ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 593–614.

УДК 517.957, 517.988, 517.977.56

© *А. В. Чернов*

О ТОТАЛЬНО ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЭВОЛЮЦИОННОГО ВОЛЬТЕРРОВА УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

Пусть H — банахово пространство, $T > 0$, $\sigma \in [1;\infty]$ и задана шкала банаховых пространств $W[0;\tau]$, $\tau \in (0;T)$, индуцированная сужениями из пространства $W = W[0;T]$; $\mathcal{F}\colon L_\sigma(0,T;H) \to W$ — вольтерров оператор; $f[u]\colon W \to L_\sigma(0,T;H)$ — управляемый вольтерров оператор, зависящий от управления $u \in U$. Рассматривается уравнение вида

$$x = \mathcal{F}\big(f[u](x)\big), \quad x \in W.$$

Для этого уравнения устанавливаются признаки тотально (по множеству допустимых управлений) глобальной разрешимости при условии глобальной разрешимости некоторого функционально-интегрального неравенства в пространстве $\mathbb{R}$. Во многих частных случаях указанное неравенство может быть конкретизировано как задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Фактически, развивается аналогичный результат, доказанный автором ранее, на этот раз при других, более удобных для практического использования условиях (хотя и в более частной постановке). Отдельно рассматриваются случаи: 1) компактного вложения пространств и непрерывности операторов $\mathcal{F}$, $f[u]$ (такой подход автором ранее не использовался); 2) выполнения локально-интегрального аналога условия Липшица относительно указанных операторов. Во втором случае доказывается также единственность решения. В первом случае применяется теорема Шаудера, во втором — технология продолжения решения по времени, то есть продолжения вдоль вольтерровой цепочки. В качестве примера рассматривается нелинейное волновое уравнение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: нелинейное эволюционное вольтеррово уравнение в банаховом пространстве, нелинейное волновое уравнение, тотально глобальная разрешимость, единственность решения.

DOI: 10.35634/vm220407

Введение

Тотально глобальная разрешимость (ТГР) — это свойство управляемой системы сохранять глобальную разрешимость для всех допустимых управлений. Ранее в аналогичном смысле использовался также термин *тотальное сохранение глобальной разрешимости*, введенный в работе [1].

Об актуальности проблемы ТГР и истории вопроса мы уже довольно подробно говорили в прежних работах, см., например, [1–7]. Поэтому думается, что нет смысла столь же подробно останавливаться здесь на этом еще раз.

Говоря совсем коротко, свойство ТГР при наличии еще и свойства единственности решения управляемой системы полезно по следующим причинам: 1) исходная бесконечномерная задача оптимизации путем конечномерной аппроксимации управления сводится к задаче минимизации функции многих переменных (параметров аппроксимации) на известном множестве простой структуры — *аппроксимирующей задаче* математического программирования, для решения которой можно использовать стандартные методы (и готовые программные комплексы), проблему существования решения в ней можно снимать с помощью классической теоремы Вейерштрасса или ее следствий; 2) существенно упрощается выбор начального приближения к оптимуму; 3) можно обоснованно ставить различные игровые задачи, связанные с управляемыми распределенными системами; 4) за счет упомянутой выше дискретизации можно применять известные классические и топологические теоремы о разрешимости системы нелинейных уравнений относительно конечного числа неизвестных для исследования поточечной управляемости.

Отметим, что нарушение глобальной разрешимости эволюционной управляемой системы, связанной с дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнением, весьма вероятно, когда порядок роста правой части соответствующего уравнения по фазовой переменной превышает линейный — см. на этот счет показательные примеры в [8, пример к теореме 2.2, с. 87–88; § 4, с. 95–100], [9, § 1], [10, введение, п. 2], [11].

Данная статья продолжает серию работ автора [1–7] и др., посвященных проблеме получения признаков ТГР управляемых систем. Для того чтобы пояснить необходимость дальнейшей разработки этой тематики, опишем кратко общую схему, в которую вкладываются те ситуации, которые мы изучаем.

Рассмотрим абстрактное уравнение

$$x = F[x, z], \tag{0.1}$$

предполагая, что оператор F обладает некоторыми свойствами, обеспечивающими разрешимость уравнения (0.1) при всех z из некоторого класса Z (либо известно, что уравнение (0.1) разрешимо и при этом оператор F обладает определенными свойствами). Тогда, рассматривая управляемый аналог более сложного вида

$$x = F\big[x, f(x, u)\big], \tag{0.2}$$

мы пытаемся выявить условия, при которых оно будет разрешимо для всех управлений u из заданного множества U. Для этого, разумеется, свойства функции (оператора) f должны быть согласованы со свойствами оператора F и с классом Z. Выяснить, как они должны быть согласованы — в этом и есть основная проблема.

Отметим, что в случае, когда $F = F[z]$ — линейный ограниченный оператор, уравнение (0.2) — это так называемое уравнение типа Гаммерштейна, исследованию которого автор в свое время посвятил целую серию работ, см., например, [1–3,5]. В данной статье мы также ограничились случаем $F = F[z]$, однако на этот раз нас, главным образом, интересует случай нелинейного оператора F. Здесь значение $F[z]$ можно трактовать как решение той или иной распределенной системы, зависящей от некоторой функции (вектор-функции) z из заданного класса Z. В качестве такой функции z может выступать, например, правая часть уравнения в частных производных (дифференциального или интегро-дифференциального). Глобальной разрешимости различных конкретного вида уравнений с фиксированной правой частью z посвящена довольно обширная литература — см., например, [12–16]. Помимо доказательства разрешимости как таковой, авторами, как правило, устанавливаются некоторые оценки приращения решения через приращение правой части, необходимые им для установления факта единственности решения; отсюда вытекают оценки приращения вида $F[z_2] - F[z_1]$. Об актуальности изучения ситуации $F = F[x, z]$ см. в § 7.

Постановка (0.2) не является надуманной. С физической точки зрения, z, как правило, является функцией источника. Но в приложениях она может быть управляемой, а управление может осуществляться по принципу обратной связи при заданном шаблоне зависимости от состояния — тогда будет и зависимость от состояния x. Кроме того, дополнительные нелинейности могут порождаться такими физическими аспектами, как специальные характеристики сопротивления среды, дополнительные потоки вещества или энергии, наличие примесей, активно взаимодействующих с изучаемой субстанцией и т. д. В итоге вместо уравнения (0.1) как раз и получается уравнение (0.2).

Подчеркнем, что в интересующем нас случае, когда оба оператора F и f нелинейны соответственно по (x,z) и x, имеем как бы двойную (вложенную) нелинейность. Это обусловливает сложность соответствующих построений и формулировок. В связи с упомянутой нелинейностью в статье используется подход, аналогичный классической теореме Уинтнера (известной для обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$), в смысле построения так называемой системы сравнения для исходного управляемого уравнения: если известно, что система сравнения разрешима, то делается вывод, что исходное управляемое уравнение тоже разрешимо для всех управлений из заданного множества. Естественно, что в качестве системы сравнения имеет смысл использовать некоторое уравнение более простого типа, нежели исходное. У нас в этом качестве выступает некоторое функционально-интегральное неравенство в пространстве $\mathbb{R}$.

Поскольку ситуации и соответствующие наборы свойств оператора F, а также условия разрешимости уравнения (0.1) могут быть весьма и весьма разнообразны, то в перспективе мы, соответственно, можем получать разнообразные признаки ТГР уравнений вида (0.2).

Пусть H, V, $\widetilde{V}$ — банаховы пространства и имеют место непрерывные вложения: $V\subset H\subset\widetilde{V}$; $T>0$, $\sigma\in[1;\infty]$; при $\sigma\in[1;\infty)$ $L_\sigma(0,T;\widetilde{V})$ — пространство функций со значениями в $\widetilde{V}$, определенных и интегрируемых по Бохнеру со степенью σ на отрезке $[0;T]$; при $\sigma=\infty$, соответственно, $L_\sigma(0,T;\widetilde{V})=L_\infty(0,T;\widetilde{V})$ — множество всех измеримых по Бохнеру существенно ограниченных функций $[0;T]\to\widetilde{V}$; $L_\sigma[0;T]=L_\sigma(0,T;\mathbb{R})$, и задана шкала банаховых пространств $W[0;\tau]$, $\tau\in(0;T]$, такая, что множество сужений функций из $W=W[0;T]$ на $[0;\tau]$ совпадает с $W[0;\tau]$, причем норма сужения функции из W в $W[0;\tau_1]$ не превосходит ее нормы в $W[0;\tau_2]$ при $0\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant T$. Параметры T и σ предполагаются фиксированными. Будем предполагать, что заданы: $\mathcal{F}\colon L_\sigma(0,T;\widetilde{V})\to W$ — вольтерров оператор, то есть $\mathcal{F}[x](t)=\mathcal{F}[y](t)$ при $t\in[0;\tau]$ для всех $x,y\in L_\sigma(0,T;\widetilde{V})$, $x(t)=y(t)$ при $t\in[0;\tau]$; U — множество допустимых управлений, $f[u]\colon W\to L_\sigma(0,T;\widetilde{V})$ — управляемый вольтерров оператор, зависящий от управления $u\in U$. В данной статье рассматривается уравнение вида

