока имеет близкую к линейной зависимость $v_\theta(r)$ в окрестности центра вихря. Аналогичное утверждение справедливо и для других упомянутых выше 2D-моделей. Следовательно, можно принять, что в окрестности центра осесимметричного 2D-вихря выполняется соотношение

$$\|\Omega\| \rightarrow \|\Omega\|_{\max}, \quad \|\mathcal{S}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (16)$$

где $r = 0$ соответствует центру вихря. С учетом (2) и (16) можно также записать условие для нахождения координат \mathbf{x}_c центра 2D-вихря с использованием Q -распределения [Степанов, Кусюмов, 2024]:

$$\text{если } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_c, \text{ то } Q \rightarrow Q_{\max}, \|\mathcal{S}\| \rightarrow 0. \quad (17)$$

Из (15) следует, что в идеализированной модели вихря Рэнкина скорость $v_\theta(r)$ изменяется по линейному закону в пределах всего ядра вихря, а затем происходит скачкообразный переход к нелинейной части зависимости $v_\theta(r)$. Для остальных известных аналитических моделей вихря зависимость $v_\theta(r)$ имеет нелинейный характер, а близкое к линейному распределение $v_\theta(r)$ имеет место только в окрестности центра вихря. Такой характер распределения $v_\theta(r)$ позволяет не только определить положение центра вихря, но и выделить ядро вихря в соответствии с условием (1).

Следует отметить, что рассмотренное выше векторное поле (10) имеет осесимметричный характер, вследствие чего в окрестности центра вихря отсутствуют сдвиговые деформации. В качестве обобщения рассмотрим в окрестности центра вихря (при $r \rightarrow 0$) неосесимметричную модель векторного поля [Kida, 1981] (в безразмерной форме):

$$\begin{aligned} v(y, z) &= \alpha y - \gamma z, \\ w(y, z) &= -\alpha z + \gamma y, \end{aligned} \quad (18)$$

где α, γ — константы. При $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ и $|\gamma| > |\alpha|$ линии тока для векторного поля (18) близки к эллиптическим формам. На рис. 1 показаны поле скоростей и линии тока, построенные в Tecplot для $\alpha = 0,3$ и $\gamma = 1$.

Подстановка $v(y, z)$ и $w(y, z)$ из (18) в (3)–(6) дает выражения

$$\begin{aligned} \|\Omega\|^2 &= 2\gamma^2, \\ \|\mathcal{S}\|^2 &= 2\alpha^2. \end{aligned} \quad (19)$$

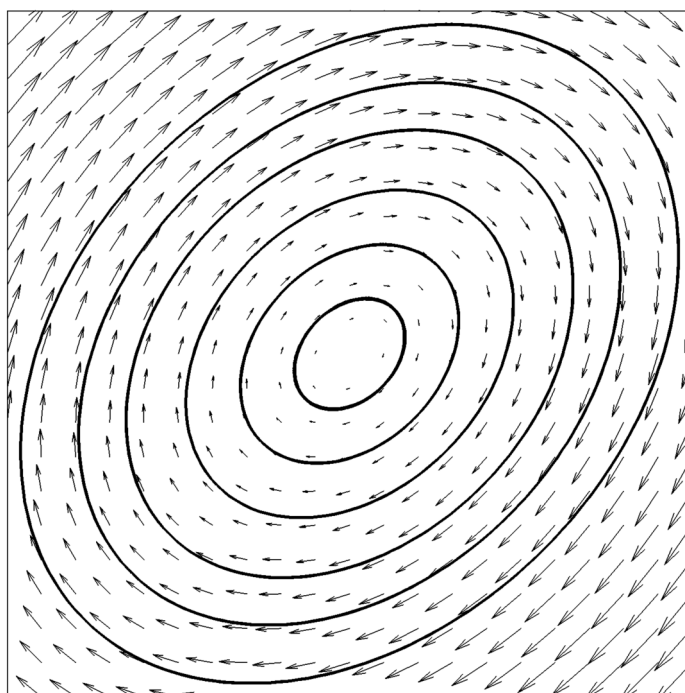


Рис. 1. Линии тока для неосесимметричной модели векторного поля

Из (19) следует, что величины γ и α определяют соответственно завихренность и сдвиговую деформацию векторного поля в окрестности рассматриваемого центра вихря, и при условии $|\gamma| > |\alpha|$ имеет место соотношение

$$Q = (\gamma^2 - \alpha^2) > 0. \quad (20)$$

Поскольку линии тока имеют эллиптическую форму, можно ввести понятие эксцентриситета линий тока:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{r_{\min}^2}{r_{\max}^2}},$$

где r_{\min} и r_{\max} — соответственно малая и большая полуоси эллипса. Можно показать, что для рассматриваемого векторного поля эксцентриситет определяется выражением

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha + \gamma}}. \quad (21)$$

Из (21) следует, что если $\gamma > 3,16\alpha$, то $\|\Omega\|^2 > 10\|S\|^2$ и эксцентриситет $\varepsilon < 0,69$. Отсюда можно принять

$$\|\Omega\|^2 \gg \|S\|^2 \quad \text{при } \varepsilon < 0,5. \quad (22)$$

Таким образом для неосесимметричных векторных полей с умеренным эксцентриситетом квадрат нормы тензора завихренности более чем на порядок превышает квадрат нормы тензора сдвиговых деформаций.

