МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 528–545.

УДК 517.927.2

© *М. Б. Зверева*

МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИЙ СИСТЕМЫ СТИЛТЬЕСОВСКИХ СТРУН С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ

В настоящей работе проведено исследование модели деформаций системы из n стилтьесовских струн, расположенных вдоль геометрического графа-звезды, с нелинейным условием в узле. Соответствующая граничная задача имеет вид

$$\begin{cases} -\left(p_i u_i'\right)(x) + \displaystyle\int_0^x u_i\, dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_i u_i')(+0), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0)u_i'(+0) \in N_{[-m,m]}u(0), \\ u_1(0) = u_2(0) = \ldots = u_n(0) = u(0), \\ (p_i u_i')(l_i - 0) + u_i(l_i)\Delta Q_i(l_i) = \Delta F_i(l_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Здесь функции $u_i(x)$ определяют деформации каждой из струн; $F_i(x)$ описывают распределение внешней нагрузки; $p_i(x)$ характеризуют упругость струн; $Q_i(x)$ описывают упругую реакцию внешней среды. Скачок $\Delta F_i(l_i)$ равняется сосредоточенной в точке l_i внешней силе; скачок $\Delta Q_i(l_i)$ совпадает с жесткостью упругой опоры (пружины), прикрепленной к точке l_i. Условие $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0)u_i'(+0) \in N_{[-m,m]}u(0)$ возникает за счет наличия в узле ограничителя, представленного отрезком $[-m, m]$, на перемещение струн под воздействием внешней нагрузки, то есть предполагается, что $|u(0)| \leqslant m$. Здесь через $N_{[-m,m]}u(0)$ обозначен нормальный конус к $[-m, m]$ в точке $u(0)$. В работе проведен вариационный вывод модели; доказаны теоремы существования и единственности решения; проанализированы критические нагрузки, при которых происходит соприкосновение струн с ограничителем; приведена явная формула представления решения.

Ключевые слова: интеграл Стилтьеса, функция ограниченной вариации, мера, геометрический граф, энергетический функционал.

DOI: 10.35634/vm220403

Введение

Математические модели, описываемые в терминах ветвящегося аргумента, то есть аргумента, принимающего значения из некоторого геометрического графа, возникают при анализе процессов в сложных системах, допускающих представление в виде набора одномерных континуумов, взаимодействующих только через концы. Такого рода объекты достаточно типичны. Например, упругие сетки, решетки стержней, электрические цепи, акустические сети, волноводы, гидравлические системы и прочие. Активный математический интерес к исследованию таких задач привел к появлению многочисленных публикаций. Особенно отметим работы Ю. В. Покорного [7, 13, 15], В. Л. Прядиева [8], О. М. Пенкина [4], А. В. Боровских [14], В. В. Провоторова [17], В. А. Юрко [20], М. Ш. Бурлуцкой [10], А. П. Хромова [2], Р. Ч. Кулаева [6], J. von Below [9], S. Nicaise [12]. Также выделим публикации В. Я. Дерра [3], В. И. Родионова [1], А. А. Шкаликова [19], А. М. Савчука [18], в которых для случая отрезка проводилось исследование решений дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Однако во всех этих работах рассматривались задачи с линейными граничными условиями.

В данной статье для дифференциального уравнения второго порядка с импульсными особенностями в коэффициентах и правой части, порождаемыми наличием локализованных внешних нагрузок (упругих опор, сосредоточенных сил), проводится поточечный анализ граничной задачи на геометрическом графе-звезде с нелинейным условием в узле. При этом используется стилтьесовский подход, продемонстрировавший свою эффективность, например, в работах [5, 11, 15, 16].

§ 1. Основные обозначения и определения

Будем предполагать, что граф-звезда Γ ориентирован от узла и состоит из отрезков $[0, l_i]$, занумерованных произвольным образом ($i = 1, 2, \dots, n$). Точка 0 (узел) соответствует внутренней вершине графа, точки l_i — граничные вершины графа, интервалы $(0, l_i)$ — ребра графа. Обозначим через $\partial\Gamma$ множество граничных вершин графа; γ_i — ребро графа ($i = 1, 2, \dots, n$); $R(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$.

Скалярной функцией $z(x)$, заданной на графе Γ, называется отображение $z\colon \Gamma \to R$. Сужение $z(x)$ на $(0, l_i]$ обозначим через $z_i(x)$.

Будем говорить, что определенная на ребре γ_i функция $z(x)$ имеет ограниченную вариацию на этом ребре, если:

(1) функция $z(x)$ имеет конечные односторонние пределы в граничных точках $x = 0$ и $x = l_i$ ребра γ_i;

(2) найдется константа c_i такая, что для любого разбиения ребра γ_i точками $0 = x_0^i < x_1^i < \ldots < x_{n_i}^i = l_i$ выполняется неравенство $\sum\limits_{j=0}^{n_i-1} |z(x_{j+1}^i) - z(x_j^i)| \leqslant c_i$ (в граничных точках ребра функция z определяется предельными значениями).

Скачок функции z в граничной вершине $a \in \partial\Gamma$ будем определять как $\Delta z(a) = z(a) - z(a - 0)$; скачок функции z во всякой внутренней точке ξ ребра графа равен $\Delta z(\xi) = z(\xi + 0) - z(\xi - 0)$; скачок функции в узле будем определять как $\Delta z(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} (z_i(0+0) - z(0))$.

Будем называть определенную на Γ функцию абсолютно непрерывной на Γ, если она является абсолютно непрерывной на каждом ребре γ_i, непрерывной в узле, то есть такой, что односторонние пределы по ребрам совпадают и их общее значение равно значению функции в узле, непрерывной в точках из $\partial\Gamma$.

Важную роль в настоящей статье будет играть интегро-дифференциальное уравнение вида

$$-(\widetilde{p}v')(x) + \int_0^x v\, d\widetilde{Q} = \widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(0) - (\widetilde{p}v')(+0), \quad x \in \overline{[0, l]}_\sigma, \tag{1.1}$$

исследуемое в работах [11, 16]. Предполагается, что функции $\widetilde{p}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{Q}$ имеют ограниченную вариацию на отрезке $[0, l]$, причем, $\inf\limits_{[0,l]} \widetilde{p} > 0$; функции $\widetilde{p}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{Q}$ непрерывны в точках $x = 0$, $x = l$. Решения уравнения (1.1) рассматриваются в классе абсолютно-непрерывных на отрезке $[0, l]$ функций, производная которых имеет ограниченную вариацию на $[0, l]$. В случае гладких функций $\widetilde{p}$, $\widetilde{Q}$, $\widetilde{F}$ уравнение (1.1) эквивалентно уравнению

$$-(\widetilde{p}v')' + \widetilde{Q}'v = \widetilde{F}'.$$

В общем случае, уравнение (1.1) содержит разрывные функции $\widetilde{p}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{Q}$ наряду с интегралом Стилтьеса. Сохраняя явное присутствие скалярного аргумента, (1.1) обнаруживает и его особые значения: это те точки, в которых производная $v'(x)$ и функции $\widetilde{p}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{Q}$ могут иметь разрыв. Поэтому уравнение (1.1) мы рассматриваем на специальном расширении отрезка $[0,l]$, обозначаемом через $\overline{[0,l]}_\sigma$, на котором каждая точка ξ разрыва $\widetilde{p}$, $\widetilde{Q}$, $\widetilde{F}$ заменяется парой $\{\xi-0,\xi+0\}$. Мы полагаем, что $\xi-0>x$ для всех $x<\xi$ и $\xi+0<x$ для всех $x>\xi$. Опишем конструкцию из [16] построения такого расширения.