$$x=\mathcal{F}\big(f[u](x)\big),\quad x\in W. \tag{0.3}$$

Для этого уравнения устанавливаются признаки тотально (по множеству допустимых управлений) глобальной разрешимости при условии глобальной разрешимости некоторого функционально-интегрального неравенства в пространстве $\mathbb{R}$. Во многих частных случаях указанное неравенство может быть конкретизировано как задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Фактически, развивается аналогичный результат, доказанный автором ранее [4], на этот раз при других, более удобных для практического использования условиях (хотя и в более частной постановке). Поясним сказанное. Во-первых, в [4], в отличие от материала данной статьи, не делалось предположения о компактном вложении пространства решений W в лебегово пространство. Между тем, это предположение часто выполняется в приложениях, а за счет него можно ослаблять другие условия, в частности, условия на правую часть. Во-вторых, даже если иметь в виду лишь случай локально-интегральной оценки приращения вида $\mathcal{F}[z_2]-\mathcal{F}[z_1]$, который в данной статье рассматривается отдельно, основное требование, предъявляемое в [4], это, по сути дела, требование локальной липшицевости оператора $\mathcal{F}$. Предположения данной статьи в этой части допускают существенно более разнообразный спектр оценок указанного приращения — см. условие $\mathbf{A}_3$) в § 3. А это существенно расширяет область приложения полученных в статье абстрактных результатов. Но, разумеется, условия на правую часть естественным образом согласуются с оценкой приращения $\mathcal{F}[z_2]-\mathcal{F}[z_1]$. В описанном смысле условия данной статьи более удобны для практического использования по сравнению с [4]. С другой стороны, в данной статье мы рассматриваем более частную постановку по сравнению с [4], поскольку предположения [4] более универсальны в том плане, что позволяют рассматривать уравнения, содержащие в своей правой части не только неизвестную функцию, но и ее производные. Это сделало упомянутые предположения [4] существенно более громоздкими, если сравнивать с предположениями данной статьи, но в [4] позволило, в частности, исследовать на предмет ТГР управляемую нестационарную нелинейную систему Навье–Стокса.

Как уже было сказано, в данной статье отдельно рассматриваются случаи компактного вложения пространств и непрерывности операторов $\mathcal{F}$, $f[u]$ (такой подход автором ранее использовался лишь для эволюционного дифференциального уравнения в банаховом пространстве с монотонным оператором [6]) и выполнения локально-интегрального аналога условия Липшица относительно указанных операторов. Во втором случае доказывается также единственность решения. В первом случае применяется теорема Шаудера, во втором — технология продолжения решения по времени (то есть продолжения вдоль вольтерровой цепочки). В качестве примера рассматривается нелинейное волновое уравнение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Для дальнейшего следует отметить, что вольтерровость оператора $\mathcal{F}$ позволяет определить естественное сужение этого оператора $\mathcal{F}_{[0;\tau]}\colon L_\sigma(0,\tau;\widetilde{V}) \to W[0;\tau]$ формулой $\mathcal{F}_{[0;\tau]} = S_{[0;\tau]}\mathcal{F}Q_{[0;\tau]}$, где $Q_{[0;\tau]}$ — оператор продолжения с $[0;\tau]$ на $[0;T]$ (в силу вольтерровости $\mathcal{F}$ способ этого продолжения не имеет значения; но для лебеговых пространств мы всегда будем иметь в виду продолжение нулем), $S_{[0;\tau]}$ — оператор сужения с $[0;T]$ на $[0;\tau]$. Для каждого $u \in U$ оператор $f[u]\colon W \to L_\sigma(0,T;\widetilde{V})$ мы тоже будем предполагать вольтерровым. И для него тоже определяется естественное сужение: $f[u]_{[0;\tau]} = S_{[0;\tau]}f[u]Q_{[0;\tau]}$, однако на этот раз оператор продолжения $Q_{[0;\tau]}$ в общем случае нельзя понимать как продолжение нулем. Поскольку, с учетом вольтерровости, способ продолжения сам по себе не важен, нам достаточно, чтобы продолжение для любой функции $x \in W[0;\tau]$ до функции из $W[0;T]$ существовало. Поэтому мы и требуем, чтобы множество сужений функций из $W[0;T]$ на отрезок $[0;\tau]$ не просто содержалось в $W[0;\tau]$, а именно совпадало с этим пространством. В силу сделанных предположений, суперпозиция $\mathcal{F}f[u]\colon W \to W$ тоже будет вольтерровым оператором. А это, в свою очередь, позволяет рассматривать локальные аналоги уравнения (0.3) в пространствах $W[0;\tau]$, $\tau \in (0;T]$. Это обстоятельство мы далее будем использовать без специальных оговорок.

§ 1. Случай компактного вложения: формулировки

В этом параграфе мы будем предполагать, что имеет место компактное вложение $W \subset \subset L_q(0,T;H)$, $q \in [1;+\infty]$. Сделаем также следующие предположения.

A$_1$) Оператор $\mathcal{F}\colon L_\sigma(0,T;\widetilde{V}) \to W$ ограничен и, кроме того, непрерывен как отображение $L_\sigma(0,T;\widetilde{V}) \to L_q(0,T;H)$.

A$_2$) При некотором $\sigma' \leqslant \sigma$ и произвольных $t \in (0;T]$, $z \in L_\sigma(0,t;\widetilde{V})$ и, соответственно, $x = \mathcal{F}_{[0;t]}[z]$, имеем:
$$\big\|x(t)\big\|_H \leqslant \mathcal{L}_1\big(t, \|z\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})}\big),$$
где функция $\mathcal{L}_1(t,M)$ непрерывна по $t \in [0;T]$ и не убывает по $M \geqslant 0$.

F$_1$) Для всякого $u \in U$ оператор $f[u] : L_q(0,T;H) \to L_\sigma(0,T;\widetilde{V})$ ограничен и непрерывен.

F$_2$) Для всех $u \in U$, $x \in L_q(0,T;H)$, $t \in [0;T]$, $\|x(s)\|_H \leqslant \beta(s)$ при $s \in [0;T]$, имеем:
$$\big\|(f[u]x)(s)\big\|_{\widetilde{V}} \leqslant \mathcal{N}_1[\beta](s), \quad s \in [0;t], \quad \text{где} \quad \mathcal{N}_1[\beta] \in L_{\sigma'}[0;T].$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{A}_2$), $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$). *Предположим, что функционально-интегральное неравенство*

$$\mathcal{L}_1\Big(t, \big\|\mathcal{N}_1[\beta]\big\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})}\Big) \leqslant \beta(t), \quad t \in [0;T], \tag{1.1}$$

имеет решение $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$. *Тогда для каждого* $u \in U$ *уравнение* (0.3) *имеет по крайней мере одно решение* $x = x[u] \in W$, *удовлетворяющее оценке* $\big\|x(t)\big\|_H \leqslant \beta(t)$, $t \in [0;T]$.

Доказательство теоремы 1 см. в § 2.

Условия $\mathbf{A}_2$), $\mathbf{F}_2$) можно заменить следующими.

$\mathbf{A}'_2$) При некотором $\sigma' \leqslant \sigma$ и произвольных $t \in (0;T]$, $z \in L_\sigma(0,t;\widetilde{V})$, и соответственно, $x = \mathcal{F}_{[0;t]}[z]$, имеем:
$$\big\|x\big\|_{L_q(0,t;H)} \leqslant \mathcal{L}_2\big(t, \|z\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})}\big),$$
где функция $\mathcal{L}_2(t,M)$ непрерывна по $t \in [0;T]$ и не убывает по $M \geqslant 0$.

$\mathbf{F}'_2$) Для всех $u \in U$, $t \in [0;T]$, $x \in L_q(0,T;H)$, $\|x\|_{L_q(0,s;H)} \leqslant \beta(s)$, $s \in [0;t]$, имеем:
$$\big\|f[u]x\big\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})} \leqslant \Psi\big(\|\mathcal{N}_2[\beta]\|_{L_1[0;t]}\big), \quad \text{где} \quad \mathcal{N}_2[\beta] \in L_1[0;T], \quad \Psi \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{A}'_2$), $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}'_2$). *Предположим, что функционально-интегральное неравенство*

$$\mathcal{L}_2\Big(t, \Psi\big(\|\mathcal{N}_2[\beta]\|_{L_1[0;t]}\big)\Big) \leqslant \beta(t), \quad t \in [0;T], \tag{1.2}$$

имеет решение $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$. *Тогда для каждого* $u \in U$ *уравнение* (0.3) *имеет по крайней мере одно решение* $x = x[u] \in W$, *удовлетворяющее оценке* $\|x\|_{L_q(0,t;H)} \leqslant \beta(t)$, $t \in [0;T]$.

Доказательство теоремы 2 см. в § 2.

§ 2. Случай компактного вложения: доказательства

Для доказательства теорем 1, 2 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\beta \in L_q[0;T]$. *Тогда множество*

$$\Omega = \Big\{x \in L_q(0,T;H) \colon \big\|x(t)\big\|_H \leqslant \beta(t),\ t \in [0;T]\Big\}$$

замкнуто в $L_q(0,T;H)$.