Следует отметить, что условие (22) согласуется с работой [Moore, Saffman, 1971], в которой проводился анализ структуры двумерного эллиптического вихря в завихренном и напряженном поле. В [Moore, Saffman, 1971] показано, что эллиптический вихрь является устойчивым при условии $\frac{\alpha}{\gamma} < 0,15$ (что соответствует $\varepsilon < 0,51$).

Используя (20), (21), можно выразить величину Q через эксцентриситет линии тока:

$$Q = \gamma^2 \frac{1 - \varepsilon^2}{\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^2}. \quad (23)$$

Из (23) при условии (22) следует

$$Q > 0,98\gamma^2.$$

Можно также рассмотреть влияние эксцентриситета линий тока на значение критерия Q^1 -распределения [Степанов, Кусюмов, Баракос, 2022]:

$$Q^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|\Omega\| - \|S\|).$$

Для рассматриваемого векторного поля

$$Q^1 = \gamma - \alpha = \gamma \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \frac{\varepsilon^2}{2}}$$

и при условии $\varepsilon < 0,5$ имеем оценку

$$Q^1 > 0,857\gamma.$$

Таким образом, при $\varepsilon < 0,5$ значение Q отличается от квадрата нормы тензора завихренности не более чем на 2%. При анализе векторных полей с использованием Q^1 -критерия условие $0,857\gamma < Q^1 < \gamma$ указывает на эллиптическую форму линий тока в окрестности центра вихря.

В целом для векторных 2D-полей с эллиптическими функциями тока и при значении эксцентриситета $\varepsilon < 0,5$ условие (17) для определения центра вихря можно заменить следующим условием:

$$\text{если } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_c, \text{ то } Q \rightarrow Q_{\max}, \|\Omega\|^2 \gg \|S\|^2. \quad (24)$$

В данной работе при идентификации центра вихря в сечениях концевго вихря используются условия (17) и (24).

4. Определение ядра концевго вихря и его оси с использованием Q -распределения

Условия (17), (24) позволяют найти положение центра вихря в различных 2D-сечениях концевго вихря. Для того чтобы выделить 2D-сечение вихря, необходимо дать общее определение ядра концевго вихря для 3D-течений. В данной работе определения понятий ядра вихря и оси вихря даются с использованием Q -распределения.

Вихревой областью будем называть область, в которой $\|\Omega\| \neq 0$. *Ядром W_0 вихревой области* будем называть часть вихревой области, в каждой точке $\mathbf{x} = (x, y, z) \in W_0$ которой выполняется условие $Q \geq 0$, т. е.

$$W_0(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \mid Q(\mathbf{x}) \geq 0\}.$$

Обозначим через $B_0(\mathbf{x})$ внешнюю границу (изоповерхность) ядра вихревой области W :

$$B_0(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \mid Q(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (25)$$

Условие (25) редко используют на практике при визуализации поверхности ядра вихревой области из-за возможного наличия большого количества артефактов (в виде замкнутых подобластей). Для устранения (уменьшения количества) подобного рода артефактов при определении ядра вихревой области используют отсечку:

$$W_A(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \mid Q(\mathbf{x}) \geq A\},$$

где $A = \text{const} > 0$ ($A \approx 0$). Изоповерхность (возможно, неодносвязная)

$$B_A(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \mid Q(\mathbf{x}) = A\}$$

соответствует внешней границе ядра вихревой области W_A . (Согласно определению область называется односвязной, если любую замкнутую кривую в этой области можно непрерывно трансформировать в точку [Arfken, Weber, Harris, 2013].)

При некоторых значениях константы A ядро вихревой области W_A может состоять из изолированных (непересекающихся) областей W_C , т. е. $W_A = \bigcup W_C$. Каждую изолированную односвязную область W_C будем называть *ядром вихревой структуры*.

В семействе непересекающихся областей $W_A = \bigcup W_C$ рассмотрим некоторое ядро вихревой структуры W_C . Обозначим через $W_C(\mathbf{x}_i)$ область W_C , содержащую произвольную точку \mathbf{x}_i . Построим плоскость $F(\mathbf{x}_i)$, пересекающую $W_C(\mathbf{x}_i)$ так, что $\mathbf{x}_i \in F(\mathbf{x}_i)$. Область сечения внутри $W_C(\mathbf{x}_i)$ обозначим через $F_C(\mathbf{x}_i)$: $F_C(\mathbf{x}_i) = W_C(\mathbf{x}_i) \cap F(\mathbf{x}_i)$. Очевидно, что граница $B_C(\mathbf{x}_i) = B_C \cap F(\mathbf{x}_i)$ сечения $F_C(\mathbf{x}_i)$ для рассматриваемого $W_C(\mathbf{x}_i)$ топологически эквивалентна окружности (является односвязной замкнутой кривой). В сечении $F_C(\mathbf{x}_i)$ выделим точку $\mathbf{x}_c \in F_C(\mathbf{x}_i)$, в которой достигается максимальное значение Q -распределения:

$$Q(\mathbf{x}_c) = \max\{Q(\mathbf{x}_j) \mid \forall \mathbf{x}_j \in F_C(\mathbf{x}_i)\}. \quad (26)$$

