УДК 517.917

© *П. С. Иванов, Ю. В. Петров*

СОГЛАСОВАННОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ [1]

Рассматривается линейная управляемая система с неполной обратной связью

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C(t)x, \quad u = U(t)y.$$

Исследуется задача управления асимптотическим поведением замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t)C(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Для такой системы вводится понятие согласованности. Это понятие является обобщением понятия полной управляемости на системы с неполной обратной связью. Исследовано свойство согласованности системы (1), получены новые необходимые условия и достаточные условия согласованности системы (1), в том числе в стационарном случае.

Для стационарной системы вида (1) исследуется задача о глобальном управлении спектром собственных значений, которая заключается в приведении характеристического многочлена матрицы стационарной системы (1) с помощью стационарного управления U к произвольному наперед заданному полиному. С помощью методов линейной алгебры получены необходимые и достаточные условия глобальной управляемости спектра в случае, когда коэффициенты системы имеют специальный вид. Установлено, что в этом случае свойство согласованности является достаточным, а при определенных предположениях и необходимым условием глобальной управляемости спектра.

Ключевые слова: линейные системы с последействием, приводимость, показатели Ляпунова, ляпуновские инварианты.

Введение

Данная работа посвящена изучению свойств решений дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(f^t\sigma, x), \quad \sigma \in \Sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

где $F(\sigma, x)$ представляет собой компактное множество в $\mathbb{R}^n$, а Σ — компактное метрическое пространство, минимальное относительно потока f^t. В работах [1, 3–5, 8–10] рассматривались системы ...

Следует отметить, что пока отсутствует «принцип плотности» для рекуррентных решений.

Рассматриваемая здесь система уравнений с последействием порождает полупоток на некотором банаховом пространстве функций. Это обстоятельство впервые отметил Н. Н. Красовский [1, глава 3].

§ 1. Основные обозначения и определения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n, и пусть $|x| = \sqrt{x^*x}$ — норма в $\mathbb{R}^n$ ....

Рассмотрим систему уравнений с последействием, то есть систему

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty). \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке конкурсного центра Минобразования России (гранты Е06–1.0–5, Е07–1.0–100) и РФФИ (грант 06–01–00014).

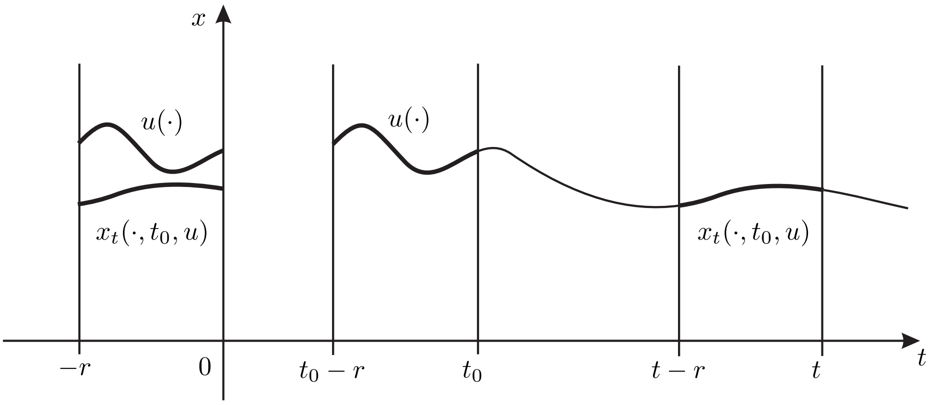

Рис. 1. Движение, порожденное решением системы (1.1)

В дальнейшем систему (1.1) будем отождествлять ....

$$\dot{y}(t) = \int_{-r}^{0} dB(t,s)y(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty). \tag{1.2}$$

Замечание 1. Н. Н. Красовский предлагает [1, с. 131] характеризовать асимптотическое поведение системы $\dot{y}(t) = \displaystyle\int_{-r}^{0} dB(t,s)y(t+s)$ ....

§ 2. Инвариантные и вполне регулярные множества

Определение 1 (см. [8], [9, с. 110]). Подмножество $\mathfrak{X}_0$ будем называть *регулярным* относительно системы (1.2), введенной в § 1 .....