Доказательство. Пусть $\{x_k\} \subset \Omega$, $x_k \to \overline{x}$ в $L_q(0,T;H)$. Достаточно доказать, что $\overline{x} \in \Omega$. Положим

$$\varphi_k(t) = \big\|x_k(t)\big\|_H, \quad \overline{\varphi}(t) = \big\|\overline{x}(t)\big\|_H, \quad t \in [0;T].$$

Тогда $\varphi_k \in L_q[0;T]$, $\overline{\varphi} \in L_q[0;T]$. Оценим

$$\|\varphi_k - \overline{\varphi}\|^q_{L_q[0;T]} = \int_0^T \big|\varphi_k(t) - \overline{\varphi}(t)\big|^q\, dt =$$

$$= \int_0^T \Big|\big\|x_k(t)\big\|_H - \big\|\overline{x}(t)\big\|_H\Big|^q\, dt \leqslant \int_0^T \big\|x_k(t) - \overline{x}(t)\big\|^q_H\, dt = \|x_k - \overline{x}\|^q_{L_q(0,T;H)} \to 0$$

при $k \to \infty$. Таким образом, [17, теорема VIII.5.1, с. 210] имеет место сходимость по мере $\varphi_k \xrightarrow{\mu} \overline{\varphi}$ на $[0;T]$. Согласно теореме Ф. Рисса [17, теорема VI.5.3, с. 142], отсюда вытекает существование подпоследовательности, сходящейся п.в.: $\varphi_{k_m}(t) \to \overline{\varphi}(t)$ для п. в. $t \in [0;T]$. В таком случае получаем:

$$0 \leqslant \overline{\varphi}(t) \leqslant \left|\overline{\varphi}(t) - \varphi_{k_m}(t)\right| + \left|\varphi_{k_m}(t)\right| \leqslant \left|\overline{\varphi}(t) - \varphi_{k_m}(t)\right| + \beta(t).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем: $\overline{\varphi}(t) \leqslant \beta(t)$ для п. в. $t \in [0;T]$. Это означает, что $\overline{x} \in \Omega$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Зафиксируем произвольно $u \in U$. Определим оператор $G\colon L_q(0,T;H) \to W$ формулой $G[x] = \mathcal{F}\big(f[u](x)\big)$. Согласно условиям $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{F}_1$), оператор G ограничен и, рассматриваемый как отображение $G\colon L_q(0,T;H) \to L_q(0,T;H)$, непрерывен. Определим множество

$$\Omega = \Big\{x \in L_q(0,T;H)\colon \big\|x(t)\big\|_H \leqslant \beta(t),\ t \in [0;T]\Big\}.$$

Очевидно, что множество Ω выпукло и ограничено, а в силу леммы 1, замкнуто в $L_q(0,T;H)$. Учитывая ограниченность оператора G, образ $G\Omega$ ограничен в W и, в силу компактного вложения $W \subset L_q(0,T;H)$, предкомпактен в $L_q(0,T;H)$.

Докажем, что $G\colon \Omega \to \Omega$. Выберем произвольно $x \in \Omega$ и положим $z = f[u](x) \in L_\sigma(0,T;\widetilde{V})$, $y = G[x] = \mathcal{F}[z] \in W$. Согласно условию $\mathbf{A}_2$),

$$\big\|y(t)\big\|_H \leqslant \mathcal{L}_1\big(t, \|z\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})}\big), \quad t \in [0;T].$$

При этом по условию $\mathbf{F}_2$),

$$\|z\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})} \leqslant \big\|\mathcal{N}_1[\beta]\big\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})}, \quad t \in [0;T].$$

Пользуясь неравенством (1.1), получаем:

$$\big\|y(t)\big\|_H \leqslant \mathcal{L}_1\Big(t, \big\|\mathcal{N}_1[\beta]\big\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})}\Big) \leqslant \beta(t), \quad t \in [0;T].$$

Следовательно, $y \in \Omega$, то есть $G\colon \Omega \to \Omega$.

Стало быть, можно воспользоваться теоремой Шаудера [18, § XVI.3, с. 627], откуда получаем, что оператор $G\colon \Omega \to \Omega$ имеет неподвижную точку $x = x[u] \in \Omega$. Остается заметить, что оператор G действует в пространство W, следовательно, $x[u] \in W$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Зафиксируем произвольно $u \in U$. Определим оператор $G\colon L_q(0,T;H) \to W$ формулой $G[x] = \mathcal{F}\big(f[u](x)\big)$. Согласно условиям $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{F}_1$), оператор G ограничен и, рассматриваемый как отображение $G\colon L_q(0,T;H) \to L_q(0,T;H)$, непрерывен. Определим множество

$$\Omega = \Big\{x \in L_q(0,T;H)\colon \|x\|_{L_q(0,t;H)} \leqslant \beta(t),\ t \in [0;T]\Big\}.$$

Совершенно аналогично доказательству теоремы 1, множество Ω выпукло, замкнуто и ограничено в $L_q(0,T;H)$, причем образ $G\Omega$ предкомпактен в $L_q(0,T;H)$.

Докажем, что $G\colon \Omega \to \Omega$. Выберем произвольно $x \in \Omega$ и положим $z = f[u](x) \in L_\sigma(0,T;\widetilde{V})$, $y = G[x] = \mathcal{F}[z] \in W$. Согласно условию $\mathbf{A}_2'$),

$$\big\|y\big\|_{L_q(0,t;H)} \leqslant \mathcal{L}_2\big(t, \|z\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})}\big), \quad t \in [0;T].$$

При этом по условию $\mathbf{F}_2'$),

$$\|z\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})} \leqslant \Psi\big(\|\mathcal{N}_2[\beta]\|_{L_1[0;t]}\big), \quad \text{где} \quad \mathcal{N}_2[\beta] \in L_1[0;T], \quad \Psi \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+).$$

Пользуясь неравенством (1.2), получаем:

$$\big\|y\big\|_{L_q(0,t;H)} \leqslant \mathcal{L}_2\Big(t, \Psi\big(\|\mathcal{N}_2[\beta]\|_{L_1[0;t]}\big)\Big) \leqslant \beta(t), \quad t \in [0;T].$$

Следовательно, $y \in \Omega$, то есть $G\colon \Omega \to \Omega$. Завершение доказательства дословно такое же, как для теоремы 1. □

§ 3. Случай локально-интегральной оценки приращения операторов: формулировки

Будем предполагать, что существуют функционал $J\colon L_\sigma(0,T;\widetilde{V})^2 \to \mathbb{R}$ и функция $R \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$, $R(0) = 0$, при которых выполняются следующие условия.

$\mathbf{A}_3$) Для всех $t \in [0;T]$, $z_1, z_2 \in L_\sigma(0,t;\widetilde{V})$ имеем:

$$\big\|\mathcal{F}_{[0;t]}[z_1] - \mathcal{F}_{[0;t]}[z_2]\big\|_{W[0;t]} \leqslant JQ_{[0;t]}(z_1, z_2),$$

где $Q_{[0;t]}$ — оператор продолжения нулем с $[0;t]$ на $[0;T]$.

$\mathbf{F}_3$) Для всех $u \in U$, $t \in [0;T]$, $x_1, x_2 \in W[0;t]$, $\|x_i\|_{W[0;s]} \leqslant \beta(s)$, $s \in [0;t]$, $z_i = \chi_{[0;t]} f[u] Q_{[0;t]}(x_i)$, $i = 1,2$, при $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$, имеем:

$$J[z_1, z_2] \leqslant R\Big(\big\|\chi_h \mathcal{N}_3[\beta]\big\|_{L_1[0;t]}\Big)\|x_1 - x_2\|_{W[0;t]}, \quad \mathcal{N}_3[\beta] \in L_1[0;T],$$

где $h = h[z_1, z_2]$ — множество, не содержащее никакого отрезка вида $[0;s] \subset [0;t]$, для которого $z_1\big|_{[0;s]} = z_2\big|_{[0;s]}$.

В частности, можно считать, что

$$J[z_1, z_2] = \mathcal{N}_0\big(\|z_1\|_{L_\sigma} + \|z_2\|_{L_\sigma}\big)\|z_1 - z_2\|_{L_\sigma}, \quad L_\sigma = L_\sigma(0,T;\widetilde{V}).$$

Но это далеко не единственная возможность.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $\mathbf{A}_3$), $\mathbf{F}_3$). *Тогда для любого* $u \in U$ *уравнение* (0.3) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство см. в § 4.

Замечание 1. Если $W \subset L_p(0,T;V)$, то в условии $\mathbf{F}_3$) неравенства $\|x_i\|_{W[0;s]} \leqslant \beta(s)$ можно заменить следующими: $\big\|x_i(s)\big\|_V \leqslant \beta(s)$, $i = 1,2$, без нарушения справедливости утверждения теоремы 3. Действительно, в этом случае в начале доказательства достаточно просто взять $\beta(t) = \max\big\{\|x_i(t)\|_V,\ i = 1,2\big\}$. Предположим, кроме того, что $f[u]\colon L_p(0,T;V) \to L_\sigma(0,T;\widetilde{V})$. Ясно, что нуль пространства W является нулем и в $L_p(0,T;V)$. Поскольку нуль в линейном пространстве определяется однозначно, то из совпадения двух функций в $L_p(0,T;V)$ следует их совпадение и в W. Поэтому, с сохранением справедливости утверждения теоремы 3, в условиях $\mathbf{A}_3$), $\mathbf{F}_3$) пространство $W[0;t]$ можно заменить на $L_p(0,t;V)$.

Сделаем еще два предположения.

$\mathbf{A}_4$) При некотором $\sigma' \leqslant \sigma$ и произвольных $t \in (0;T]$, $z \in L_\sigma(0,t;\widetilde{V})$ и, соответственно, $x = \mathcal{F}_{[0;t]}[z]$, имеем:

$$\|x\|_{W[0;t]} \leqslant \mathcal{L}_4\big(t, \|z\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})}\big),$$

где функция $\mathcal{L}_4(t,M)$ непрерывна по $t \in [0;T]$ и не убывает по $M \geqslant 0$.