Обозначим через S множество точек, в которых функции $\widetilde{p}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{Q}$ имеют ненулевые простые скачки, то есть различные левый и правый пределы. Рассмотрим жорданово представление функций ограниченной вариации $\widetilde{p}$, $\widetilde{Q}$, $\widetilde{F}$ в виде $\widetilde{p}=\widetilde{p}^+-\widetilde{p}^-$, $\widetilde{Q}=\widetilde{Q}^+-\widetilde{Q}^-$, $\widetilde{F}=\widetilde{F}^+-\widetilde{F}^-$. Обозначим через $\sigma(x)$ следующую функцию

$$\sigma(x)=x+\widetilde{p}^+(x)+\widetilde{p}^-(x)+\widetilde{Q}^+(x)+\widetilde{Q}^-(x)+\widetilde{F}^+(x)+\widetilde{F}^-(x).$$

Не ограничивая общности можем считать, что функция $\sigma(x)$ имеет разрывы только в точках из S. Введем на множестве $[0,l]\setminus S$ метрику $\rho(x,y)=|\sigma(x)-\sigma(y)|$. Если $S\neq\emptyset$, то это метрическое пространство, очевидно, не является полным. Его стандартное метрическое пополнение с точностью до изоморфизма совпадает с $\overline{[0,l]}_\sigma$, индуцируя в нем топологию.

Таким образом, мы рассматриваем уравнение (1.1) на множестве значений x из $\overline{[0,l]}_\sigma$, не допуская тем самым в (1.1) значения x из S. На $\overline{[0,l]}_\sigma$ значения $\widetilde{p}(\xi\pm0)$, $\widetilde{Q}(\xi\pm0)$ и $\widetilde{F}(\xi\pm0)$, которые были на $[0,l]$ предельными, оказываются собственными значениями в соответствующих точках из $\overline{[0,l]}_\sigma$. Непрерывность функции $v(x)$ позволяет сохранять обычный смысл интеграла Римана–Стилтьеса для интегрального слагаемого в (1.1) при $x=\xi-0$ и $x=\xi+0$, если взять в качестве собственных значения, бывшие ранее предельными.

Таким образом, уравнение (1.1) нами рассматривается как бы двухслойно: нижний уровень — для значений $x\in[0,l]$, если речь идет о самих решениях $v(x)$ (под знаком интеграла), и второй уровень — для значений x в тождестве (1.1), где $x\in\overline{[0,l]}_\sigma$.

Заметим, что в каждой точке $\xi\in S$ имеет место равенство

$$-\widetilde{p}(\xi+0)v'(\xi+0)+\widetilde{p}(\xi-0)v'(\xi-0)+\\+v(\xi)(\widetilde{Q}(\xi+0)-\widetilde{Q}(\xi-0))=\widetilde{F}(\xi+0)-\widetilde{F}(\xi-0).$$

При этом, согласно теореме 1.4 в [16],

$$v'(\xi+0)=\lim_{x\to\xi+0}v'(x)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{v(\xi+\varepsilon)-v(\xi)}{\varepsilon}=v'_+(\xi),$$

$$v'(\xi-0)=\lim_{x\to\xi-0}v'(x)=\lim_{\varepsilon\to0-0}\frac{v(\xi+\varepsilon)-v(\xi)}{\varepsilon}=v'_-(\xi).$$

Далее нам понадобятся следующие результаты.

Лемма 1 (см. [11, лемма 3.1]). *Пусть $A(x)$ — функция ограниченной вариации на $[0,l]$. Пусть для любой абсолютно непрерывной на $[0,l]$ функции $h(x)$, производная которой $h'(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0,l]$, удовлетворяющей условиям $h(0)=h(l)=0$, выполняется равенство $\int_0^l A\,dh=0$. Тогда $A(x-0)=A(x+0)\equiv\mathrm{const}$ для всех $x\in(0,l)$.*

Теорема 1 (см. [16, теорема 1.5]). *Для любых чисел v_0, w_0 и для любой точки $x_0\in\overline{[0,l]}_\sigma$ задача*

$$\begin{cases}-(\widetilde{p}v')(x)+(\widetilde{p}v')(+0)+\displaystyle\int_0^x v\,d\widetilde{Q}=\widetilde{F}(x)-\widetilde{F}(0), & x\in\overline{[0,l]}_\sigma,\\ v(x_0)=v_0,\\ v'(x_0)=w_0,\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Рассмотрим однородное уравнение

$$-\left(\widetilde{p}v'\right)(x)+\left(\widetilde{p}v'\right)(+0)+\int_0^x v\,d\widetilde{Q}=0. \tag{1.2}$$

Лемма 2 (см. [16, лемма 1.1]). *Пространство решений уравнения* (1.2) *двумерно.*

Лемма 3 (см. [16, предложение 2.1]). *Всякое нетривиальное решение уравнения* (1.2) *может иметь на* $[0,l]$ *лишь конечное число нулей.*

Лемма 4 (см. [16, предложение 2.2]). *Пусть функция* $\widetilde{Q}$ *не убывает на* $[0,l]$. *Тогда каждое нетривиальное решение уравнения* (1.2) *может иметь на* $[0,l]$ *не более одного нуля.*

Теорема 2 (см. [16, теорема 2.1]). *Для любой пары решений* φ_1, φ_2 *уравнения* (1.2) *выполняется*

$$p(x)(\varphi_1(x)\varphi_2'(x)-\varphi_2(x)\varphi_1'(x))\equiv\mathrm{const},\quad x\in\overline{[0,l]}_\sigma.$$

Пусть задано замкнутое выпуклое множество $G\subset H$, где H — гильбертово пространство; $x\in G$. Нормальным конусом (внешним нормальным конусом) в точке x ко множеству G называется множество

$$N_G(x)=\{\xi\in H\colon\langle\xi,c-x\rangle\leqslant 0\quad\forall c\in G\}.$$

Заметим, что если x — внутренняя точка G, то $N_G(x)=\{0\}$. Если $G=[-m,m]$, где $m>0$, то $N_G(m)=[0,+\infty)$, $N_G(-m)=(-\infty,0]$.

§ 2. Вариационная мотивация подхода

Пусть точки O, A_1, A_2,…,A_n принадлежат горизонтальной плоскости π. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n струн, соединенных между собой в одной точке, которые в положении равновесия совпадают с отрезками OA_1, OA_2, …, OA_n. Под воздействием внешней силы, направленной перпендикулярно плоскости π, струны отклоняются от равновесного положения. При этом предполагается, что отклонение всех точек струн параллельно прямой, перпендикулярной плоскости π. Введем систему координат, чтобы описать процесс деформаций. Ось Ox для i-й струны ($i=1,2,\ldots,n$) содержит отрезок OA_i и направлена от O к A_i. Ось Oy направлена перпендикулярно к плоскости π и проходит через точку O. Таким образом, точке O соответствует начало координат. Точка A_i имеет на своей оси Ox координату l_i ($i=1,2,\ldots,n$). Граф-звезда Γ, вдоль которого в положении равновесия расположена струнная система, ориентирован от узла и состоит из ребер-интервалов $\gamma_i=(0,l_i)$, внутренней вершины 0 (узла) и граничных вершин l_i.

Обозначим через $u(x)$ определенную на Γ функцию, описывающую отклонение струнной системы от положения равновесия под воздействием внешней силы, определяемой с помощью функции $F(x)$. Будем предполагать, что струны упруго закреплены в граничных вершинах (с помощью пружин). При этом в любом количестве точек (но не более, чем счетном), принадлежащих ребрам, также могут быть установлены упругие опоры (пружины). Сужения $u_i(x)$ функции $u(x)$ на $(0,l_i]$ определяют деформации каждой из струн; в качестве аргумента мы используем натуральный параметр, то есть расстояние от соответствующей точки до общего узла. Обозначим через $F_i(x)$ сужение $F(x)$ на $(0,l_i]$. Физический смысл $F_i(x)$ — сила, приложенная на участок $(0,x]$ соответствующего промежутка.

Дополнительно мы предполагаем, что в узле, вдоль оси Oy установлен ограничитель на перемещение струн, представленный отрезком $[-m,m]$. Таким образом, имеется условие $|u(0)|\leqslant m$. В зависимости от приложенной внешней силы, узловая точка струнной системы либо остается внутри интервала $(-m, m)$, либо касается границ ограничителя. Опишем эту ситуацию в форме единой модели.

