МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 1

УДК 517.917

© *П. С. Иванов*

ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Для линейной системы с последействием изучаются конечномерные подпространства решений, задаваемые конечным набором конечных показателей Ляпунова конечной кратности.

Ключевые слова: линейные системы с последействием, приводимость, показатели Ляпунова, ляпуновские инварианты.

Введение

Данная работа посвящена изучению свойств решений дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(f^t\sigma, x), \quad \sigma \in \Sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

где $F(\sigma, x)$ представляет собой компактное множество в $\mathbb{R}^n$, а Σ — компактное метрическое пространство, минимальное относительно потока f^t.

Следует отметить, что пока отсутствует «принцип плотности» для рекуррентных решений.

Рассматриваемая здесь система уравнений с последействием порождает полупоток на некотором банаховом пространстве функций. Это обстоятельство впервые отметил Н. Н. Красовский [1, глава 3].

§ 1. Основные обозначения и определения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n, и пусть $|x| = \sqrt{x^*x}$ — норма в $\mathbb{R}^n$ ....

Рассмотрим систему уравнений с последействием, то есть систему

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} dA(t,s)x(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty). \tag{1.1}$$

В дальнейшем систему (1.1) будем отождествлять ....

$$\dot{y}(t) = \int_{-r}^{0} dB(t,s)y(t+s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty). \tag{1.2}$$

Замечание 1. А. Д. Мышкис предлагает [2, с. 131] характеризовать асимптотическое поведение системы $\dot{y}(t) = \int_{-r}^{0} dB(t,s)y(t+s)$ ....

§ 2. Инвариантные и вполне регулярные множества

Определение 1 (см. [9], [10, с. 110]). Подмножество $\mathfrak{X}_0$ будем называть *регулярным* относительно системы (1.2), введенной в § 1 .....

Лемма 1 (см. [2, с. 123]). *Пусть $\mathfrak{X}_0$ — фиксированное конечномерное линейное подпространство ....*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что .... □

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 1

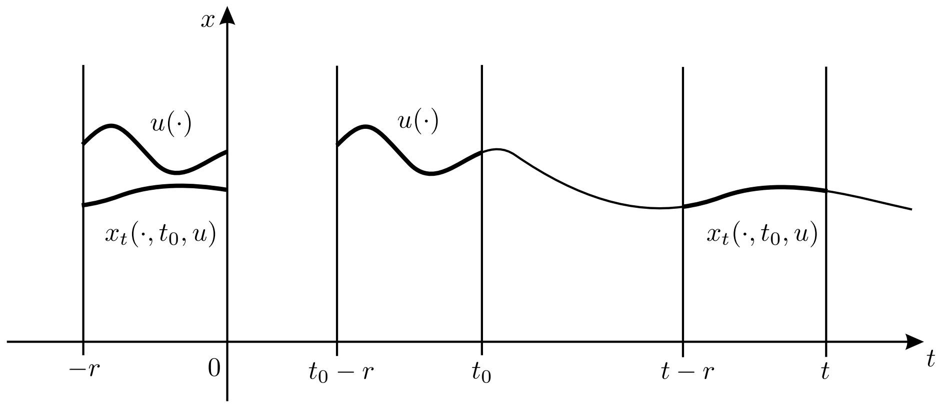

Рис. 1. Движение, порожденное решением системы (1.1)

§ 3. Теорема о приводимости

Мы предполагаем (см. рис. 1), что *множество попарно различных показателей Ляпунова системы* A *не более чем счетно и их можно упорядочить в порядке убывания.* Расположим функции $u^1, \dots, u^p$, образующие базис [2] в порядке возрастания ....

Теорема 1 (о триангуляции). *Если* $\mathbb{S}^p$ *вполне регулярно, то:*

а) *найдутся система* B *(с ограниченной на* $\mathbb{R}_+$ *матрицей* $B(t)$ *) и ляпуновское преобразование, приводящее* $(A, \mathbb{S}^p)$ *к* B;

б) *в множестве* $\{B\}$ *всех систем, кинематически подобных* $(A, \mathbb{S}^p)$, *найдется система с непрерывной и ограниченной верхней треугольной матрицей* $B(t)$.

§ 4. Доказательство теоремы 1

1. Еще раз поясним смысл некоторых обозначений. Зафиксируем в подпространстве ....

2. Выберем пока произвольную непрерывную функцию ....