$\mathbf{F}_4$) Для всех $u \in U$, $t \in [0;T]$, $x \in W$, $\|x\|_{W[0;s]} \leqslant \beta(s)$, $s \in [0;t]$, имеем:

$$\|f[u]x\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})} \leqslant \Psi\big(\|\mathcal{N}_4[\beta]\|_{L_1[0;t]}\big), \text{ где } \mathcal{N}_4[\beta] \in L_1[0;T],\ \Psi \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+).$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* $\mathbf{A}_3$), $\mathbf{A}_4$), $\mathbf{F}_3$), $\mathbf{F}_4$). *Предположим, что функционально-интегральное неравенство*

$$\mathcal{L}_4\Big(t, \Psi\big(\|\mathcal{N}_4[\beta]\|_{L_1[0;t]}\big)\Big) \leqslant \beta(t), \quad t \in [0;T], \tag{3.1}$$

имеет решение $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$. *Тогда для каждого* $u \in U$ *уравнение* (0.3) *имеет по крайней мере одно решение* $x = x[u] \in W$, *удовлетворяющее оценке* $\|x\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t)$, $t \in [0;T]$.

Доказательство см. в § 4.

§ 4. Случай локально-интегральной оценки приращения операторов: доказательства

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Рассуждая от противного, предположим, что нашлись два решения $x = x_1$, $x = x_2$. Положим $\eta = x_2 - x_1$, $z_i = f[u](x_i)$, $i = 1,2$, $\beta(t) \equiv \max\big\{\|x_i\|_{W[0;T]}, i = 1,2\big\}$, $t \in [0;T]$. Пусть число $\delta > 0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега и непрерывности функции $R(s)$, $R(0) = 0$) выполняется неравенство

$$R\Big(\|\chi_h \mathcal{N}_3[\beta]\|_{L_1[0;T]}\Big) \leqslant \frac{1}{2} \tag{4.1}$$

при любом измеримом $h \subset [0;T]$, $\operatorname{mes} h \leqslant \delta$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, $t_i - t_{i-1} \leqslant \delta$, $i = \overline{1,k}$. Согласно условиям $\mathbf{A}_3$), $\mathbf{F}_3$), а также выбору разбиения и числа δ, то есть условию (4.1), получаем:

$$\|\eta\|_{W[0;t_1]} = \big\|\mathcal{F}_{[0;t_1]}[z_1] - \mathcal{F}_{[0;t_1]}[z_2]\big\|_{W[0;t_1]} \leqslant J(\chi_{[0;t_1]} z_1, \chi_{[0;t_1]} z_2) \leqslant$$
$$\leqslant R\Big(\|\mathcal{N}_3[\beta]\|_{L_1[0;t_1]}\Big)\|\eta\|_{W[0;t_1]} \leqslant \frac{1}{2}\|\eta\|_{W[0;t_1]}.$$

Таким образом, $\dfrac{1}{2}\|\eta\|_{W[0;t_1]} \leqslant 0$, то есть $\|\eta\|_{W[0;t_1]} = 0$.

Предположим, мы уже доказали, что $\|\eta\|_{W[0;t_{i-1}]} = 0$. Опять же, согласно условиям $\mathbf{A}_3$), $\mathbf{F}_3$), вольтерровости оператора $f[u]$ и предположению индукции (откуда $z_1(t) = z_2(t)$ при $t \in [0;t_{i-1}]$), а также выбору разбиения и числа δ, то есть условию (4.1), получаем:

$$\|\eta\|_{W[0;t_i]} = \big\|\mathcal{F}_{[0;t_i]}[z_1] - \mathcal{F}_{[0;t_i]}[z_2]\big\|_{W[0;t_i]} \leqslant J(\chi_{[0;t_i]} z_1, \chi_{[0;t_i]} z_2) \leqslant$$
$$\leqslant R\Big(\|\mathcal{N}_3[\beta]\|_{L_1[t_{i-1};t_i]}\Big)\|\eta\|_{W[0;t_i]} \leqslant \frac{1}{2}\|\eta\|_{W[0;t_i]}.$$

Таким образом, $\dfrac{1}{2}\|\eta\|_{W[0;t_i]} \leqslant 0$, то есть $\|\eta\|_{W[0;t_i]} = 0$.

По индукции, делаем вывод, что $\|\eta\|_W = 0$, то есть $x_1 = x_2$ в W. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Зафиксируем произвольно $u \in U$ и покажем, что уравнение (0.3) имеет решение. Для этого достаточно доказать разрешимость уравнения

$$x = G[x], \quad x \in W, \tag{4.2}$$

где $G = \mathcal{F}\big(f[u](x)\big)\colon W \to W$.

Пусть число $\delta > 0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега) выполняется неравенство (4.1) при любом измеримом $h \subset [0;T]$, $\operatorname{mes} h \leqslant \delta$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, $t_i - t_{i-1} \leqslant \delta$, $i = \overline{1,k}$.

Используя вольтерровость оператора G, будем рассматривать локальные аналоги уравнения (4.2):

$$x = G_j[x], \quad x \in W[0;t_j], \quad G_j = G_{[0;t_j]} = \mathcal{F}_{[0;t_j]} f[u]_{[0;t_j]}, \quad j \in \overline{1,k}. \tag{4.3}$$

Разрешимость уравнений (4.3) будем доказывать индукцией по $j = \overline{1,k}$. Дальнейшее доказательство проведем в несколько этапов.

1. Определим множество

$$Y_1 = \big\{x \in W[0;t_1]\colon \|x\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t),\ t \in [0;t_1]\big\}.$$

Очевидно, что множество Y_1 замкнуто в $W[0;t_1]$. Множество Y_1 не пусто, так как содержит $0 \in W[0;t_1]$.

Докажем, что $G_1\colon Y_1 \to Y_1$. Выберем произвольно $x \in Y_1$ и рассмотрим $y = G_1[z]$, $z = f[u]_{[0;t_1]}(x) \in L_\sigma(0,t_1;\widetilde{V})$. Зафиксируем произвольно $t \in [0;t_1]$. Согласно условию $\mathbf{A}_4$), для всех $t \in [0;t_1]$ имеем:

$$\|y\|_{W[0;t]} \leqslant \mathcal{L}_4\big(t, \|z\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})}\big), \quad t \in [0;t_1].$$

При этом по условию $\mathbf{F}_4$),

$$\|z\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})} \leqslant \Psi\big(\|\mathcal{N}_4[\beta]\|_{L_1[0;t]}\big).$$

Пользуясь неравенством (3.1), получаем:

$$\|y\|_{W[0;t]} \leqslant \mathcal{L}_4\Big(t, \Psi\big(\|\mathcal{N}_4[\beta]\|_{L_1[0;t]}\big)\Big) \leqslant \beta(t), \quad t \in [0;t_1].$$

Следовательно, $y \in Y_1$, то есть $G_1\colon Y_1 \to Y_1$.

2. Установим сжимаемость оператора G_1 на множестве Y_1. Выберем произвольно $x, \widetilde{x} \in Y_1$ и положим (индекс $[0;t_1]$ у операторов для краткости опускаем):

$$z = f[u](x), \quad \widetilde{z} = f[u](\widetilde{x}), \quad y = G_1[x] = \mathcal{F}[z], \quad \widetilde{y} = G_1[\widetilde{x}] = \mathcal{F}[\widetilde{z}].$$

Согласно условиям $\mathbf{A}_3$), $\mathbf{F}_3$), а также выбору разбиения и числа δ, то есть условию (4.1), получаем:

$$\begin{aligned}\|y - \widetilde{y}\|_{W[0;t_1]} &= \big\|\mathcal{F}_{[0;t_1]}[z] - \mathcal{F}_{[0;t_1]}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_1]} \leqslant JQ_{[0;t_1]}(z, \widetilde{z}) \leqslant \\ &\leqslant R\Big(\big\|\mathcal{N}_3[\beta]\big\|_{L_1[0;t_1]}\Big)\|x - \widetilde{x}\|_{W[0;t_1]} \leqslant \frac{1}{2}\|x - \widetilde{x}\|_{W[0;t_1]}.\end{aligned}$$

По принципу сжимающих отображений заключаем, что уравнение (4.3) при $j = 1$ имеет единственное решение в множестве Y_1.

3. Действуя по индукции, предположим, мы уже доказали существование функции $x = x_{i-1} \in W[0;t_{i-1}]$, являющейся решением уравнения (4.3) при $j = i-1$ и удовлетворяющей оценке $\|x_{i-1}\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t)$ при $t \in [0;t_{i-1}]$. Исходя из этого предположения, докажем существование функции $x = x_i \in W[0;t_i]$, являющейся решением уравнения (4.3) при $j = i$ и удовлетворяющей оценке $\|x_i\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t)$ при $t \in [0;t_i]$.

