УДК 517.917

© *П. С. Иванов, Ю. В. Петров*

СОГЛАСОВАННОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ [1]

Рассматривается дискретный оператор Шрёдингера на графе с вершинами на двух пересекающихся прямых, возмущенный убывающим потенциалом. Исследуются спектральные свойства этого оператора. Исследуется задача рассеяния для данного оператора в случае малого потенциала, а также в случае, когда малы как потенциал, так и скорость квантовой частицы. Получены асимптотические формулы для вероятностей распространения частицы во всех возможных направлениях. Кроме того, исследуются спектральные свойства дискретного оператора Шрёдингера для бесконечной полосы с нулевыми граничными условиями. Описана картина рассеяния. Получены простые формулы для вероятностей прохождения и отражения вблизи граничных точек подзон (это отвечает малым скоростям квантовой частицы) в случае малых потенциалов. Рассматривается одночастичный дискретный оператор Шрёдингера с периодическим потенциалом, возмущенным функцией, периодической по двум переменным и экспоненциально убывающей по третьей. Исследуется задача рассеяния для данного оператора вблизи точки экстремума по третьей координате квазиимпульса некоторого собственного значения оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом в ячейке, то есть для малой перпендикулярной составляющей угла падения частицы на потенциальный барьер. Получены простые формулы для вероятностей прохождения и отражения.

Ключевые слова: линейные системы с последействием, приводимость, показатели Ляпунова, ляпуновские инварианты.

Введение

Данная работа посвящена изучению свойств решений дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(f^t\sigma, x), \quad \sigma \in \Sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

где $F(\sigma, x)$ представляет собой компактное множество в $\mathbb{R}^n$, а Σ — компактное метрическое пространство, минимальное относительно потока f^t. В работах [1, 3–6, 9–12] рассматривались системы ...

Следует отметить, что пока отсутствует «принцип плотности» для рекуррентных решений.

Рассматриваемая здесь система уравнений с последействием порождает полупоток на некотором банаховом пространстве функций. Это обстоятельство впервые отметил Н. Н. Красовский [1, глава 3].

§ 1. Основные обозначения и определения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n, и пусть $|x| = \sqrt{x^*x}$ — норма в $\mathbb{R}^n$ ....

Рассмотрим систему уравнений с последействием, то есть систему

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty). \tag{1.1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке конкурсного центра Минобразования России (гранты Е06–1.0–5, Е07–1.0–100) и РФФИ (грант 06–01–00014).

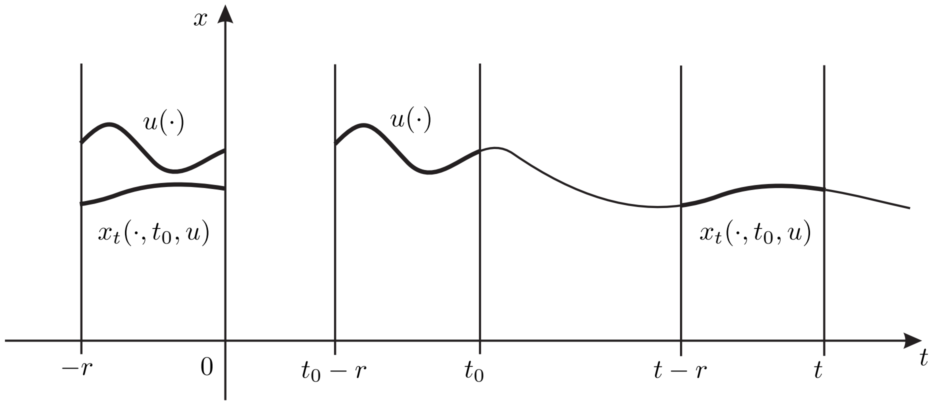

Рис. 1. Движение, порожденное решением системы (1.1)

В дальнейшем систему (1.1) будем отождествлять ....

$$\dot{y}(t) = \int_{-r}^{0} dB(t,s)y(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty). \tag{1.2}$$

Замечание 1. Н. Н. Красовский предлагает [1, с. 131] характеризовать асимптотическое поведение системы $\dot{y}(t) = \int_{-r}^{0} dB(t,s)y(t+s)$ ....

§ 2. Инвариантные и вполне регулярные множества

Определение 1 (см. [9], [10, с. 110]). Подмножество $\mathfrak{X}_0$ будем называть *регулярным* относительно системы (1.2), введенной в § 1 .....

Лемма 1 (см. [15, с. 123]). *Пусть $\mathfrak{X}_0$ — фиксированное конечномерное линейное подпространство* ....

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что .... □

§ 3. Теорема о приводимости

Мы предполагаем (см. рис. 1), что *множество попарно различных показателей Ляпунова системы A не более чем счетно и их можно упорядочить в порядке убывания.* Расположим функции $u^1, \dots, u^p$, образующие базис [2] в порядке возрастания ....