Будем говорить, что односвязная кривая $B_C(\mathbf{x}_i)$ ограничивает ядро 2D-вихря в сечении $F_C(\mathbf{x}_i)$, если на (26) накладываем дополнительное условие, в соответствии с которым значение нормы тензора сдвиговых деформаций в точке \mathbf{x}_c стремится к нулю:

$$Q(\mathbf{x}_c) = \max\{Q(\mathbf{x}_j) \mid \forall \mathbf{x}_j \in F_C(\mathbf{x}_i), \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_j)\| \rightarrow 0\}. \quad (27)$$

Условие (27) записано для 2D-вихря, в котором поле окружной скорости имеет осесимметричный характер и ядро вихря имеет форму окружности. В реальных условиях сечение ядра вихревой структуры может иметь иную форму (например, близкую к эллипсу). Кроме того, данные, подлежащие обработке, могут содержать погрешности различного характера, искажающие форму сечения ядра вихревой структуры. Поэтому с учетом (24) условие (27) может быть заменено выражением

$$Q(\mathbf{x}_c) = \max\{Q(\mathbf{x}_j) \mid \forall \mathbf{x}_j \in F_C(\mathbf{x}_i), \|\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_j)\|^2 \gg \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_j)\|^2\}. \quad (28)$$

Используя семейство точек \mathbf{x}_c в различных сечениях $F_C(\mathbf{x}_i)$, можно построить некоторую гладкую непрерывную кривую L_C так, что $\mathbf{x}_c \in L_C \subset W_C$. Кривую L_C будем называть *осью вихря*. Ядро вихревой структуры W_C будем называть *ядром вихря*, если W_C содержит ось вихря L_C .

Отметим, что формулировки данной работы, относящиеся к определению ядра и оси вихря, основаны на применении Q -распределения. Использование других методов идентификации вихря может приводить к иной геометрии семейства вихревых структур, включая геометрию изоповерхностей и координат оси вихря. Качество построения расчетной сетки при проведении численного моделирования также может существенно влиять на точность идентификации параметров ядра вихря (см., в частности, [Степанов, Кусюмов, Баракос, 2022]).

Формулировку вихря работы [Wu, Xiong, Yang, 2005] можно дать с использованием понятия ядра вихря. Опираясь на определение (28) для течений, в 2D-сечениях которых форма линий тока близка к эллипсу с ограниченным эксцентриситетом полуосей, в упрощенной форме понятие ядра вихря можно сформулировать следующим образом: *ядро вихря должно содержать ось вихря, в каждой точке которой достигается локальный максимум Q -распределения при условии $\|\Omega\|^2 \gg \|S\|^2$.*

5. Визуализация результатов численного моделирования концевой вихря крыла

Вихревая область течения около крыла конечного размаха является примером, для которого применение Q -критерия к результатам численного моделирования позволяет выделить ядро вихревой области. При этом только часть ядра вихревой области содержит концевой вихрь — ядро вихревой структуры, содержащей ось вихря.

Численное моделирование обтекания крыла проводилось на основе решения уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу (RANS), для прямоугольного крыла с относительным удлинением 7,8. Крыло имело постоянный по размаху модифицированный аэродинамический профиль Göttingen-387 [Степанов и др., 2019].

Вычислительная область была поделена на 58 блоков. Расчетная сетка содержала 4,5 млн ячеек (количество ячеек определялось по результатам исследования сеточной независимости решения). Численное моделирование обтекания крыла проводилось для угла атаки 6° . Полученные интегральные характеристики крыла сравнивались с экспериментальными данными, представленными в [Степанов и др., 2019], и различие между значениями коэффициента подъемной силы составило около 2%. Пристеночные ячейки в пограничном слое имели размер 10^{-5} от хорды крыла, а фактор роста ячеек не превышал значения 1,2. Замыкание уравнений Навье–Стокса осуществлялось с использованием модели турбулентности $k-\omega$ [Menter, 1994]. В силу симметрии течения при отсутствии угла скольжения расчетная область строилась для половины крыла. Некоторые результаты визуализации концевых вихрей крыла по результатам численного моделирования представлены также в [Степанов, Кусюмов, Баракос, 2022].