4. Определим множество

$$Y_i = \left\{x \in W[0;t_i]\colon \|x\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t),\ t \in (t_{i-1};t_i];\ x\big|_{[0;t_{i-1}]} = x_{i-1}\right\}.$$

Покажем, что множество Y_i непусто. Рассмотрим функцию

$$\overline{z}(t) = \begin{cases} f[u]_{[0;t_{i-1}]}(x_{i-1})(t), & t \in [0;t_{i-1}],\\ 0, & t \in (t_{i-1};t_i], \end{cases}$$

и положим $\overline{x} = \mathcal{F}_{[0;t_i]}[\overline{z}]$. Тогда, в силу вольтерровости операторов $\mathcal{F}$ и $f[u]$, при $t \in [0;t_{i-1}]$ получаем:

$$\overline{x}(t) = \mathcal{F}_{[0;t_{i-1}]}\big(f[u]_{[0;t_{i-1}]}x_{i-1}\big)(t) = G_{i-1}[x_{i-1}](t) = x_{i-1}(t).$$

По предположению индукции, для всех $t \in [0;t_{i-1}]$

$$\|\overline{x}\|_{W[0;t]} = \|x_{i-1}\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t).$$

А при $t \in (t_{i-1};t_i]$, пользуясь условием $\mathbf{A}_4$), получаем:

$$\|\overline{x}\|_{W[0;t]} \leqslant \mathcal{L}_4\big(t, \|\overline{z}\|_{L_{\sigma'}(0,t;\widetilde{V})}\big) = \mathcal{L}_4\big(t, \|\overline{z}\|_{L_{\sigma'}(0,t_{i-1};\widetilde{V})}\big), \quad t \in [0;T].$$

При этом по условию $\mathbf{F}_4$),

$$\|\overline{z}\|_{L_{\sigma'}(0,t_{i-1};\widetilde{V})} \leqslant \Psi\big(\|\mathcal{N}_4[\beta]\|_{L_1[0;t_{i-1}]}\big).$$

Пользуясь неравенством (3.1), получаем:

$$\|\overline{x}\|_{W[0;t]} \leqslant \mathcal{L}_4\Big(t, \Psi\big(\|\mathcal{N}_4[\beta]\|_{L_1[0;t_{i-1}]}\big)\Big) \leqslant \mathcal{L}_4\Big(t, \Psi\big(\|\mathcal{N}_4[\beta]\|_{L_1[0;t]}\big)\Big) \leqslant \beta(t), \quad t \in [0;T].$$

Таким образом, $\overline{x} \in Y_i$. Следовательно, $Y_i \neq \varnothing$. Совершенно аналогично пункту 1 данного доказательства устанавливается, что $G_i\colon Y_i \to Y_i$.

5. Установим сжимаемость оператора G_i на множестве Y_i. Выберем произвольно $x \in Y_i$, $\widetilde{x} \in Y_i$ и положим (индекс $[0;t_i]$ у операторов для краткости опускаем):

$$z = f[u](x), \quad \widetilde{z} = f[u](\widetilde{x}), \quad y = G_i[x] = \mathcal{F}[z], \quad \widetilde{y} = G_i[\widetilde{x}] = \mathcal{F}[\widetilde{z}].$$

Согласно условиям $\mathbf{A}_3$), $\mathbf{F}_3$), вольтерровости оператора $f[u]$ и определению множества Y_i (откуда $z(t) = \overline{z}(t)$ при $t \in [0;t_{i-1}]$), а также выбору разбиения и числа δ, то есть условию (4.1), получаем:

$$\begin{aligned}\|y - \widetilde{y}\|_{W[0;t_i]} = \big\|\mathcal{F}_{[0;t_i]}[z] - \mathcal{F}_{[0;t_i]}[\widetilde{z}]\big\|_{W[0;t_i]} \leqslant JQ_{[0;t_i]}(z,\widetilde{z}) \leqslant \\ \leqslant R\Big(\big\|\mathcal{N}_3[\beta]\big\|_{L_1[t_{i-1};t_i]}\Big)\|x - \widetilde{x}\|_{W[0;t_i]} \leqslant \frac{1}{2}\|x - \widetilde{x}\|_{W[0;t_i]}.\end{aligned}$$

По принципу сжимающих отображений заключаем, что уравнение (4.3) при $j = i$ имеет единственное решение в множестве Y_i.

6. По индукции делаем вывод, что уравнение (4.3) при $j = k$ имеет решение $x = x_k \in W$, удовлетворяющее оценке: $\|x\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t)$ при $t \in [0;t_k = T]$. Остается заметить, что x является решением уравнения (0.3). $\square$

§ 5. Достаточные условия компактного вложения

В § 1 мы использовали предположение о компактном вложении

$$W \subset L_q(0,T;H).$$

В приложениях зачастую оказывается, что пространство решений W имеет специальную структуру — такую, что для установления компактности указанного вложения можно воспользоваться известной теоремой Лионса–Темама (J. L. Lions–R. Temam), см., например, [19, глава 1, теорема 5.1, с. 70].

Лемма 2. *Пусть $V, \widetilde{V}$ — рефлексивные банаховы пространства, H — банахово пространство, $V \subset H$ компактно, $H \subset \widetilde{V}$ непрерывно, $p, q \in (1;+\infty)$. Тогда пространство*

$$W = \bigl\{z \in L_p(0,T;V)\colon z' \in L_q(0,T;\widetilde{V}\bigr\}$$

с нормой $\|z\|_W = \|z\|_{L_p(0,T;V)} + \|z'\|_{L_q(0,T;\widetilde{V})}$ является рефлексивным банаховым пространством, непрерывно вложенным в $\mathbf{C}(0,T;\widetilde{V})$ и компактно вложенным в $L_p(0,T;H)$.

В свою очередь, чтобы установить компактное вложение $V \subset H$, в случае соболевского пространства V, можно воспользоваться следующим вариантом теоремы Реллиха–Кондрашова, [20, § I.11.5, с. 106].

Лемма 3. *Если $1 < p < \infty$, $n \geqslant \ell p$, $q < \dfrac{np}{n-\ell p}$, область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ представляет объединение конечного числа ограниченных областей, каждая из которых звездна относительно своего шара, то вложение $W_p^\ell(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ компактно.*

О других вариантах см., например, [21, § 3.5, с. 82].

Что касается рефлексивности, справедливо следующее утверждение [21, § 2.2, теорема 2.4, с. 30].

Лемма 4. *Пространство $W_p^\ell(\Omega)$ банахово при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, рефлексивно при $1 < p < \infty$, сепарабельно при $1 \leqslant p < \infty$ и гильбертово при $p = 2$ относительно скалярного произведения $(x,y) = \sum\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant\ell} (D^\alpha x, D^\alpha y)$.*

§ 6. Пример: нелинейное волновое уравнение

Пусть $T > 0$, $\rho \geqslant 0$ — заданные числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область переменных $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $Q = \Omega \times (0;T)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $\widetilde{V} = L_2(\Omega)$, $V_0 = H_0^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$, $x_0 \in V_0$, $x_1 \in \widetilde{V}$, $z \in L_2(Q) = L_2(0,T;\widetilde{V})$. Следуя [19, § 1.3], рассмотрим задачу в цилиндре Q:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \Delta\, x + |x|^\rho x = z, \tag{6.1}$$

$$x(0) = x_0, \quad \frac{\partial x}{\partial t}(0) = x_1, \quad x\big|_{\partial\Omega\times(0;T)} = 0. \tag{6.2}$$

Пусть $p, q \in (1;+\infty)$. Положим

$$W = \bigl\{x \in L_\infty(0,T;V)\colon x' \in L_\infty(0,T;\widetilde{V}\bigr\}, \quad \widetilde{W} = \bigl\{x \in L_p(0,T;V)\colon x' \in L_q(0,T;\widetilde{V})\bigr\},$$

$$\|x\|_W = \|x\|_{L_\infty(0,T;V)} + \|x'\|_{L_\infty(0,T;\widetilde{V})}, \quad \|x\|_{\widetilde{W}} = \|x\|_{L_p(0,T;V)} + \|x'\|_{L_q(0,T;\widetilde{V})}.$$

Будем обозначать $\mathbf{C}(0,T;V)$ — пространство функций со значениями в V, непрерывных на отрезке $[0;T]$. Очевидно, что $W \subset \widetilde{W}$, и аналогично [22, глава IV, § 1, лемма 1.11, с. 173],

$\widetilde{W} \subset \mathbf{C}(0,T;\widetilde{V})$; оба вложения непрерывны. Аналогично [22, глава IV, § 1, теорема 1.16, с. 173], устанавливается, что W и $\widetilde{W}$ — банаховы пространства.

Начальные условия x_0, x_1 будем считать фиксированными. Непосредственно из [19, § 1.3, теорема 1.1, с. 20; § 1.5, теорема 1.2, с. 27] вытекает следующая лемма.

Лемма 5. *Если* $\rho \leqslant \dfrac{2}{n-2}$ *(при* $n=2$*:* $\rho \in [0;+\infty]$*), то для всякого* $z \in L_2(Q) = L_2(0,T;\widetilde{V})$ *задача* (6.1), (6.2) *имеет единственное решение* $x \in W$, *которое мы условимся обозначать как* $x = \mathcal{F}[z]$.

Замечание 2. На самом деле в [19, § 1.3, теорема 1.1] существование решения доказывается в пространстве
$$W_0 = \bigl\{x \in L_\infty(0,T;V_0)\colon x' \in L_\infty(0,T;\widetilde{V}\bigr\}.$$
Но, как видно из доказательства [19, § 1.5, теорема 1.2], единственность решения устанавливается в пространстве W, а уже из этого следует единственность и в более узком пространстве W_0.

Далее будем считать, что $\rho \leqslant \dfrac{2}{n-2}$, $n \geqslant 3$. Тем самым, формулой $x = \mathcal{F}[z]$ определен оператор $\mathcal{F}\colon L_2(0,T;\widetilde{V}) \to W$. Соответственно, если задан управляемый оператор $f[u]\colon W \to L_2(0,T;\widetilde{V})$, то задача (6.2) для управляемого уравнения
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \Delta\, x + |x|^\rho x = f[u](x), \tag{6.3}$$
переписывается в виде уравнения (0.3).