3. Построим теперь функцию $t \to \widetilde{B}(t)$ так, ...

Далее, из равенства $\widehat{Y}(t, 0) = V(t)$ следует неравенство

$$\widehat{Y}(t, 0)| \leqslant \alpha |V(t) Z(t)| = \ldots = \alpha |Z(t)| \leqslant \alpha \sqrt{r}\, \|U_t\|_{\mathbb{R}^p \to \mathfrak{S}}, \tag{4.1}$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия предположения* 1. *Тогда ...*

Лемма 2. *Пусть ....*

Предложение 1. *Пусть ....*

Утверждение 1. *Пусть ....*

Следствие 1. *Пусть ....*

Гипотеза 1. *Теорема* 2 *верна.*

Определение 2. Множество A называется *регулярным*, если ....

Замечание 2. Заметим, что ....

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке конкурсного центра Минобразования России (гранты Е06–1.0-5, Е07–1.0-100) и РФФИ (грант 06–01–00014).

[2]При каждом t запись $\dot{L}(t)$ означает ....

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 1

Пример 1. Рассмотрим пример ....

Предположение 1. Функции $\xi_i(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора.

Условие 1. Начальные позиции участников таковы, что .....

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. — 550 с.
2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. — 500 с.
3. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. — 400 с.
4. Теория показателей Ляпунова / Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1: учеб. для вузов. — 6-е изд. — М.: Наука, 1966. — 608 с.
6. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов. — 10-е изд. — М.: Наука, 1990. — 624 с.
7. Филиппова Т. Ф. Задачи о выживаемости для дифференциальных включений: дис. ...д-ра физ.-матем. наук / ИММ УрО РАН. — Екатеринбург, 1992. — 266 с.
8. Попова С. Н. Управление асимптотическими инвариантами линейных систем: автореф. дис. д-ра физ.-матем. наук. — Екатеринбург, 2004. — 34 с.
9. Stokes A. A Floquet theory for functional-differential equations // Proc. Nat. Ac. of Sci. — 1962. — Vol. 48, № 8. — P. 1330–1334.
10. Шиманов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференциальные уравнения. — 1965. — Т. 1, № 1. — С. 102–116.
11. Данилов Л. И. О почти периодических сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. — 2008. — Вып. 2. — С. 34–41.
12. Дерр В. Я. Об одном обобщении интеграла Римана–Стилтьеса // Известия Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 1997. — Вып. 3 (11). — С. 3–29.
13. Зайцев В. А., Макаров Е. К., Попова С. Н., Тонков Е. Л. Задачи управления инвариантами А. М. Ляпунова // Известия Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 2006. — Вып. 3 (37). — С. 43–48.
14. Данилов Л. И. О почти периодических по Вейлю сечениях многозначных отображений / УдГУ. — Ижевск, 2004. — 104 с. — Деп. в ВИНИТИ 09.06.2004, № 981-В2004.
15. Ченцов А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Об одном обобщении задачи курьера // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: Сб. Екатеринбург: УрО РАН. 2004. — Вып. 8. — С. 178–235.
16. Незнахин А. А., Ушаков В. Н. Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Распределенные системы: оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде: Сб. докл. Междунар. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. — С. 156–158.
17. Белоусов В. А., Калядин Н. И., Липовецкий Ю. М. Классификация текстур методом коллективного голосования // Методы и средства обработки сложноструктурированной семантической насыщенной графической информации: Тез. докл. I Всесоюз. конф. Горький, 1983. — С. 145–146.
18. Алфимов М. В., Либкинд А. Н., Либкинд И. А., Минин В. А. Информационные потоки в РФФИ: Новый подход к цитированию. `http://intra.rfbr.ru/pub/vestnik/V4_01/1_1.htm`

Поступила в редакцию 01.09.08

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 1

P. S. Ivanov

Lyapunov exponents of linear system with delay

We study the finite-dimensional subspace of solutions defined by the finite numbers of finite Lyapunov exponents with finite multiplicity for systems with the aftereffect.

Keywords: linear systems with delay, reducibility, Lyapunov exponents, Lyapunov invariants.

Mathematical Subject Classifications: 34A30, 34D08

Иванов Петр Сидорович, д. ф.-м. н., профессор кафедры дифференциальных уравнений, Урюпинский государственный университет, 206001, Россия, г. Урюпинск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: psi@usu.mat.com