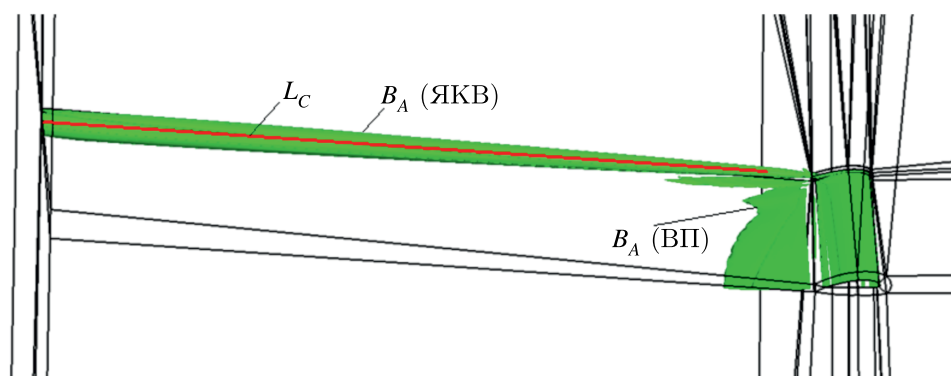


Рис. 2. Визуализация изоповерхности ядра вихревой области W_A при $\bar{Q} = 0,001$

На рис. 2 показана изоповерхность B_A ядра вихревой области W_A для угла атаки 6° . Поток на рис. 2 движется справа налево. Визуализация изоповерхности B_A получена с использованием условия $\bar{Q} = 0,001$. Внутри области, ограниченной изоповерхностью B_A , обеспечивается выполнение условия $\bar{Q} \geq 0,001$.

Ядро вихревой области W_A на рис. 2 состоит из двух областей: направленной по потоку конической области ЯКВ (ядро концевой вихря) около концевой части крыла и ВП (вихревой

пелены), расположенной за задней кромкой крыла. Анализ показывает, что область ВП является вихревой структурой, характеризующейся высокими значениями тензора сдвиговых напряжений и отсутствием оси вихря.

В конической области W_A можно выделить ось вихря — кривую L_C , в каждой точке x_c которой выполняется условие (28). Отметим, что при численном моделировании ось вихря может быть построена лишь по конечному набору точек, в соответствии с распределением ячеек расчетной сетки. На рис. 2 ось вихря показана непрерывной гладкой линией с использованием интерполяции данных.

На рис. 3 показано распределение значений Q , нормированных к величинам Q_{\max} , в сечениях F_C с координатами $\bar{x} = 1,07$ и $\bar{x} = 2,14$. Здесь $\bar{x} = \frac{x}{b}$ — расстояние от задней кромки до рассматриваемого сечения, нормированное к хорде профиля b . Закрашенная различными цветами область определяет границу сечения ЯКВ. Как следует из рисунка, сечение ядра вихря не имеет форму окружности, поэтому при определении положения центра вихря использовалось условие (28). Радиус ядра вихря в обоих случаях составляет около 10% хорды крыла ($r_c \approx 0,1b$). Положение центра ядра вихря локализуется точкой, в которой достигается Q_{\max} (показаны белыми кружками на рис. 3).

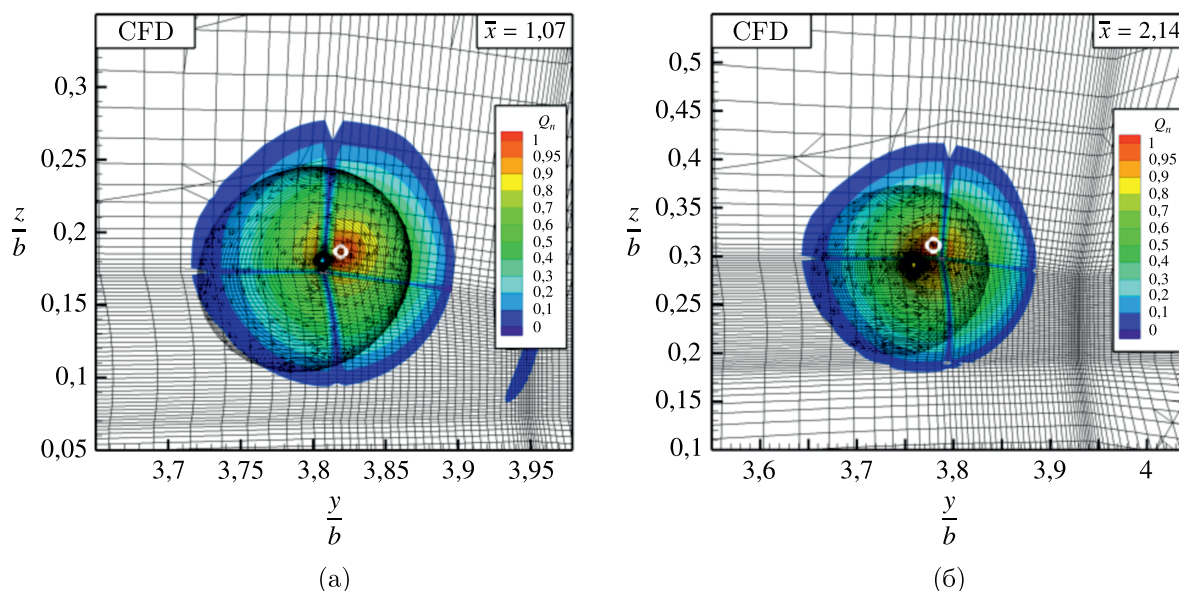


Рис. 3. Положение центров ядра концевых вихрей крыла по Q -распределению для различных сечений: (а) $\bar{x} = 1,07$; (б) $\bar{x} = 2,14$

При определении центра вихря в качестве дополнительного метода можно использовать WA-метод, согласно которому центр вихря определяется по центру спирали линий тока. Как показано на рис. 3, а и 3, б, линии тока имеют схожую расходящуюся спиралевидную структуру, где центр спирали располагается близко к центру ядра вихря, определенному по Q -распределению.

