

УДК: 536.24: 621.396

Иерархический метод математического моделирования стохастических тепловых процессов в сложных электронных системах

А. Г. Мадера

Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук,
Россия, 117218, г. Москва, Нахимовский просп., д. 36, корп. 1

E-mail: agmprof@mail.ru

Получено 14.03.2019, после доработки — 14.05.2019.

Принято к публикации 22.05.2019.

В работе развивается иерархический метод математического и компьютерного моделирования интервально-стохастических тепловых процессов в сложных электронных системах различного назначения. Разработанная концепция иерархического структурирования отражает как конструктивную иерархию сложной электронной системы, так и иерархию математических моделей процессов теплообмена. Тепловые процессы, учитывающие разнообразные физические явления в сложных электронных системах, описываются системами стохастических, нестационарных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, и в силу этого их компьютерное моделирование наталкивается на значительные вычислительные трудности даже с применением суперкомпьютеров. Иерархический метод позволяет избежать указанных трудностей. Иерархическая структура конструкции электронной системы в общем случае характеризуется пятью уровнями: 1 уровень — активные элементы ЭС (микросхемы, электро-, радиоэлементы); 2 уровень — электронный модуль; 3 уровень — панель, объединяющая множество электронных модулей; 4 уровень — блок панелей; 5 уровень — стойка, установленная в стационарном или подвижном помещении. Иерархия моделей и моделирования стохастических тепловых процессов строится в порядке, обратном иерархической структуре конструкции электронной системы, при этом моделирование интервально-стохастических тепловых процессов осуществляется посредством получения уравнений для статистических мер. Разработанный в статье иерархический метод позволяет учитывать принципиальные особенности тепловых процессов, такие как стохастический характер тепловых, электрических и конструктивных факторов при производстве, сборке и монтаже электронных систем, стохастический разброс условий функционирования и окружающей среды, нелинейные зависимости от температуры факторов теплообмена, нестационарный характер тепловых процессов. Полученные в статье уравнения для статистических мер стохастических тепловых процессов представляют собой систему 14-ти нестационарных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в обыкновенных производных, решение которых легко реализуется на современных компьютерах существующими численными методами. Рассмотрены результаты применения метода при компьютерном моделировании стохастических тепловых процессов в электронной системе. Иерархический метод применяется на практике при тепловом проектировании реальных электронных систем и создании современных конкурентоспособных устройств.

Ключевые слова: стохастический, тепловой процесс, статистические меры, математическое моделирование, электронные системы

UDC: 536.24: 621.396

Hierarchical method for mathematical modeling of stochastic thermal processes in complex electronic systems

A. G. Madera

Scientific Research Institute for System Analysis, Russia Academy of Sciences,
36/1 Nakhimovsky Prospekt, Moscow, 117218, Russia

E-mail: agmprof@mail.ru

Received 14.03.2019, after completion — 14.05.2019.

Accepted for publication 22.05.2019.

A hierarchical method of mathematical and computer modeling of interval-stochastic thermal processes in complex electronic systems for various purposes is developed. The developed concept of hierarchical structuring reflects both the constructive hierarchy of a complex electronic system and the hierarchy of mathematical models of heat exchange processes. Thermal processes that take into account various physical phenomena in complex electronic systems are described by systems of stochastic, unsteady, and nonlinear partial differential equations and, therefore, their computer simulation encounters considerable computational difficulties even with the use of supercomputers. The hierarchical method avoids these difficulties. The hierarchical structure of the electronic system design, in general, is characterized by five levels: Level 1 — the active elements of the ES (microcircuits, electro-radio-elements); Level 2 — electronic module; Level 3 — a panel that combines a variety of electronic modules; Level 4 — a block of panels; Level 5 — stand installed in a stationary or mobile room. The hierarchy of models and modeling of stochastic thermal processes is constructed in the reverse order of the hierarchical structure of the electronic system design, while the modeling of interval-stochastic thermal processes is carried out by obtaining equations for statistical measures. The hierarchical method developed in the article allows to take into account the principal features of thermal processes, such as the stochastic nature of thermal, electrical and design factors in the production, assembly and installation of electronic systems, stochastic scatter of operating conditions and the environment, non-linear temperature dependencies of heat exchange factors, unsteady nature of thermal processes. The equations obtained in the article for statistical measures of stochastic thermal processes are a system of 14 non-stationary nonlinear differential equations of the first order in ordinary derivatives, whose solution is easily implemented on modern computers by existing numerical methods. The results of applying the method for computer simulation of stochastic thermal processes in electron systems are considered. The hierarchical method is applied in practice for the thermal design of real electronic systems and the creation of modern competitive devices.

Keywords: stochastic, thermal process, statistical measures, mathematical modeling, electronic systems

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 4, pp. 613–630 (Russian).

1. Введение

Сложные электронные системы (ЭС) обладают большим конструктивным разнообразием и насчитывают сотни тысяч электронных элементов, при этом для адекватного моделирования реальных тепловых процессов, протекающих в ЭС, необходимо учитывать разнообразные физические явления и эффекты, такие как тепловая обратная связь в активных электронных компонентах (микросхемах и электро-, радиоэлементах) [Сергеев, Хадаков, 2012; Kuuse et al., 2005; Мадера, 2018] и интервально-стохастический характер тепловых процессов, развивающихся в реальных ЭС [Мадера, Кандалов, 2016; Wang et al., 2015; Wang, Qiu, 2015; Mingyan Pan et al., 2017; Claudio et al., 2018]. Тепловые процессы, учитывающие разнообразные физические явления в сложных ЭС, описываются системой стохастических, нестационарных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, а статистические меры стохастических температурных полей — системами матричных нелинейных и нестационарных уравнений в обыкновенных производных. В силу этого математическое и компьютерное моделирование тепловых процессов в сложных конструкциях ЭС наталкивается на значительные вычислительные трудности даже с применением суперкомпьютеров.

Между тем конструкции сложных ЭС могут быть представлены в виде иерархической структуры, уровни которой отражают физические принципы построения ЭС, начиная с первого уровня конструктивной иерархии, представленной интегральными микросхемами (МС) и электро-, радиоэлементами (ЭРЭ), и заканчивая последним (как правило, пятым) уровнем, представляющим собой собственно электронное устройство (систему, аппаратуру, вычислительный комплекс и пр.), установленное в мобильном или стационарном помещении. Наряду с конструктивной иерархической структурой ЭС может быть также установлена и иерархическая структура математических моделей тепловых процессов, в соответствии с которой математические модели нижележащих иерархических уровней ЭС содержат в качестве своих начальных и граничных условий данные, получаемые при моделировании тепловых процессов на вышележащих конструктивных иерархических уровнях. Иерархический подход к математическому моделированию тепловых процессов в сложных ЭС позволяет существенно сократить как количество уравнений в математических моделях, так и объемы компьютерных вычислений.

В настоящей статье рассматривается иерархический принцип математического моделирования стохастических тепловых процессов в сложных конструкциях ЭС. Приводится система стохастических уравнений тепловых процессов на различных иерархических уровнях ЭС, а также алгоритм иерархического моделирования. Применение иерархического принципа показано на примере моделирования стохастических тепловых процессов в конструкции высокопроизводительного вычислительного комплекса.

2. Иерархические структуры конструкции и математических моделей стохастических тепловых процессов ЭС

Сложные конструкции ЭС могут быть представлены в виде иерархической структуры, содержащей пять уровней (рис. 1) [Мадера, 2015]: 1 уровень — электронные компоненты ЭС (МС, ЭРЭ); 2 уровень — электронный модуль (ЭМ), содержащий многослойную печатную плату и установленные на ней МС, ЭРЭ, теплоотводы, элементы системы охлаждения, конструктивные элементы крепления; 3 уровень — панель (крейт), в состав которой входят различные ЭМ, конструктивные элементы крепления ЭМ в панели, интерфейс, теплоотводы и система охлаждения панели; 4 уровень — блок панелей, содержащий множество панелей, элементы крепления панелей в блоке, системы охлаждения и интерфейса; 5 уровень — стойка, состоящая из каркаса, к которому крепятся панели, внешние стенки, вентиляторные блоки, система охлаждения, интерфейс. Стойка устанавливается в стационарном или мобильном помещении. В зависимости от конкретного конструктивного исполнения ЭС, целей проектирования и характера протекающих тепловых процессов часть иерархических уровней может отсутствовать.