Согласно [15], функционал потенциальной энергии для системы стилтьесовских струн имеет вид

$$\Phi(u) = \int_\Gamma \frac{pu'^2}{2}\,dx + \int_\Gamma \frac{u^2}{2}\,dQ - \int_\Gamma u\,dF, \tag{2.1}$$

где функция $p(x)$ характеризует упругие свойства струн, функция $Q(x)$ описывает упругую реакцию внешней среды. Будем предполагать, что функции p, Q, F удовлетворяют условиям:

(i) функции p, F имеют ограниченную вариацию на каждом ребре, причем, $\inf\limits_{R(\Gamma)} p > 0$;

(ii) функция Q не убывает на каждом промежутке $(0, l_i]$ и имеет ненулевой скачок в каждой точке l_i;

(iii) $\sum\limits_{i=1}^{n}(Q_i(0+0) - Q(0)) = 0, \quad \sum\limits_{i=1}^{n}(F_i(0+0) - F(0)) = 0.$

Поскольку в данной работе мы не рассматриваем случай, когда в узле имеется упругая опора (пружина), или сосредоточена внешняя сила, то первый интеграл, характеризующий работу силы упругости струн (при малых деформациях), понимается как сумма интегралов Лебега по ребрам; второй и третий интегралы, определяющие соответственно работу силы упругости внешней среды и работу внешней силы, под воздействием которой происходит процесс деформаций, понимаются как соответствующие суммы интегралов Стилтьеса по ребрам плюс интегралы по граничным вершинам. Согласно принципу Лагранжа–Гамильтона, реальная форма, принятая струнной системой, минимизирует функционал $\Phi(u)$. При этом мы рассматриваем случай, когда выполняется условие

$$|u(0)| \leqslant m. \tag{2.2}$$

Функционал (2.1) с условием (2.2) будем рассматривать на множестве E абсолютно непрерывных на Γ функций $u(x)$, производные которых $u'(x)$ являются на каждом ребре функциями ограниченной вариации.

Пусть функция $u_0(x)$ минимизирует функционал $\Phi(u)$ с условием (2.2). Тогда неравенство $\Phi(u_0) \leqslant \Phi(u)$ выполнено для всех $u \in E$, удовлетворяющих (2.2). Рассмотрим функции $h \in E$ такие, что $h(a) = 0$, где $a \in \partial\Gamma$, $h(0) = 0$. Пусть $u(x) = u_0(x) + \lambda h(x)$, где λ принимает вещественные значения. Заметим, что $u \in E$, $|u(0)| = |u_0(0)| \leqslant m$. Тогда $\Phi(u_0) \leqslant \Phi(u_0 + \lambda h)$. Зафиксировав h, рассмотрим функцию $\varphi_h(\lambda)$ вещественной переменной λ, определяемую как $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$. Тогда для всех $\lambda \in R$ верно

$$\varphi_h(0) \leqslant \varphi_h(\lambda),$$

и по теореме Ферма $\frac{d}{d\lambda}\varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$. Последнее равенство можно переписать как

$$\int_{R(\Gamma)} pu_0'h'\,dx + \int_{R(\Gamma)} u_0 h\,dQ + \sum_{a\in\partial\Gamma} u_0(a)h(a)\Delta Q(a) - \int_{R(\Gamma)} h dF - \sum_{a\in\partial\Gamma} h(a)\Delta F(a) = 0. \tag{2.3}$$

С учетом $h(a) = 0$, где $a \in \partial\Gamma$, получим

$$\int_{R(\Gamma)} pu_0'h'\,dx + \int\limits_{R(\Gamma)} u_0 h\,dQ - \int_{R(\Gamma)} h\,dF = 0. \tag{2.4}$$

Переопределим сужения p_i, Q_i, F_i функций p, Q, F на $(0, l_i]$ в точках 0 и l_i предельными значениями. Обозначим $g_i(x) = \int_0^x u_{0i}\, dQ_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Рассмотрим $\int_{R(\Gamma)} u_0 h\, dQ$. Имеем

$$\int_{R(\Gamma)} u_0 h\, dQ = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} h_i u_{0i}\, dQ_i = \sum_{i=1}^{n} (h_i g_i)|_0^{l_i} - \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} g_i\, dh_i.$$

Поскольку $h_i(l_i) = h_i(0) = 0$, то $\int_{R(\Gamma)} u_0 h\, dQ = -\sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} g_i\, dh_i$.

Аналогично, $\int_{R(\Gamma)} h\, dF = -\sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} F_i\, dh_i$. Тогда равенство (2.4) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} (p_i u_{0i}' - \int_0^x u_{0i}\, dQ_i + F_i\,) dh_i = 0. \tag{2.5}$$

Равенство (2.5) верно для всех функций $h \in E$, удовлетворяющих условиям $h_i(0) = = h_i(l_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим функции h такие, что $h_1(0) = h_1(l_1) = 0$, $h_i(x) \equiv 0$ при $i \geqslant 2$. Для таких функций (2.5) примет вид

$$\int_0^{l_1} (p_1 u_{01}' - \int\limits_0^x u_{01}\, dQ_1 + F_1)\, dh_1 = 0. \tag{2.6}$$

Применив лемму 1 к равенству (2.6), получим

$$(p_1 u_{01}')(x) - \int_0^x u_{01}\, dQ_1 + F_1(x) = c_1 = \text{const},$$

что можно переписать как

$$(p_1 u_{01}')(x) - \int_0^x u_{01}\, dQ_1 + F_1(x) = F_1(+0) + (p_1 u_1')(+0).$$

Аналогичными рассуждениями получаем, что для всех номеров $i = 1, 2, \ldots, n$ верны равенства

$$(p_i u_{0i}')(x) - \int_0^x u_{0i}\, dQ_i + F_i(x) = c_i = \text{const}, \tag{2.7}$$

или

$$-\left(p_i u_{0i}'\right)(x) + \int_0^x u_{0i}\, dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_i u_{0i}')(+0), x \in \gamma_{i\sigma_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Подчеркнем, что в (2.8) функции p_i, Q_i, F_i доопределены на отрезок $[0, l_i]$ предельными значениями, то есть уравнения получены на каждом ребре-интервале. Здесь обозначено

$$\sigma_i(x) = x + p_i^+(x) + p_i^-(x) + Q_i(x) + F_i^+(x) + F_i^-(x), \tag{2.9}$$

$p_i^+(x), p_i^-(x)$, $F_i^+(x)$, $F_i^-(x)$ — неубывающие функции из жорданова представления функций ограниченной вариации $p_i(x) = p_i^+(x) - p_i^-(x)$, $F_i(x) = F_i^+(x) - F_i^-(x)$; $\gamma_{i\sigma_i} = \overline{[0, l_i]}_{\sigma_i}$.

Вернемся к равенству (2.3). Рассмотрим теперь функции $h \in E$ такие, что $h(0) = 0$. Представим (2.3) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{(0,l_i)} (p_i u_{0i}' - \int_0^x u_{0i}\,dQ_i + F_i)\,dh_i + \sum_{i=1}^{n} h_i(l_i) \int_{(0,l_i)} u_{0i}\,dQ_i - \sum_{i=1}^{n} h_i(l_i) F_i(l_i - 0) + \\ + \sum_{i=1}^{n} u_{0i}(l_i) h_i(l_i) \Delta Q_i(l_i) - \sum_{i=1}^{n} h_i(l_i) \Delta F_i(l_i) = 0. \tag{2.10}$$

Перепишем равенство (2.7) как

$$(p_i u_{0i}')(x) - \int_0^x u_{0i}\,dQ_i + F_i(x) = (p_i u_{0i}')(l_i - 0) - \int_{(0,l_i)} u_{0i}\,dQ_i + F_i(l_i - 0) \tag{2.11}$$

и подставим это представление в (2.10). Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{(0,l_i)} ((p_i u_{0i}')(l_i - 0) - \int_{(0,l_i)} u_{0i}\,dQ_i + F_i(l_i - 0))dh_i + \sum_{i=1}^{n} h_i(l_i) \int_{(0,l_i)} u_{0i}\,dQ_i - \\ - \sum_{i=1}^{n} h_i(l_i) F_i(l_i - 0) + \sum_{i=1}^{n} u_{0i}(l_i) h_i(l_i) \Delta Q_i(l_i) - \sum_{i=1}^{n} h_i(l_i) \Delta F_i(l_i) = 0,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} ((p_i u_{0i}')(l_i - 0) + u_{0i}(l_i) \Delta Q_i(l_i) - \Delta F_i(l_i))\, h_i(l_i) = 0,$$