6. Идентификация ядер пары вихрей

В § 5 поле скоростей в сечениях ядра концевых вихрей получено при достаточно высокой дискретизации (несколько сотен ячеек), для построения оси вихря использовалось условие (28). При недостаточно высоком разрешении поля скоростей в сечениях ядра вихря в точках, где значение Q достигает Q_{\max} , вместо условия $\|\Omega\|^2 \gg \|S\|^2$ может иметь место соотношение $\|\Omega\|^2 > \|S\|^2$. Покажем, что использование менее жесткого условия $\|\Omega\|^2 > \|S\|^2$ для полей

скоростей с низким разрешением также позволяет определять положение центра вихря (с точностью, соответствующей разрешению поля скоростей).

В качестве примера рассмотрим модельную задачу, где вихревая структура определяется сечением парного вихря: концевой вихря крыла и вихря, генерируемого концевой частью закрылка. При большом угле отклонения закрылка вихрь, возникающий у концевой части закрылка, имеет циркуляцию, сравнимую с циркуляцией концевой вихря.

Математическую модель рассматриваемого 2D-течения можно представить парой вихрей, каждый из которых имеет одинаковое направление вращения и окружную скорость, определяемую моделью Бернхема – Халлока. Характеристики вихрей полагаем идентичными характеристикам концевой вихря (рассмотренного выше в § 5) в сечении на удалении $\bar{x} = 2,14$ от задней кромки крыла. Размер радиуса ядра каждого из вихрей – $0,07b$, расстояние между вихрями – $1,4b$. Значение циркуляции каждого вихря составляет $\Gamma_0 = 2,42 \text{ м}^2/\text{с}$.

На рис. 4 и 5 показаны Q -распределение (нормированные значения $Q_n = \frac{Q}{Q_{\max}}$) и линии тока, построенные в программе Tecplot на сетках с разным разрешением (в координатах, нормированных к хорде b). Для рис. 4 размер ячеек близок к $0,002b \times 0,001b$ (сетка не показана ввиду высокой плотности ячеек). На рис. 5 размер ячеек расчетной сетки близок к $0,11b \times 0,05b$.

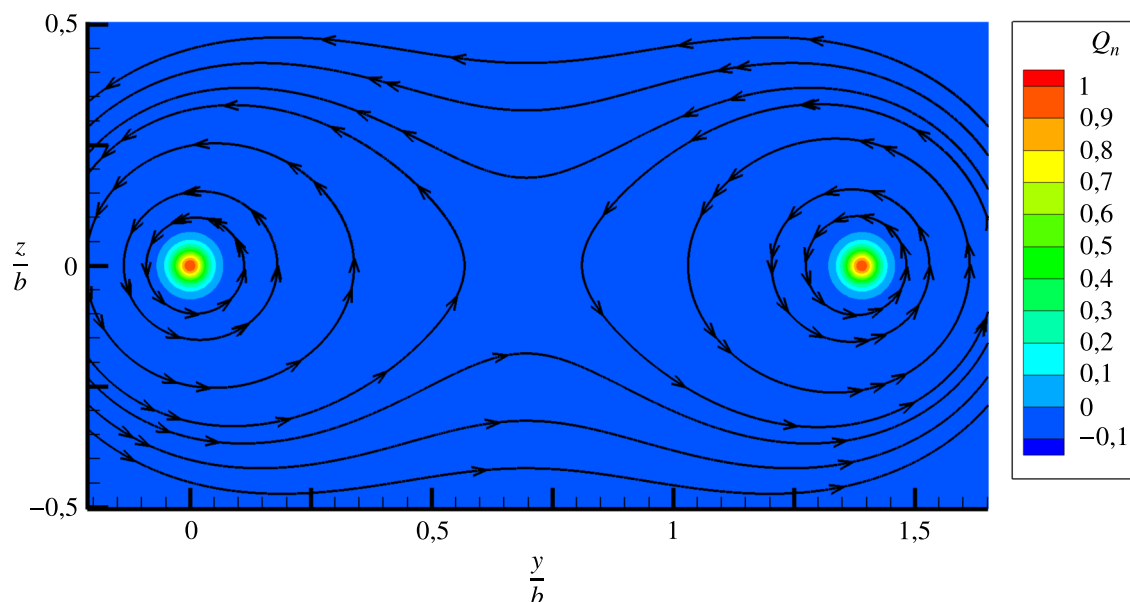
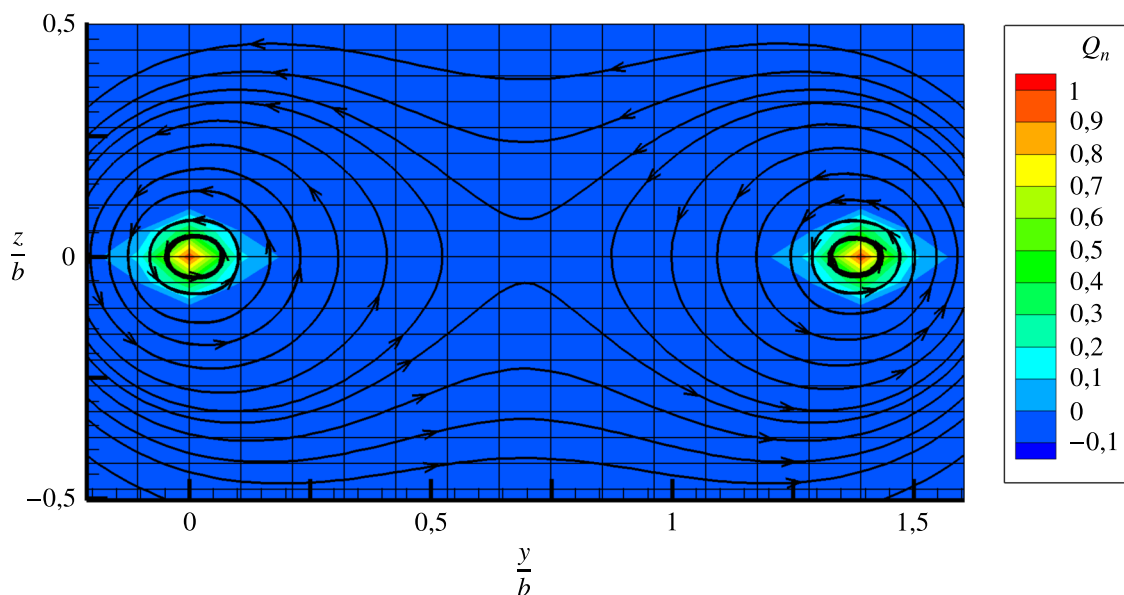