Лемма 1 (см. [13, с. 123]). *Пусть $\mathfrak{X}_0$ — фиксированное конечномерное линейное подпространство ....*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что .... □

§ 3. Теорема о приводимости

Мы предполагаем (см. рис. 1), что *множество попарно различных показателей Ляпунова системы A не более чем счетно и их можно упорядочить в порядке убывания.* Расположим функции $u^1, \ldots, u^p$, образующие базис [2] в порядке возрастания ....

Теорема 1 (о триангуляции). *Если $\mathbb{S}^p$ вполне регулярно, то:*

а) *найдутся система B (с ограниченной на $\mathbb{R}_+$ матрицей $B(t)$) и ляпуновское преобразование, приводящее $(A, \mathbb{S}^p)$ к B;*

б) *в множестве $\{B\}$ всех систем, кинематически подобных $(A, \mathbb{S}^p)$, найдется система с непрерывной и ограниченной верхней треугольной матрицей $B(t)$.*

§ 4. Доказательство теоремы 1

1. Еще раз поясним смысл некоторых обозначений. Зафиксируем в подпространстве ....

2. Выберем пока произвольную непрерывную функцию ....

3. Построим теперь функцию $t \to \widetilde{B}(t)$ так, ...

Далее, из равенства $\widehat{Y}(t,0) = V(t)$ следует неравенство

$$\widehat{Y}(t,0)| \leqslant \alpha|V(t)Z(t)| = \ldots = \alpha|Z(t)| \leqslant \alpha\sqrt{r}\,\|U_t\|_{\mathbb{R}^p \to \mathfrak{S}}, \tag{4.1}$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия предположения* 1. *Тогда ...*

[2] При каждом t запись $\dot{L}(t)$ означает ....

Лемма 2. *Пусть ....*

Предложение 1. *Пусть ....*

Утверждение 1. *Пусть ....*

Следствие 1. *Пусть ....*

Гипотеза 1. *Теорема* 2 *верна.*

Определение 2. Множество A называется *регулярным*, если ....

Замечание 2. Заметим, что ....

Пример 1. Рассмотрим пример ....

Предположение 1. Функции $\xi_i(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора.

Условие 1. Начальные позиции участников таковы, что .....

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 550 с.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
3. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. 576 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1966. 608 с.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 10-е изд. М.: Наука, 1990. 624 с.
6. Филиппова Т.Ф. Задачи о выживаемости для дифференциальных включений: дис. ... д-ра физ.-матем. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1992. 266 с.
7. Попова С.Н. Управление асимптотическими инвариантами линейных систем: автореф. дис. ... д-ра физ.-матем. наук. Екатеринбург, 2004. 34 с.
8. Stokes A. A Floquet theory for functional-differential equations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1962. Vol. 48. № 8. P. 1330–1334.
9. Шиманов С.Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 1. С. 102–116.
10. Данилов Л.И. О почти периодических сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 34–41.
11. Дерр В.Я. Об одном обобщении интеграла Римана–Стилтьеса // Известия Института математики и информатики УдГУ. 1997. Вып. 3 (11). С. 3–29.
12. Данилов Л.И. О почти периодических по Вейлю сечениях многозначных отображений / УдГУ. Ижевск, 2004. 104 с. Деп. в ВИНИТИ 09.06.2004, № 981-В2004.
13. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Почти инвариантные множества управляемых систем // Дифференциальные уравнения и топология: тез. докл. Междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. МГУ. М., 2008. С. 392–393.
14. Борисов А.В., Мамаев И.С., Болсинов А.В. Топология и устойчивость динамических систем // Регулярная и хаотическая динамика: тез. докл. Всероссийской конференции. УдГУ. Ижевск, 2010. С. 11.
15. Зайцев В.А. Достижимость и ляпуновская приводимость линейных управляемых систем // Оптимизация, управление, интеллект: сб. статей. ИДСТУ СО РАН. Иркутск, 2005. № 2 (10). С. 76–84.
16. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25. URL: `http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf`
17. Банников А.С., Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.

18. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 185–201.