что в силу произвольности значений $h_i(l_i)$ влечет за собой для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ равенства

$$(p_i u_{0i}')(l_i - 0) + u_{0i}(l_i) \Delta Q_i(l_i) = \Delta F_i(l_i). \tag{2.12}$$

Зафиксируем любое число $c \in [-m, m]$. Рассмотрим теперь функции $h \in E$ такие, что $h(0) = c - u_0(0)$. Функции вида $u = u_0 + \lambda h$, принадлежат классу E. Рассмотрим условие в узле. Имеем

$$u(0) = u_0(0) + \lambda h(0) = u_0(0) + \lambda(c - u_0(0)) = \lambda c + (1 - \lambda) u_0(0).$$

Так как $c \in [-m, m]$, $u_0(0) \in [-m, m]$, отрезок $[-m, m]$ — выпуклое множество, то для всех $\lambda \in [0, 1]$ имеем $u(0) \in [-m, m]$. Значит при $\lambda \in [0, 1]$ верно неравенство

$$\Phi(u_0) \leqslant \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Зафиксировав указанную выше функцию h, введем функцию $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$, где $\lambda \in [0, 1]$. Тогда $\varphi_h(0) \leqslant \varphi_h(\lambda)$. Значит, для правой производной имеет место неравенство $\frac{d^+}{d\lambda} \varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} \geqslant 0$, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{(0,l_i)} (p_i u_{0i}' - \int_0^x u_{0i}\,dQ_i + F_i)\,dh_i + \sum_{i=1}^{n} h_i(l_i) \int_{(0,l_i)} u_{0i}\,dQ_i - \\ - \sum_{i=1}^{n} h_i(l_i) F_i(l_i - 0) + \sum_{i=1}^{n} h_i(0) F_i(+0) + \sum_{i=1}^{n} u_{0i}(l_i) h_i(l_i) \Delta Q_i(l_i) - \sum_{i=1}^{n} h_i(l_i) \Delta F_i(l_i) \geqslant 0.$$

В силу равенства (2.11) получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left((p_i u_{0i}')(l_i-0)+u_{0i}(l_i)\Delta Q_i(l_i)-\Delta F_i(l_i)\right)h_i(l_i)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left((p_i u_{0i}')(l_i-0)-\int_{(0,l_i)}u_{0i}\,dQ_i+F_i(l_i-0)\right)h_i(0)+\sum_{i=1}^{n}h_i(0)F_i(+0)\geqslant 0.$$

Из равенств (2.7) следует, что

$$(p_i u_{0i}')(l_i-0)-\int_{(0,l_i)}u_{0i}\,dQ_i+F_i(l_i-0)=(p_i u_{0i}')(+0)+F_i(+0).$$

Тогда, с учетом (2.12), получим, что $-\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i u_{0i}')(+0)h_i(0)\geqslant 0$. Поскольку $h_i(0)=h(0)=$ $=c-u_0(0)$, последнее неравенство перепишем как $-\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i u_{0i}')(+0)(c-u_0(0))\geqslant 0$, то есть $\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i u_{0i}')(+0)\in N_{[-m,m]}(u_0(0))$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функция u_0 минимизирует функционал $\Phi(u)$ при условии*

$$|u(0)|\leqslant m.$$

Тогда $u_0(x)$ является решением задачи

$$\begin{cases}-\left(p_i u_i'\right)(x)+\displaystyle\int_0^x u_i\,dQ_i=F_i(x)-F_i(+0)-(p_i u_i')(+0), \quad i=1,2,\ldots,n, \quad x\in\gamma_{i\sigma_i}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}p_i(+0)u_i'(+0)\in N_{[-m,m]}u(0),\\ u_1(0)=u_2(0)=\ldots=u_n(0)=u(0),\\ (p_i u_i')(l_i-0)+u_i(l_i)\Delta Q_i(l_i)=\Delta F_i(l_i), \quad i=1,2,\ldots,n.\end{cases} \tag{2.13}$$

Заметим, что из условия

$$\sum_{i=1}^{n}p_i(+0)u_i'(+0)\in N_{[-m,m]}u(0) \tag{2.14}$$

вытекает, что если внешняя сила такова, что $|u(0)|<m$, то $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(+0)u_i'(+0)=0$. Иначе выполняются условия $u(0)=m$, $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(+0)u_i'(+0)\geqslant 0$, либо условия $u(0)=-m$, $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(+0)u_i'(+0)\leqslant 0$.

Из уравнения в (2.13) вытекает, что в каждой точке $\xi_i\in\gamma_i$, в которой хотя бы одна из функций p_i, Q_i, F_i терпит разрыв, имеет место равенство

$$-p_i(\xi_i+0)u_i'(\xi_i+0)+p_i(\xi_i-0)u_i'(\xi_i-0)+u_i(\xi_i)\Delta Q_i(\xi_i)=\Delta F_i(\xi_i),$$

где скачок $\Delta Q_i(\xi_i)$ соответствует упругости опоры (пружины), закрепленной в точке ξ_i ребра с номером i, скачок $\Delta F_i(\xi_i)$ равен сосредоточенной в точке ξ_i силе.

Решение $u(x)$ задачи (2.13) мы ищем в классе E абсолютно-непрерывных на Γ функций $u(x)$, производные которых $u'(x)$ являются на каждом ребре функциями ограниченной вариации.

Модель (2.13) может быть переписана как

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{d\Gamma}(pu')(x) + \dfrac{dQ}{d\Gamma}(x)u(x) = \dfrac{dF}{d\Gamma}(x), & x \in R_\sigma(\Gamma), \\ \dfrac{d}{d\Gamma}(pu')(0) \in N_{[-m,m]}u(0), \end{cases} \tag{2.15}$$

где обозначено

$$\frac{d}{d\Gamma}(pu')(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{d\sigma_i}(p_i u_i')(x), & x \neq 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0)u_i'(+0), & x = 0, \end{cases} \qquad \frac{dQ}{d\Gamma} = \begin{cases} \dfrac{dQ_i}{d\sigma_i}(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$\frac{dF}{d\Gamma} = \begin{cases} \dfrac{dF_i}{d\sigma_i}(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Здесь знак $\dfrac{d}{d\sigma_i}$ означает дифференцирование по σ_i — мере, порождаемой на каждом промежутке $(0, l_i]$ соответствующей возрастающей функцией (2.9). В точке $x = 0$ производные $\dfrac{dQ}{d\Gamma}$ и $\dfrac{dF}{d\Gamma}$ определяются нулевыми значениями, что соответствует равенствам $\sum\limits_{i=1}^{n}(Q_i(0+0) - Q(0)) = 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}(F_i(0+0) - F(0)) = 0$, поскольку мы в данной статье не рассматриваем случай, когда в узле имеется упругая опора (пружина), или сосредоточена внешняя сила. В свою очередь, $\dfrac{d}{d\sigma_i}(p_i u_i')(l_i) = \dfrac{-(p_i u_i')(l_i - 0)}{\Delta\sigma_i(l_i)}$; $\dfrac{dQ_i}{d\sigma_i}(l_i) = \dfrac{Q_i(l_i) - Q_i(l_i - 0)}{\Delta\sigma_i(l_i)}$; $\dfrac{dF_i}{d\sigma_i}(l_i) = \dfrac{F_i(l_i) - F_i(l_i - 0)}{\Delta\sigma_i(l_i)}$. Таким образом, условие $(pu')(a - 0) + u(a)\Delta Q(a) = \Delta F(a)$, по всем граничным вершинам $a \in \partial\Gamma$, непосредственно следует из уравнения. Решения u задачи (2.15) принадлежат E, поэтому условие непрерывности в узле здесь сразу включено в класс допустимых решений. Множество $R_\sigma(\Gamma)$ представляет собой объединение по всем ребрам множеств $\gamma_{i\sigma_i}$ с всевозможными точками разрыва p, Q, F, за исключением узла.

§ 3. Основные результаты

Во всех формулировках результатов предполагается, что выполнены условия (i), (ii), (iii). Рассмотрим задачу (2.13).

