МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 502–527.

УДК 519.63

© *М. Х. Бештоков*

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

Изучается начально-краевая задача для многомерного псевдопараболического уравнения с переменными коэффициентами и граничными условиями третьего рода. Многомерное псевдопараболическое уравнение сводится к интегро-дифференциальному уравнению с малым параметром. Показано, что при стремлении малого параметра к нулю решение полученной модифицированной задачи сходится к решению исходной задачи. Для приближенного решения полученной задачи строится локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка, откуда следуют единственность, устойчивость и сходимость решения локально-одномерной разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи. Для двумерной задачи построен алгоритм численного решения начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с условиями третьего рода.

Ключевые слова: псевдопарабролическое уравнение, уравнение Аллера, локально-одномерная схема, устойчивость, сходимость разностной схемы, метод суммарной аппроксимации.

DOI: 10.35634/vm220402

Под псевдопараболическими уравнениями в литературе принято называть все уравнения высокого порядка с производной по времени первого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(A(u)\big) + B(u) = 0,$$

где $A(u)$ и $B(u)$ — эллиптические операторы.

Уравнения такого вида также называют уравнениями соболевского типа или уравнениями, неразрешенными относительно производной [1].

Псевдопараболические уравнения и более общий класс уравнений — уравнения типа Соболева — возникают при описании процессов фильтрации жидкости в пористых средах [2, 3], передачи тепла в гетерогенной среде [4, 5], влагопереноса в почво-грунтах [6, 7]. Задачи расчета тепломассообмена с сосредоточенными источниками (стоками) переносимой субстанции [8] и, подобно [9, 10], задачи регулирования уровня грунтовых вод при орошении приводят к необходимости исследования краевых задач для нагруженных псевдопараболических уравнений.

Среди таких задач наиболее сложными с точки зрения численной реализации считаются многомерные (по пространственным переменным) задачи. Сложность заключается в значительном увеличении объема вычислений, возникающем при переходе от одномерных задач к многомерным. В этой связи актуальна задача построения экономичных разностных схем, которые обладают возможностью достаточно эффективной стабилизации решений (устойчивостью) и требуют для перехода со слоя на слой затратить Q арифметических действий, пропорциональных числу узлов сетки, так что $Q = O\left(\frac{1}{h^p}\right)$, где $h = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant p} h_i$, p — размерность пространства, h_i — шаг сетки по направлению x_i.

Исследованию разнообразных начальных и начально-краевых задач для псевдопараболических уравнений с переменными коэффициентами в одномерном случае посвящено большое количество работ, например работы [11–26], многомерным псевдопараболическим уравнениям — работы [27–33]. Так, в работах [11–15] приводятся доказательства существования и единственности различных задач для псевдопараболического уравнения, а работы [16–26] посвящены численным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для обобщенных псевдопараболических уравнений с переменными коэффициентами. Методом энергетических неравенств доказаны единственность, устойчивость и сходимость решения разностной задачи к исходной дифференциальной задачи.

Статья [27] посвящена изучению одномерных и двумерных псевдопараболических уравнений с локальными и нелокальными граничными условиями. Для доказательства устойчивости одномерной задачи с классическими условиями используется спектральный метод, а для двумерной задачи — общая теория устойчивости Самарского А. А. для трехслойных разностных схем. Полученные результаты могут быть применены к псевдопараболическим задачам с нелокальными граничными условиями, если можно диагонализовать матрицу конечно-разностной схемы.

Работа [28] посвящена трехмерным параболическим и псевдопараболическим уравнениям с классическими, периодическими и нелокальными граничными условиями. Исследована устойчивость по начальным условиям. Устойчивость предложенных численных алгоритмов доказана при условии, что матрица дискретного оператора может быть диагонализована, а собственные векторы образуют полную базисную систему.

Работы [29, 30] посвящены исследованию псевдопараболических уравнений в двумерном случае. Строятся бессеточные схемы, основанные на радиальных базисных функциях, проводится анализ устойчивости и сходимости этих бессеточных схем.

