

УДК 517.933, 517.938

© *Е. М. Артемова, А. А. Килин, Ю. В. Коробейникова***ИССЛЕДОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КАЧЕНИЙ РОЛЛЕР-РЕЙСЕРА ПО ВИБРИРУЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ**

В данной работе исследуется задача о качении роллер-рейсера по колеблющейся плоскости. Получены уравнения движения роллер-рейсера в виде системы четырех неавтономных дифференциальных уравнений. Указаны два семейства частных решений, которые соответствуют прямолинейным движениям роллер-рейсера вдоль и перпендикулярно колебаниям плоскости. Приведены численные оценки мультипликаторов решений, соответствующих движению робота вдоль колебаний. Также указан частный случай, в котором удается получить аналитические выражения мультипликаторов. В этом случае показано, что в линейном приближении движение вдоль колебаний «свернутого» роллер-рейсера орбитально устойчиво при движении шарниром вперед, а все остальные движения неустойчивы. Показано, что в линейном приближении семейство, соответствующее движению робота, перпендикулярно колебаниям плоскости — неустойчиво.

Ключевые слова: роллер-рейсер, неавтономные связи, вибрирующая плоскость, матрица монодромии, орбитальная устойчивость.

DOI: [10.35634/vm220408](https://doi.org/10.35634/vm220408)**Введение**

Данная статья посвящена исследованию частных решений в задаче о качении колесного робота типа роллер-рейсера по подвижной плоскости. Интерес к этой задаче в первую очередь обусловлен возможной реализацией таких решений на практике при движении колесных роботов в нестационарных внешних условиях.

Здесь мы ограничимся рассмотрением наиболее простой неавтономной моделью качения без проскальзывания. Применение этой модели позволяет избавиться от степеней свободы связанных с вращением колес и сконцентрироваться на описании динамики самого робота.

Наиболее простой и хорошо изученной моделью, описывающей движение двухколесного робота, является неавтономная модель саней Чаплыгина [1, 2]. Динамика саней Чаплыгина под действием периодических внешних сил или с периодически меняющимися параметрами исследовалась в ряде работ. Например, в [3, 4] исследуется динамика саней с периодически изменяющимся распределением масс. В частности, в [3] показано, что малые периодические изменения распределения масс могут приводить к неограниченному разгону саней. Задача о движении саней при периодических переключениях неавтономных связей рассмотрена в [5].

Более сложными колесными роботами являются двухзвенные транспортные средства, состоящие из двух платформ с жестко закрепленными на них колесными парами, соединенных шарниром. Наиболее общую несимметричную конструкцию такого типа обычно называют роллер-рейсером. Свободная и управляемая динамика роллер-рейсера была рассмотрена, например, в работах [6–8]. Движение роллер-рейсера, у которого точка закрепления колесной пары совпадает с точкой сцепки платформ, при периодически движущихся точечных массах на ведущей платформе рассмотрено в работе [9].

В данной работе мы рассмотрим динамику роллер-рейсера под действием внешних периодических сил. А именно, его движение по периодически колеблющейся горизонтальной плоскости. Подобные исследования движения на колеблющейся плоскости проводились для сферических роботов [10–12]. Например, в работе [11] были указаны частные решения при качении сфероробота по колеблющейся подложке, а также проанализирована их устойчивость.

Первый параграф данной работы посвящен выводу уравнений движения рассматриваемой системы. Во втором параграфе указаны частные решения, соответствующие качению роллер-рейсера вдоль и поперек колебаний плоскости. Проведен анализ орбитальной устойчивости этих решений с помощью оценки собственных значений матрицы монодромии линеаризованных (в окрестности частных решений) систем. Для частного решения, соответствующего движению вдоль направления колебаний плоскости, оценка собственных значений проведена численно (подобный подход использовался в работах [13, 14]). Также приведен частный случай, в котором значения мультипликаторов удается получить в явном виде [15].

§ 1. Уравнения движения

Рассмотрим свободное движение двухзвенного колесного робота по колеблющейся плоскости. Будем считать, что робот состоит из двух платформ (звеньев), которые соединены шарниром. К каждой платформе прикреплены неподвижные колесные пары. Под колесной парой мы будем понимать два колеса, независимо (и свободно) вращающихся на одной оси.

Относительно рассматриваемой системы примем следующие допущения:

- (1) при качении колесного экипажа отсутствует проскальзывание колес относительно плоскости;
- (2) звенья могут поворачиваться относительно точки закрепления (шарнира);
- (3) плоскость, по которой движется робот, совершает периодические горизонтальные колебания в заданном направлении;
- (4) у каждой платформы центр масс, точка крепления колесной пары и точка крепления платформ друг к другу находятся на одной прямой.

Для описания движения робота определим две системы координат (см. рис. 1):

- (1) Oxy — неподвижная система координат, ось Oy которой совпадает с направлением колебаний опорной плоскости;
- (2) Px_1x_2 — система координат, жестко связанная с первой тележкой, начало координат которой совпадает с точкой крепления платформ друг к другу (точка P на рис. 1), а ось Px_1 направлена вдоль вектора, соединяющего точку крепления платформ и центр масс платформы (точка C_1 на рис. 1).

Положение точки P относительно системы координат Oxy будем задавать с помощью радиус-вектора $\mathbf{r} = (x, y)$. Ориентацию первой платформы относительно Oxy будем определять с помощью угла ψ , а ориентацию второй платформы относительно первой — углом φ (см. рис. 1). Таким образом, конфигурационное пространство представляет собой

$$\mathcal{N} = \{\mathbf{q} = (x, y, \psi, \varphi) | \psi, \varphi \bmod 2\pi\} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2.$$

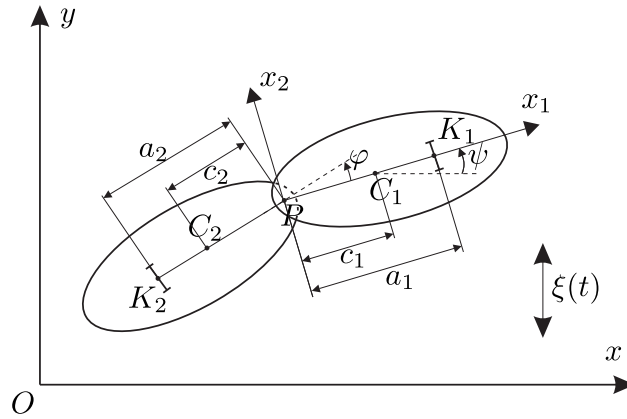


Рис. 1. Схематическое изображение колесного робота

Для описания движения робота перейдем от обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}\}$ к квазискоростям $\mathbf{w} = (v_1, v_2, \omega_1, \omega_2)$, где $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ — скорость точки P , записанная в проекциях на оси подвижной системы координат Px_1x_2 ¹, а ω_1 и ω_2 — угловые скорости каждой из платформ. Обобщенные скорости $\dot{\mathbf{q}}$ связаны с квазискоростями \mathbf{w} следующим образом:

$$\dot{x} = v_1 \cos \psi - v_2 \sin \psi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \psi + v_2 \cos \psi, \quad \dot{\psi} = \omega_1, \quad \dot{\varphi} = \omega_2 - \omega_1. \quad (1.1)$$