Решением задачи (2.13) назовем функцию $u \in E$, удовлетворяющую на соответствующих ребрах уравнениям (2.8) (для всех $x \in \overline{[0, l_i]}_{\sigma_i}$), и удовлетворяющую условиям (2.12), (2.14).

Лемма 5. *Зафиксируем произвольный номер i. Всякое нетривиальное решение уравнения*

$$-\left(p_i u_i'\right)(x) + \int_0^x u_i\, dQ_i = -(p_i u_i')(+0), \tag{3.1}$$

удовлетворяющее условию

$$(p_i u_i')(l_i - 0) + u_i(l_i)\Delta Q_i(l_i) = 0, \tag{3.2}$$

не имеет нулей на отрезке $[0, l_i]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u_i(x)$ — нетривиальное решение уравнения (3.1). Если $u_i(l_i) = 0$, то $u_i'(l_i - 0) = 0$, и значит, $u_i(x) \equiv 0$. Пусть $u_i(l_i) > 0$. Предположим, что ξ_i — ближайший к l_i нуль $u_i(x)$. Тогда $u_i(x) > 0$ на $(\xi_i, l_i]$. Следовательно, $u_i'(\xi_i + 0) > 0$, и тождество (3.1) обеспечивает строгую положительность $u_i'(x)$ всюду правее ξ_i, поскольку при $x > \xi_i$ верно равенство

$$(p_i u_i')(x) = \int_{\xi_i+0}^{x} u_i\, dQ_i + (p_i u_i')(\xi_i + 0),$$

функция $u_i(x)$ предполагается положительной на $(\xi_i, l_i]$, $Q_i(x)$ не убывает на $[\xi_i, l_i]$. Поэтому $p_i(l_i - 0)u_i'(l_i - 0) > 0$, что несовместимо с (3.2). Аналогично доказывается утверждение и для случая $u_i(l_i) < 0$. □

Теорема 4. *Если решение задачи* (2.13) *существует, то оно единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(x)$ и $w(x)$ — решения задачи (2.13). Рассмотрим функцию $u(x) = w(x) - v(x)$. Данная функция удовлетворяет системе

$$\begin{cases} -\left(p_i u_i'\right)(x) + \displaystyle\int_0^x u_i\, dQ_i = -(p_i u_i')(+0), & i = 1, 2, \ldots, n, \\ (p_i u_i')(l_i - 0) + u_i(l_i)\Delta Q_i(l_i) = 0, & i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Предположим, что для некоторого номера i функция $u_i(x)$ отлична от нуля. Тогда, согласно лемме 5, $u_i(x)$ сохраняет знак на $[0, l_i]$. Пусть, для определенности, $u_i(x) > 0$ для всех $x \in [0, l_i]$. Поскольку $u_1(0) = \ldots = u_i(0) = \ldots = u_n(0) = u(0)$, то $u_j(0) > 0$ для всех номеров $j = 1, 2, \ldots, n$. Из леммы 5 следует, что $u_j(x) > 0$ при $x \in [0, l_j]$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Значит, $u_j'(l_j - 0) < 0$, так как предполагается, что $\Delta Q_j(l_j) > 0$. В то же время $-\left(p_j u_j'\right)(x) = \displaystyle\int_x^{l_j} u_j\, dQ_j - (p_j u_j')(l_j - 0)$. Следовательно, $(p_j u_j')(x) < 0$. Тогда для всех номеров $j = 1, 2, \ldots, n$ верно $(p_j u_j')(+0) < 0$.

С другой стороны, так как $\sum\limits_{i=1}^{n} (p_i w_i')(+0) \in N_{[-m,m]}(w(0))$, $\sum\limits_{i=1}^{n} (p_i v_i')(+0) \in N_{[-m,m]}(v(0))$, то для всех $c \in [-m, m]$ верно $\sum\limits_{i=1}^{n} (p_i w_i')(+0)(c - w(0)) \leqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} (p_i v_i')(+0)(c - v(0)) \leqslant 0$. Взяв $c = v(0)$ в первом неравенстве и $c = w(0)$ во втором неравенстве, получим $\sum\limits_{i=1}^{n} (p_i w_i')(+0)(v(0) - w(0)) \leqslant 0$, $-\sum\limits_{i=1}^{n} (p_i v_i')(+0)(v(0) - w(0)) \leqslant 0$. Сложив последние два неравенства, имеем $\sum\limits_{i=1}^{n} ((p_i w_i')(+0) - (p_i v_i')(+0))(v(0) - w(0)) \leqslant 0$, откуда следует, что $\sum\limits_{i=1}^{n} (p_i u_i')(+0)u(0) \geqslant 0$, что противоречит неравенствам $(p_i u_i')(+0) < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $u(0) > 0$. Аналогично, случай $u_i(x) < 0$ на $[0, l_i]$ не возможен. Значит, $u(x) \equiv 0$. Теорема доказана. □

Теорема 5. *Пусть функции* $\varphi_1^i(x)$ *и* $\varphi_2^i(x)$ *являются решениями уравнения*

$$-(p_i u_i')(x) + (p_i u_i')(+0) + \int_0^x u_i\, dQ_i = 0 \tag{3.3}$$

и удовлетворяют условиям

$$\varphi_1^i(0) = 1, (p_i \varphi_1^{i'})(l_i - 0) + \varphi_1^i(l_i)\Delta Q_i(l_i) = 0,$$

$$\varphi_2^i(0)=0, (p_i\varphi_2^{i'})(l_i-0)+\varphi_2^i(l_i)\Delta Q_i(l_i)=1,$$

где $i=1,2,\ldots,n$. *Тогда если* $\left|\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\int_0^{l_j}\varphi_1^j(s)\,dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^{n}p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\right|<m$, *то решение задачи* (2.13) *имеет вид*

$$\begin{gathered}u_i(x)=\frac{\varphi_1^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int_0^x\varphi_2^i(s)\,dF_i(s)+\frac{\varphi_2^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int_x^{l_i}\varphi_1^i(s)\,dF_i(s)-\\-\frac{\varphi_1^i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{n}p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_0^{l_j}\varphi_1^j(s)\,dF_j(s)\right).\end{gathered}\tag{3.4}$$

Если $m+\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\int_0^{l_j}\varphi_1^j(s)\,dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^{n}p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\leqslant 0$, *то решение задачи* (2.13) *имеет вид*

$$u_i(x)=m\varphi_1^i(x)+\frac{\varphi_1^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int_0^x\varphi_2^i(s)\,dF_i(s)+\frac{\varphi_2^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int_x^{l_i}\varphi_1^i(s)\,dF_i(s).\tag{3.5}$$

Если $m-\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\int_0^{l_j}\varphi_1^j(s)\,dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^{n}p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\leqslant 0$, *то решение задачи* (2.13) *имеет вид*

$$u_i(x)=-m\varphi_1^i(x)+\frac{\varphi_1^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int_0^x\varphi_2^i(s)\,dF_i(s)+\frac{\varphi_2^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int_x^{l_i}\varphi_1^i(s)\,dF_i(s),$$

где $i=1,2,\ldots,n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем любое число $i=1,2,\ldots,n$. Заметим, что задача

$$\begin{cases}-(p_i\varphi_1^{i'})(x)+\displaystyle\int_0^x\varphi_1^i\,dQ_i=-(p_i\varphi_1^{i'})(+0),\\ \varphi_1^i(0)=1,\\ (p_i\varphi_1^{i'})(l_i-0)+\varphi_1^i(l_i)\Delta Q_i(l_i)=0\end{cases}$$