Вольтерровость оператора $\mathcal{F}$ вытекает из следующих утверждений.

Лемма 6. *Для любого* $x \in W$ *существует производная* $(x\big|_{0;\tau]})'$, *понимаемая в смысле распределений из* $\mathcal{D}^*(0,\tau;\widetilde{V})$, *и справедливо равенство*
$$(x\big|_{0;\tau]})' = x'\big|_{[0;\tau]}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [22, глава IV, леммы 1.8, 1.9; см. также доказательство леммы 1.11], имеет место представление
$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t x'(s)\,ds, \quad t \in [0;T]. \tag{6.4}$$
В частности, такое же представление справедливо и для сужения на $[0;\tau]$. Тогда [22, глава IV, лемма 1.8, с. 169] существует производная $(x\big|_{0;\tau]})'$, понимаемая в смысле распределений из $\mathcal{D}^*(0,\tau;\widetilde{V})$, и справедливо доказываемое равенство. □

Лемма 7. *Множество сужений* $\bigl\{x\big|_{[0;\tau]}\colon x \in W\bigr\}$ *совпадает с* $W_{[0;\tau]}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вложение множества сужений в $W[0;\tau]$ следует из леммы 6. Докажем обратное вложение. Выберем произвольно функцию $x \in W_{[0;\tau]}$. Нам достаточно построить для нее продолжение $\overline{x} \in W$. Это продолжение будем строить последовательно: сначала на $[0;2\tau]$, потом — на $[0;4\tau]$, и т. д., до тех пор, пока не окажется, что $2k\tau \geqslant T$. Для продолжения с отрезка $[0;2^k\tau]$ на отрезок $[0;2^{k+1}\tau]$ будем использовать точно такую же процедуру, как и при построении продолжения с $[0;\tau]$ на $[0;2\tau]$. Поэтому нам достаточно описать лишь этот первый шаг. Определим функцию

$$\overline{z}(t)=\begin{cases}x'(t), & t\in[0;\tau],\\ -x'(2\tau-t), & t\in(\tau;2\tau].\end{cases}$$

На всякий случай отметим, что продолжать производную нулем нельзя, так как в противном случае получится, что $\overline{x}(t)\equiv x(\tau)$ при $t\in[\tau;2\tau]$. Однако (хотя, конечно, $\big\|x(\tau)\big\|_{\widetilde{V}}<\infty$), может оказаться $\big\|x(\tau)\big\|_{V}=+\infty$ (такое возможно на множестве нулевой меры в $[0;\tau]$). По определению очевидно, что $\|\overline{z}\|_{L_\infty(0,2\tau;\widetilde{V})}\leqslant\|x'\|_{L_\infty(0,\tau;\widetilde{V})}<\infty$. Положим

$$\overline{x}(t)=x(0)+\int\limits_0^t z(s)\,ds.$$

Согласно [22, глава IV, леммы 1.8, 1.9; см. также доказательство леммы 1.11], существует производная в смысле распределений $\overline{x}'=z$ на $[0;2\tau]$.

Оценим норму $\|\overline{x}\|_{L_\infty(0,2\tau;V)}$. В силу (6.4), $\overline{x}\big|_{[0;\tau]}=x$. При всех $t\in(\tau;2\tau]$ имеем:

$$\overline{x}(t)=x(0)+\int\limits_0^\tau x'(s)\,ds-\int\limits_\tau^t x'(2\tau-s)\,ds=x(0)+\int\limits_0^\tau x'(s)\,ds+\int\limits_\tau^{2\tau-t} x'(\xi)\,d\xi=$$
$$=x(0)+\int\limits_0^\tau x'(s)\,ds-\int\limits_{2\tau-t}^\tau x'(\xi)\,d\xi=x(0)+\int\limits_0^{2\tau-t} x'(s)\,ds=x(2\tau-t).$$

Отсюда ясно, что $\|\overline{x}\|_{L_\infty(0,2\tau;V)}=\|x\|_{L_\infty(0,\tau;V)}<\infty$. Таким образом, продолжение $\overline{x}\in W[0;2\tau]$, $\|\overline{x}\|_{W[0;2\tau]}\leqslant\|x\|_{W[0;\tau]}$. □

Непосредственно из лемм 6, 7 следует следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть* $x,\overline{x}\in W$, $x(t)=\overline{x}(t)$ *для п. в.* $t\in[0;\tau]$. *Тогда*

$$x'\big|_{[0;\tau]}=\big(x\big|_{[0;\tau]}\big)'=\big(\overline{x}\big|_{[0;\tau]}\big)'=\overline{x}'\big|_{[0;\tau]}$$

в $L_\infty(0,\tau;\widetilde{V})$, *то есть оператор дифференцирования по времени является вольтерровым.*

Далее мы получим необходимые нам оценки, обеспечивающие выполнение условий $\mathbf{A}_1$)–$\mathbf{A}_4$). Следуя [19, глава 1, § 1.4, с. 22], определим билинейную форму

$$a(x,y)=\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega\frac{\partial x}{\partial\xi_i}\frac{\partial y}{\partial\xi_i}\,d\xi,\quad x,y\in V.$$

Как указано в [19, глава 1, § 1.4, с. 23], $\|x\|_a=\sqrt{a(x,x)}$ есть эквивалентная норма в V. Для краткости будем обозначать $\|.\|_{\widetilde{V}}=|.|$, V_a — пространство V, снабженное нормой $\|.\|_a$.

Лемма 9. *Существует константа* $c>0$ *такая, что для всех* $z_i\in L_2(Q)=L_2(0,T;\widetilde{V})$, $x_i=\mathcal{F}[z_i]$, $i=1,2$, $t\in[0;T]$ *имеем:*

$$\|x_1-x_2\|_{L_\infty(0,t;V_a)}\leqslant 2e^{ct}\int\limits_0^t\big|z_1(s)-z_2(s)\big|\,ds,\ \|x_1'-x_2'\|_{L_\infty(0,t;\widetilde{V})}\leqslant 2e^{ct}\int\limits_0^t\big|z_1(s)-z_2(s)\big|\,ds.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $w = x_1 - x_2$. Аналогично доказательству [19, глава 1, § 1.5, теорема 1.2, с. 27] получаем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\big\|w(t)\big\|_a^2 + \big|w'(t)\big|^2\Big) =$$
$$= \int\limits_\Omega \big(|x_2(t)|^\rho x_2(t) - |x_1(t)|^\rho x_1(t)\big) w'(t)\,d\xi + \int\limits_\Omega \big(z_1(t) - z_2(t)\big) w'(t)\,d\xi.$$

При доказательстве [19, глава 1, § 1.5, теорема 1.2] уже была установлена оценка

$$\int\limits_\Omega \big(|x_2(t)|^\rho x_2(t) - |x_1(t)|^\rho x_1(t)\big) w'(t)\,d\xi \leqslant c\big\|w(t)\big\|_a \big|w'(t)\big|.$$

Используя очевидное неравенство $2\alpha\beta \leqslant \alpha^2 + \beta^2$, а также неравенство Гёльдера, получаем:

$$\big\|w(t)\big\|_a^2 + \big|w'(t)\big|^2 \leqslant c\int\limits_0^t \Big(\big\|w(s)\big\|_a^2 + \big|w'(s)\big|^2\Big)\,ds + 2\int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\,\big|w'(s)\big|\,ds.$$

По лемме Гроноулла [22, § 5.1, лемма 1.3, с. 191]

$$\big\|w(t)\big\|_a^2 + \big|w'(t)\big|^2 \leqslant 2e^{ct}\|w'\|_{L_\infty(0,t;\widetilde{V})}\int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\,ds.$$

В силу монотонности правой части по $t \in [0;T]$,

$$\|w\|^2_{L_\infty(0,t;V_a)} + \|w'\|^2_{L_\infty(0,t;\widetilde{V})} \leqslant 2e^{ct}\|w'\|_{L_\infty(0,t;\widetilde{V})}\int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\,ds.$$

Дальнейшее очевидно. □

Непосредственно из леммы 9 получаем (с точностью до эквивалентной нормы):

$$\big\|\mathcal{F}[z_1] - \mathcal{F}[z_2]\big\|_{W[0;t]} \leqslant J[\chi_{[0;t]}z_1, \chi_{[0;t]}z_2], \quad J[z_1, z_2] = 4e^{cT}\int\limits_0^T \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\,ds,$$

то есть условие $\mathbf{A}_3$) выполнено.

Для выполнения условия $\mathbf{F}_3$) достаточно, чтобы оператор $f[u]$ был оператором Немыцкого $(f[u]x)(\xi,t) = f[u]\big(\xi, t, x(\xi,t), x'(\xi,t)\big)$ и удовлетворял неравенству:

$$\big|f[u]\big(., t, x_1(., t), x_1'(., t)\big) - f[u]\big(., t, x_2(., t), x_2'(., t)\big)\big| \leqslant \mathcal{N}_3[\beta](t)\|x_1 - x_2\|_{W[0;t]},$$

при п. в. $t \in [0;T]$ и всех $x_i \in W$, $\|x_i\|_{W[0;t]} \leqslant \beta(t)$, $i = 1, 2$. При этом $R(s) = 4e^{cT}s$.