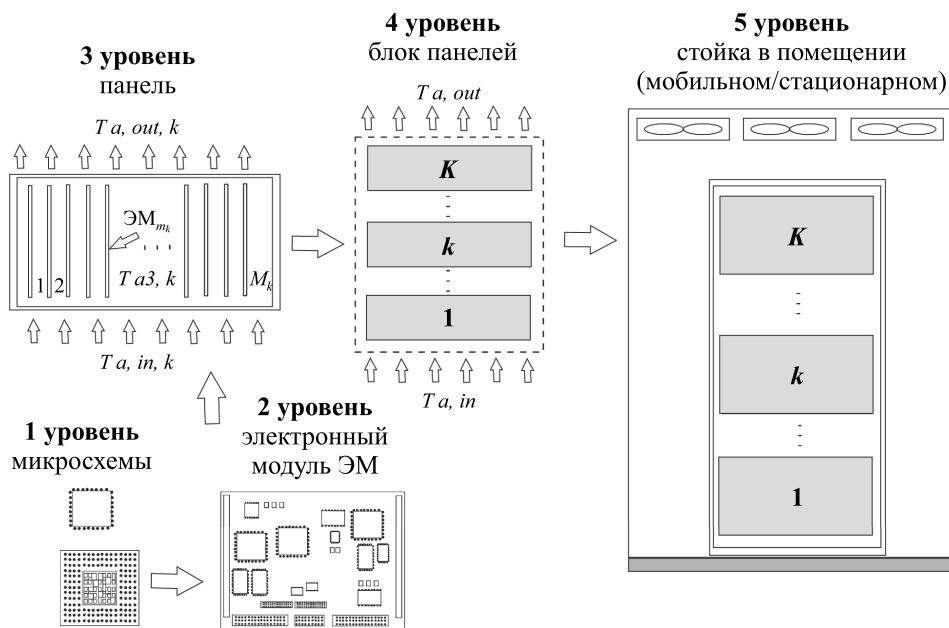


Рис. 1. Иерархия конструктивных уровней электронной системы: ЭМ — электронный модуль; m_k — номер электронного модуля в панели с номером k ; M_k — количество электронных модулей в панели с номером k ; $T_{a,in}$ и $T_{a,out}$ — температуры на входе и выходе электронной системы; $T_{a,in,k}$ и $T_{a,out,k}$ — температуры на входе и выходе панели с номером k ; $T_{a3,k}$ — температура среды в панели с номером k ; K — количество панелей в электронной системе

Иерархия конструктивных уровней ЭС порождает соответствующую иерархию математических моделей тепловых процессов в ЭС, при этом иерархия математических моделей имеет обратный порядок конструктивной иерархии ЭС и начинается с верхнего (пятого) уровня и заканчивается нижним (первым) уровнем (рис. 1).

Параметры и характеристики, определяющие тепловые процессы реальных компонентов ЭС, равно как и температурные распределения в ЭС, а также зависящие от них электрические статические и динамические параметры и характеристики ЭС, являются интервально-стохастическими [Мадера, 2016; Мадера, Решетников, 2017]. Отметим, что под интервально-стохастической температурой везде далее понимается ее величина, которая под воздействием случайных факторов может принимать любое случайное значение в интервале своего изменения.

Стохастические тепловые процессы на иерархических уровнях ЭС (рис. 1) определяются:

- интервально-стохастическими температурами конструкции ЭС:
 - корпуса стойки $T_5(t, \omega)$ (пятый уровень),
 - блока панелей $T_4(t, \omega)$ (четвертый уровень),
 - k -й панели $T_{3k}(t, \omega)$, $k = 1, 2, \dots, K$, K — количество панелей в блоке панелей (третий уровень),
 - m_k -го ЭМ $T_{2,m_k}(t, \omega)$, $m_k = 1, 2, \dots, M_k$, размещенных в k -й панели, M_k — количество ЭМ в k -й панели (второй уровень),
 - электронного компонента (МС, ЭРЭ) $T_{1,m_k}(t, \omega)$, установленного на многослойной печатной плате m_k -го ЭМ (первый уровень);
- температурами воздушной/жидкостной среды в ЭС:
 - $T_{a4}(t, \omega)$ внутри стойки с блоком панелей,
 - $T_{a3,k}(t, \omega)$ в панелях с номерами $k = 1, 2, \dots, K$ в блоке панелей,

- $T_{a2,m_k}(t, \omega)$ между двумя соседними ЭМ с номерами m_k и $m_k + 1$ в k -й панели, $k = 1, 2, \dots, K$,
- $T_{a1,m_k}(t, \omega)$ возле рассматриваемого элемента (МС, ЭРЭ), припаянного к m_k -му ЭМ в k -й панели.

Стохастические тепловые процессы на различных иерархических уровнях [Мадера, Кандалов, 2016; Пугачев, 1962] полностью определяются интервальными нестационарными статистическими мерами интервально-стохастических температур:

- конструкции ЭС: математических ожиданий $\bar{T}_5(t)$, $\bar{T}_4(t)$, $\bar{T}_{3k}(t)$, $\bar{T}_{2,m_k}(t)$, $\bar{T}_{1,m_k}(t)$ и дисперсий $D_{T_5}(t)$, $D_{T_4}(t)$, $D_{T_{3k}}(t)$, $D_{T_{2,m_k}}(t)$, $D_{T_{1,m_k}}(t)$;
- воздушной/жидкостной среды в ЭС: математических ожиданий $\bar{T}_{a4}(t)$, $\bar{T}_{a3,k}(t)$, $\bar{T}_{a2,m_k}(t)$, $\bar{T}_{a1,m_k}(t)$ и дисперсий $D_{T_{a4}}(t)$, $D_{T_{a3,k}}(t)$, $D_{T_{2,m_k}}(t)$, $D_{T_{a1,m_k}}(t)$.

Получаемые в результате моделирования статистические меры позволяют определить интервалы $[T_{bot,i}(t), T_{up,i}(t)]$, внутри которых будут находиться реальные значения интервально-стохастических температур $T_i(t, \omega)$ на различных иерархических уровнях ЭС. Нижние $T_{bot,i}(t)$ и верхние $T_{up,i}(t)$ границы интервалов определяются по формулам

$$T_{bot,i}(t) = \bar{T}_i(t) - \epsilon \cdot \sigma_{T_i}(t), \quad T_{up,i}(t) = \bar{T}_i(t) + \epsilon \cdot \sigma_{T_i}(t), \quad (1)$$

где $\sigma_{T_i}(t) = \sqrt{D_{T_i}(t)}$ — среднеквадратические отклонения стохастических температур $T_i(t, \omega)$; $i = 5, 4, a4, 3k, 2, m_k, 1$; ϵ — коэффициент, определяемый доверительной вероятностью, как правило $\epsilon = 3$ [Пугачев, 1962; Мадера, Кандалов, 2016].

Входными исходными данными для математического моделирования тепловых процессов в ЭС являются известные априори интервально-стохастические температуры окружающей $T_e(t, \omega)$ и воздушной/жидкостной $T_{a,in}(t, \omega)$ среды на входе в ЭС, а также мощности потребления $\{P_{j,1}(t, \omega)\}_{j=1}^L$ всех (L) активных элементов (МС и ЭРЭ), установленных в ЭС (1-й иерархический уровень конструкции). Далее для простоты записи, но без умаления общности, принято, что исходные входные данные являются случайными величинами с известными математическими ожиданиями $\bar{T}_{a,in}$, \bar{T}_e , $\{\bar{P}_{j,1}\}_{j=1}^L$ и дисперсиями $D_{T_{a,in}}$, D_{T_e} , $\{D_{P_{j,1}}\}_{j=1}^L$.

Обобщенная математическая модель, описывающая стохастические тепловые процессы на различных уровнях иерархии ЭС, включает в себя стохастические уравнения тепловых процессов в элементах конструкций ЭС и тепловых процессов, развивающихся в среде внутри стойки для каждого элементарного события ω из пространства элементарных событий Ω :

- 5-й уровень (корпус стойки ЭС):

$$C_5 \frac{dT_5(t, \omega)}{dt} + J_{5-a4}(T_5(t, \omega), T_{a4}(t, \omega)) - J_{4-5}(T_4(t, \omega), T_5(t, \omega)) + J_{5-e}(T_5(t, \omega), T_e(\omega)) = 0, \quad (2)$$

где $J_{5-a4}(T_5(t, \omega), T_{a4}(t, \omega))$ — конвективный тепловой поток от корпуса стойки с температурой $T_5(t, \omega)$ к среде внутри стойки с температурой $T_{a4}(t, \omega)$; $J_{4-5}(T_4(t, \omega), T_5(t, \omega))$ — кондуктивный тепловой поток от блока панелей к корпусу стойки через элементы крепления и монтажа; $J_{5-e}(T_5(t, \omega), T_e(\omega))$ — тепловой поток от внешней поверхности корпуса стойки в окружающую среду в помещении с температурой $T_e(\omega)$; $C_5 = \rho_5 c_5 V_5$ — полная теплоемкость корпуса стойки объемом V_5 , выполненного из материала плотностью ρ_5 и удельной теплоемкостью c_5 ;