Энергия системы и неголономные связи. Кинетическая энергия рассматриваемой системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}i_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 + \frac{1}{2}i_2\omega_2^2, \quad (1.2)$$

где m_k — масса k -й платформы ($k = 1, 2$), i_k — момент инерции k -й платформы относительно ее центра масс ($k = 1, 2$), а $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12})$ и $\mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22})$ — скорости центров масс первой и второй платформ соответственно. Эти скорости можно выразить через скорость точки P и угловые скорости платформ следующим образом (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} v_{11} &= v_1, & v_{12} &= v_2 + c_1\omega_1, \\ v_{21} &= v_1 \cos \varphi + v_2 \sin \varphi, & v_{22} &= -v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi - c_2\omega_2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где c_k — расстояние от точки закрепления до центра масс k -й платформы. Подставляя (1.3) в выражение (1.2), получим явный вид кинетической энергии в квазискоростях:

$$T = \frac{1}{2}M(v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + m_1c_1v_2\omega_1 + m_2c_2(v_1 \sin \varphi - v_2 \cos \varphi)\omega_2,$$

где $M = m_1 + m_2$, $I_k = i_k + m_k c_k^2$ — момент инерции k -й платформы относительно точки закрепления платформ.

Условие непроскальзывания колес накладывает на рассматриваемую систему две явно зависящие от времени неголономные связи:

$$\begin{aligned} f_1 &= v_2 + a_1\omega_1 - \dot{\xi}(t) \cos \psi = 0, \\ f_2 &= -v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi - a_2\omega_2 - \dot{\xi}(t) \cos(\psi + \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

¹Здесь и далее будем считать, что все векторы записаны в проекциях на оси подвижной системы координат Px_1x_2 , если не оговорено другое.

Здесь a_k — расстояние от точки закрепления до колесной пары k -й платформы, а $\xi(t)$ — функция, задающая периодические колебания плоскости. В случае если центр колесной пары и центр масс k -й платформы находятся по разные стороны от шарнира, a_k могут принимать отрицательные значения.

Замечание 1. Явный вид связей, описывающих условие непроскальзывания, зависит от угловых скоростей колес. Однако здесь мы рассматриваем только их комбинации, накладывающие ограничения на скорости тележки. При этом, как показано в [16], угловые скорости вращения колес могут быть восстановлены с помощью дополнительных квадратур.

Уравнения движения. Уравнения движения рассматриваемой системы в квазискоростях (уравнения Пуанкаре) с учетом неголономных ограничений имеют вид (см., например, [17])

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v_1} \right) - \omega_1 \frac{\partial T}{\partial v_2} &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial v_1}, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v_2} \right) + \omega_1 \frac{\partial T}{\partial v_1} &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial v_2}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right) + v_1 \frac{\partial T}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} + \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \omega_1}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \omega_2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где λ_1, λ_2 — неопределенные множители, которые находятся из совместного решения уравнений (1.5) и производных по времени от уравнений связей (1.4).

Выразим неопределенные множители λ_1, λ_2 из третьего и четвертого уравнений (1.5) и подставим их в первые два уравнения этой системы. Добавим к получившимся уравнениям производные связей (1.4) по времени. В результате получим следующую форму записи уравнений движения:

$$(\dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2)^T = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad (1.6)$$

где матрица \mathbf{A} и вектор \mathbf{b} имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{Ma_2 - m_2 c_2 \sin^2 \varphi}{a_2} & \frac{m_2 c_2 \sin \varphi \cos \varphi}{a_2} & 0 & -\frac{j_2 \sin \varphi}{a_2} \\ \frac{m_2 c_2 \sin \varphi \cos \varphi}{a_2} & \frac{a_2}{a_0} & -\frac{j_1}{a_1} & \frac{j_2 \cos \varphi}{a_2} \\ 0 & a_1 a_2 & a_1 & a_2 \\ -\sin \varphi & 1 & a_1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & 0 & -a_2 \end{pmatrix},$$

$$j_1 = I_1 - m_1 c_1 a_1, \quad j_2 = I_2 - m_2 c_2 a_2, \quad a_0 = Ma_1 a_2 - m_1 c_1 a_2 - m_2 c_2 a_1 \cos^2 \varphi,$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2} (m_1 c_1 a_2 \omega_1^2 + (Ma_2 - m_2 c_2 \sin^2 \varphi) v_2 \omega_1 - m_2 c_2 v_1 \omega_1 \sin \varphi \cos \varphi - m_2 c_2 a_2 \omega_2^2 \cos \varphi) \\ \frac{1}{a_1 a_2} (m_2 c_2 a_1 v_2 \omega_1 \sin \varphi \cos \varphi - a_0 v_1 \omega_1 - m_2 c_2 a_1 a_2 \omega_2^2 \sin \varphi) \\ \ddot{\xi}(t) \cos \psi - \dot{\xi} \omega_1 \sin \psi \\ \ddot{\xi}(t) \cos(\psi + \varphi) - \dot{\xi}(t) \omega_2 \sin(\psi + \varphi) - (\omega_1 - \omega_2)(v_1 \cos \varphi + v_2 \sin \varphi) \end{pmatrix}.$$

Уравнения (1.6) совместно с кинематическими соотношениями (1.1) образуют замкнутую систему уравнений и допускают (по построению) неавтономные интегралы движения f_1, f_2 , соответствующие связям (1.4). На нулевом уровне этих интегралов $f_1 = 0$,

$f_2 = 0$ уравнения (1.6), (1.1) описывают движение рассматриваемого колесного экипажа на колеблющейся по закону $\xi(t)$ плоскости.