Теорема 1 (о триангуляции). *Если $\mathbb{S}^p$ вполне регулярно, то:*

а) *найдутся система B (с ограниченной на $\mathbb{R}_+$ матрицей $B(t)$) и ляпуновское преобразование, приводящее $(A, \mathbb{S}^p)$ к B;*

б) *в множестве $\{B\}$ всех систем, кинематически подобных $(A, \mathbb{S}^p)$, найдется система с непрерывной и ограниченной верхней треугольной матрицей $B(t)$.*

§ 4. Доказательство теоремы 1

1. Еще раз поясним смысл некоторых обозначений. Зафиксируем в подпространстве ....

2. Выберем пока произвольную непрерывную функцию ....

3. Построим теперь функцию $t \to \widetilde{B}(t)$ так, ...

Далее, из равенства $\widehat{Y}(t,0) = V(t)$ следует неравенство

$$\widehat{Y}(t,0)| \leqslant \alpha|V(t)Z(t)| = \ldots = \alpha|Z(t)| \leqslant \alpha\sqrt{r}\,\|U_t\|_{\mathbb{R}^p \to \mathfrak{S}}, \tag{4.1}$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия предположения* 1. *Тогда* ...

---

[2] При каждом t запись $\dot{L}(t)$ означает ....

Лемма 2. *Пусть ....*

Предложение 1. *Пусть ....*

Утверждение 1. *Пусть ....*

Следствие 1. *Пусть ....*

Гипотеза 1. *Теорема* 2 *верна.*

Определение 2. Множество A называется *регулярным*, если ....

Замечание 2. Заметим, что ....

Пример 1. Рассмотрим пример ....

Предположение 1. Функции $\xi_i(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора.

Условие 1. Начальные позиции участников таковы, что .....

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 550 с.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
3. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. 576 с.
4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1966. 608 с.
6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 10-е изд. М.: Наука, 1990. 624 с.
7. Филиппова Т.Ф. Задачи о выживаемости для дифференциальных включений: дис. … д-ра физ.-матем. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1992. 266 с.
8. Попова С.Н. Управление асимптотическими инвариантами линейных систем: автореф. дис. … д-ра физ.-матем. наук. Екатеринбург, 2004. 34 с.
9. Stokes A. A Floquet theory for functional-differential equations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1962. Vol. 48. № 8. P. 1330–1334.
10. Шиманов С.Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 1. С. 102–116.
11. Чернов А.В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
12. Данилов Л.И. О почти периодических сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 34–41.
13. Дерр В.Я. Об одном обобщении интеграла Римана–Стилтьеса // Известия Института математики и информатики УдГУ. 1997. Вып. 3 (11). С. 3–29.
14. Данилов Л.И. О почти периодических по Вейлю сечениях многозначных отображений / УдГУ. Ижевск, 2004. 104 с. Деп. в ВИНИТИ 09.06.2004, № 981-В2004.
15. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Почти инвариантные множества управляемых систем // Дифференциальные уравнения и топология: тез. докл. Междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. МГУ. М., 2008. С. 392–393.
16. Борисов А.В., Мамаев И.С., Болсинов А.В. Топология и устойчивость динамических систем // Регулярная и хаотическая динамика: тез. докл. Всероссийской конференции. УдГУ. Ижевск, 2010. С. 11.

17. Зайцев В.А. Достижимость и ляпуновская приводимость линейных управляемых систем // Оптимизация, управление, интеллект: сб. статей. ИДСТУ СО РАН. Иркутск, 2005. № 2 (10). С. 76–84.
18. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25. http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf
19. Банников А.С., Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.
20. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 185–201.
21. Büttiker M., Imry Y., Landauer R., Pinhas S. Generalizet many-channel conductance formula with application to small rings // Phys. Rev. B. 1985. Vol. 31. № 10. P. 6207–6215.
22. Miroshnichenko A.E., Kivshar Y.S. Engineering Fano resonances in discrete arrays // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. № 5. 056611 (7 p).
23. Ptitsyna N., Shipman S.P. A lattice model for resonance in open periodic wavequides // arXiv: 1101.0170v1 [math-ph]. 2010. http://arxiv.org/pdf/1101.0170.pdf
24. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 360 с.
25. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шрёдингера. М.: Изд-во Московского университета, 1983. 392 с.

Поступила в редакцию 01.02.2015

Иванов Петр Сидорович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: psi@usu.mat.com

Петров Юрий Владимирович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: petrov@list.ru

P. S. Ivanov, Yu. V. Petrov

Consistency and control over eigenvalue spectrum

Keywords: linear systems with delay, reducibility, Lyapunov exponents, Lyapunov invariants.

MSC: 34D08, 93C15

We consider the discrete Schrödinger operator on a perturbed by the decreasing potential graph with vertices at the two intersecting lines. We investigate spectral properties of this operator and the scattering problem for the above operator in the case of a small potential and also in the case when both a potential and velocity of a quantum particle are small. Asymptotic formulas for the probabilities of the particle propagation in all possible directions are obtained. In addition, we investigate the spectral properties of the discrete Schrödinger operator for the infinite band with zero boundary conditions. The scattering pattern is described. Simple formulas for transmission and reflection coefficients near boundary points of the subbands (this corresponds to small velocities of quantum particles) for small potentials are obtained. We consider a one-particle discrete Schrödinger operator with a periodic potential perturbed by a function which is periodic in two variables and exponentially decreases in third variable. In the paper, we also investigate the scattering problem for this operator near the extreme point of the eigenvalue of the periodic Schrödinger operator in the cell with respect to the third component of the quasimomentum, i.e. for the small perpendicular component of the angle of incidence of a particle on the potential barrier. Simple formulas of the propagation and reflection probabilities are obtained.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya* (Some problems of the theory of stability of motion), Moscow: Fizmatgiz, 1959, 550 p.