– 4-й уровень (блок панелей):

$$C_4 \frac{dT_4(t, \omega)}{dt} + J_{4-a_4}(T_4(t, \omega), T_{a_4}(t, \omega)) + J_{4-5}(T_4(t, \omega), T_5(t, \omega)) = P_4(\omega), \quad (3)$$

где $P_4(\omega)$ — мощность блока панелей, равная суммарной мощности всех панелей, составляющих блок панелей; $J_{4-a_4}(T_4(t, \omega), T_{a_4}(t, \omega))$ — конвективный тепловой поток от блока панелей с температурой $T_4(t, \omega)$ в среду внутри корпуса стойки с температурой $T_{a_4}(t, \omega)$; $J_{4-5}(T_4(t, \omega), T_5(t, \omega))$ — кондуктивный тепловой поток между конструкцией блока панелей и корпусом стойки по элементам крепления блока панелей к корпусу; $C_4 = \rho_4 c_4 V_4$ — полная теплоемкость конструкции блока панелей объемом V_4 (равным суммарному объему всех ЭМ, входящих в блок панелей) и эффективными плотностью ρ_4 и удельной теплоемкостью c_4 [Дульнев, Новиков, 1991];

– 3-й уровень (панель с номером k , $k=1, 2, \dots, K$, где K — количество панелей в блоке панелей):

$$C_{3k} \frac{dT_{3k}(t, \omega)}{dt} + J_{3k-a_{3,k}}(T_{3k}(t, \omega), T_{a_{3,k}}(t, \omega)) + J_{3k-5}(T_{3k}(t, \omega), T_5(t, \omega)) = P_{3k}(\omega), \quad (4)$$

где $P_{3,k}(\omega)$ — мощность k -й панели, равная суммарной мощности всех входящих в нее ЭМ; $J_{3k-a_{3,k}}(T_{3k}(t, \omega), T_{a_{3,k}}(t, \omega))$ — конвективный тепловой поток от поверхности нагретой зоны k -й панели с температурой $T_{3k}(t, \omega)$ в среду с температурой $T_{a_{3,k}}(t, \omega)$ в пространстве k -й панели; $J_{3k-5}(T_{3k}(t, \omega), T_5(t, \omega))$ — кондуктивный тепловой поток между конструкциями k -й панели и корпусом стойки, к которому крепятся панели в блоке панелей; $C_{3k} = \rho_{3k} c_{3k} V_{3k}$ — полная теплоемкость k -й панели объемом V_{3k} (равным суммарному объему всех ЭМ в данной панели) и эффективными плотностью ρ_{3k} и удельной теплоемкостью c_{3k} [Дульнев, Новиков, 1991];

– 2-й уровень (ЭМ с номером m_k , $m_k=1, 2, \dots, M_k$, установленный в k -й панели, где M_k — количество ЭМ в k -й панели):

$$C_{2,m_k} \frac{dT_{2,m_k}(t, \omega)}{dt} + J_{2,m_k-a_{3,k}}(T_{2,m_k}(t, \omega), T_{a_{3,k}}(t, \omega)) + J_{2,m_k-3}(T_{2,m_k}(t, \omega), T_5(t, \omega)) = P_{2,m_k}(\omega), \quad (5)$$

где $P_{2,m_k}(\omega)$ — мощность m_k -го ЭМ, установленного в панели с номером k ; $J_{2,m_k-a_{3,k}}(T_{2,m_k}(t, \omega), T_{a_{3,k}}(t, \omega))$ — конвективный тепловой поток от поверхности нагретой зоны m_k -го ЭМ с температурой $T_{2,m_k}(t, \omega)$ в среду в k -й панели с усредненной температурой $T_{a_{3,k}}(t, \omega)$; $J_{2,m_k-3}(T_{2,m_k}(t, \omega), T_5(t, \omega))$ — кондуктивный тепловой поток в k -й панели между конструкциями m_k -го ЭМ и корпусом стойки; $C_{2,m_k} = \rho_{2,m_k} c_{2,m_k} V_{2,m_k}$ — полная теплоемкость конструкции m_k -го ЭМ, установленного в панели с номером k , имеющей объем V_{2,m_k} , и эффективные плотность ρ_{2,m_k} и удельную теплоемкость c_{2,m_k} [Дульнев, Новиков, 1991];

– 1-й уровень — элемент ЭС (МС, ЭРЭ), припаянный к печатной плате m_k -го ЭМ, относительно которого необходимо знать параметры его теплового режима:

$$C_1 \frac{dT_1(t, \omega)}{dt} + J_{1-a_{3,k}}(T_1(t, \omega), T_{a_{3,k}}(t, \omega)) + J_{1-2,m_k}(T_1(t, \omega), T_{2,m_k}(t, \omega)) = P_1(\omega), \quad (6)$$

где $P_1(\omega)$ — мощность потребления отдельного рассматриваемого элемента ЭС (МС, ЭРЭ); $J_{1-a3,k}(T_1(t,\omega), T_{a3,k}(t,\omega))$ — конвективный тепловой поток с поверхности элемента в m_k -м ЭМ с усредненной температурой $T_1(t,\omega)$ в среду с температурой $T_{a3,k}(t,\omega)$ около элемента, расположенного в m_k -м ЭМ; $J_{1-2,m_k}(T_1(t,\omega), T_{2,m_k}(t,\omega))$ — кондуктивный тепловой поток между элементом с температурой $T_1(t,\omega)$ и m_k -м ЭМ, обусловленный кондуктивным теплопереносом от элемента к плате через выводы корпуса элемента и слой материала (прокладки, среды), заполняющей зазор между корпусом элемента и платой, к которой он припаян; $C_1 = \rho_1 c_1 V_1$ — полная теплоемкость конструкции анализируемого элемента ЭС (МС, ЭРЭ) объемом V_1 и эффективными плотностью ρ_1 и удельной теплоемкостью c_1 .

Отметим, что тепловые потоки естественной и вынужденной конвекции, излучения и кондукции нелинейно зависят от температуры поверхностей теплообмена и устанавливаются в каждом конкретном случае [Дульнев, 1971; Elison, 2011; Spalding, Taborek, 1990].

Для замыкания математической модели (2)–(6) ее необходимо дополнить уравнениями, описывающими конвективные тепловые процессы в среде внутри ЭС.

Стохастические уравнения теплового баланса для воздушной среды, нагнетаемой через различные иерархические уровни ЭС, имеют следующий вид [Дьярмати, 1974]:

- для среды с усредненной температурой $T_{a4}(t,\omega)$ в блоке панелей

$$C_{a4} \frac{dT_{a4}(t,\omega)}{dt} - J_{4-a4}(T_4(t,\omega), T_{a4}(t,\omega)) - J_{5-a4}(T_5(t,\omega), T_{a4}(t,\omega)) + 2cG(T_{a4}(t,\omega) - T_{a,in}(\omega)) = 0, \quad (7)$$

где

$$J_{4-a4}(T_4(t,\omega), T_{a4}(t,\omega)) = \alpha_4 S_4 (T_4(t,\omega) - T_{a4}(t,\omega)),$$

$$J_{5-a4}(T_5(t,\omega), T_{a4}(t,\omega)) = \alpha_5 S_{5,\sigma} (T_5(t,\omega) - T_{a4}(t,\omega))$$

— конвективные потоки тепла в среду в корпусе стойки от полной теплоотдающей поверхности блока панелей S_4 и полной теплоотдающей поверхности корпуса стойки, обращенной внутрь стойки $S_{5,\sigma}$; G — массовый расход среды, нагнетаемой через ЭС; α_5 , α_4 — коэффициенты теплоотдачи от суммарной теплоотдающей поверхности $S_{5,\sigma}$ корпуса стойки, обращенной внутрь стойки, и от суммарной теплоотдающей поверхности S_4 всех ЭМ во всех панелях,

образующих блок панелей (количество ЭМ в блоке равно $\sum_{k=1}^K M_k$);

- для среды с усредненной температурой $T_{a3,k}(t,\omega)$ в k -й панели ($k = 1, 2, \dots, K$)

$$C_{a3,k} \frac{dT_{a3,k}(t,\omega)}{dt} - J_{3k-a3,k}(T_{3k}(t,\omega), T_{a3,k}(t,\omega)) + 2cG_{a3,k}(T_{a3,k}(t,\omega) - T_{a,in,k}(t,\omega)) = 0, \quad (8)$$

где $J_{3k-a3,k}(T_{3k}(t,\omega), T_{a3,k}(t,\omega)) = \alpha_{3k} S_{3k} (T_{3k}(t,\omega) - T_{a3,k}(t,\omega))$ — конвективный поток тепла (естественной или вынужденной) от поверхностей всех ЭМ в k -й панели с температурой $T_{3k}(t,\omega)$ в среду, омывающую все ЭМ в панели, имеющей температуру $T_{a3,k}(t,\omega)$; α_{3k} — коэффициент теплоотдачи от суммарной теплоотдающей поверхности S_{3k} всех ЭМ в панели k в среду, протекающую через ЭМ.