Лемма 10. *Пусть* $z \in L_2(Q)$, $x = \mathcal{F}[z]$,

$$\gamma_0 = \|x_0\|_a^2 + |x_1|^2 + \frac{2}{\rho+2}\|x_0\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)}.$$

Тогда для всех $t \in [0;T]$ *справедлива оценка:*

$$\big\|x(t)\big\|_a^2 + \big|x'(t)\big|^2 \leqslant e^t\left(\gamma_0 + \int\limits_0^t \big|z(s)\big|^2\,ds\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как видно из доказательства [19, § 1.3, теорема 1.1], справедлива оценка

$$\big\|x(t)\big\|_a^2 + \big|x'(t)\big|^2 \leqslant \gamma_0 + 2\int\limits_0^t \big|z(s)\big|\,\big|x'(s)\big|\,ds,$$

откуда легко получаем ($2\alpha\beta \leqslant \alpha^2 + \beta^2$):

$$\big|x'(t)\big|^2 \leqslant \gamma_0 + \int\limits_0^t \big|z(s)\big|^2\,ds + \int\limits_0^t \big|x'(s)\big|^2\,ds.$$

Пользуясь леммой Гронуолла, находим:

$$\big|x'(t)\big|^2 \leqslant e^t\left(\gamma_0 + \int\limits_0^t \big|z(s)\big|^2\,ds\right).$$

Таким образом,

$$\big\|x(t)\big\|_a^2 + \big|x'(t)\big|^2 \leqslant \gamma_0 + \int\limits_0^t \big|z(s)\big|^2\,ds + \gamma_0\int\limits_0^t e^s\,ds + \int\limits_0^t e^s\int\limits_0^s \big|z(\tau)\big|^2\,d\tau\,ds.$$

Беря последнее слагаемое по частям, находим:

$$\int\limits_0^t e^s\int\limits_0^s \big|z(\tau)\big|^2\,d\tau\,ds = e^t\int\limits_0^t \big|z(\tau)\big|^2\,d\tau\,ds - \int\limits_0^t e^s\big|z(s)\big|^2\,ds.$$

Стало быть,

$$\big\|x(t)\big\|_a^2 + \big|x'(t)\big|^2 \leqslant \gamma_0(1+e^t-1) + \int\limits_0^t (1+e^t-e^s)\big|z(s)\big|^2\,ds. \qquad \square$$

С учетом монотонности правой части по $t\in[0;T]$, непосредственно из леммы 10 вытекает оценка (с точностью до эквивалентной нормы):

$$\|x\|_{W[0;t]} \leqslant 2e^{t/2}\sqrt{\gamma_0 + \int\limits_0^t \big|z(s)\big|^2\,ds} \leqslant 2e^{t/2}\big(\sqrt{\gamma_0} + \|z\|_{L_2(0,t;\widetilde{V})}\big).$$

Таким образом, условие $\mathbf{A}_4$) выполняется при $\mathcal{L}_4(t,s) = 2e^{t/2}(\sqrt{\gamma_0}+s)$, $\sigma'=\sigma=2$.

Для выполнения условия $\mathbf{F}_4$) опять же достаточно, чтобы оператор $f[u]$ был оператором Немыцкого $(f[u]x)(\xi,t) = f[u]\big(\xi,t,x(\xi,t),x'(\xi,t)\big)$ и удовлетворял неравенству:

$$\big|f[u]\big(.,t,x(.,t),x'(.,t)\big)\big| \leqslant \mathcal{N}_5(t,\beta(t)),$$

при п. в. $t\in[0;T]$ и всех $x\in W$, $\|x\|_{W[0;t]}\leqslant\beta(t)$. При этом $\Psi(s)=\sqrt{s}$, $\mathcal{N}_4[\beta] = \mathcal{N}_5^2(.,\beta)$.

Неравенство (3.1) принимает вид:

$$2e^{t/2}\big(\sqrt{\gamma_0} + \|\mathcal{N}_5(.,\beta)\|_{L_2[0,t]}\big) \leqslant \beta(t), \quad t\in[0;T].$$

Сделаем замену: $\alpha(t) = \left(\dfrac{1}{2}e^{-t/2}\beta(t) - \sqrt{\gamma_0}\right)^2$. Соответственно,

$$\beta(t) = 2e^{t/2}\big(\sqrt{\alpha(t)} + \sqrt{\gamma_0}\big) \equiv B[\alpha](t).$$

Тогда нам достаточно, чтобы задача Коши

$$\alpha' = \mathcal{N}_5^2\big(t, B[\alpha](t)\big), \quad \alpha(0) = 0,$$

имела решение на $[0;T]$. Таким образом, можно пользоваться результатами § 3 для задачи (6.3), (6.2).

Исходя из проведенных рассуждений, нетрудно обосновать выполнение условий $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{A}_2$) и обеспечить выполнение условий $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$). Для этого достаточно лишь предъявить компактное вложение $W \subset L_q(0,T;H)$ при некотором $V \subset H \subset \widetilde{V}$. Пусть область Ω удовлетворяет условиям леммы 3. Заметим, что при $n \geqslant 2$ в любом случае выполняется неравенство $2 < \dfrac{2n}{n-2}$. Поэтому, согласно лемме 3 (при $p=2$, $\ell=1$) для всякого $r \in \left[2; \dfrac{2n}{n-2}\right)$ и $H = L_r(\Omega)$ имеет место компактное вложение $V \subset H$, и очевидно, справедливо непрерывное вложение $H \subset \widetilde{V}$. В таком случае, в соответствии с леммой 2, имеем компактное вложение $\widetilde{W} \subset L_p(0,T;H)$. Учитывая, что пространство W, в свою очередь, непрерывно (а значит, и ограниченно) вложено в $\widetilde{W}$, множество, ограниченное в W, будет ограниченным и в $\widetilde{W}$. Поэтому соответствующее вложение $W \subset L_p(0,T;H)$ является, очевидно, компактным. Таким образом, можно пользоваться результатами § 1 для задачи (6.3), (6.2).

§ 7. О двух версиях уравнения (0.1)

Пусть z — некоторый произвольно фиксированный элемент подходящего пространства. Для уравнения вида (0.1) возможны два случая: а) $F[x,z] = F[z]$; б) $F[x,z]$ зависит от x.

Например, если обратиться вновь к задаче (6.1), (6.2), то можно считать, что $F[z] = \mathcal{F}[z]$, см. § 6; это соответствует случаю а). Используя уже известные результаты о разрешимости задачи (6.1), (6.2), свойствах решения и характере его зависимости от правой части $z \in Z = L_2(Q)$, мы в § 6 получаем необходимые нам свойства оператора $F[z]$. Но допустим, что нам известно лишь о факте разрешимости задачи (6.1), (6.2), но неизвестны необходимые свойства решения. В этом случае можно использовать следующий прием *линеаризации*. Прежде всего, рассматривается линейный аналог уравнения (6.1):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \Delta\, x = z. \tag{7.1}$$

Условия разрешимости линейной задачи (7.1), (6.2) и свойства решения хорошо известны. При фиксированном $y \in W$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \Delta\, x = z - |y|^\rho y. \tag{7.2}$$

Это частный случай уравнения (7.1). Поэтому, если обозначить $G[z]$ — решение задачи (7.1), (6.2), $F[y,z] = G\big[z - |y|^\rho y\big]$ — решение задачи (7.2), (6.2), то свойства оператора F нам оказываются известными. При этом задача (6.1), (6.2) может быть представлена в виде абстрактного уравнения

$$x = F[x,z]. \tag{7.3}$$

Эта ситуация соответствует случаю б). А если учесть, что оператор представляется в виде $F[y,z] = G\big[f(y,z)\big]$, где $f(y,z) = z - |y|^\rho y$, для доказательства разрешимости уравнения (7.3) можно, в свою очередь, использовать признаки ТГР. Правда, если действовать этим способом, условия ТГР для уравнения (0.2), то есть в данном случае задачи (6.3), (6.2), окажутся несколько более грубыми, поскольку будут более ограниченными возможности для учета специфики задачи (6.1), (6.2). Отметим, кстати, что при исследовании уравнений Навье–Стокса зачастую применяется аналогичный прием линеаризации, см., например, [16].

Случай а), фактически, имеет место, когда известно, что для всякого фиксированного z из некоторого класса та или иная распределенная система с параметром z заведомо имеет решение x и известны те или иные свойства зависимости x от z. Как правило, элемент z представляет собой правую часть некоторого дифференциального или интегро-дифференциального уравнения (обыкновенного или в частных производных) — договоримся называть его уравнением с (произвольно) фиксированной правой частью. Глобальной разрешимости различных конкретного вида уравнений с фиксированной правой частью посвящена довольно обширная литература — см., например, [12–15]. Зависимость решения x от z как раз и выражает оператор F. Во многих работах, посвященных глобальной разрешимости уравнений с фиксированной правой частью, не просто устанавливается факт разрешимости, но и выводятся некоторые оценки (по норме или интегрального вида) x через z. В частности, при доказательстве теорем единственности решения, выводятся оценки приращения решения через приращение правой части. Тем самым, оказывается, что оператор F, образно говоря, «обретает плоть и кровь» в виде тех или иных конкретных свойств. И зачастую оказывается возможным уловить нечто общее в этих свойствах для различных уравнений. Постулируя эти общие свойства, можно рассматривать абстрактное уравнение (0.1), абстрагируясь от того, каким именно уравнением с фиксированной правой частью порожден оператор F — важны лишь сами свойства. Если, скажем, исходное уравнение было линейным, то линейным оказывается и оператор F, и более того, характерной является ситуация, когда этот оператор еще и ограничен. Между тем, известны результаты о глобальной разрешимости и для нелинейных уравнений. Понятно, что в зависимости от конкретного класса или типа уравнений с фиксированной правой частью, от которых мы отправлялись, будут различаться и те наборы свойств оператора F, которые мы постулируем. Стоит отметить, что элемент z может иметь и какой-либо иной смысл — это может быть не только правая часть, но и начальные и/или краевые условия, коэффициент уравнения или какой-либо иной параметр.