Поступила в редакцию 01.02.2012

Иванов Петр Сидорович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: psi@usu.mat.com

Петров Юрий Владимирович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: petrov@list.ru

P. S. Ivanov, Yu. V. Petrov
Consistency and control over eigenvalue spectrum

Keywords: linear systems with delay, reducibility, Lyapunov exponents, Lyapunov invariants.

Mathematical Subject Classifications: 34D08, 93C15

We consider a linear control system with an incomplete feedback

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C(t)x, \quad u = U(t)y.$$

We study the problem of control over asymptotic behaviour of the closed-loop system

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t)C(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

For the above system, we introduce the concept of consistency, which is a generalization of the concept of complete controllability onto systems with incomplete feedback. The focus is on the consistency property of system (1). We have obtained new necessary conditions and sufficient conditions for the consistency of the above system including the case when the system is time-invariant.

For time-invariant system (1), we study the problem of global control over eigenvalue spectrum. The objective is to reduce a characteristic polynomial of a matrix of stationary system (1) to any prescribed polynomial by means of time-invariant control U. By methods of linear algebra, we obtain necessary and sufficient conditions for global controllability over the spectrum in the case where the system coefficients have a special form. In that case, we establish that the property of consistency is sufficient for the global controllability over the spectrum, and under certain assumptions it is necessary too.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya* (Some problems of the theory of stability of motion), Moscow: Fizmatgiz, 1959, 550 p.

2. Kalman R., Falb P., Arbib M. *Topics in mathematical system theory*, New York: McGraw-Hill, 1969, 358 p. Translated under the title *Ocherki po matematicheskoi teorii sistem*, Moscow: Editorial URSS, 2004, 400 p.

3. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.

4. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* (A course of differential and integral calculus), vol. 1, Moscow: Nauka, 1966, 608 p.

5. Demidovich B.P. *Sbornik zadach i uprazhnenii po matematicheskomu analizu* (A collection of problems and exercises in mathematical analysis), Moscow: Nauka, 1990, 624 p.

6. Filippova T.F. Problems of viability for differential inclusions, *Dr. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Yekaterinburg, 1992, 266 p.

7. Popova S.N. Control over asymptotic invariants of linear systems, *Abstract of Dr. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Yekaterinburg, 2004, 34 p.

8. Stokes A. A Floquet theory for functional-differential equations, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1962, vol. 48, no. 8, pp. 1330–1334.

9. Shimanov S.N. To the theory of the linear differential equations with aftereffect, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 1, pp. 102–116.

10. Danilov L.I. On almost periodic selections of multivalued maps, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2008, no. 2, pp. 34–41.

11. Derr V.Ya. On a generalization of Riemann—Stieltjes integral, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 1997, no. 3 (11), pp. 3–29.

12. Danilov L.I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps, UdSU, Izhevsk, 2004, 104 p. Deposited in VINITI 09.06.2004, no. 981-B2004.

13. Rodina L.I., Tonkov E.L. The almost invariant sets of controlled systems, *Differential Equation and Topology: Abstracts of Int. Conf. Dedicated to the Centennial Anniversary of Lev Semenovich Pontryagin*, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2008, pp. 392–393.

14. Borisov A.V., Mamaev I.S., Bolsinov A.V. Topology and stability of dynamic systems, *Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika: tez. dokl. Vserossiiskoi konferentsii* (Regular and chaotic dynamics: abstracts of All-Russian conference), Udmurt State University, Izhevsk, 2010, p. 11.

15. Zaitsev V.A. Attainability and Lyapunov reducibility of linear control systems, *Optimizatsiya, upravlenie, intellekt: sbornik statei* (Optimization, control, intelligence: Transactions), Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 2005, no. 2 (10), pp. 76–84.

16. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight, *Topology Proceedings*, 1980, vol. 5, pp. 11–25. `http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf`

17. Bannikov A.S., Petrov N.N. On non-stationary problem of group pursuit with phase restrictions, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 1, pp. 40–51.

18. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Extension of E.A. Barbashin's and N.N. Krasovskii's stability theorems to controlled dynamical systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 204–221.

Received 01.02.2012

Ivanov Petr Sidorovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: psi@usu.mat.com

Petrov Yurii Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: petrov@list.ru