Уравнения (7), (8) получены с учетом равенства температур среды на входе в панель k и на выходе из предыдущей панели $k-1$ и соотношения $T_{a,out,k}(t, \omega) = 2T_{a3,k}(t, \omega) - T_{a,in,k}(t, \omega)$ [Мадера, Кандалов, 2016; Мадера, Решетников, 2017; Ellison, 2011].

Уравнения (2)–(8) решаются при начальных условиях, выражающих равенство температур всех элементов и компонентов в ЭС температуре окружающей среды $T_e(\omega)$ в помещении, в котором установлена ЭС, и имеющих вид

$$T(t=0, \omega) = T_e(\omega) \cdot I, \quad (9)$$

где

$$T(t, \omega) = (T_5(t, \omega), T_4(t, \omega), \underbrace{T_{3k}(t, \omega)}_{k=1, \dots, K}, \underbrace{T_{2,m_k}(t, \omega)}_{m_k=1, \dots, M_k, k=1, \dots, K}, T_{1,m_k}(t, \omega), T_{a4}(t, \omega), \underbrace{T_{a3,k}(t, \omega)}_{k=1, \dots, K})^T$$

— стохастический N -вектор неизвестных температур элементов ЭС и воздушной среды $T(t, \omega)$

на различных иерархических уровнях ЭС; $N = \sum_{k=1}^K M_k + 2 \cdot K + 4$ ($\sum_{k=1}^K M_k$ — количество ЭМ

в стойке); $I = (11 \dots 1)^T$ — единичный вектор размерностью N , $T_l(0, \omega) = T_e(\omega)$, $l = 1, 2, \dots, N$.

Количество уравнений и, соответственно, неизвестных в математической модели (2)–(9)

составляет $N = \sum_{k=1}^K M_k + 2 \cdot K + 4$ и является довольно большим. Так, если в стойке ЭС (напри-

мер, высокопроизводительный вычислительный комплекс) содержится $K = 5$ панелей с количеством ЭМ, равным $M = 25$ в каждой, то система (2)–(9) будет содержать 139 нестационарных, нелинейных и стохастических уравнений, решение которых представляет собой исключительно сложную (а во многих практически важных случаях и не выполнимую) задачу, даже с привлечением супер-ЭВМ. Между тем математическую модель (2)–(9) возможно существенно упростить и тем самым сократить количество уравнений и неизвестных. Действительно, ввиду того, что постоянные времени развития тепловых процессов в воздухе (τ_a) и твердотельных элементах (τ_s) ЭС (МС, ЭРЭ, элементы конструкции) связаны соотношением $\tau_a \ll \tau_s$ [Ellison, 2011], развитие тепловых процессов в твердотельных элементах происходит существенно медленнее, чем в воздушной среде. Поэтому с достаточной для инженерной практики точностью можно принять, что температура воздуха в стойке линейно зависит от расстояния, проходимого средой от входа в стойку с температурой $T_{a,in}(t, \omega)$ до его выхода из стойки при температуре $T_{a,out}(t, \omega)$. В этом случае усредненная температура среды $T_{a3,k}(t, \omega)$ в k -й панели будет определяться выражением ($k = 1, 2, \dots, K$)

$$T_{a3,k}(t, \omega) = T_{a,in}(\omega) + (T_{a4}(t, \omega) - T_{a,in}(\omega)) \frac{2k-1}{K}, \quad (10)$$

в котором температура $T_{a4}(t, \omega)$ является решением стохастического уравнения (7), при этом уравнение (8) становится излишним и его можно опустить.

Таким образом, уравнения стохастической математической модели, описывающей развитие нестационарных стохастических тепловых процессов на различных иерархических уровнях ЭС, будет содержать уравнения (2)–(7) с начальным условием (9) и соотношение (10).

Отметим, что уравнения (2), (3) и (7) определяют температуры $T_5 = T_5(t, \omega)$, $T_4 = T_4(t, \omega)$, $T_{a4} = T_{a4}(t, \omega)$ и решаются одновременно и независимо от уравнений (4), (5), (6). По найденной из уравнения (7) температуре $T_{a4}(t, \omega)$ и формуле (10) определяются температуры среды

$T_{a3,k}(t, \omega)$ в панелях стойки ($k = 1, 2, \dots, K$), а по температурам $T_{a3,k}(t, \omega)$ и $T_5(t, \omega)$ — температуры $T_{3k}(t, \omega)$, $T_{2,m_k}(t, \omega)$ и $T_1(t, \omega)$, моделируемые уравнениями (4), (5), (6).

3. Статистические меры стохастических тепловых процессов в ЭС

Уравнения (2), (3) и (7) не зависят от уравнений (4), (5), (6), поэтому соответствующие им статистические меры следует рассматривать отдельно друг от друга, а именно — для 5-го, 4-го уровней, а затем — для 3-го, 2-го и 1-го уровней иерархии.

3.1. Статистические меры стохастических тепловых процессов на 5-м и 4-м уровнях иерархии ЭС

Для получения уравнений относительно статистических мер применим метод, разработанный в [Мадера, Кандалов, 2016]. С этой целью представим уравнения (2), (3), (7) в матричном виде:

$$C \frac{dT(t, \omega)}{dt} + J(T, T_e, \omega) + Q \cdot T(t, \omega) = P(\omega),$$

$$T(t=0, \omega) = T_e(\omega) \cdot I, \quad (11)$$

где $T(t, \omega) = (T_5(t, \omega), T_4(t, \omega), T_{a4}(t, \omega))^T$ — вектор стохастических температур; $P(\omega) = (0, P_4(\omega), 2cGT_{a,in}(\omega))^T$ — стохастический вектор с элементами, являющимися входными исходными данными с известными математическими ожиданиями и дисперсиями; $J(T, T_e, \omega)$ — стохастический вектор, равный

$$J(T, T_e, \omega) = \begin{pmatrix} J_1(T, T_e) \\ J_2(T, T_e) \\ J_3(T, T_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{5-a4}(T_5, T_{a4}) - J_{4-5}(T_4, T_5) + J_{5-e}(T_5, T_e) \\ J_{4-a4}(T_4, T_{a4}) + J_{4-5}(T_4, T_5) \\ -J_{4-a4}(T_4, T_{a4}) - J_{5-a4}(T_5, T_{a4}) \end{pmatrix};$$

$C = \text{diag}(C_5, C_4, C_{a4})^T$ и $Q = \text{diag}(0, 0, 2cG)$ — детерминированные диагональные матрицы; $I = (111)^T$ — единичный вектор.

После линеаризации нелинейных элементов вектора $J(T, T_e, \omega)$ получим линеаризованное матричное стохастическое уравнение (погрешность линеаризации тепловых потоков, нелинейно зависящих от температуры, подробно проанализирована в [Мадера, Кандалов, 2016]):

$$C \frac{d\tilde{T}(t, \omega)}{dt} + J(\bar{T}, \bar{T}_e) + V(\bar{T}) \cdot \tilde{T}(t, \omega) + Q \cdot T(t, \omega) = \Phi(\omega),$$

$$T(t=0, \omega) = T_e(\omega) \cdot I, \quad (12)$$

где $\tilde{T}(t, \omega) = (\tilde{T}_5(t, \omega), \tilde{T}_4(t, \omega), \tilde{T}_{a4}(t, \omega))^T$ — вектор центрированных стохастических температур, равных $\tilde{T}_5(t, \omega) = T_5(t, \omega) - \bar{T}_5(t)$, $\tilde{T}_4(t, \omega) = T_4(t, \omega) - \bar{T}_4(t)$, $\tilde{T}_{a4}(t, \omega) = T_{a4}(t, \omega) - \bar{T}_{a4}(t)$ и имеющих нулевые математические ожидания; $\bar{T} = \bar{T}(t) = (\bar{T}_5(t), \bar{T}_4(t), \bar{T}_{a4}(t))^T$ — вектор математических ожиданий стохастических температур; \bar{T}_e — математическое ожидание стохастической температуры окружающей среды $T_e(\omega)$; $J(\bar{T}, \bar{T}_e)$ — вектор математических ожиданий тепловых потоков, в котором все температуры равны их математическим ожиданиям;

$V(\bar{T}) = \{\partial J_i(\bar{T}) / \partial T_j\}$ ($i=1, 2, 3, j=5, 4, a4$) — детерминированная 3×3 -матрица производных (якобиан) нелинейных потоков по температурам при математических ожиданиях температур \bar{T} и \bar{T}_e ; $\Phi(\omega) = (-\partial J_{5-e}(\bar{T}_5, \bar{T}_e) / \partial T_e) \cdot \bar{T}_e(\omega), P_4(\omega), 2cGT_{a,in}(\omega))^T$ — стохастический вектор с известными элементами, взятыми при математических ожиданиях температур $\bar{T}_5(t)$ и \bar{T}_e .

