MSC: 34D08, 93C15

© ***P. S. Ivanov, Yu. V. Petrov***

CONSISTENCY AND CONTROL OVER EIGENVALUE SPECTRUM [1]

We consider the discrete Schrödinger operator on a perturbed by the decreasing potential graph with vertices at the two intersecting lines. We investigate spectral properties of this operator and the scattering problem for the above operator in the case of a small potential and also in the case when both a potential and velocity of a quantum particle are small. Asymptotic formulas for the probabilities of the particle propagation in all possible directions are obtained. In addition, we investigate the spectral properties of the discrete Schrödinger operator for the infinite band with zero boundary conditions. The scattering pattern is described. Simple formulas for transmission and reflection coefficients near boundary points of the subbands (this corresponds to small velocities of quantum particles) for small potentials are obtained. We consider a one-particle discrete Schrödinger operator with a periodic potential perturbed by a function which is periodic in two variables and exponentially decreases in third variable. In the paper, we also investigate the scattering problem for this operator near the extreme point of the eigenvalue of the periodic Schrödinger operator in the cell with respect to the third component of the quasimomentum, i.e. for the small perpendicular component of the angle of incidence of a particle on the potential barrier. Simple formulas of the propagation and reflection probabilities are obtained.

Keywords: linear systems with delay, reducibility, Lyapunov exponents, Lyapunov invariants.

Introduction

We consider a differential inclusion

$$\dot{x} \in F(f^t\sigma, x), \quad \sigma \in \Sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

where $F(\sigma, x)$ is a compact set in $\mathbb{R}^n$ and Σ is a compact metric space. System (0.1) generates the topological flow ... as it was noted by N. N. Krasovskii [1, Chapter 3]. The works [2–4, 6–9] are ...

§ 1. Notations and definitions

Let $\mathbb{R}^n$ be an n-dimensional Euclidean space and ....
Consider the system

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty). \tag{1.1}$$

We identify system (1.1) with ....

$$\dot{y}(t) = \int_{-r}^{0} dB(t,s)y(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty). \tag{1.2}$$

Remark 1. We note that system $\dot{y}(t) = \displaystyle\int_{-r}^{0} dB(t,s)y(t+s)$ is ....

[1] The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 06–01–00258 and 09–01–403).

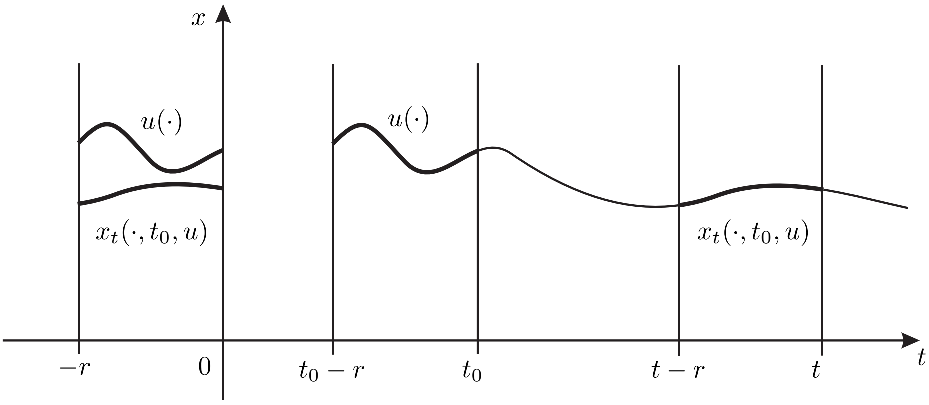

Fig 1. Motion generated by solution of equation (1.1)

§ 2. Invariants sets

Definition 1 (see [5], [7, p. 110]). We say that $\mathfrak{X}_0$ is *regular* if ...

Lemma 1 (see [10, p. 123]). *Let* $\mathfrak{X}_0$ *be the* ....

P r o o f. We show that .... see section 1 ..... □

§ 3. Reducibility theorem

Theorem 1 (about triangulation). *If* $\mathbb{S}^p$ *is completely regular then:*
a) *there exists a system* B *and Lyapunov transformation* $x = L(t)y$ *such that* ...;
b) *in the set* $\{B\}$ *of all systems kinematically similar to the system* $(A, \mathbb{S}^p)$ *there exists a system* $\dot{y} = C(t)y$ *such that* ...

§ 4. Proof of theorem 1

1. We fix some basis in the space ....
2. Take a continuous function ....
3. We construct the function $t \to \widetilde{B}(t)$ so that ....
Then we have

$$\widehat{Y}(t,0)| \leqslant \alpha|V(t)Z(t)| = \ldots = \alpha|Z(t)| \leqslant \alpha\sqrt{r}\,\|U_t\|_{\mathbb{R}^p \to \mathfrak{S}}, \qquad (4.1)$$

...Thus, the formula is true. Q.E.D. □

Theorem 2. *Let* X *be Banach space. Then* ...

Lemma 2. *Suppose that.......*

Proposition 1. *Let ....*

Corollary 1. *For any continuous map ... there exist a .....*

Hypothesis 1. *Theorem* 2 *is true.*

Definition 2. A group is called *abelian* if

Remark 2. Note that ....