Рис. 4. Q -распределение для сетки с высоким разрешением

Из рис. 4 и 5 следует, что вследствие взаимного влияния вихрей поле течения деформировано (в сравнении с изолированным вихрем), но линии тока в окрестности ядер вихрей имеют форму, близкую к окружности.

На сетке с высоким разрешением (рис. 4) Q -распределение в окрестности ядер вихрей близко к осесимметричному. Максимальное значение Q достигается в центре вихря, где $\|\Omega\|^2 = 10^5 \|\mathcal{S}\|^2$, т. е. $\|\Omega\|^2 \gg \|\mathcal{S}\|^2$ в соответствии с условием (28). На сетке с низким разрешением (рис. 5) размеры ячеек близки к размерам ядра вихря, и в центре вихря имеет место $\|\Omega\|^2 = 7,57 \|\mathcal{S}\|^2$, т. е. вместо $\|\Omega\|^2 \gg \|\mathcal{S}\|^2$ в (28) выполняется условие $\|\Omega\|^2 > \|\mathcal{S}\|^2$.

Таким образом, положения ядер и центров вихрей идентифицируются с применением Q -распределения для обеих сеток. В тех случаях, когда векторное поле скоростей имеет невысокое разрешение, условие $\|\Omega\|^2 \gg \|\mathcal{S}\|^2$ в (28), определяющее положение центра ядра вихря, может быть заменено менее жестким требованием: $\|\Omega\|^2 > \|\mathcal{S}\|^2$.

Рис. 5. Q -распределение для сетки с низким разрешением

7. Заключение

Рассмотрена задача идентификации ядра вихревой структуры с использованием Q -распределения, характеризуемая условием превышения нормы тензора завихренности $\|\Omega\|$ над нормой тензора сдвиговых деформаций $\|S\|$. В соответствии с формулировками, приводимыми в литературе, вихрь рассматривается как вихревая структура, содержащая не только ядро, но и ось вихря. На основе аналитических осесимметричных моделей изолированного вихря (в неограниченном пространстве), применяемых в аэродинамике летательных аппаратов и описании некоторого класса вихревых течений типа «торнадо», дается определение центра вихря (в двумерном случае) и оси вихря (в пространственной постановке). При этом в каждой точке оси вихря $\|\Omega\|$ стремится к максимальным значениям, а значение $\|S\|$ стремится к нулю. Рассматривается также ядро вихря в 2D-сечении, где в окрестности центра вихря линии тока имеют форму эллипса с ограниченным эксцентриситетом. Показано, что в этом случае в центре вихря значение $\|S\|$ отлично от нуля, но много меньше $\|\Omega\|$, т. е. $\|\Omega\|^2 \gg \|S\|^2$. Для вихревых течений с эллиптической формой линий тока понятие ядра вихря в упрощенной формулировке можно дать следующим образом: *ядро вихря должно содержать ось вихря, в каждой точке которой достигается локальный максимум Q -распределения при условии $\|\Omega\|^2 \gg \|S\|^2$.*

В качестве элементов конструкции летательного аппарата, генерирующих вихревые структуры, могут рассматриваться концевые части крыла или лопастей несущего винта вертолета, выпущенные закрылки крыла и др. Для иллюстрации анализируется вихревая область течения около крыла конечного размаха на основе результатов численного моделирования. Показывается, что вихревая структура, генерируемая концевой частью крыла, состоит из концевого вихря и области вихревой пелены, характеризуемой высокими значениями тензора сдвиговых напряжений и отсутствием оси вихря. Рассматривается также модельный пример, иллюстрирующий применение Q -распределения для идентификации ядер вихрей в сечении пары вихрей при высоком и низком разрешении (дискретизации) поля скоростей. Демонстрируется, что в случаях, когда размер ячеек дискретного поля скоростей сопоставим с размерами ядра вихря, для нахождения центра ядра вихря в сечении можно использовать менее жесткое условие: $\|\Omega\| > \|S\|$.