Случай б) возникает, в частности, когда для исследования уравнения более сложного вида привлекаются результаты исследований уравнения более простого вида, как это было только что описано выше на примере задачи (6.1), (6.2). В данной статье мы ограничились рассмотрением случая а). Но, с учетом вышесказанного, изучение случая б) тоже представляется достаточно актуальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернов А. В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. № 3. С. 95–107. http://mi.mathnet.ru/ivm7249
2. Чернов А. В. О тотальном сохранении разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с неизотонным и немажорируемым оператором // Известия высших учебных заведений. Математика. 2017. № 6. С. 83–94. http://mi.mathnet.ru/ivm9252
3. Чернов А. В. Мажорантный признак первого порядка тотально глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 4. С. 531–548. https://doi.org/10.20537/vm180407

4. Чернов А. В. О тотально глобальной разрешимости управляемого операторного уравнения второго рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 92–111. https://doi.org/10.35634/vm200107
5. Чернов А. В. О невольтерровом признаке первого порядка сохранения разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 269–280. https://doi.org/10.1134/S0374064120020119
6. Чернов А. В. О тотально глобальной разрешимости эволюционного уравнения с монотонным нелинейным оператором // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 130–149. https://doi.org/10.35634/vm220109
7. Чернов А. В. Операторные уравнения II рода: теоремы о существовании и единственности решения и о сохранении разрешимости // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 5. С. 656–668. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48612150
8. Калантаров В. К., Ладыженская О. А. О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102. http://mi.mathnet.ru/znsl1983
9. Сумин В. И. Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21. http://mi.mathnet.ru/zvmmf3318
10. Сумин В. И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть 1. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
11. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О «разрушении» решения сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью // Математические заметки. 2006. Т. 79. Вып. 6. С. 879–899. https://doi.org/10.4213/mzm2761
12. Kobayashi T., Pecher H., Shibata Y. On a global in time existence theorem of smooth solutions to a nonlinear wave equation with viscosity // Mathematische Annalen. 1993. Vol. 296. No. 2. P. 215–234. https://doi.org/10.1007/BF01445103
13. Lu G. Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: A Cauchy problem // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 1995. Vol. 24. No. 8. P. 1193–1206. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)00190-S
14. Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Soriano J. A. On existence and asymptotic stability of solutions of the degenerate wave equation with nonlinear boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 281. No. 1. P. 108–124. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00558-9
15. Saito H. Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal regularity L_p–L_q class // Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 264. No. 3. P. 1475–1520. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.045
16. Серёгин Г. А., Шилкин Т. Н. Теоремы лиувиллевского типа для уравнений Навье–Стокса // Успехи математических наук. 2018. Т. 73. Вып. 4 (442). С. 103–170. https://doi.org/10.4213/rm9822
17. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1965. https://zbmath.org/?q=an:0142.30203
18. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
19. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
20. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
21. Павлова М. Ф., Тимербаев М. Р. Пространства Соболева (теоремы вложения). Казань: КГУ, 2010.
22. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

Поступила в редакцию 14.09.2022

Принята к публикации 26.11.2022

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23;
Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Цитирование: А. В. Чернов. О тотально глобальной разрешимости эволюционного вольтеррова уравнения второго рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 593–614.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 4. Pp. 593–614.

A. V. Chernov

On totally global solvability of evolutionary Volterra equation of the second kind

Keywords: nonlinear evolutionary Volterra equation in a Banach space, nonlinear wave equation, totally global solvability, uniqueness of solution.

MSC2020: 47J05, 47J35, 47N10

DOI: 10.35634/vm220407

Let H be a Banach space, $T > 0$, $\sigma \in [1;\infty]$ and let $W[0;\tau]$, $\tau \in (0;T)$, be the scale of Banach spaces which is induced by restrictions from a space $W = W[0;T]$; $\mathcal{F}\colon L_\sigma(0,T;H) \to W$ be a Volterra operator (an operator with Volterra property); $f[u]\colon W \to L_\sigma(0,T;H)$ be a controlled Volterra operator depending on a control $u \in U$. We consider the equation as follows

$$x = \mathcal{F}\big(f[u](x)\big), \quad x \in W.$$

For this equation we establish signs of totally (with respect to a set of admissible controls) global solvability subject to global solvability of some functional integral inequality in the space $\mathbb{R}$. In many particular cases the above inequality may be realized as the Cauchy problem associated with an ordinary differential equation. In fact, the analogous result which was obtained by the author formerly is developed, this time under other hypotheses, more convenient for practical usage (although in more particular statement). Separately, we consider the cases of compact embedding of spaces and continuity of the operators $\mathcal{F}$, $f[u]$ (such an approach has not been used by the author formerly), from one hand, and of local integral analogue of the Lipschitz condition with respect to that operators, from another hand. In the second case we prove also the uniqueness of solution. In the first case we use Schauder theorem and in the second case we apply the technique of solution continuation along with the time axis (id est continuation along with a Volterra chain). Finally, as an example, we consider a nonlinear wave equation in the space $\mathbb{R}^n$.

REFERENCES

1. Chernov A. V. A majorant criterion for the total preservation of global solvability of controlled functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 3, pp. 85–95. https://doi.org/10.3103/S1066369X11030108
2. Chernov A. V. On total preservation of solvability of controlled Hammerstein-type equation with non-isotone and non-majorizable operator, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 72–81. https://doi.org/10.3103/S1066369X1706010X
3. Chernov A. V. Majorant sign of the first order for totally global solvability of a controlled functional operator equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 531–548 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180407
4. Chernov A. V. On totally global solvability of controlled second kind operator equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 92–111 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm200107
5. Chernov A. V. Non-Volterra first-order test for the preservation of solvability of a controlled Hammerstein-type equation, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 264–275. https://doi.org/10.1134/S0012266120020111
6. Chernov A. V. On totally global solvability of evolutionary equation with monotone nonlinear operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 1, pp. 130–149 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220109
7. Chernov A. V. Operator equations of the second kind: Theorems on the existence and uniqueness of the solution and on the preservation of solvability, *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 5, pp. 649–661. https://doi.org/10.1134/S0012266122050056

8. Kalantarov V. K., Ladyzhenskaya O. A. The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types, *Journal of Soviet Mathematics*, 1978, vol. 10, issue 1, pp. 53–70. https://doi.org/10.1007/BF01109723
9. Sumin V. I. The features of gradient methods for distributed optimal-control problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 1–15. https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90002-A
10. Sumin V. I. *Funktsional'nye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami. Chast' 1. Vol'terrovy uravneniya i upravlyaemye nachal'no-kraevye zadachi* (Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems. Part I. Volterra equations and controlled initial boundary value problems), Nizhni Novgorod: Nizhni Novgorod State University, 1992.
11. Korpusov M. O., Sveshnikov A. G. "Destruction" of the solution of a strongly nonlinear equation of pseudoparabolic type with double nonlinearity, *Mathematical Notes*, 2006, vol. 79, no. 6, pp. 820–840. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0093-8
12. Kobayashi T., Pecher H., Shibata Y. On a global in time existence theorem of smooth solutions to a nonlinear wave equation with viscosity, *Mathematische Annalen*, 1993, vol. 296, no. 2, pp. 215–234. https://doi.org/10.1007/BF01445103
13. Lu G. Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: a Cauchy problem, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1995, vol. 24, no. 8, pp. 1193–1206. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)00190-S
14. Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Soriano J. A. On existence and asymptotic stability of solutions of the degenerate wave equation with nonlinear boundary conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, vol. 281, no. 1, pp. 108–124. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00558-9
15. Saito H. Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal regularity L_p–L_q class, *Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 264, no. 3, pp. 1475–1520. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.045
16. Seregin G. A., Shilkin T. N. Liouville-type theorems for the Navier–Stokes equations, *Russian Mathematical Surveys*, 2018, vol. 73, no. 4, pp. 661–724. https://doi.org/10.1070/RM9822
17. Vulikh B. Z. *Kratkii kurs teorii funktsii veshchestvennoi peremennoi* (Theory of functions of a real variable), Moscow: Nauka, 1965. https://zbmath.org/?q=an:0142.30203
18. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional analysis*, Oxford: Pergamon Press, 1982. https://zbmath.org/?q=an:0484.46003
19. Lions J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Paris: Dunod, 1969. https://zbmath.org/?q=an:0189.40603
20. Sobolev S. L. *Some applications of functional analysis in mathematical physics*, Providence, RI: American Mathematical Society, 1991. https://zbmath.org/?q=an:0732.46001
21. Pavlova M. F., Timerbaev M. R. *Prostranstva Soboleva (teoremy vlozheniya)* (Sobolev spaces (embedding theorems)), Kazan: Kazan State University, 2010.
22. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen* (Nonlinear operator equations and operator differential equations), Berlin: Akademie, 1974. https://zbmath.org/?q=an:0289.47029

Received 14.09.2022

Accepted 26.11.2022

Andrei Vladimirovich Chernov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia;
Nizhni Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Citation: A. V. Chernov. On totally global solvability of evolutionary Volterra equation of the second kind, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 593–614.