Example 1. Consider the set of all points ... such that ....

Assumption 1. Suppose the function $\xi_i(t)$ is periodic.

Condition 1. The function $f(x)$ is nonnegative .....

MATHEMATICS 2015. Vol. 25. No. 1

REFERENCES

1. Kalman R., Falb P., Arbib M. *Topics in mathematical system theory*, New York: McGraw-Hill, 1969.
2. Stokes A. A Floquet theory for functional-differential equations, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1962, vol. 48, no. 8, pp. 1330–1334.
3. Büttiker M., Imry Y., Landauer R., Pinhas S. Generalizet many-channel conductance formula with application to small rings, *Phys. Rev. B.*, 1985, vol. 31, no. 10, pp. 6207–6215.
4. Miroshnichenko A.E., Kivshar Y.S. Engineering Fano resonances in discrete arrays, *Phys. Rev. E.*, 2005, vol. 72, no. 5, 056611 (7 p).
5. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight, *Topology Proceedings*, 1980, vol. 5, pp. 11–25. http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf
6. Ptitsyna N., Shipman S.P. A lattice model for resonance in open periodic wavequides, 2010, arXiv: 1101.0170v1 [math-ph]. http://arxiv.org/pdf/1101.0170.pdf
7. Brockett R. On the control of Liouville equations, *Differential Equation and Topology: Abstracts of International Conference Dedicated to the Centennial Anniversary of Lev Semenovich Pontryagin*, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2008, p. 7.
8. Danilov L.I. On almost periodic selections of multivalued maps, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2008, no. 2, pp. 34–41 (in Russian).
9. Filippova T.F. Problems of viability for differential inclusions, *Dr. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Yekaterinburg, 1992, 266 p (in Russian).
10. Popova S.N. Control over asymptotic invariants of linear systems, *Abstract of Dr. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Yekaterinburg, 2004, 34 p (in Russian).

Received 01.02.2015

Ivanov Petr Sidorovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: psi@usu.mat.com

Petrov Yurii Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: petrov@list.ru

П. С. Иванов, Ю. В. Петров

Согласованность и управление спектром собственных значений

Ключевые слова: линейные системы с последействием, приводимость, показатели Ляпунова, ляпуновские инварианты.

УДК 517.917

Рассматривается дискретный оператор Шрёдингера на графе с вершинами на двух пересекающихся прямых, возмущенный убывающим потенциалом. Исследуются спектральные свойства этого оператора. Исследуется задача рассеяния для данного оператора в случае малого потенциала, а также в случае, когда малы как потенциал, так и скорость квантовой частицы. Получены асимптотические формулы для вероятностей распространения частицы во всех возможных направлениях. Кроме того, исследуются спектральные свойства дискретного оператора Шрёдингера для бесконечной полосы с нулевыми граничными условиями. Описана картина рассеяния. Получены простые формулы для вероятностей прохождения и отражения вблизи граничных точек подзон (это отвечает малым скоростям квантовой частицы) в случае малых потенциалов. Рассматривается одночастичный дискретный оператор Шрёдингера с периодическим потенциалом, возмущенным функцией, периодической по двум переменным и экспоненциально убывающей по третьей. Исследуется задача рассеяния для данного оператора вблизи точки экстремума по третьей координате квазиимпульса некоторого собственного значения оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом в ячейке, то есть для малой перпендикулярной составляющей угла падения частицы на потенциальный барьер. Получены простые формулы для вероятностей прохождения и отражения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalman R., Falb P., Arbib M. Topics in mathematical system theory. New York: McGraw-Hill, 1969.
2. Stokes A. A Floquet theory for functional-differential equations // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1962. Vol. 48. № 8. P. 1330–1334.
3. Büttiker M., Imry Y., Landauer R., Pinhas S. Generalizet many-channel conductance formula with application to small rings // Phys. Rev. B. 1985. Vol. 31. № 10. P. 6207–6215.
4. Miroshnichenko A.E., Kivshar Y.S. Engineering Fano resonances in discrete arrays // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. № 5. 056611 (7 p).
5. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25. http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf
6. Ptitsyna N., Shipman S.P. A lattice model for resonance in open periodic wavequides // arXiv: 1101.0170v1 [math-ph]. 2010. http://arxiv.org/pdf/1101.0170.pdf
7. Brockett R. On the control of Liouville equations // Differential Equation and Topology: Abstracts of International Conference Dedicated to the Centennial Anniversary of Lev Semenovich Pontryagin. Lomonosov Moscow State University. Moscow, 2008. P. 7.
8. Данилов Л.И. О почти периодических сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 34–41.
9. Филиппова Т.Ф. Задачи о выживаемости для дифференциальных включений: дис. … д-ра физ.-матем. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1992. 266 с.
10. Попова С.Н. Управление асимптотическими инвариантами линейных систем: автореф. дис. … д-ра физ.-матем. наук. Екатеринбург, 2004. 34 с.

Поступила в редакцию 01.02.2015

Иванов Петр Сидорович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: psi@usu.mat.com

Петров Юрий Владимирович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: petrov@list.ru