Применяя к (12) оператор математического ожидания, получим матричное уравнение для математических ожиданий вектора температур $\bar{T}(t)$:

$$\begin{aligned} C \frac{d\bar{T}(t)}{dt} + J(\bar{T}, \bar{T}_e) + Q \cdot \bar{T}(t) &= \bar{\Phi}, \\ \bar{T}(t=0) &= \bar{T}_e \cdot I, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\bar{\Phi} = (0, \bar{P}_4, 2cG\bar{T}_{a,in})^T$ — вектор математической ожиданий, элементы которого являются исходными входными данными.

Ковариационная матрица $K_{TT}(t) = E\{\tilde{T}(t, \omega) \cdot (\tilde{T}(t, \omega))^T\}$ стохастического вектора температур $\tilde{T}(t, \omega)$ определяется следующим матричным уравнением [Мадера, Кандалов, 2016]:

$$\begin{aligned} C \frac{dK_{TT}(t)}{dt} C + (V(\bar{T}) + Q)K_{TT}(t)C + CK_{TT}(t)(V^T(\bar{T}) + Q^T) &= K_{T\Phi}^T(t)C + CK_{T\Phi}(t), \\ K_{TT}(t=0) &= D_{T_e} \cdot I, \end{aligned} \quad (14)$$

которое решается совместно с уравнением для ковариационной матрицы $K_{T\Phi}(t) = E\{\tilde{T}(t, \omega)(\Phi(\omega))^T\}$,

$$\begin{aligned} C \frac{dK_{T\Phi}(t)}{dt} + (V(\bar{T}) + Q)K_{T\Phi}(t) &= K_{\Phi\Phi}, \\ K_{T\Phi}(t=0) &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $K_{\Phi\Phi} = \text{diag} \left(\left(\frac{\partial J_{5-e}(\bar{T}_5, \bar{T}_e)}{\partial T_e} \right)^2 D_{T_e}, D_{P_4}, 4c^2 G^2 D_{T_{a,in}} \right)^T$ — диагональная корреляционная матрица; $D_{T_e}, D_{P_4}, D_{T_{a,in}}$ — дисперсии входных случайных величин $T_e(\omega), P_4(\omega), T_{a,in}(\omega)$.

Решение уравнений (13)–(15) относительно статистических мер $\bar{T}_{a4}(t), D_{T_{a4}}(t)$ и ковариации $K_{T_{a4}, T_{a,in}}(t)$ между стохастическими температурами $T_{a4}(t, \omega)$ и $T_{a,in}(\omega)$ и соотношение (10) позволяют найти статистические меры $\bar{T}_{a3,k}(t)$ и $D_{T_{a3,k}}(t)$ стохастических температур $T_{a3,k}(t, \omega)$ в панелях $k=1, 2, \dots, K$ на 3-м уровне иерархии ЭС, а именно:

$$\bar{T}_{a3,k}(t) = \bar{T}_{a,in}(\omega) + (\bar{T}_{a4}(t) - \bar{T}_{a,in}) \frac{2k-1}{K}, \quad (16)$$

$$D_{T_{a3,k}}(t) = D_{T_{a4}}(t) \frac{(2k-1)^2}{K^2} + \left(2K_{T_{a4}, T_{a,in}}(t) - D_{T_{a,in}} \right) \left(1 - \frac{(2k-1)^2}{K^2} \right). \quad (17)$$

Матричные уравнения (13)–(15) определяют нестационарные статистические меры (математические ожидания, корреляции и дисперсии) интервально-стохастических тепловых процессов на 5-м, 4-м и 3-м иерархических уровнях ЭС, уравнения (16) и (17) — статистические меры распределения температуры среды внутри ЭС по ходу движения воздушной среды.

3.2. Статистические меры стохастических тепловых процессов на 3-м, 2-м и 1-м иерархических уровнях ЭС

Найденные в подпараграфе 3.1 статистические меры интервально-стохастических температур $T_{a3,k}(t, \omega)$ и $T_5(t, \omega)$ позволяют найти статистические меры стохастических температур $T_{3k}(t, \omega)$, $T_{2,m_k}(t, \omega)$, $T_1(t, \omega)$ на 3-м, 2-м и 1-м иерархических уровнях ЭС, описываемых уравнениями (4)–(6), а именно математические ожидания $\bar{T}_{3k}(t)$, $\bar{T}_{2,m_k}(t)$, $\bar{T}_1(t)$ и дисперсии $D_{T_{3k}}(t)$, $D_{T_{2,m_k}}(t)$, $D_{T_1}(t)$, $k=1, 2, \dots, K$, $m_k=1, 2, \dots, M_k$.

Следуя методу [Мадера, Кандалов, 2016] после линеаризации нелинейностей и принимая во внимание, что в силу принципа локального влияния стохастические температуры $T_{3k}(t, \omega)$, $T_{2,m_k}(t, \omega)$, $T_1(t, \omega)$, $T_{a3,k}(t, \omega)$, $T_5(t, \omega)$ статистически независимы между собой для всех $m_k=1, 2, \dots, M_k$ и $k=1, 2, \dots, K$, получим

– уравнения относительно математических ожиданий $\bar{T}_{3k}(t)$, $\bar{T}_{2,m_k}(t)$, $\bar{T}_1(t)$:

$$C_{3k} \frac{d\bar{T}_{3k}(t)}{dt} + J_{3k-a3,k}(\bar{T}_{3k}, \bar{T}_{a3,k}) + J_{3k-5}(\bar{T}_{3k}, \bar{T}_5) = \bar{P}_{3k}, \quad (18)$$

$$C_{2k} \frac{d\bar{T}_{2k}(t)}{dt} + J_{2k-a3,k}(\bar{T}_{2k}, \bar{T}_{a3,k}) + J_{2k-5}(\bar{T}_{2k}, \bar{T}_5) = \bar{P}_{2k}, \quad (19)$$

$$C_1 \frac{d\bar{T}_1(t)}{dt} + J_{1-a3,k}(\bar{T}_1, \bar{T}_{a3,k}) + J_{1-2,m_k}(\bar{T}_1, \bar{T}_{2,m_k}) = \bar{P}_1; \quad (20)$$

– уравнения относительно дисперсий $D_{T_{3k}}(t)$, $D_{T_{2,m_k}}(t)$ и $D_{T_1}(t)$:

$$C_{3k} \frac{dD_{T_{3k}}(t)}{dt} + 2v_1(\bar{T}_{3k}, \bar{T}_{a3,k}, \bar{T}_5) D_{T_{3k}}(t) = 2K_{T_{3k}, P_{3k}}(t), \quad (21)$$

$$C_{2k} \frac{dD_{T_{2k}}(t)}{dt} + 2v_2(\bar{T}_{2k}, \bar{T}_{a3,k}, \bar{T}_5) D_{T_{2k}}(t) = 2K_{T_{2k}, P_{2k}}(t), \quad (22)$$

$$C_1 \frac{dD_{T_1}(t)}{dt} + 2v_3(\bar{T}_1, \bar{T}_{2,m_k}, \bar{T}_{a3,k}) D_{T_1}(t) = 2K_{T_1, P_1}(t); \quad (23)$$

– уравнения относительно корреляций

$$K_{T_{3k}, P_{3k}}(t) = E\{\tilde{T}_{3k}(t, \omega) \cdot \tilde{P}_{3k}(\omega)\},$$

$$K_{T_{2,m_k}, P_{2,m_k}}(t) = E\{\tilde{T}_{2,m_k}(t, \omega) \cdot \tilde{P}_{2,m_k}(\omega)\},$$

$$K_{T_1, P_1}(t) = E\{\tilde{T}_1(t, \omega) \cdot \tilde{P}_1(\omega)\},$$

входящих в уравнения (21)–(23):

$$C_{3k} \frac{dK_{T_{3k}, P_{3k}}(t)}{dt} + v_1(\bar{T}_{3k}, \bar{T}_{a3,k}, \bar{T}_5) K_{T_{3k}, P_{3k}}(t) = D_{P_{3k}}, \quad (24)$$

$$C_{2,m_k} \frac{dK_{T_{2,m_k}, P_{2,m_k}}(t)}{dt} + v_2(\bar{T}_{2,m_k}, \bar{T}_{a3,k}, \bar{T}_5) K_{T_{2,m_k}, P_{2,m_k}}(t) = D_{P_{2,m_k}}, \quad (25)$$

$$C_1 \frac{dK_{T_1, P_1}(t)}{dt} + v_3(\bar{T}_1, \bar{T}_{2,m_k}, \bar{T}_{a3,k}) K_{T_1, P_1}(t) = D_{P_1}, \quad (26)$$