Редуцированная система. Заметим, что уравнения для $v_1, v_2, \omega_1, \omega_2, \psi, \varphi$ отделяются от полной системы (1.6), (1.1). Проведем для этих уравнений процедуру редукции на нулевой уровень связей (1.4). Для этого выразим ω_1, ω_2 из уравнений связи и подставим в уравнения движения. Таким образом, перейдем к рассмотрению потока в 4-мерном фазовом пространстве $\mathcal{M}_4 = \{z = (v_1, v_2, \psi, \varphi)\} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$. В результате получим систему четырех неавтономных дифференциальных уравнений

$$(\dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{\psi}, \dot{\varphi})^T = \hat{\mathbf{A}}^{-1} \hat{\mathbf{b}}, \quad (1.7)$$

где матрица $\hat{\mathbf{A}}$ имеет следующий вид:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{Ma_2^2 - k_2 \sin^2 \varphi}{a_2^2} & \frac{k_2 \sin 2\varphi}{2a_2^2} & 0 & 0 \\ \frac{k_2 \sin 2\varphi}{2a_2^2} & \frac{Ma_1^2 a_2^2 - k_1 a_2^2 - k_2 a_1^2 \cos^2 \varphi}{a_1^2 a_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$k_1 = m_1 c_1 a_1 - j_1, \quad k_2 = m_2 c_2 a_2 - j_2,$$

а вектор \mathbf{b} может быть представлен в форме

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_2(v_1, v_2, \varphi) + \mathbf{b}_1(v_1, v_2, \dot{\xi}(t), \psi, \varphi) + \mathbf{b}_0(\ddot{\xi}(t), \dot{\xi}(t), \psi, \varphi),$$

где \mathbf{b}_k — векторы, компоненты которых являются однородными полиномами степени k по скоростям v_1, v_2 с коэффициентами достаточно громоздкого вида. Явные выражения для \mathbf{b}_k можно получить, подставив угловые скорости ω_1, ω_2 , выраженные из связей (1.4), в уравнения (1.6).

Рассмотрим далее частные решения полученной системы (1.7).

§ 2. Частные решения

Рассмотрим систему (1.7) при периодических колебаниях плоскости, которые задаются следующим законом:

$$\xi(t) = \varepsilon \sin \Omega t. \quad (2.1)$$

Здесь ε и Ω — амплитуда и частота колебаний соответственно. При колебаниях (2.1) уравнения (1.7) имеют два семейства частных решений, которые соответствуют прямолинейному движению рассматриваемого робота вдоль и поперек направления колебаний плоскости. Рассмотрим вопрос об орбитальной устойчивости каждого из семейств.

2.1. Движение вдоль направления колебаний плоскости. Семейство частных решений, соответствующих движению роллер-рейсера вдоль колебаний, задается следующим образом:

$$\sigma_{0,\pi}^{\parallel}: v_1 = v_0, \quad v_2 = 0, \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0, \pi, \quad (2.2)$$

где $v_0 = \text{const}$ — параметр семейства, угол $\varphi = 0$ соответствует «развернутому» роботу (см. рис. 2, а), а $\varphi = \pi$ — «свернутому» роботу, при этом исключается случай $a_1 = a_2$ (см. рис. 2, б).

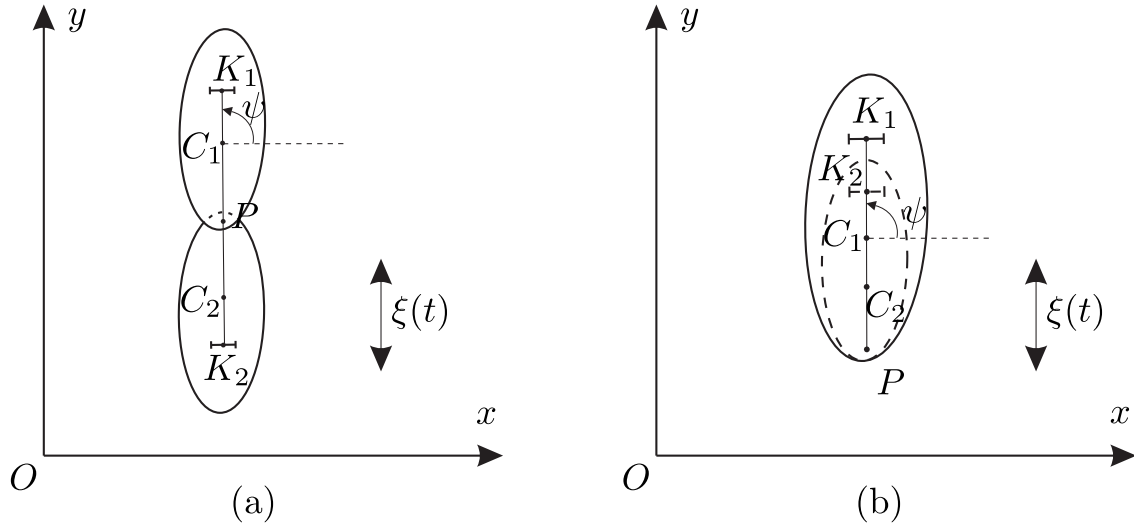


Рис. 2. Схематические изображения роллер-рейсера, соответствующие частным решениям (2.2)

Исследуем устойчивость решения σ_0^{\parallel} . Для этого линеаризуем уравнения (1.7) в окрестности этого решения. Уравнения для вектора отклонений от частного решения $\delta z = (\delta v_1, \delta v_2, \delta \psi, \delta \varphi)$ имеют вид:

$$\delta \dot{z} = \mathbf{J}_0^{\parallel} \delta z, \quad (2.3)$$

где матрица \mathbf{J}_0^{\parallel} — якобиан системы (1.7) на решении σ_0^{\parallel} , которая имеет вид

$$\mathbf{J}_0^{\parallel} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{j_{22}}{\Delta} & -\frac{\varepsilon \Omega j_{23}}{\Delta} & -\frac{j_2 a_1^3 j_{24}}{\Delta} \\ 0 & -\frac{1}{a_1} & -\frac{\varepsilon \Omega \cos(\Omega t)}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} & \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \varepsilon \Omega \cos(\Omega t) & -\frac{v_0 - \varepsilon \Omega \cos(\Omega t)}{a_2} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$j_{22} = -v_0 a_1 (a_2^3 c_1 m_1 - j_2 a_1^2 - a_1 a_2 (M a_2^2 - a_2 c_2 m_2 + j_2)) - \varepsilon \Omega (j_2 a_1^3 - a_2^3 j_1) \cos(\Omega t),$$

$$j_{23} = v_0 a_1 \cos(\Omega t) ((-M a_1 + c_1 m_1) a_2^3 + 2 m_2 a_1 c_2 a_2^2 + a_1 a_2 (a_2 c_2 m_2 - j_2) - j_2 a_1^2) + \varepsilon \Omega (j_2 a_1^3 - a_2^3 j_1) \cos^2(\Omega t) - a_1 a_2 (j_1 a_2^2 + j_2 a_1^2) \Omega \sin(\Omega t),$$

$$j_{24} = -\varepsilon \Omega^2 a_2 \sin(\Omega t) + (\varepsilon \Omega \cos(\Omega t) - v_0)^2,$$

$$\Delta = a_1 a_2 (a_1^2 (M a_2^2 - a_2 c_2 m_2 + j_2) - a_2^2 (a_1 c_1 m_1 - j_1)).$$