имеет единственное решение. В самом деле, применив теорему 1 и лемму 2, получим $\varphi_1^i(x)=c_1^iu_1^i(x)+c_2^iu_2^i(x)$, где функции $u_1^i(x)$ и $u_2^i(x)$ являются решениями однородного уравнения (3.3) такими, что $u_1^i(0)=0$, $u_1^{i'}(+0)=1$ и $u_2^i(0)=1$, $u_2^{i'}(+0)=0$. Поскольку функция $Q_i(x)$ не убывает на $(0,l_i]$, $u_1^i(0)=0$, то согласно лемме 4, $u_1^i(x)$ не имеет нулей на $(0,l_i]$. Из условия $u_1^{i'}(+0)=1$ следует, что $u_1^i(x)>0$ для всех $x\in(0,l_i]$, и в частности, $u_1^i(l_i)>0$, $(p_iu_1^{i'})(l_i-0)>0$. Подставив представление для $\varphi_1^i(x)$ в граничные условия, получим $c_2^i=1$, $c_1^i=\dfrac{-u_2^i(l_i)\Delta Q_i(l_i)-(p_iu_2^{i'})(l_i-0)}{u_1^i(l_i)\Delta Q_i(l_i)+(p_iu_1^{i'})(l_i-0)}$. Аналогично, существует решение задачи

$$\begin{cases}-(p_i\varphi_2^{i'})(x)+\displaystyle\int_0^x\varphi_2^i\,dQ_i=-(p_i\varphi_2^{i'})(+0),\\ \varphi_2^i(0)=0,\\ (p_i\varphi_2^{i'})(l_i-0)+\varphi_2^i(l_i)\Delta Q_i(l_i)=1.\end{cases}$$

Покажем, что $\varphi_1^{i'}(+0) < 0$. Так как $\varphi_1^i(0) = 1$, то $\varphi_1^i(x) > 0$ для всех $x \in [0, l_i]$. Значит, $(p_i\varphi_1^{i'})(l_i - 0) < 0$, и $(p_i\varphi_1^{i'})(+0) = -\int_{(0,l_i)} \varphi_1^i \, dQ_i + (p_i\varphi_1^{i'})(l_i - 0) < 0$.

Так как $\varphi_2^i(0) = 0$, то функция $\varphi_2^i(x)$ сохраняет знак на $(0, l_i]$. Предположим, что $\varphi_2^i(x) < 0$ при $x \in (0, l_i]$. Тогда $\varphi_2^{i'}(+0) < 0$. Следовательно, $(p_i\varphi_2^{i'})(x) < 0$, и в частности, $(p_i\varphi_2^{i'})(l_i - 0) < 0$, что противоречит условию $(p_i\varphi_2^{i'})(l_i - 0) + \varphi_2^i(l_i)\Delta Q_i(l_i) = 1$. Значит, $\varphi_2^i(x) > 0$, и $\varphi_2^{i'}(+0) > 0$.

Пусть $\left|\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\displaystyle\int_0^{l_j} \varphi_1^j(s)\, dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\right| < m$. Покажем, что функции $u_i(x)$, определяемые равенством (3.4), составляют решение задачи (2.13).

Заметим, что $u_i(+0) = u_i(0) = u(0) = -\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\displaystyle\int_0^{l_j} \varphi_1^j(s)\, dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зафиксируем любое число $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как функции $\varphi_1^i(x)$ и $\varphi_2^i(x)$ абсолютно непрерывны, и для любых $\alpha \leqslant \beta$ выполняется равенство

$$
\begin{gathered}
u_i(\beta) - u_i(\alpha) = \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}(\varphi_1^i(\beta) - \varphi_1^i(\alpha)\int_0^\beta \varphi_2^i(s)\, dF_i(s) + \\
+ \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}(\varphi_2^i(\beta) - \varphi_2^i(\alpha))\int_\beta^{l_i} \varphi_1^i(s)\, dF_i(s) + \\
+ \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int_\alpha^\beta \big((\varphi_1^i(\alpha) - \varphi_1^i(s))\varphi_2^i(s) + (\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(\alpha))\varphi_1^i(s)\big)\, dF_i(s) - \\
- \frac{(\varphi_1^i(\beta) - \varphi_1^i(\alpha))\sum\limits_{j=1}^{n}\displaystyle\int_0^{l_j} \varphi_1^j(s)\, dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)},
\end{gathered}
$$

то функция $u_i(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, l_i]$.

Покажем, что производная $u_i'(x)$ от функции $u_i(x)$ удовлетворяет равенству

$$
\begin{gathered}
u_i'(x) = \frac{\varphi_1^{i'}(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int_0^x \varphi_2^i(s)\, dF_i(s) + \frac{\varphi_2^{i'}(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int_x^{l_i} \varphi_1^i(s)\, dF_i(s) - \\
- \frac{\varphi_1^{i'}(x)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_0^{l_j} \varphi_1^j(s)\, dF_j(s)\right).
\end{gathered}
\tag{3.6}
$$

Обозначим $\Delta_\varepsilon u_i = u_i(x + \varepsilon) - u_i(x + 0)$, где $\varepsilon > 0$. Докажем утверждение для правой производной (для левой производной доказательство аналогично). Имеем

$$
\begin{gathered}
\frac{\Delta_\varepsilon u_i}{\varepsilon} = \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1^i}{\varepsilon}\int_0^{x+\varepsilon} \varphi_2^i\, dF_i + \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\frac{\Delta_\varepsilon \varphi_2^i}{\varepsilon}\int_{x+\varepsilon}^{l_i} \varphi_1^i\, dF_i + \\
+ \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)}{\varepsilon}\, dF_i(s) - \\
- \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1^i}{\varepsilon}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_0^{l_j} \varphi_1^j(s)\, dF_j(s)\right).
\end{gathered}
$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{x+0}^{x+\varepsilon}\frac{\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s)-\varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)}{\varepsilon}\,dF_i(s)\right)=0. \tag{3.7}$$

Имеем

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{x+0}^{x+\varepsilon}\left(\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s)-\varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)\right)\,dF_i(s)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\left(\max_{x\leqslant s\leqslant x+\varepsilon}|\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s)-\varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)|\right)V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F_i),$$

где через $V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F_i)$ обозначена вариация функции F_i на $[x+0,x+\varepsilon]$. Заметим, что

$$|\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s)-\varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)|\leqslant\|\varphi_1^i\|\cdot|\varphi_2^i(s)-\varphi_2^i(x)|+\|\varphi_2^i\|\cdot|\varphi_1^i(x)-\varphi_1^i(s)|\leqslant$$
$$\leqslant\|\varphi_1^i\|\cdot\left|\int_x^s|\varphi_2^{i'}(\tau)|\,d\tau\right|+\|\varphi_2^i\|\cdot\left|\int_x^s|\varphi_1^{i'}(\tau)|\,d\tau\right|,$$

где $\|\varphi_j^i\|=\max\limits_{[0,l_i]}|\varphi_j^i(x)|$, $j=1,2$. Так как функции φ_1^i,φ_2^i абсолютно непрерывны на $[0,l_i]$, и их производные имеют ограниченные вариации, то $|\varphi_2^{i'}(\tau)|\leqslant c_{0i}$ и $|\varphi_1^{i'}(\tau)|\leqslant c_{0i}$. Значит,

$$|\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s)-\varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)|\leqslant(\|\varphi_1^i\|+\|\varphi_2^i\|)c_{0i}\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\varepsilon}\max_{x\leqslant s\leqslant x+\varepsilon}|\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s)-\varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)|\leqslant(\|\varphi_1^i\|+\|\varphi_2^i\|)c_{0i}.$$

Так как $V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F_i)\to 0$ при $\varepsilon\to+0$, получаем равенство (3.7).

Таким образом, равенство (3.6) доказано. Из (3.6) следует, что u_i' имеет ограниченную вариацию на $(0,l_i)$. Таким образом, функция $u(x)$ принадлежит классу E.