где $v_1(\bar{T}_{3k}, \bar{T}_{a3,k}, \bar{T}_5)$, $v_2(\bar{T}_{2,m_k}, \bar{T}_{a3,k}, \bar{T}_5)$, $v_3(\bar{T}_1, \bar{T}_{2,m_k}, \bar{T}_{a3,k})$ — функции, зависящие от математических ожиданий, полученных из решения уравнений (16) и (18)–(21), и равные

$$\begin{aligned} v_1(\bar{T}_{3k}, \bar{T}_{a3,k}, \bar{T}_5) &= \partial(J_{3k-a3,k}(\bar{T}_{3k}, \bar{T}_{a3,k}) + J_{3k-5}(\bar{T}_{3k}, \bar{T}_5)) / \partial T_{3k}, \\ v_2(\bar{T}_{2,m_k}, \bar{T}_{a3,k}, \bar{T}_5) &= \partial(J_{2,m_k-a3,k}(\bar{T}_{2,m_k}, \bar{T}_{a3,k}) + J_{2,m_k-5}(\bar{T}_{2,m_k}, \bar{T}_5)) / \partial T_{2,m_k}, \\ v_3(\bar{T}_1, \bar{T}_{2,m_k}, \bar{T}_{a3,k}) &= \partial(J_{1-a3,k}(\bar{T}_1, \bar{T}_{a3,k}) + J_{1-2,m_k}(\bar{T}_1, \bar{T}_{2,m_k})) / \partial T_1. \end{aligned}$$

Таким образом, математическая модель (13)–(26) описывает статистические меры интервально-стохастических температур на пяти иерархических уровнях ЭС, а также воздушной среды внутри ЭС. При этом матричное уравнение (13) описывают математические ожидания интервально-стохастических температур на 5-м и 4-м уровнях и температуры среды внутри ЭС; уравнение (16) — математическое ожидание распределения температуры среды внутри ЭС по ее высоте; уравнения (18)–(20) — математические ожидания интервально-стохастических температур на 3-м, 2-м и 1-м уровнях; матричные уравнения (14), (15) — корреляции и дисперсии интервально-стохастических температур на 5-м и 4-м уровнях и температуры среды внутри ЭС; уравнение (17) — дисперсию температуры среды по высоте ЭС; уравнения (21)–(26) — дисперсии интервально-стохастических температур на 3-м, 2-м и 1-м уровнях иерархии ЭС. Уравнения математической модели представляет собой систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений в обыкновенных производных, которые решаются известными численными методами, например методами Эйлера, Рунге–Кутты и др. [Бахвалов, 1987].

Отметим, что предлагаемый иерархический подход позволяет значительно сократить количество уравнений (нестационарных, нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка) при определении статистических мер температур на различных иерархических уровнях ЭС. Действительно, если для определения статистических мер (математических ожиданий, ковариационных моментов, дисперсий) рассматриваемым в статье иерархическим методом требуется (см. выше) $4 \cdot K + 7$ уравнений в обыкновенных производных (K — количество панелей),

то для полной стохастической модели (2)–(9) потребуется порядка $3 \sum_{k=1}^K M_k + 6K + 12$ уравнений

(M_k — количество ЭМ в k -й панели). Так, например, для ЭС, содержащей $K = 5$ панелей по $M_k = 25$ ЭМ в каждой панели ($k = 1, 2, \dots, K$), количество уравнений в иерархической и полной моделях составит 27 и 417 уравнений соответственно. Таким образом, использование при тепловом проектировании сложных ЭС иерархического подхода позволяет существенно уменьшить количество уравнений для определения статистических мер, что, как следствие, приводит как к значительному сокращению затрат компьютерных ресурсов (памяти, времени вычислений), так и к обеспечению возможности учета, наряду с тепловыми факторами, воздействий дестабилизирующих факторов различной физической природы.

4. Алгоритм иерархического метода моделирования стохастических тепловых процессов в ЭС

Иерархия конструкции ЭС насчитывает пять уровней (рис. 1), начинается с 1-го уровня (активные элементы ЭС), переходит на 2-й уровень (ЭМ), далее — на 3-й уровень (панели), 4-й уровень (блок панелей) и заканчивается 5-м уровнем (стойка ЭС). В отличие от конструкционной иерархии иерархия моделирования стохастических тепловых процессов в ЭС следует в обратном порядке, а именно: начинается с пятого уровня и заканчивается первым. При этом статистические меры стохастических температур, полученные на вышележащих иерархических уровнях, являются входными данными для определения статистических мер на нижележащих

уровнях иерархии. После определения статистических мер стохастических температур на каждом иерархическом уровне вычисляются интервалы (1) реальных значений температур, которые будут иметь место на практике в процессе функционирования ЭС.

Входными исходными данными для математического моделирования тепловых процессов в ЭС являются интервально-стохастические температуры окружающей среды $T_e(\omega)$, воздушно-го/жидкостного потока на входе в ЭС $T_{a,in}(\omega)$, мощности потребления $\{P_{j,1}(\omega)\}_{j=1}^L$ всех (L) активных элементов (МС и ЭРЭ), установленных в ЭМ, с известными математическими ожиданиями \bar{T}_e , $\bar{T}_{a,in}$, $\{\bar{P}_{j,1}\}_{j=1}^L$ и дисперсиями D_{T_e} , $D_{T_{a,in}}$, $\{D_{P_{j,1}}\}_{j=1}^L$.

Алгоритм метода иерархического стохастического моделирования тепловых процессов в ЭС включает в себя следующие этапы.

1. Моделирование статистических мер стохастических тепловых процессов на 5-м и 4-м уровнях иерархии посредством решения уравнений (13)–(15) для статистических мер стохастических температур $T_5(t, \omega)$, $T_4(t, \omega)$, $T_{a4}(t, \omega)$ и определение математических ожиданий $\bar{T}_5(t)$, $\bar{T}_4(t)$, $\bar{T}_{a4}(t)$, ковариационной матрицы $K_{TT}(t)$ и дисперсий $D_{T_5}(t)$, $D_{T_4}(t)$, $D_{T_{a4}}(t)$, равных диагональным элементам матрицы $K_{TT}(t)$. По найденным статистическим мерам $\bar{T}_i(t)$ и $\sigma_{T_i}(t) = \sqrt{D_{T_i}(t)}$ ($i = 5, 4, a4$) и формуле (1) определяются границы интервалов изменения реальных значений стохастических температур $[T_{bot,i}(t), T_{up,i}(t)]$ на иерархических уровнях $i = 5, 4, a4$.

2. Полученные на 1-м этапе математическое ожидание $\bar{T}_{a4}(t)$ и дисперсия $D_{T_{a4}}(t)$ стохастической температуры среды $T_{a4}(t, \omega)$ подставляются в формулы (16) и (17), из которых определяются математическое ожидание $\bar{T}_{a3,k}(t)$ и дисперсия $D_{T_{a3,k}}(t)$ стохастической температуры среды $T_{a3,k}(t, \omega)$ в k -й панели ($k = 1, 2, \dots, K$) на 3-м уровне иерархии. Вычисленные для каждого k статистические меры $\bar{T}_{a3,k}(t)$ и $D_{T_{a3,k}}(t)$ определяют интервалы $[T_{bot,a3,k}(t), T_{up,a3,k}(t)]$ изменения значений стохастических температур среды $T_{a3,k}(t, \omega)$ на уровне различных панелей k ($k = 1, 2, \dots, K$) по высоте стойки.

3. Математические ожидания $\bar{T}_5(t)$ и $\bar{T}_{a3,k}(t)$, найденные для всех $k = 1, 2, \dots, K$ на 2-м этапе алгоритма, являются входными данными для решения уравнений (18), (21), (24) относительно статистических мер на 3-м иерархическом уровне, то есть математических ожиданий $\bar{T}_{3k}(t)$ и дисперсий $D_{T_{3k}}(t)$ стохастической температуры $T_{3k}(t, \omega)$ для каждой k -й панели, $k = 1, 2, \dots, K$. По полученным статистическим мерам $\bar{T}_{3k}(t)$ и $\sigma_{T_{3k}}(t)$ определяются интервалы изменения $[T_{bot,3k}(t), T_{up,3k}(t)]$ стохастических температур $T_{3k}(t, \omega)$ для каждой k -й панели, $k = 1, 2, \dots, K$.

4. Статистические меры $\bar{T}_{a3,k}(t)$ и $D_{T_{a3,k}}(t)$, найденные для всех $k = 1, 2, \dots, K$ на 3-ем этапе, совместно с математическими ожиданиями $\bar{T}_5(t)$, $\bar{T}_{a3,k}(t)$, полученными на этапах 1-м и 2-м, являются входными данными для моделирования статистических мер на 2-м уровне иерархии. Решения уравнений (19), (22), (25), найденные на данном этапе, определяют статистические меры $\bar{T}_{2k}(t)$ и $D_{T_{2k}}(t)$ стохастической температуры $T_{2k}(t, \omega)$ для ЭМ в различных панелях k ($k = 1, 2, \dots, K$). Статистические меры $\bar{T}_{2k}(t)$ и $\sigma_{T_{2k}}(t)$ служат далее для определения интервалов изменения $[T_{bot,2k}(t), T_{up,2k}(t)]$ значений стохастических температур $T_{2k}(t, \omega)$ ЭМ в панелях k ($k = 1, 2, \dots, K$).