Матрица $\mathbf{J}_\pi^{\parallel}$ для семейства σ_π^{\parallel} при $\varphi = \pi$ получается из матрицы (2.4) с помощью следующего преобразования

$$\mathbf{J}_\pi^{\parallel} = \mathbf{J}_0^{\parallel} \Big|_{\substack{a_2 \rightarrow -a_2 \\ c_2 \rightarrow -c_2}}.$$

Это следует из наличия у системы (1.7) симметрии вида

$$\varphi \rightarrow \varphi + \pi, \quad c_2 \rightarrow -c_2, \quad a_2 \rightarrow -a_2.$$

Полученная матрица линеаризованной системы \mathbf{J}_0^{\parallel} ($\mathbf{J}_\pi^{\parallel}$) представляет собой матрицу с периодическими коэффициентами. В этом случае для анализа устойчивости системы (2.3)

необходимо построить матрицу монодромии, то есть найти решение матричной задачи Коши в момент времени $T = 2\pi/\Omega$:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}, \tag{2.5}$$

где \mathbf{E} — единичная матрица. Обозначим через μ_k ($k = 1, \dots, 4$) собственные значения матрицы монодромии $\mathbf{Q}(T)$, которые являются мультипликаторами системы (2.3). Решение $\delta z = 0$ линеаризованной системы (2.3) является (см., например, [18, с. 189]) устойчивым при $|\mu_k| \leq 1$, причем каждому мультипликатору $|\mu_k| = 1$ должна соответствовать жорданова клетка размером 1×1 .

В общем случае решение системы уравнений (2.5) не может быть найдено аналитически. Поэтому приведем результаты численной оценки мультипликаторов системы (2.3) в зависимости от амплитуды ε и частоты Ω колебаний.

Заметим, что одно из собственных чисел матрицы монодромии равно единице ($\mu_4 = 1$). Оно соответствует параметру семейства v_0 и характеризует линейную по времени неустойчивость при малом изменении скорости движения вдоль прямой. Однако такое возмущение не приводит к уходу от прямолинейного движения. Поэтому при исследовании орбитальной устойчивости его можно исключить из рассмотрения.

На рис. 3 приведены мультипликаторы решения σ_0^{\parallel} при $v_0 = -0.1$ и следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} I_1 = 0.0498, \quad I_2 = 0.0098, \quad a_1 = 0.19, \quad a_2 = 0.05, \quad c_1 = 0.1610, \quad c_2 = 0.0487, \\ m_1 = 0.61, \quad m_2 = 0.33. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Параметры (2.6) соответствуют экспериментальной модели роллер-рейсера, динамика которого изучалась в работе [19]. Из рис. 3 видно, что один из мультипликаторов больше единицы: $\mu_1 > 1$. Следовательно, при параметрах (2.6) движение вдоль направления колебаний развернутого роллер-рейсера неустойчиво. Заметим, что при движении роллер-рейсера с параметрами (2.6) в противоположную сторону, чему соответствует $v_0 = 0.1$, также существует мультипликатор, значение которого строго больше единицы. Таким образом, движение роллер-рейсера с параметрами (2.6) вдоль колебаний в развернутом положении неустойчиво.

На рис. 4 и 5 приведены мультипликаторы для решения σ_{π}^{\parallel} при параметрах (2.6), $v_0 = -0.1$ и $v_0 = 0.1$ соответственно. Из рис. 4 видно, что при $v_0 = -0.1$ мультипликаторы μ_1 и μ_2 меньше единицы, а значения μ_3 с точностью до ошибок численного счета равны единице. Из рис. 5 следует, что при $v_0 = 0.1$ и параметрах (2.6) значения μ_1 и μ_2 больше единицы, а значит решение неустойчиво.

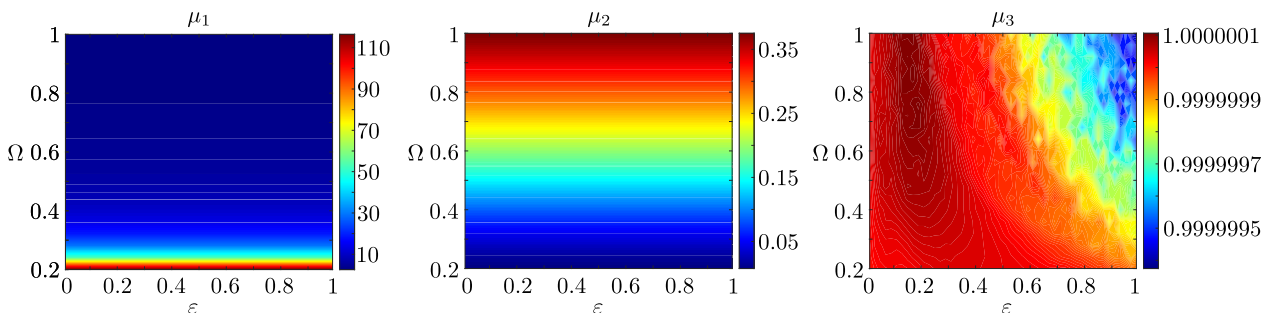


Рис. 3. Мультипликаторы решения σ_0^{\parallel} при $v_0 = -0.1$ и параметрах (2.6)

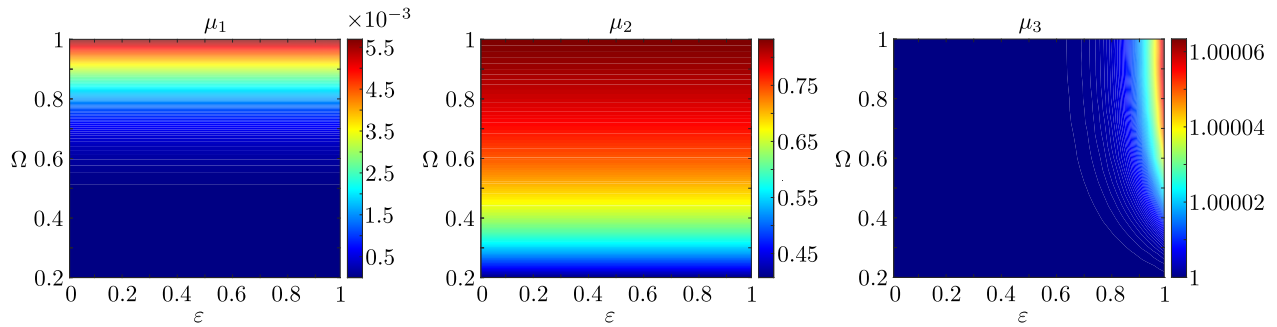


Рис. 4. Мультипликаторы решения σ_π^\parallel при $v_0 = -0.1$ и параметрах (2.6)