Поскольку $|u(0)|<m$, покажем, что $\sum\limits_{i=1}^n p_i(+0)u_i'(+0)=0$. Имеем

$$\sum_{i=1}^n p_i(+0)u_i'(+0)=\sum_{i=1}^n\int_0^{l_i}\varphi_1^i(s)\,dF_i(s)-\frac{\sum\limits_{i=1}^n p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\left(\sum_{j=1}^n\int_0^{l_j}\varphi_1^j(s)\,dF_j(s)\right)=0.$$

Зафиксировав произвольное $i=1,2,\ldots,n$, покажем, что функция $u_i(x)$ является решением уравнения из (2.13). Заметим, что

$$\int_0^x u_i\,dQ_i=\frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\left((p_i{\varphi_1^i}')(x)\int_0^x\varphi_2^i(\tau)\,dF_i(\tau)+(p_i{\varphi_2^i}')(x)\int_x^{l_i}\varphi_1^i(\tau)\,dF_i(\tau)\right)-$$
$$-\int_0^{l_i}\varphi_1^i(\tau)\,dF_i(\tau)+F_i(x)-F_i(+0)-\frac{\sum\limits_{j=1}^n\int_0^{l_j}\varphi_1^j(s)\,dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\int_0^x\varphi_1^i(s)\,dQ_i(s).$$

Здесь мы воспользовались теоремой Фубини и свойствами функций φ_1^i, φ_2^i, а также теоремой 2, заменив $p_i(\tau)(\varphi_1^i(\tau)\varphi_2^{i'}(\tau)-\varphi_2^i(\tau)\varphi_1^{i'}(\tau))\equiv\mathrm{const}=p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)$. Следовательно,

$$-p_i(x)u_i'(x) + \int_0^x u_i\, dQ_i =$$
$$= F_i(x) - F_i(+0) - \int_0^{l_i} \varphi_1^i(\tau)\, dF_i(\tau) + \frac{p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \left(\sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s)\, dF_j(s)\right) =$$
$$= F_i(x) - F_i(+0) - p_i(+0)u_i'(+0),$$

что и требовалось. Проверим выполнение условий в граничных вершинах. Имеем

$$p_i(l_i-0)u_i'(l_i-0) + u_i(l_i)\Delta Q_i(l_i) = \frac{\varphi_1^i(l_i)\Delta F_i(l_i)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} = \Delta F_i(l_i),$$

поскольку, воспользовавшись теоремой 2 и условиями на функции φ_1^i, φ_2^i, получим равенство $p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0) = \varphi_1^i(l_i)$.

Пусть $m + \dfrac{\sum\limits_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s)\, dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \leqslant 0$. Функции, определяемые равенством (3.5), дают решение задачи (2.13). Проверка свойств функций $u_i(x)$, доказательство представления для производной

$$u_i'(x) = m\varphi_1^{i'}(x) + \frac{\varphi_1^{i'}(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int_0^x \varphi_2^i(s)\, dF_i(s) + \frac{\varphi_2^{i'}(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int_x^{l_i} \varphi_1^i(s)\, dF_i(s),$$

подстановка в уравнения и граничные условия осуществляется аналогично предыдущему случаю. Заметим, что $u_i(0) = u(0) = m$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Покажем, что $\sum\limits_{i=1}^n p_i(+0)u_i'(+0) \in$ $\in N_{[-m,m]}u(0)$. Поскольку $u(0) = m$, то нужно доказать, что

$$\sum_{i=1}^n p_i(+0)u_i'(+0) \geqslant 0.$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^n p_i(+0)u_i'(+0) = \sum_{i=1}^n p_i(+0) \left(m\varphi_1^{i'}(+0) + \frac{\varphi_2^{i'}(+0)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int_0^{l_i} \varphi_1^i(s)\, dF_i(s)\right) =$$
$$= m\sum_{i=1}^n p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0) + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \varphi_1^i(s)\, dF_i(s) =$$
$$= \sum_{i=1}^n p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0) \left(m + \frac{\sum\limits_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s)\, dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\right) \geqslant 0,$$

так как $\sum\limits_{i=1}^n p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0) < 0$. Случай $m - \dfrac{\sum\limits_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s)\, dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \leqslant 0$ может быть рассмотрен аналогично. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Формула представления решения была получена с помощью выписывания соответствующих функций Грина при анализе ситуаций, когда узловая точка струнной системы не касается границ ограничителя, и когда происходит такое соприкосновение. Так, например, для случая, когда узловая точка струнной системы не касается ограничителя, решение представляется в виде $u(x) = \int\limits_{\Gamma} G_1(x,s)dF(s)$, где $G_1(x,s)$ — функция Грина задачи

$$\begin{cases} -\left(p_i u_i'\right)(x) + \displaystyle\int_0^x u_i\,dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_i u_i')(+0), \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad x \in \gamma_{i\sigma_i},\\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0)u_i'(+0) = 0,\\ u_1(0) = u_2(0) = \ldots = u_n(0) = u(0),\\ (p_i u_i')(l_i - 0) + u_i(l_i)\Delta Q_i(l_i) = \Delta F_i(l_i), \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Когда происходит соприкосновение узловой точки струнной системы с ограничителем, решение имеет вид $u(x) = \pm m\varphi_1(x) + \int\limits_{\Gamma} G_2(x,s)dF(s)$, где $G_2(x,s)$ — функция Грина задачи

$$\begin{cases} -\left(p_i u_i'\right)(x) + \displaystyle\int_0^x u_i\,dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_i u_i')(+0), \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad x \in \gamma_{i\sigma_i}\\ u_1(0) = u_2(0) = \ldots = u_n(0) = u(0) = 0,\\ (p_i u_i')(l_i - 0) + u_i(l_i)\Delta Q_i(l_i) = \Delta F_i(l_i), \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Рассуждения, приведенные в статье, могут быть перенесены на случай произвольного графа.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF–2020–0009); гранта РФФИ и НЦНИ в рамках научного проекта № 20–51–15003 НЦНИ-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов В. Н., Родионов В. И. О нелинейных метрических пространствах функций ограниченной вариации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 341–360. https://doi.org/10.35634/vm220301
2. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Оператор Дирака с потенциалом специального вида и периодическими краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 592–601. https://doi.org/10.1134/S0374064118050047
3. Дерр В. Я., Ким И. Г. Пространство правильных функций и дифференциальное уравнение с обобщенными функциями в коэффициентах // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 3–18. https://doi.org/10.20537/vm140101
4. Диаб А. Т., Калдыбекова Б. К., Пенкин О. М. О кратности собственных значений в задаче Штурма–Лиувилля на графах // Математические заметки. 2016. Т. 99. Вып. 4. С. 489–501. https://doi.org/10.4213/mzm10461
5. Кулаев Р. Ч. К вопросу об осцилляционности функции Грина разрывной краевой задачи четвертого порядка // Математические заметки. 2016. Т. 100. Вып. 3. С. 375–387. https://doi.org/10.4213/mzm10744
6. Кулаев Р. Ч., Уртаева А. А. Теоремы Штурма о распределении нулей для уравнения четвертого порядка на графе // Математические заметки. 2022. Т. 111. Вып. 6. С. 947–952. https://doi.org/10.4213/mzm13332

7. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2005.
8. Покорный Ю. В., Прядиев В. Л. Некоторые вопросы качественной теории Штурма–Лиувилля на пространственной сети // Успехи математических наук. 2004. Т. 59. Вып. 3 (357). С. 115–150. https://doi.org/10.4213/rm738
9. von Below J., Lubary J. A., Vasseur B. Some remarks on the eigenvalue multiplicities of the Laplacian on infinite locally finite trees // Results in Mathematics. 2013. Vol. 63. Issues 3–4. P. 1331–1350. https://doi.org/10.1007/s00025-012-0271-9
10. Бурлуцкая М. Ш. Метод Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения на графе // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465. № 3. С. 519–522. https://doi.org/10.7868/S0869565215350030
11. Kamenskii M., Wen Ch.-F., Zvereva M. On a variational problem for a model of a Stieltjes string with a backlash at the end // Optimization. 2020. Vol. 69. Issue 9. P. 1935–1959. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1702986
12. Kramar Fijavž M., Mugnolo D., Nicaise S. Dynamic transmission conditions for linear hyperbolic systems on networks // Journal of Evolution Equations. 2021. Vol. 21. Issue 3. P. 3639–3673. https://doi.org/10.1007/s00028-021-00715-0
13. Pokorny Yu. V., Pryadiev V. L. On conditions for transmission in the Sturm–Liouville problem on a network // Journal of Mathematical Sciences. 2005. Vol. 130. Issue 5. P. 5013–5045. https://doi.org/10.1007/s10958-005-0394-6
14. Pokornyi Yu. V., Borovskikh A. V. Differential equation on networks (geometric graphs) // Journal of Mathematical Sciences. 2004. Vol. 119. Issue 6. P. 691–718. https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000012752.77290.fa
15. Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Бахтина Ж. И. Метод дифференциала Стилтьеса в моделировании нерегулярной системы на геометрическом графе // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 8. С. 1117–1125. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17858883
16. Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач // Успехи математических наук. 2008. Т. 63. Вып. 1 (379). С. 111–154. https://doi.org/10.4213/rm8544
17. Provotorov V. V., Sergeev S. M., Part A. A. Solvability of hyperbolic systems with distributed parameters on the graph in the weak formulation // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 1. С. 107–117. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2019.108
18. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функциональный анализ и его приложения. 2010. Т. 44. Вып. 4. С. 34–53. https://doi.org/10.4213/faa3022
19. Владыкина В. Е., Шкаликов А. А. Асимптотика решений уравнения Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами // Математические заметки. 2015. Т. 98. Вып. 6. С. 832–841. https://doi.org/10.4213/mzm10976
20. Юрко В. А. Обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на пространственных сетях // Успехи математических наук. 2016. Т. 71. Вып. 3 (429). С. 149–196. https://doi.org/10.4213/rm9709