В работе [31] рассматривается задача Коши для двумерного псевдопараболического уравнения. Доказаны существование и единственность решения поставленной задачи Коши и получено явное решение для двумерного псевдопараболического уравнения. В [32, 33] исследуется вторая начально-краевая задача для псевдопараболического уравнения с малым параметром. В [32] доказаны теоремы существования и единственности классического решения второй начально-краевой задачи. Методом Фурье в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций получено решение в виде ряда. Доказано сходимость решения начально-краевой задачи для возмущенного псевдопараболического уравнения к решению соответствующей задачи для уравнения теплопроводности, когда малый параметр стремится к нулю. В [33] для приближенного решения используется метод конечных разностей, с помощью принципа максимума доказаны единственность, устойчивость и сходимость схемы к решению исходной дифференциальной задачи.

Работы [34–38] посвящены построению разностных схем для дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, когда возникают особенности у решений и их производных. Работы [39–41] посвящены изучению приближенного решения начально-краевых задач для уравнений Навье–Стокса с помощью построения конечно-разностных схем на основе ε-аппроксимации уравнений Навье–Стокса возмущенными системами с малым параметром $\varepsilon > 0$. В настоящей работе используется подход, применяемый в работах [39–41].

В данной работе изучается краевая задача для многомерного псевдопараболического уравнения с переменными коэффициентами и граничными условиями третьего рода. Многомерное псевдопараболическое уравнение сводится к интегро-дифференциальному уравнению с малым параметром $\varepsilon > 0$. Для приближенного решения строится локально-одномерная разностная схема, основная идея которой состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом каждая из вспомогательных задач может не аппроксимировать исходную задачу, но в совокупности и в специальных нормах такая аппроксимация имеет место. С помощью метода энергетических неравенств для решения локально-одномерной разностной схемы получены априорные оценки, доказаны единственность, устойчивость и сходимость схемы. Построен алгоритм численного решения модифицированной задачи.

§ 1. Постановка задачи.

В замкнутой области $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant 1]$, основанием которой является p-мерный куб $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \colon 0 \leqslant x_\alpha \leqslant 1, \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассмотрим краевую задачу для многомерного псевдопараболического уравнения с граничными условиями третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \nu \frac{\partial}{\partial t} Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.1}$$

$$k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial}{\partial t}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = \beta_{-\alpha}(x,t)u - \mu_{-\alpha}(x,t), \ x_\alpha = 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2}$$

$$-\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial}{\partial t}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right) = \beta_{+\alpha}(x,t)u - \mu_{+\alpha}(x,t), \ x_\alpha = 1, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in \overline{G}, \tag{1.4}$$

где

$$\begin{gathered}
Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u(x,t), \\
0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t), q_\alpha(x,t) \leqslant c_1, \quad |\beta_{\pm\alpha}(x,t)| \leqslant c_2, \\
u(x,t) \in C^{4,2}\left(\overline{Q}_T\right), \quad k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}\left(\overline{Q}_T\right), q_\alpha(x,t), f(x,t) \in C^{2,1}\left(\overline{Q}_T\right), \\
Q_T = G \times (0 < t \leqslant T], \quad c_0, c_1, c_2 = \text{const} > 0, \quad \nu = \text{const} > 0, \\
\beta_{\pm\alpha}(x,t), \ \mu_{\pm\alpha}(x,t) - \text{непрерывные функции}, \ \beta_{+\alpha} = \beta(1,x',t), \ \beta_{-\alpha} = \beta(0,x',t), \\
\mu_{+\alpha} = \mu(1,x',t), \ \mu_{-\alpha} = \mu(0,x',t), \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_\alpha, x'), \\
x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p.
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Преобразуем уравнение (1.1) и краевые условия (1.2), (1.3), тогда, умножив обе части (1.1) и (1.2), (1.3) на $\frac{1}{\nu}e^{\frac{1}{\nu}t}$, заменив t на τ и проинтегрировав полученное выражение по τ от 0 до t, получим задачу

$$Lu + \frac{1}{\nu^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}u(x,t)\,d\tau - \frac{1}{\nu}u + \widetilde{f}(x,t) = 0, \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \mathcal{B}_{-\alpha}u - \widetilde{\mu}_{-\alpha}(x,t), & x_\alpha = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \mathcal{B}_{+\alpha}u - \widetilde{\mu}_{+\alpha}(x,t), & x_\alpha = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{1.7}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in \overline{G}, \tag{1.8}$$