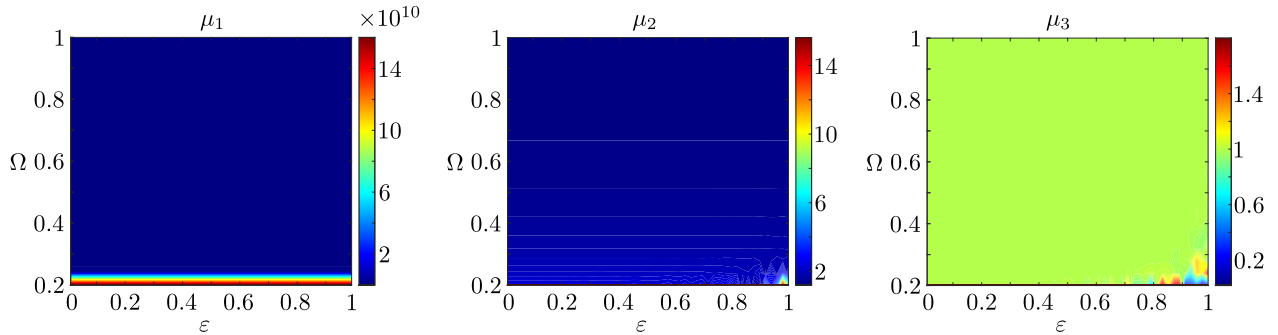


Рис. 5. Мультипликаторы решения σ_π^\parallel при $v_0 = 0.1$ и параметрах (2.6)

Таким образом, при параметрах робота, соответствующих реальному роллер-рейсеру [19], движение «развернутого» робота вдоль направления колебаний неустойчиво. В случае «свернутого» робота движение вдоль колебаний шарниром вперед устойчиво в рамках линейной модели и неустойчиво в обратном направлении. Однако, в силу существования единичного мультипликатора, из устойчивости в рамках линейной модели не следует устойчивость решения для полной системы. Доказательство устойчивости движения в рамках полной нелинейной модели требует дополнительного исследования.

Рассмотрим специальный случай, при котором возможно построить матрицу $\mathbf{Q}(T)$ в явном виде.

2.1.1 Случай $I_1 = m_1 c_1 a_1$, $I_2 = m_2 c_2 a_2$

Рассмотрим значения моментов инерции $I_1 = m_1 c_1 a_1$, $I_2 = m_2 c_2 a_2$. Из положительной определенности моментов инерции i_k следует, что в рассматриваемом случае должны выполняться неравенства $a_1 > c_1$, $a_2 > c_2$, то есть каждая колесная пара прикрепляется за центром масс платформы. Кроме того, оба значения a_k положительны. Заметим, что уравнения (1.7) при таких значениях I_1 , I_2 упрощаются и в них пропадает зависимость от ускорения $\ddot{\xi}$ плоскости.

Рассмотрим частные решения, соответствующие движению робота вдоль колебаний плоскости. При $I_1 = m_1 c_1 a_1$, $I_2 = m_2 c_2 a_2$ матрица линеаризации \mathbf{J}_0^\parallel упрощается и принимает вид

$$\mathbf{J}_0^\parallel = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_0}{a_1} & \frac{\varepsilon \Omega v_0}{a_1} \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_1} & -\frac{\varepsilon \Omega}{a_1} \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} & \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \varepsilon \Omega \cos(\Omega t) & -\frac{v_0 - \varepsilon \Omega \cos(\Omega t)}{a_2} \end{pmatrix}.$$

В этом случае решение матричной задачи Коши (2.5) может быть записано в виде

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - v_0 q_{32}(t) & v_0 - v_0 q_{33}(t) & 0 \\ 0 & q_{32}(t) & q_{33}(t) & 0 \\ 0 & q_{42}(t) & q_{43}(t) & e^{\frac{\varepsilon \sin(\Omega t) - v_0 t}{a_2}} \end{pmatrix},$$

где $q_{32}(t)$, $q_{42}(t)$, $q_{33}(t)$, $q_{43}(t)$ — интегралы следующего вида:

$$q_{32}(t) = -\frac{1}{a_1} e^{-\frac{\varepsilon \sin(\Omega t) - v_0 t}{a_1}} \int_0^t e^{\frac{\varepsilon \sin(\Omega \tau) - v_0 \tau}{a_1}} d\tau,$$

$$q_{42}(t) = \frac{1}{a_1 a_2} e^{\frac{\varepsilon \sin(\Omega t) - v_0 t}{a_2}} \int_0^t (a_1 + a_2)(1 + q_{32}(\tau) (\varepsilon \Omega \cos(\Omega \tau) - v_0)) e^{-\frac{\varepsilon \sin(\Omega \tau) - v_0 \tau}{a_1}} d\tau,$$

$$q_{33}(t) = -\frac{1}{a_1} e^{-\frac{\varepsilon \sin(\Omega t) - v_0 t}{a_1}} \left(v_0 \int_0^t e^{\frac{\varepsilon \sin(\Omega \tau) - v_0 \tau}{a_1}} d\tau - a_1 \right),$$

$$q_{43}(t) = \frac{1}{a_1 a_2} e^{\frac{\varepsilon \sin(\Omega t) - v_0 t}{a_2}} \int_0^t (a_1 + a_2)(v_0 + q_{33}(\tau) (\varepsilon \Omega \cos(\Omega \tau) - v_0)) e^{-\frac{\varepsilon \sin(\Omega \tau) - v_0 \tau}{a_1}} d\tau.$$

Замечание 2. В момент времени $t = T$ функции $q_{32}(t)$ и $q_{33}(t)$ выражаются через специальные функции: функцию Вебера $E_\nu(z)$ и функцию Ангера $J_\nu(z)$ комплексного порядка ν с комплексным аргументом z [20].

Вычислим собственные значения матрицы монодромии $\mathbf{Q}(T)$, в результате получим

$$\{\mu_k\} = \left\{ 1, 1, \exp\left(-\frac{2\pi v_0}{\Omega a_2}\right), \exp\left(\frac{2\pi v_0}{\Omega a_1}\right) \right\}. \tag{2.7}$$

Из выражения (2.7) следует, что в рассматриваемом частном случае (с учетом положительности a_k) всегда существует мультипликатор, значение которого больше единицы (например, $\mu_3 > 1$ при $v_0 < 0$ или $\mu_4 > 1$ при $v_0 > 0$). Таким образом, движение «развернутого» робота вдоль колебаний неустойчиво.