Список литературы (References)

- Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. — С. 704.
Markushevich A. I. Teoriya analiticheskikh funkciy [The theory of analytical functions]. — Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1950. — P. 704 (in Russian).
- Степанов Р. П., Кусюмов А. Н.* К вопросу об идентификации ядра вихря // Сборник тезисов международного конгресса по аэронавтике. — М.: ЦАГИ, 2024. — С. 878–880.
Stepanov R. P., Kusyumov A. N. On definition of the vortex core // Abstracts of International Aeronautics Congress. — Moscow: TsAGI, 2024. — P. 880–882. (Original Russian paper: *Stepanov R. P., Kusyumov A. N.* К вопросу об идентификации ядра вихря // Sbornik tezisev mezhdunarodnogo kongressa po aeronavtike. — Moscow: CAGI, 2024. — P. 876–878.)
- Степанов Р. П., Кусюмов А. Н., Баракос Дж.* О локализации ядра концевой вихря крыла // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. — 2022. — № 1. — С. 131–136.
Stepanov R. P., Kusyumov A. N., Barakos G. Vortex core localization using velocity gradients // Russian Aeronautics. — 2022. — Vol. 65, No. 1. — P. 149–155. (Original Russian paper: *Stepanov R. P., Kusyumov A. N., Barakos Dzh.* O lokalizatsii yadra koncevogo vihrya kryla // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Aviacionnaya tekhnika. — 2022. — № 1. — P. 131–136.)
- Степанов Р. П., Кусюмов А. Н., Михайлов С. А., Тарасов Н. Н.* Экспериментальное исследование концевых вихрей за крылом конечного размаха // Труды МАИ. — 2019. — № 107.
Stepanov R. P., Kusyumov A. N., Mihajlov S. A., Tarasov N. N. Eksperimental'noe issledovanie koncevykh vihrej za krylom konechnogo razmaha [Experimental investigation of finite-span wingtip vortices] // Trudy MAI. — 2019. — No. 107 (in Russian).
- Ahmad N., Proctor F.* Review of idealized aircraft wake vortex models // AIAA Paper 2014-0927. — 2014. — P. 1–28.
- Arfken G. B., Weber H. J., Harris E. H.* Mathematical methods for physicists. — Oxford, UK: Elsevier, 2013.
- Barakos G., Steijl R., Badcock K., Brocklehurst A.* Development of CFD capability for full helicopter engineering analysis / 31st European Rotorcraft Forum – Florence, 2005. — P. 1–15.
- Burnham D. C., Hallock J. N.* Decay characteristics of wake vortices from jet transport aircraft // Journal of Aircraft. — 2013. — Vol. 50, No. 1. — P. 82–87.
- Bussière M., Nobes D. S., Koch C. R.* A combinatorial vortex detection and characterization algorithm for 2C2D PIV data / 16th Int. Symp. on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics – Lisbon, 2012. — P. 1–23.
- Chakraborty P., Balachandar S., Adrian R. J.* On relationships between local vortex identification schemes // Journal of Fluid Mechanics. — 2005. — Vol. 535. — P. 189–214.
- Cheng Z.-P., Qiu S.-Y., Xiang Y., Liu H.* Quantitative features of wingtip vortex wandering based on the linear stability analysis // AIAA Journal. — 2019. — Vol. 57, No. 7. — P. 2694–2708.
- Chong M. S., Perry A. E., Cantwell B. J.* A general classification of three-dimensional flow fields // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. — 1990. — Vol. 2, No. 5. — P. 765–777.
- Coletta M., De Gregorio F., Visingardi A., Iuso G.* PIV data: vortex detection and characterization / 13th International Symposium on Particle Image Velocimetry – ISPIV 2019. — Munich, 2019. — P. 1–11.
- Corsiglia V. R., Schwind R. G., Chigier N. A.* Rapid scanning, three-dimensional hot-wire anemometer surveys of wing-tip vortices // Journal of Aircraft. — 1973. — Vol. 10, No. 12. — P. 752–757.
- Danaila I., Kaplanski F., Sazhin S.* Modelling of confined vortex rings // Journal of Fluid Mechanics. — 2015. — Vol. 774. — P. 267–297.
- Epps B.* Review of vortex identification methods / 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting – Maryland, 2017. — P. 1–28.
- Gao Y.-S., Liu J.-M., Yu Y.-F., Liu C.* A Liutex based definition and identification of vortex core center lines // Journal of Hydrodynamics. — 2019. — Vol. 31, No. 3. — P. 445–454.