где

$$\begin{gathered}
\widetilde{f}(x,t) = \frac{1}{\nu}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}f(x,\tau)\,d\tau - e^{-\frac{1}{\nu}t}\left(Lu_0(x) - \frac{1}{\nu}u_0(x)\right), \\
\mathcal{B}_{-\alpha}u(0,x',t) = \frac{1}{\nu}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\beta_{-\alpha}(0,x',\tau)u(0,x',\tau)\,d\tau, \\
\mathcal{B}_{+\alpha}u(1,x',t) = \frac{1}{\nu}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\beta_{+\alpha}(1,x',\tau)u(1,x',\tau)\,d\tau,
\end{gathered}$$

$$\widetilde{\mu}_{-\alpha}(0,x',t)=\frac{1}{\nu}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\mu_{-\alpha}(0,x',\tau)\,d\tau+e^{-\frac{t}{\nu}}k_\alpha(x,0)u_0'(0,x'),$$
$$\widetilde{\mu}_{+\alpha}(1,x',t)=\frac{1}{\nu}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\mu_{+\alpha}(1,x',\tau)\,d\tau-e^{-\frac{t}{\nu}}k_\alpha(x,0)u_0'(1,x').$$

В той же области вместо уравнения (1.6) рассмотрим следующее уравнение с малым параметром ε

$$\varepsilon u_t^\varepsilon=Lu^\varepsilon+\frac{1}{\nu^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}u^\varepsilon\,d\tau-\frac{1}{\nu}u^\varepsilon+\widetilde{f}(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{1.9}$$

где $\varepsilon=\mathrm{const}>0$.

Так как при $t=0$ начальные условия для уравнения (1.6) и (1.9) совпадают, то в окрестности $t=0$ у производной u_t^ε не возникает особенности типа пограничного слоя [34–38].

Покажем, что $u^\varepsilon\to u$ в некоторой норме при $\varepsilon\to 0$. Обозначим через $\tilde z=u^\varepsilon-u$ и подставим $u^\varepsilon=\tilde z+u$ в уравнение (1.9). Тогда получим задачу

$$\varepsilon\tilde z_t=L\tilde z+\frac{1}{\nu^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\tilde z\,d\tau-\frac{1}{\nu}\tilde z+\overline{f}(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\frac{\partial\tilde z}{\partial x_\alpha}=\mathcal{B}_{-\alpha}\tilde z, & x_\alpha=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial\tilde z}{\partial x_\alpha}=\mathcal{B}_{+\alpha}\tilde z, & x_\alpha=1,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\end{cases} \tag{1.11}$$

$$\tilde z(x,0)=0,\quad x\in\overline{G},\quad \overline{G}=G+\Gamma, \tag{1.12}$$

где $\overline{f}(x,t)=-\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Получим априорную оценку методом энергетических неравенств, тогда умножим уравнение (1.10) скалярно на $\tilde z$:

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon\frac{\partial\tilde z}{\partial t},\tilde z\right)&=\left(\sum_{\alpha=1}^p\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial\tilde z}{\partial x_\alpha}\right),\tilde z\right)-\left(\sum_{\alpha=1}^p q_\alpha(x,t)\tilde z,\tilde z\right)+\\&+\left(\frac{1}{\nu^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\tilde z d\tau,\tilde z\right)-\left(\frac{1}{\nu}\tilde z,\tilde z\right)+\left(\overline{f}(x,t),\tilde z\right),\end{aligned} \tag{1.13}$$

где $(u,v)=\int_G uv\,dx$, $\|u\|_0^2=\int_G u^2\,dx$, $\|u\|^2_{L_2(0,l_\alpha)}=\int_0^1 u^2(x,t)\,dx_\alpha$.