Рассмотрим частное решение, соответствующее движению «свернутого» робота вдоль направления колебаний. Подставив $\mathbf{J} = \mathbf{J}_\pi^\parallel$ в уравнение (2.5) и определив из него $\mathbf{Q}(T)$, получим следующие собственные числа матрицы монодромии:

$$\{\mu_k\} = \left\{ 1, 1, \exp\left(\frac{2\pi v_0}{\Omega a_2}\right), \exp\left(\frac{2\pi v_0}{\Omega a_1}\right) \right\}. \tag{2.8}$$

В выражении (2.8) один единичный мультипликатор $\mu_1 = 1$ соответствует параметру семейства v_0 , поэтому исключим его из рассмотрения. В результате, согласно теореме [18, с. 189], решение σ_π^\parallel орбитально устойчиво при движении робота шарниром вперед, то есть при $v_0 < 0$ и $a_1, a_2 > 0$. Учитывая, что из экспоненциальной неустойчивости линеаризованной системы следует неустойчивость в рамках полной постановки можем сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 1. При значениях моментов инерции $I_1 = m_1 c_1 a_1$, $I_2 = m_2 c_2 a_2$ прямолинейное движение «свернутого» роллер-рейсера вдоль колебаний плоскости орбитально устойчиво в рамках линейной модели при движении шарниром вперед. Движение «развернутого» роллер-рейсера в направлении колебаний плоскости неустойчиво в полной нелинейной постановке.

2.2. Движение перпендикулярно направлению колебаний плоскости при $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$. В случае когда точки закрепления колесных пар совпадают с центрами масс платформ, то есть $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$, существует семейство частных решений, соответствующих движению роллер-рейсера перпендикулярно колебаниям плоскости. Данное движение является прямолинейным, но не в подвижной системе координат, а в системе координат, связанной с колеблющейся плоскостью. Это семейство задается следующим образом:

$$\sigma_{0,\pi}^\perp: v_1 = v_0, \quad v_2 = \dot{\xi}(t), \quad \psi = 0, \quad \varphi = 0, \pi, \quad (2.9)$$

где $v_0 = \text{const}$ — параметр семейства, угол $\varphi = 0$ соответствует «развернутому» роботу (см. рис. 6, а), а $\varphi = \pi$ — «свернутому» роботу, при этом исключается случай $a_1 = a_2$ (см. рис. 6, b).

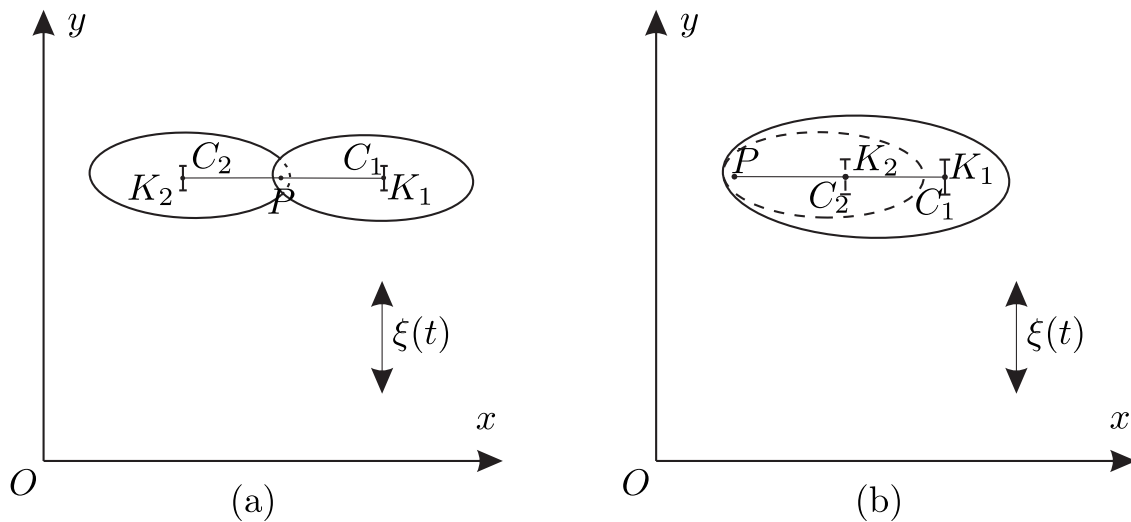


Рис. 6. Схематические изображения роллер-рейсера, соответствующие частным решениям (2.9)

Исследуем устойчивость данных частных решений. Для этого линеаризуем уравнения (1.7) в окрестности (2.9):

$$\delta\dot{z} = \mathbf{J}_{0,\pi}^\perp \delta x,$$

где $\mathbf{J}_{0,\pi}^\perp$ — якобиан системы (1.7), вычисленный на решениях (2.9). Явный вид якобиана для решения σ_0^\perp , соответствующего движению «развернутого» роллер-рейсера, имеет вид

$$\mathbf{J}_0^\perp = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\varepsilon\Omega \cos(\Omega t)}{a_1} & 0 & \frac{m_2}{M} \varepsilon\Omega^2 \sin(\Omega t) \\ 0 & \frac{v_0 a_1 i_2 (a_1 + a_2)}{a_2 (a_1^2 i_2 + a_2^2 i_1)} & 0 & \frac{v_0^2 a_1^2 i_2}{a_2 (a_1^2 i_2 + a_2^2 i_1)} \\ 0 & -\frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2 + a_1}{a_1 a_2} & 0 & -\frac{v_0}{a_2} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Матрица \mathbf{J}_π^\perp для семейства σ_π^\perp , аналогично решениям σ^\parallel , получается из матрицы (2.10) с помощью следующего преобразования:

$$\mathbf{J}_\pi^\perp = \mathbf{J}_0^\perp \Big|_{\substack{a_2 \rightarrow -a_2 \\ c_2 \rightarrow -c_2}}.$$

Решая матричную задачу Коши (2.5) при $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0^\perp$ получим следующие собственные значения матрицы монодромии $\mathbf{Q}(T)$:

$$\{\mu_k\} = \left\{ \exp \left(-\frac{2v_0\pi}{\Omega\Delta}(-a_1i_2 + a_2i_1) \right), 1, 1, 1 \right\}. \quad (2.11)$$

Для случая $\mathbf{J} = \mathbf{J}_\pi^\perp$ собственные значения матрицы $\mathbf{Q}(T)$ имеют вид

$$\{\mu_k\} = \left\{ \exp \left(\frac{2v_0\pi}{\Omega\Delta}(a_1i_2 + a_2i_1) \right), 1, 1, 1 \right\}. \quad (2.12)$$

Из выражении (2.11) и (2.12) видно, что у каждого семейства частных решений (при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$) существует по три единичных мультипликатора. Один из единичных мультипликаторов соответствует параметру семейства v_0 и может быть исключен из рассмотрения. Как показывают вычисления, оставшимся двум единичным мультипликаторам соответствует одна жорданова клетка размерами 2×2 . Следовательно решения (2.9) в рамках линейного приближения будут неустойчивы независимо от значения μ_1 . Причем эта неустойчивость носит линейный по времени характер.