2. Kalman R., Falb P., Arbib M. *Topics in mathematical system theory*, New York: McGraw-Hill, 1969, 358 p. Translated under the title *Ocherki po matematicheskoi teorii sistem*, Moscow: Editorial URSS, 2004, 400 p.
3. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problem of stability), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.
4. Daletsky Y., Krein M.G. *Stability of solutions of differential equations in Banach spaces*, Ann. Math. Soc. Transl., vol. 43, Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1974, 386 p. Original Russian text published in Daletskii Yu.L., Krein M.G. *Ustoichivost' reshenii differentsial'nykh uravnenii v banakhovom prostranstve*, Moscow: Nauka, 1970, 536 p.
5. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* (A course of differential and integral calculus), vol. 1, Moscow: Nauka, 1966, 608 p.
6. Demidovich B.P. *Sbornik zadach i uprazhnenii po matematicheskomu analizu* (A collection of problems and exercises in mathematical analysis), Moscow: Nauka, 1990, 624 p.
7. Filippova T.F. Problems of viability for differential inclusions, *Dr. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Yekaterinburg, 1992, 266 p (in Russian).
8. Popova S.N. Control over asymptotic invariants of linear systems, *Abstract of Dr. Sci. (Phys.– Math.) Dissertation*, Yekaterinburg, 2004, 34 p (in Russian).
9. Stokes A. A Floquet theory for functional-differential equations, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1962, vol. 48, no. 8, pp. 1330–1334.
10. Shimanov S.N. To the theory of the linear differential equations with aftereffect, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 1, pp. 102–116 (in Russian).
11. Chernov A.V. A majorant criterion for the total preservation of global solvability of controlled functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 3, pp. 85–95. DOI: 10.3103/S1066369X11030108.
12. Danilov L.I. On almost periodic selections of multivalued maps, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2008, no. 2, pp. 34–41 (in Russian).
13. Derr V.Ya. On a generalization of Riemann–Stieltjes integral, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 1997, no. 3 (11), pp. 3–29 (in Russian).
14. Danilov L.I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps, UdSU, Izhevsk, 2004, 104 p. Deposited in VINITI 09.06.2004, no. 981-B2004 (in Russian).
15. Rodina L.I., Tonkov E.L. The almost invariant sets of controlled systems, *Differential Equation and Topology: Abstracts of Int. Conf. Dedicated to the Centennial Anniversary of Lev Semenovich Pontryagin*, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2008, pp. 392–393 (in Russian).
16. Borisov A.V., Mamaev I.S., Bolsinov A.V. Topology and stability of dynamic systems, *Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika: tez. dokl. Vserossiiskoi konferentsii* (Regular and chaotic dynamics: abstracts of All-Russian conference), Udmurt State University, Izhevsk, 2010, p. 11 (in Russian).
17. Zaitsev V.A. Attainability and Lyapunov reducibility of linear control systems, *Optimizatsiya, upravlenie, intellekt: sbornik statei* (Optimization, control, intelligence: Transactions), Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 2005, no. 2 (10), pp. 76–84 (in Russian).
18. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight, *Topology Proceedings*, 1980, vol. 5, pp. 11–25. http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf
19. Bannikov A.S., Petrov N.N. On non-stationary problem of group pursuit with phase restrictions, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 1, pp. 40–51 (in Russian).
20. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Extension of E.A. Barbashin's and N.N. Krasovskii's stability theorems to controlled dynamical systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 204–221.
21. Büttiker M., Imry Y., Landauer R., Pinhas S. Generalizet many-channel conductance formula with application to small rings, *Phys. Rev. B.*, 1985, vol. 31, no. 10, pp. 6207–6215.
22. Miroshnichenko A.E., Kivshar Y.S. Engineering Fano resonances in discrete arrays, *Phys. Rev. E.*, 2005, vol. 72, no. 5, 056611 (7 p).
23. Ptitsyna N., Shipman S.P. A lattice model for resonance in open periodic wavequides, 2010, arXiv: 1101.0170v1 [math-ph]. http://arxiv.org/pdf/1101.0170.pdf
24. Reed M., Simon B. *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. I. Funktsionalnyi analiz* (Methods of modern mathematical physics, Vol. I: Functional analysis), Moscow: Mir, 1977, 360 p.
25. Berezin F.A., Schubin M.A. *Uravnenie Shredingera* (Schrödinger equation), Moscow: Moscow State University, 1983, 392 p.

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 1

Received 01.02.2015

Ivanov Petr Sidorovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: psi@usu.mat.com

Petrov Yurii Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: petrov@list.ru