5. Математические ожидания $\bar{T}_{a3,k}(t)$, $\bar{T}_{2k}(t)$, полученные на 2-м и 4-м этапах, подставляются в качестве известных функций в уравнения (20), (23), (26), из решения которых определяются статистические меры $\bar{T}_1(t)$ и $\sigma_{T_1}(t)$ стохастической температуры $T_1(t, \omega)$ анализируемого элемента (МС, ЭРЭ), установленного в ЭМ в k -й панели, $k = 1, 2, \dots, K$, на первом уровне иерархии ЭС. Найденные на данном (первом) уровне статистические меры $\bar{T}_1(t)$ и $\sigma_{T_1}(t)$ определяют интервалы (1) изменения $[T_{bot,1}(t), T_{up,1}(t)]$ значений стохастической температуры $T_1(t, \omega)$ рассматриваемого активного элемента ЭМ (МС, ЭРЭ) на первом иерархическом уровне ЭС.

5. Результаты численного иерархического метода моделирования интервально-стохастических тепловых процессов в реальной ЭС

Рассмотрим ЭС, представляющую собой стойку, расположенную в машинном зале, внутри которой установлено 6 панелей по 16 ЭМ в каждой. В стойку в нижней ее части подается охлажденный воздух, который нагнетается через блок панелей и выходит сверху стойки. Входные параметры теплового режима, а именно температура воздуха на входе в ЭС $T_{a,in}(\omega)$ и температура окружающей среды $T_e(\omega)$, являются интервально-стохастическими с известными математическими ожиданиями $\bar{T}_{a,in} = 18$ °С, $\bar{T}_e = 30$ °С и дисперсиями $D_{T_{a,in}} = 0.25(\text{°C})^2$, $D_{T_e} = 4(\text{°C})^2$. Мощности активных элементов ЭС (МС и ЭРЭ) также являются интервально-стохастическими, причем на каждом ЭМ в ЭС установлены две процессорные МС с мощностями потребления, статистические меры которых равны $\bar{P}_1 = 30$ Вт (математическое ожидание) и $D_{P_1} = 1$ Вт² (дисперсия).

Результаты численного моделирования статистических мер интервально-стохастических тепловых процессов в ЭС рассматриваемой конструкции, для шестой ($k = 6$) и первой ($k = 1$) панели с стойке, приведены на рис. 2, а, б (математические ожидания) и рис. 3 (дисперсии) соответственно.

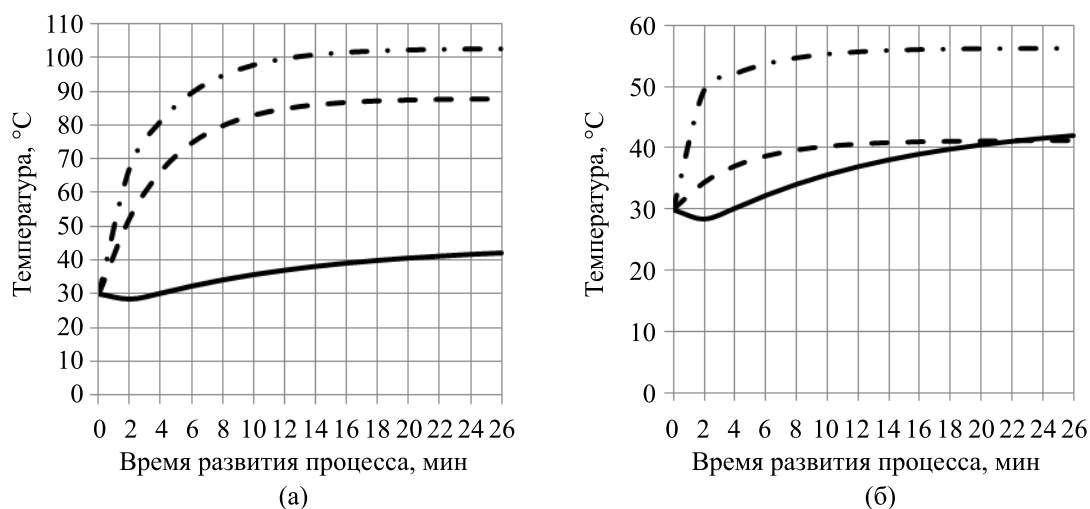


Рис. 2. Нестационарные математические ожидания интервально-стохастических температур на различных иерархических уровнях электронной системы: для панели с номером $k = 6$ (а) и панели с номером $k = 1$ (б) в стойке электронной системы: для корпуса стойки — сплошная линия, для электронного модуля в панели — штрих, для интегральной микросхемы в электронном модуле — штрихпунктир

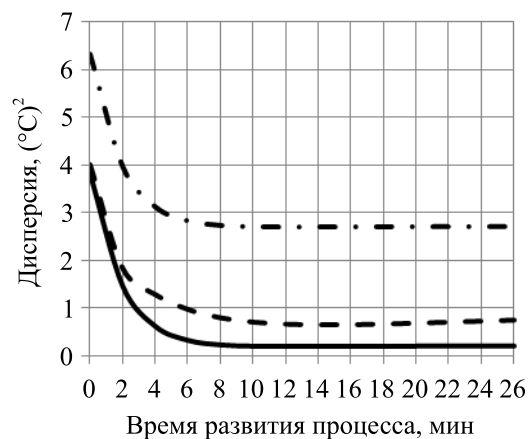


Рис. 3. Нестационарные дисперсии интервально-стохастических температур на различных иерархических уровнях электронной системы: для корпуса стойки — сплошная линия, для электронного модуля в панели — штрих, для интегральной микросхемы в электронном модуле — штрихпунктир

Различие между величинами математических ожиданий температуры элементов на различных иерархических уровнях (рис. 2, а, б) обусловливается тем, что воздушная среда, нагнетаемая через тепловыделяющие панели в стойке ЭС, увеличивает свое теплосодержание, причем тем больше, чем длиннее путь, проходимый воздухом внутри стойки. Поэтому математическое ожидание температуры воздуха в шестой панели (расположена вверху стойки) составляет 69.1 °С, а в первой панели (расположена внизу стойки) — 22.7 °С. В свою очередь, дисперсия разброса интервально-стохастической температуры воздушной среды в стойке также претерпевает значительные изменения, имея максимальное значение 3 °С² в шестой панели и минимальное 0.25 °С² — в первой панели. Столь существенное различие между минимальным и максимальным значениями дисперсии обусловливается тем, что разброс температуры воздуха на уровне первой панели испытывает влияние разброса температуры воздушной среды, подаваемой на вход стойки, и разброса мощности потребления первой панели. В то же время дисперсия разброса температуры воздуха на выходе из стойки на уровне шестой панели подвергается воздействию разбросов мощностей всех шести панелей в стойке, а также разбросов температуры воздуха на входе в стойку и температуры окружающей среды. Некоторое уменьшение значений математического ожидания температуры корпуса стойки во временном диапазоне от 0 до 4 мин вызвано тем, что элементы ЭС, предварительно нагретые до 30 °С (начальные условия), в первый момент времени подвергаются охлаждению в результате подачи охлажденного до 18 °С воздуха. Однако по прошествии времени (начиная с 4 мин) в силу вступают процессы разогрева панелей и воздушной среды и температура корпуса стойки начинает расти.

Уменьшение дисперсии разброса температуры элементов ЭС с переходом на более высокий уровень иерархии ЭС вызвано тем, что наибольшая часть разброса приходится на теплосодержание воздушной среды, принудительно нагнетаемой через стойку, в то время как дисперсия разброса температуры корпуса стойки обусловливается в основном слаборазвитой естественной конвекцией в окружающую среду.

Вычисления статистических мер интервально-стохастических температур на различных иерархических уровнях ЭС проводились на 4-ядерном персональном компьютере методом Рунге–Кутты, при этом затраты машинного времени составляли менее 1 мин.

6. Заключение

Концепция иерархического структурирования конструкции и моделирования стохастических тепловых процессов в сложных ЭС позволяет создавать математические и компьютерные методы моделирования на различных иерархических уровнях ЭС, в которых результаты расче-

тов на вышележащих уровнях конструктивной иерархии ЭС служат входными данными для проведения расчетов на нижележащих иерархических уровнях. В противном случае численное моделирование стохастических температурных распределений в элементах ЭС, ввиду огромного количества как данных, так и уравнений математической модели, наталкивается на непреодолимые трудности даже с применением суперкомпьютеров.