В результате, можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. При $a_1 = c_1, a_2 = c_2$ прямолинейное движение роллер-рейсера перпендикулярно направлению колебаний плоскости:

а) неустойчиво в рамках линейного приближения при движении «свернутого» роллер-рейсера в направлении шарнира и движении «развернутого» роллер-рейсера в направлении звена с большим значением величины $\frac{i_k}{a_k}$.

б) неустойчиво в точной нелинейной постановке для всех остальных случаев.

Для анализа устойчивости решений $\sigma_{0,\pi}^\perp$ в рамках полной системы необходимо более подробное исследование с учетом членов разложения более высоких порядков. При этом решения σ_π^\perp при движении в направлении шарнира ($v_0 < 0$), а также решение σ_0^\perp в направлении звена с большим значением величины $\frac{i_k}{a_k}$ могут оказаться устойчивыми при рассмотрении в рамках полной нелинейной модели.

Заключение

В данной работе показано, что только одно решение, соответствующее прямолинейному движению «свернутого» роллер-рейсера вдоль направления колебаний плоскости, орбитально устойчиво (но не асимптотически) в линейном приближении. Все остальные рассмотренные частные решения в линейном приближении — неустойчивы. Дальнейшие исследования рассматриваемой системы могут быть направлены на анализ устойчивости найденных решений в точной нелинейной постановке. А также на более подробное исследование зависимости устойчивости от параметров системы.

Другое интересное направление исследований связано с общим анализом динамики роллер-рейсера на колеблющейся плоскости. Данная система представляет интерес для исследования как компьютерными методами (четырёхмерное отображение Пуанкаре, численное доказательство неинтегрируемости), так и аналитическими методами, связанными с теорией усреднения [21, 22].

Благодарности

Артемова Е. М. является победителем Всероссийского конкурса математических работ студентов и аспирантов имени Августа Мёбиуса и благодарит жюри за высокую оценку ее работы.

Финансирование. Работа А. А. Килина (§ 1) была выполнена в Уральском математическом центре (договор № 075–02–2022–889). Работа Е. М. Артемовой (§ 2.1) выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки России (проект FEWS–2020–0009). Работа Ю. В. Коробейниковой (§ 2.2) выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки России (проект FZZN–2020–0011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chaplygin S. A. On the theory of motion of nonholonomic systems. The reducing-multiplier theorem // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2008. Vol. 13. Issue 4. P. 369–376. <https://doi.org/10.1134/S1560354708040102>
2. Borisov A. V., Mamaev I. S. An inhomogeneous Chaplygin sleigh // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2017. Vol. 22. Issue 4. P. 435–447. <https://doi.org/10.1134/S1560354717040062>
3. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The Chaplygin sleigh with parametric excitation: chaotic dynamics and nonholonomic acceleration // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2017. Vol. 22. Issue 8. P. 955–975. <https://doi.org/10.1134/S1560354717080056>
4. Osborne J. M., Zenkov D. V. Steering the Chaplygin sleigh by a moving mass // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. 2005. P. 1114–1118. <https://doi.org/10.1109/CDC.2005.1582307>
5. Kuznetsov S. P. Regular and chaotic dynamics of a Chaplygin sleigh due to periodic switch of the nonholonomic constraint // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2018. Vol. 23. Issue 2. P. 178–192. <https://doi.org/10.1134/S1560354718020041>
6. Bizyaev I. A. The inertial motion of a roller racer // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2017. Vol. 22. Issue 3. P. 239–247. <https://doi.org/10.1134/S1560354717030042>
7. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. Exotic dynamics of nonholonomic roller racer with periodic control // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2018. Vol. 23. Issues 7–8. P. 983–994. <https://doi.org/10.1134/S1560354718070122>
8. Krishnaprasad P. S., Tsakiris D. P. Oscillations, SE(2)-snakes and motion control: A study of the roller racer // *Dynamical Systems*. 2001. Vol. 16. Issue 4. P. 347–397. <https://doi.org/10.1080/14689360110090424>
9. Mikishanina E. A. Qualitative analysis of the dynamics of a trailed wheeled vehicle with periodic excitation // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 17. Issue 4. P. 437–451. <https://doi.org/10.20537/nd210406>
10. Kilin A. A., Pivovarova E. N. A particular integrable case in the nonautonomous problem of a Chaplygin sphere rolling on a vibrating plane // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2021. Vol. 26. Issue 6. P. 775–786. <https://doi.org/10.1134/S1560354721060149>
11. Kilin A. A., Pivovarova E. N. Stability and stabilization of steady rotations of a spherical robot on a vibrating base // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2020. Vol. 25. Issue 6. P. 729–752. <https://doi.org/10.1134/S1560354720060155>
12. Килин А. А., Пивоварова Е. Н. Неинтегрируемость задачи о качении сферического волчка по вибрирующей плоскости // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2020. Т. 30. № 4. С. 628–644. <https://doi.org/10.35634/vm200407>
13. Vetchanin E. V., Mikishanina E. A. Vibrational stability of periodic solutions of the liouville equations // *Nelineinaya Dinamika*. 2019. Vol. 15. Issue 3. P. 351–363. <https://doi.org/10.20537/nd190312>
14. Artemova E. M., Karavaev Yu. L., Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Dynamics of a spherical robot with variable moments of inertia and a displaced center of mass // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2020. Vol. 25. Issue 6. P. 689–706. <https://doi.org/10.1134/S156035472006012X>
15. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
16. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. О проблеме Адамара–Гамеля и динамике колесных экипажей // *Нелинейная динамика*. 2016. Т. 12. № 1. С. 145–163. <http://mi.mathnet.ru/nd517>

17. Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2008. Vol. 13. Issue 5. P. 443–490. <https://doi.org/10.1134/S1560354708050079>
18. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
19. Yefremov K. S., Ivanova T. B., Kilin A. A., Karavaev Yu. L. Theoretical and experimental investigations of the controlled motion of the roller racer // 2020 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics (NIR). 2020. <https://doi.org/10.1109/NIR50484.2020.9290220>
20. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977.
21. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.
22. Красильников П. С. Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015.

Поступила в редакцию 17.10.2022

Принята к публикации 09.12.2022

Артемова Елизавета Марковна, аспирант, Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7637-2757>

E-mail: liz-artemova2014@yandex.ru

Килин Александр Александрович, д. ф.-м. н., профессор, Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1358-5960>

E-mail: aka@rcd.ru

Коробейникова Юлия Владимировна, Ижевский государственный технический университет, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7.

E-mail: 123@cv.ce

Цитирование: Е. М. Артемова, А. А. Килин, Ю. В. Коробейникова. Исследование орбитальной устойчивости прямолинейных качений роллер-рейсера по вибрирующей плоскости // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 615–629.