- Gerz T., Holzäpfel F., Darracq D.* Commercial aircraft wake vortices // *Progress in Aerospace Sciences.* — 2002. — Vol. 38, No. 3. — P. 181–208.
- Graftieaux L., Michard M., Grosjean N.* Combining PIV, POD and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows // *Measurement Science and Technology.* — 2001. — Vol. 12, No. 9. — P. 1422–1429.
- Haller G.* An objective definition of a vortex // *Journal of Fluid Mechanics.* — 2005. — Vol. 525. — P. 1199–1207.
- Hoffman J.* Energy stability analysis of turbulent incompressible flow based on the triple decomposition of the velocity gradient tensor // *Physics of Fluids.* — 2021. — Vol. 33, No. 8. — P. 081707-1–081707-6.
- Holzäpfel F., Gerz T., Frech M., Dörnbrack A.* Wake vortices in convective boundary layer and their influence on following aircraft // *Journal of Aircraft.* — 2012. — Vol. 37, No. 6. — P. 1001–1007.
- Huang Y., Green M. A.* Detection and tracking of vortex phenomena using Lagrangian coherent structures // *Experiments in Fluids.* — 2015. — Vol. 56, No. 7. — P. 1–12.
- Hunt J. C. R., Wray A. A., Moin P.* Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows // NASA Center for turbulence research (Report CTR-S88). Proceedings of the Summer Program 1988. — 1988. — P. 193–208.
- International Civil Aviation Organization. Redefinition of ICAO categories for wake turbulence (RECAT) / Twelfth Air Navigation Conference. — Montreal, 2012. — P. 1–4.
- Jeong J., Hussain F.* On the identification of a vortex // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1995. — Vol. 285. — P. 69–94.
- Kida S.* Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow // *Journal of the Physical Society of Japan.* — 1981. — Vol. 50, No. 10. — P. 3517–3520.
- Kolar V.* Vortex identification: New requirements and limitations // *International Journal of Heat and Fluid Flow.* — 2007. — Vol. 28, No. 4. — P. 638–652.
- Lamb H.* *Hydrodynamics.* — 6th ed. — New York: Dover, 1945. — P. 738.
- Loper D. E.* Turbulent boundary-layer flow beneath a vortex. Part 2. Power-law swirl // *Journal of Fluid Mechanics.* — 2020. — Vol. 892, A17. — P. 1–30.
- Menter F. R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA Journal.* — 1994. — Vol. 32, No. 8. — P. 1598–1605.
- Moore D. W., Saffman P. G.* Structure of a line vortex in an imposed strain / *Aircraft Wake Turbulence and Its Detection* – Springer, Boston, MA, 1971. — P. 339–354.
- Okubo A.* Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences // *Deep-Sea Research and Oceanographic Abstracts.* — 1970. — Vol. 17, No. 3. — P. 445–454.
- Portela L. M.* The vortex concept and its identification in turbulent boundary layer flows / Sørensen J. N., Hopfinger E. J., Aubry N. (eds.) *IUTAM Symposium on Simulation and Identification of Organized Structures in Flows. Fluid Mechanics and Its Applications.* — Vol 52. — Dordrecht: Springer, 1999. — P. 249–258.
- Proctor F. H.* The NASA-Langley wake vortex modelling effort in support of an operational aircraft spacing system // *AIAA Paper 98-0589.* — 1998. — P. 1–20.
- Sadarjoen I. A.* Detection, quantification, and tracking of vortices using streamline geometry // *Computers & Graphics.* — 2000. — Vol. 24, No. 3. — P. 333–341.
- Schauerhamer D. G., Robinson S. K.* Computational-fluid-dynamics best practices for aircraft wing-tip vortex roll-up // *Journal of Aircraft.* — 2017. — Vol. 54, No. 4. — P. 1–14.
- Shrestha P., Nottage C., Yu Y., Alvarez O., Liu C.* Stretching and shearing contamination analysis for Liutex and other vortex identification methods // *Advances in Aerodynamics.* — 2021. — Vol. 3. — P. 1–20.

-
- Sujudi D., Haines R.* Identification of swirling flow in 3D vector fields / Proc. of 12th Computational Fluid Dynamics Conference. — 1995. — P. 792–799.
- Vasistas G.H.* New model for intense self-similar vortices // Journal of propulsion and power. — 1998. — Vol. 14, No. 4. — P. 462–469.
- Vollmers H.* Detection of vortices and quantitative evaluation of their main parameters from experimental velocity data // Measurement Science and Technology. — 2001. — Vol. 12, No. 8. — P. 1199–1207.
- Weiss J.* The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1991. — Vol. 45, No. 2–3. — P. 273–294.
- Wu J.-Z., Ma H.-Y., Zhou M.-D.* Vorticity and vortex dynamics. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. — P. 776.
- Wu J.-Z., Xiong A.-K., Yang Y.-T.* Axial stretching and vortex definition // Physics of Fluids. — 2005. — Vol. 17, No. 3. — P. 1–4.
- Zhou J., Adrian J., Balachandar S., Kendall T.M.* Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow // Journal of Fluid Mechanics. — 1999. — Vol. 387. — P. 353–396.