В иерархическом методе моделирования стохастических тепловых процессов в сложных ЭС уровни рассмотрения моделирования разворачиваются в порядке, обратном конструктивной иерархической структуре ЭС. Иерархическая структура конструкции ЭС начинается с 1-го уровня (МС и ЭРЭ), охватывает далее 2-й уровень (ЭМ), 3-й уровень (панель), 4-й уровень (блок панелей) и заканчивается 5-м уровнем (стойка ЭС в помещении, стационарном или мобильном). В то же время иерархия моделирования тепловых процессов осуществляется в обратном порядке, а именно, начинается с моделирования температурно-влажностного режима ЭС в помещении на 5-м уровне иерархии и заканчивается 1-м уровнем, к которому относятся активные элементы ЭС (МС и ЭРЭ). Полученные на 5-м уровне данные (температура корпуса ЭС) передаются в граничные условия математических моделей ЭС на 4-м уровне, на котором осуществляется моделирование распределений температуры блока панелей и среды внутри ЭС. Рассчитанные на 4-м уровне данные являются входными для моделирования элементов 3-го уровня иерархии, на котором моделируются температурные распределения в панелях ЭС и воздушной/жидкостной среды внутри панелей с учетом взаимодействия панелей между собой и средой. Эти данные, в свою очередь, поступают на 2-й уровень иерархии ЭС, где моделируются тепловые процессы в ЭМ, а именно температурные поля на печатной плате и температуры корпусов МС и ЭРЭ. Вычисленные на 2-м уровне температуры корпусов МС и ЭРЭ служат в качестве исходных данных для моделирования тепловых процессов на кристаллах и корпусах отдельных МС и ЭРЭ на 1-м уровне иерархии ЭС. В силу того, что тепловые процессы в ЭС носят интервально-стохастический характер, на каждом уровне иерархии ЭС определяются интервалы, внутри которых будут изменяться реальные значения элементов ЭС при функционировании.

Моделирование интервально-стохастических тепловых процессов на всех иерархических уровнях ЭС осуществляется посредством получения уравнений для статистических мер (математических ожиданий, дисперсий, ковариаций между температурами всех элементов и воздействующими стохастическими факторами). Разработанный в статье метод учитывает такие принципиальные особенности, как стохастический характер теплообмена, обусловленный технологическим статистическим разбросом тепловых, электрических и конструктивных факторов ЭС при производстве, сборке и монтаже элементов в ЭС, и стохастический разброс условий функционирования системы и окружающей среды, нелинейность процессов теплообмена, выражающуюся зависимостью тепловых определяющих факторов и параметров от температуры, а также нестационарный характер тепловых процессов. Отметим, что уравнения для статистических мер стохастических температур в элементах ЭС получены при общих вероятностных условиях и не используют допущения о нереалистических функциях распределения входных и выходных стохастических факторов. Уравнения математической модели для статистических мер стохастических тепловых процессов представляют собой систему из 14-ти нестационарных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в обыкновенных производных, решение которых легко реализуется на современных компьютерах существующими численными методами. Разработанный метод применяется на практике при тепловом проектировании реальных ЭС и показал свою адекватность и эффективность при создании современных конкурентоспособных ЭС.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (выполнение фундаментальных научных исследований ГП 14) по теме № 0065-2019-0001 «Математическое обеспечение и инструментальные средства для моделирования, проектирования и разработки элементов сложных технических систем, программных комплексов и телекоммуникационных сетей в различных проблемно-ориентированных областях» (АААА-А19-119011790077-1).

Список литературы (References)

- Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Наука, 1987.
Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. Chislenny'e metody [Numerical methods]. — Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
- Дульнев Г. Н.* Тепловые режимы электронной аппаратуры. — Л.: Энергия, 1971.
Dul'nev G. N. Teplovye rezhimy elektronnoy apparatury [Thermal modes of electronic equipment]. — Leningrad: Energiya, 1971 (in Russian).
- Дульнев Г. Н., Новиков В. В.* Процессы переноса в неоднородных средах. — Л.: Энергоатомиздат, 1991.
Dul'nev G. N., Novikov V. V. Processy perenosa v neodnorodnykh sredakh [Transfer Processes in Heterogeneous Media]. — Leningrad: Energoatomizdat, 1991 (in Russian).
- Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. — М.: Мир, 1974.
Gyarmati I. Non-Equilibrium Thermodynamics. Field Theory and Variational Principles. — Berlin, German: Springer-Verlag, 1970. (Russ. ed.: *D'yarmati I.* Neravnovesnaya termodinamika. Teoriya polya i variaczionnye principy. — Moscow: Mir, 1974.)
- Мадера А. Г.* Концепция математического и компьютерного моделирования тепловых процессов в электронных системах // Программные продукты и системы. — 2015. — № 4 (112). — С. 79–86.
Madera A. G. Konczepczyia matematicheskogo i kompyuternogo modelirovaniya teplovykh processov v elektronnykh sistemakh [The concept of mathematical and computer simulation of thermal processes in electronic systems] // Programmnye produkty i sistemy. — 2015. — No. 4 (112). — P. 79–86 (in Russian).
- Мадера А. Г., Кандалов П. И.* Математическое моделирование интервально стохастических тепловых процессов в технических системах при интервальной неопределенности определяющих параметров // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 3. — С. 501–520.
Madera A. G., Kandalov P. I. Matematicheskoe modelirovanie interval'no stokhasticheskikh teplovykh processov v tekhnicheskikh sistemakh pri interval'noj neopredelennosti opredelyayushhikh parametrov [Mathematical modeling of the interval stochastic thermal processes in electronic systems at the interval indeterminacy of the determinative parameters] // Computer Research and Modeling. — 2016. — Vol. 8, No. 3. — P. 501–520 (in Russian).
- Мадера А. Г.* Моделирование воздействия тепловой обратной связи на тепловые процессы в электронных системах // Компьютерные исследования и моделирование. — 2018. — Т. 10, № 4. — С. 483–494.
Madera A. G. Modelirovanie vozdejstviya teplovoj obratnoj svyazi na teplovye processy v elektronnykh sistemakh [Modeling thermal feedback effect on thermal processes in electronic systems] // Computer Research and Modeling. — 2018. — Vol. 10, No. 4. — P. 483–494 (in Russian).
- Мадера А. Г., Решетников В. Н.* Многофункциональный программный комплекс теплового проектирования электронных систем: требования к архитектуре и функциональным возможностям моделирования // Программные продукты и системы. — 2017. — № 3 (30). — С. 367–372.
Madera A. G., Reshetnikov V. N. Mnogofunkczional'nyj programmnyj kompleks teplovogo proektirovaniya elektronnykh sistem: trebovaniya k arkhitekture i funkczional'nyim vozmozhnostyam modelirovaniya [A software complex for electronic system thermal design: requirements for architecture and functional possibilities of modeling] // Programmnye produkty i sistemy. — 2017. — No. 3 (30). — P. 367–372 (in Russian).
- Пугачев В. С.* Теория случайных функций. — М.: Наука, 1962.
Pugachev V. S. Teoriya sluchajnykh funkczij [Theory of random functions]. — Moscow: Nauka, 1962 (in Russian).
- Сергеев В. А., Хадаков А. М.* Нелинейные тепловые модели полупроводниковых приборов. — Ульяновск: УлГТУ, 2012.
Sergeev V. A., Khadakov A. M. Nelinejnye teplovye modeli poluprovodnikovyx priborov [Nonlinear thermal models of semiconductor devices]. — Ulyanovsk: UIGTU, 2012 (in Russian).
- da Silva Jr. C. R. A., de Deus H. P. A., Kozlik Jr. A., Garcia O. S.* Application of the method of Galerkin to non linear problem stochastic heat conduction one-dimensional // Applied Mechanics and Materials. — 2018. — Vol. 751. — P. 325–330.

- Ellison G. N.* Thermal computations for electronics. Conductive, radiative, and convective air cooling. — NY, USA: CRC Press, 2011.
- Kuuse M., Loikkanen M., Bognar Gy.* Theoretical investigation of feedback effects in low-power circuits // THERMINIC. — Belgirate, Italy, 2005. — P. 28–30.
- Pan M., Liu C., Zheng L., Liu F.* A stochastic model for thermal transport of nanofluid in porous media: Derivation and applications // Computers & Mathematics with Applications. — 2017. — November. — P. 1–25.
- Spalding D. B., Taborek J., eds.* Heat Exchanger Design Handbook. — NY, USA: Hemisphere Publishing Corporation, 1990.
- Wang C., Qiu Z.* Hybrid uncertain analysis for steady-state heat conduction with random and interval parameters // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2015. — Vol. 80. — P. 319–328.
- Wang C., Qiu Z., Chen X.* Uncertainty analysis for heat convection-diffusion problem with large uncertain-but-bounded parameters // Acta Mechanica. — 2015. — Vol. 226, No. 11. — P. 3831–3844.