E. M. Artemova, A. A. Kilin, Yu. V. Korobeinikova

Investigation of the orbital stability of rectilinear motions of roller-racer on a vibrating plane

Keywords: roller-racer, nonholonomic constraints, vibrating plane, monodromy matrix, orbital stability.

MSC2020: 37J60, 34D20

DOI: [10.35634/vm220408](https://doi.org/10.35634/vm220408)

This paper addresses the problem of a roller-racer rolling on an oscillating plane. Equations of motion of the roller-racer in the form of a system of four nonautonomous differential equations are obtained. Two families of particular solutions are found which correspond to rectilinear motions of the roller-racer along and perpendicular to the plane's oscillations. Numerical estimates are given for the multipliers of solutions corresponding to the motion of the robot along the oscillations. Also, a special case is presented in which it is possible to obtain analytic expressions of the multipliers. In this case, it is shown that the motion along oscillations of a "folded" roller-racer is linearly orbitally stable as it moves with its joint ahead, and that all other motions are unstable. It is shown that, in a linear approximation, the family corresponding to the motion of the robot is perpendicular to the plane's oscillations, that is, it is unstable.

Funding. The work of A. A. Kilin (§ 1) was performed at the Ural Mathematical Center (Agreement No. 075–02–2022–889). The work of E. M. Artemova (§ 2.1) was supported by the framework of the state assignment or the Ministry of Science and Higher Education (No. FEWS–2020–0009). The work of Yu. V. Korobeinikova (§ 2.2) was supported by the framework of the state assignment or the Ministry of Science and Higher Education (No. FZZN–2020–0011).

REFERENCES

1. Chaplygin S. A. On the theory of motion of nonholonomic systems. The reducing-multiplier theorem, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2008, vol. 13, issue 4, pp. 369–376. <https://doi.org/10.1134/S1560354708040102>
2. Borisov A. V., Mamaev I. S. An inhomogeneous Chaplygin sleigh, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, issue 4, pp. 435–447. <https://doi.org/10.1134/S1560354717040062>
3. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The Chaplygin sleigh with parametric excitation: chaotic dynamics and nonholonomic acceleration, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, issue 8, pp. 955–975. <https://doi.org/10.1134/S1560354717080056>
4. Osborne J. M., Zenkov D. V. Steering the Chaplygin sleigh by a moving mass, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, 2005, pp. 1114–1118. <https://doi.org/10.1109/CDC.2005.1582307>
5. Kuznetsov S. P. Regular and chaotic dynamics of a Chaplygin sleigh due to periodic switch of the nonholonomic constraint, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, issue 2, pp. 178–192. <https://doi.org/10.1134/S1560354718020041>
6. Bizyaev I. A. The inertial motion of a roller racer, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, issue 3, pp. 239–247. <https://doi.org/10.1134/S1560354717030042>
7. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. Exotic dynamics of nonholonomic roller racer with periodic control, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, issues 7–8, pp. 983–994. <https://doi.org/10.1134/S1560354718070122>
8. Krishnaprasad P. S., Tsakiris D. P. Oscillations, SE(2)-snakes and motion control: A study of the roller racer, *Dynamical Systems*, 2001, vol. 16, no. 4, pp. 347–397. <https://doi.org/10.1080/14689360110090424>
9. Mikishanina E. A. Qualitative analysis of the dynamics of a trailed wheeled vehicle with periodic excitation, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 17, issue 4, pp. 437–451. <https://doi.org/10.20537/nd210406>

10. Kilin A. A., Pivovarov E. N. A particular integrable case in the nonautonomous problem of a Chaplygin sphere rolling on a vibrating plane, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2021, vol. 26, issue 6, pp. 775–786. <https://doi.org/10.1134/S1560354721060149>
11. Kilin A. A., Pivovarov E. N. Stability and stabilization of steady rotations of a spherical robot on a vibrating base, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020, vol. 25, issue 6, pp. 729–752. <https://doi.org/10.1134/S1560354720060155>
12. Kilin A. A., Pivovarov E. N. Nonintegrability of the problem of a spherical top rolling on a vibrating plane, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 4, pp. 628–644 (in Russian). <https://doi.org/10.35634/vm200407>
13. Vetchanin E. V., Mikishanina E. A. Vibrational stability of periodic solutions of the liouville equations, *Nelineinaya Dinamika*, 2019, vol. 15, issue 3, pp. 351–363. <https://doi.org/10.20537/nd190312>
14. Artemova E. M., Karavaev Yu. L., Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Dynamics of a spherical robot with variable moments of inertia and a displaced center of mass, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020, vol. 25, issue 6, pp. 689–706. <https://doi.org/10.1134/S156035472006012X>
15. Yakubovich V. A., Starzhinskii V. M. *Linear differential equations with periodic coefficients, 2 volumes*, New York: Wiley, 1975.
16. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. On the Hadamard–Hamel problem and the dynamics of wheeled vehicles, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, issue 6, pp. 752–766. <https://doi.org/10.1134/S1560354715060106>
17. Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2008, vol. 13, issue 5, pp. 443–490. <https://doi.org/10.1134/S1560354708050079>
18. Demidovich B. P. *Leksii po matematicheskoi teorii ustoychivosti* (Lectures on the mathematical theory of stability), Moscow: Nauka, 1967.
19. Yefremov K. S., Ivanova T. B., Kilin A. A., Karavaev Yu. L. Theoretical and experimental investigations of the controlled motion of the roller racer, *2020 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics*, 2020. <https://doi.org/10.1109/NIR50484.2020.9290220>
20. Janke E., Emde F., Lösch F. *Tafeln Höherer Funktionen*, Stuttgart: Teubner, 1960.
21. Krylov N. M., Bogolyubov N. N. *Vvedenie v nelineinuyu mekhaniku* (Introduction to nonlinear mechanics), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2004.
22. Krasil'nikov P. S. *Prikladnye metody issledovaniya nelineinykh kolebaniy* (Applied methods for studying nonlinear oscillations), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2015.

Received 17.10.2022

Accepted 09.12.2022

Elizaveta Markovna Artemova, PhD Student, Ural Mathematical Center, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7637-2757>

E-mail: liz-artemova2014@yandex.ru

Aleksandr Aleksandrovich Kilin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Ural Mathematical Center, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1358-5960>

E-mail: aka@rcd.ru

Yulia Vladimirovna Korobeinikova, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7, Izhevsk, 426069, Russia.

E-mail: 123@cv.ce

Citation: E. M. Artemova, A. A. Kilin, Yu. V. Korobeinikova. Investigation of the orbital stability of rectilinear motions of roller-racer on a vibrating plane, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 615–629.