Поступила в редакцию 14.11.2022

Принята к публикации 06.12.2022

Зверева Маргарита Борисовна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Воронежский государственный университет, 394018, Россия, г. Воронеж, Университетская площадь, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8793-8776
E-mail: margz@rambler.ru

Цитирование: М. Б. Зверева. Модель деформаций системы стилтьесовских струн с нелинейным условием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 528–545.

M. B. Zvereva

Model of deformations of a Stieltjes string system with a nonlinear condition

Keywords: Stieltjes integral, function of bounded variation, measure, geometric graph, energy functional.

MSC2020: 34B37, 34B16

DOI: 10.35634/vm220403

In the present paper we study a model of deformations for a system of n Stieltjes strings located along a geometric graph-star with a nonlinear condition at the node. The corresponding boundary value problem has the form

$$\begin{cases} -\left(p_i u_i'\right)(x) + \displaystyle\int_0^x u_i dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_i u_i')(+0), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0) u_i'(+0) \in N_{[-m,m]} u(0), \\ u_1(0) = u_2(0) = \ldots = u_n(0) = u(0), \\ (p_i u_i')(l_i - 0) + u_i(l_i) \Delta Q_i(l_i) = \Delta F_i(l_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Here the functions $u_i(x)$ determine the deformations of each of the strings; $F_i(x)$ describe the distribution of the external load; $p_i(x)$ characterize the elasticity of strings; $Q_i(x)$ describe the elastic response of the environment. The jump $\Delta F_i(l_i)$ is equal to the external force concentrated at the point l_i; the jump $\Delta Q_i(l_i)$ coincides with the stiffness of the elastic support (spring) attached to the point l_i. The condition $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0)u_i'(+0) \in N_{[-m,m]}u(0)$ arises due to the presence of a limiter in the node represented by the segment $[-m, m]$, on the movement of strings under the influence of an external load, thus it is assumed that $|u(0)| \leqslant m$. Here $N_{[-m,m]}u(0)$ denotes the normal cone to $[-m, m]$ at the point $u(0)$. In the present paper a variational derivation of the model is carried out; existence and uniqueness theorems for solutions are proved; the critical loads at which the strings come into contact with the limiter are analyzed; an explicit formula for the representation of the solution is presented.

Funding. This research was supported by the Ministry of Education of the Russian Federation within the framework of the state task in the field of science (topic number FZGF–0640–2020–0009); by RFBR and CNRS, project number 20–51–15003.

REFERENCES

1. Baranov V. N., Rodionov V. I. On nonlinear metric spaces of functions of bounded variation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 3, pp. 341–360 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220301
2. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Dirac operator with a potential of special form and with the periodic boundary conditions, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 586–595. https://doi.org/10.1134/S0012266118050038
3. Derr V. Ya., Kim I. G. The spaces of regulated functions and differential equations with generalized functions in coefficients, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 1, pp. 3–18 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm140101
4. Diab A. T., Kaldybekova B. K., Penkin O. M. On the multiplicity of eigenvalues of the Sturm–Liouville problem on graphs, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, issue 4, pp. 492–502. https://doi.org/10.1134/S0001434616030226
5. Kulaev R. Ch. On the oscillation property of Green's function of a fourth-order discontinuous boundary-value problem, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 100, issue 3, pp. 391–402. https://doi.org/10.1134/S0001434616090054
6. Kulaev R. Ch., Urtaeva A. A. Sturm separation theorems for a fourth-order equation on a graph, *Mathematical Notes*, 2022, vol. 111, issue 6, pp. 977–981. https://doi.org/10.1134/S0001434622050327

7. Pokornyi Yu. V., Penkin O. M., Pryadiev V. L., Borovskikh A. V., Lazarev K. P., Shabrov S. A. *Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh* (Differential equations on geometric graphs), Moscow: Fizmatlit, 2005.
8. Pokornyi Yu. V., Pryadiev V. L. Some problems of the qualitative Sturm–Liouville theory on a spatial network, *Russian Mathematical Surveys*, 2004, vol. 59, no. 3, pp. 515–552. https://doi.org/10.1070/RM2004v059n03ABEH000738
9. von Below J., Lubary J. A., Vasseur B. Some remarks on the eigenvalue multiplicities of the Laplacian on infinite locally finite trees, *Results in Mathematics*, 2013, vol. 63, issues 3–4, pp. 1331–1350. https://doi.org/10.1007/s00025-012-0271-9
10. Burlutskaya M. Sh. Fourier method in a mixed problem for the wave eguation on a graph, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 92, issue 3, pp. 735–738. https://doi.org/10.1134/S1064562415060277
11. Kamenskii M., Wen Ch.-F., Zvereva M. On a variational problem for a model of a Stieltjes string with a backlash at the end, *Optimization*, 2020, vol. 69, issue 9, pp. 1935–1959. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1702986
12. Kramar Fijavž M., Mugnolo D., Nicaise S. Dynamic transmission conditions for linear hyperbolic systems on networks, *Journal of Evolution Equations*, 2021, vol. 21, issue 3, pp. 3639–3673. https://doi.org/10.1007/s00028-021-00715-0
13. Pokorny Yu. V., Pryadiev V. L. On conditions for transmission in the Sturm–Liouville problem on a network, *Journal of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 130, issue 5, pp. 5013–5045. https://doi.org/10.1007/s10958-005-0394-6
14. Pokornyi Yu. V., Borovskikh A. V. Differential equations on networks (geometric graphs), *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 119, issue 6, pp. 691–718. https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000012752.77290.fa
15. Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Bakhtina Zh. I. Stieltjes differential method in the modeling of an irregular system on a geometric graph, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, issue 8, pp. 1103–1111. https://doi.org/10.1134/S0012266112080058
16. Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Sturm–Liouville oscillation theory for impulsive problems, *Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, no. 1, pp. 109–153. https://doi.org/10.1070/RM2008v063n01ABEH004502
17. Provotorov V. V., Sergeev S. M., Part A. A. Solvability of hyperbolic systems with distributed parameters on the graph in the weak formulation, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Compute Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, issue 1, pp. 107–117. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2019.108
18. Savchuk A. M., Shkalikov A. A. Inverse problems for Sturm–Liouville operators with potentials in Sobolev spaces: Uniform stability, *Functional Analysis and Its Applications*, 2010, vol. 44, issue 4, pp. 270–285. https://doi.org/10.1007/s10688-010-0038-6
19. Shkalikov A. A., Vladykina V. E. Asymptotics of the solutions of the Sturm–Liouville equation with singular coefficients, *Mathematical Notes*, 2015, vol. 98, issue 6, pp. 891–899. https://doi.org/10.1134/S0001434615110218
20. Yurko V. A. Inverse spectral problems for differential operators on spatial networks, *Russian Mathematical Surveys*, 2016, vol. 71, no. 3, pp. 539–584. https://doi.org/10.1070/RM9709

Received 14.11.2022

Accepted 06.12.2022

Margarita Borisovna Zvereva, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, pl. Universitetskaya, 1, Voronezh, 394018, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8793-8776
E-mail: margz@rambler.ru

Citation: M. B. Zvereva. Model of deformations of a Stieltjes string system with a nonlinear condition, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 528–545.