Далее через M_i, $i=1,2,\ldots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от входных данных исходной задачи.

С помощью ε-неравенства Коши и неравенства Коши–Буняковского преобразуем интегралы, входящие в тождество (1.13):

$$\left(\varepsilon\frac{\partial\tilde z}{\partial t},\tilde z\right)=\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde z\|_0^2, \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\alpha=1}^p\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial\tilde z}{\partial x_\alpha}\right),\tilde z\right)&=\sum_{\alpha=1}^p\int_{G'}k_\alpha(x,t)\tilde z\frac{\partial\tilde z}{\partial x_\alpha}\bigg|_0^1dx'-\\-\sum_{\alpha=1}^p\int_G k_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial\tilde z}{\partial x_\alpha}\right)^2dx&\leqslant\sum_{\alpha=1}^p\int_{G'}k_\alpha(x,t)\tilde z\frac{\partial\tilde z}{\partial x_\alpha}\bigg|_0^1dx'-c_0\|\tilde z_x\|_0^2,\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\left(\sum_{\alpha=1}^p q_\alpha(x,t)\tilde z,\tilde z\right)=\sum_{\alpha=1}^p\int_G q_\alpha(x,t)\tilde z^2\,dx\geqslant c_0\|\tilde z\|_0^2, \tag{1.16}$$

$$\left(\frac{1}{\nu}\tilde z,\tilde z\right)=\frac{1}{\nu}\|\tilde z\|_0^2, \tag{1.17}$$

$$\left(\int_0^t \frac{1}{\nu^2} e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\tilde{z}d\tau, \tilde{z}\right) \leqslant \frac{1}{4\nu^2}\|\tilde{z}\|_0^2 + \left(\left(\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\tilde{z}d\tau\right)^2, \frac{1}{\nu^2}\right) \leqslant \frac{1}{4\nu^2}\|\tilde{z}\|_0^2 + \\ + \left(\frac{1}{\nu^2}\int_0^t e^{-\frac{2}{\nu}(t-\tau)}d\tau \int_0^t \tilde{z}^2 d\tau, 1\right) = \frac{1}{4\nu^2}\|\tilde{z}\|_0^2 + \frac{1-e^{-\frac{2}{\nu}t}}{2\nu}\int_0^t \|\tilde{z}\|_0^2 d\tau, \tag{1.18}$$

$$\left(\overline{f}(x,t), \tilde{z}\right) \leqslant \frac{1}{4\varepsilon_1}\|\overline{f}\|_0^2 + \varepsilon_1\|\tilde{z}\|_0^2, \tag{1.19}$$

где

$$G' = \{x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p) \colon 0 < x_\alpha < 1\},$$
$$dx' = dx_1 dx_2 \ldots dx_{\alpha-1} dx_{\alpha+1} \ldots dx_p.$$

Учитывая преобразования (1.14)–(1.19), из (1.13) получаем неравенство

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2 + c_0\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \left(c_0 + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{4\nu^2} - \varepsilon_1\right)\|\tilde{z}\|_0^2 + \frac{e^{-\frac{2}{\nu^2}t}}{2\nu}\int_0^t \|\tilde{z}\|_0^2\, d\tau \leqslant \\ \leqslant \sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} k_\alpha(x,t)\tilde{z}\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_\alpha}\bigg|_0^1 dx' + \frac{1}{2\nu}\int_0^t \|\tilde{z}\|_0^2\, d\tau + \frac{1}{4\varepsilon_1}\|\overline{f}\|_0^2. \tag{1.20}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (1.20)

$$\sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} k_\alpha(x,t)\tilde{z}\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_\alpha}\bigg|_0^1 dx' = \\ = \sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} \left(\tilde{z}(1,x',t)\mathcal{B}_{-\alpha}\tilde{z}(1,x',t) - \tilde{z}(0,x',t)\mathcal{B}_{-\alpha}\tilde{z}(0,x',t)\right) dx' \leqslant \\ \leqslant \varepsilon_2 \sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} \left(\tilde{z}^2(0,x',t) + \tilde{z}^2(1,x',t)\right) dx' + \\ + \frac{1}{4\varepsilon_2}\sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} \left(\frac{1}{\nu}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\beta_{-\alpha}(x,\tau)\tilde{z}(0,x',\tau)\, d\tau\right)^2 dx' + \\ + \frac{1}{4\varepsilon_2}\sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} \left(\frac{1}{\nu}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\beta_{+\alpha}(x,\tau)\tilde{z}(1,x',\tau)\, d\tau\right)^2 dx' \leqslant \\ \leqslant \varepsilon_2 M_1\left(\|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_0^2\right) + M_2(\varepsilon_2)\int_0^t \left(\|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_0^2\right) d\tau. \tag{1.21}$$

Выбирая в (1.21) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{c_0}{4}$, из неравенства (1.20) находим

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2 + \frac{3c_0}{4}\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \left(\frac{c_0}{2} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{4\nu^2}\right)\|\tilde{z}\|_0^2 \leqslant M_3\int_0^t \left(\|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_0^2\right) d\tau + \frac{1}{c_0}\|\overline{f}\|_0^2. \tag{1.22}$$

Пусть $\nu \geqslant \frac{1}{4}$, тогда проинтегрировав (1.22) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2 + \int_0^t \left(\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2\right) d\tau \leqslant M_4\int_0^t d\tau \int_0^\tau \left(\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2\right) d\tau + M_5\int_0^t \|\overline{f}\|_0^2\, d\tau, \tag{1.23}$$

Оценим первое слагаемое в правой части в (1.23), для этого перепишем (1.23) следующим образом

$$Y \leqslant M_4\int_0^t Y\, d\tau + M_5 F, \tag{1.24}$$

где $Y = \int_0^t (\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2)\,d\tau$, $F = \int_0^t \|\overline{f}\|_0^2\,d\tau$.

Применяя лемму Гронуолла (см. [43, лемма 1.1, с. 152]) к неравенству (1.24), получим неравенство

$$\int_0^t (\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2)\,d\tau \leqslant M_6 \int_0^t F\,d\tau = M_6 \int_0^t d\tau \int_0^\tau \|\overline{f}\|_0^2\,d\tau \leqslant TM_6 \int_0^t \|\overline{f}\|_0^2\,d\tau. \tag{1.25}$$

Таким образом, из (1.23) с учетом (1.25) получаем оценку

$$\varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2 + \int_0^t (\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2)\,d\tau \leqslant M_7 \int_0^t \|\overline{f}\|_0^2\,d\tau = \varepsilon^2 M_7 \int_0^t \|u_\tau\|_0^2\,d\tau = O(\varepsilon^2). \tag{1.26}$$

Оценим $\int_0^t \|u_\tau\|_0^2\,d\tau$ в правой части (1.26) и покажем, что в классе достаточно гладких функций $\varepsilon^2 \int_0^t \|u_\tau\|_0^2\,d\tau = O(\varepsilon^2)$. Для этого умножим обе части уравнения (1.1) скалярно на u_t. Тогда получим

$$(u_t, u_t) = (Lu, u_t) + (\nu\frac{\partial}{\partial t}Lu, u_t) + (f(x,t), u_t). \tag{1.27}$$

Используя ε-неравенство Коши, преобразуем первое и второе слагаемые правой части (1.27)

$$\begin{gathered}(Lu, u_t) + (\nu\frac{\partial}{\partial t}Lu, u_t) = \sum_{k=1}^p \Big((L_\alpha u, u_t) + (\nu\frac{\partial}{\partial t}L_\alpha u, u_t)\Big) = \sum_{k=1}^p \Big[\left((k_\alpha u_{x_\alpha})_{x_\alpha}, u_t\right) + \\ + (q_\alpha u, u_t) + \nu\left((k_\alpha u_{x_\alpha})_{x_\alpha t}, u_t\right) - \nu\left((q_\alpha u)_t, u_t\right)\Big] \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^p \int_{G'} u_t\left(k_\alpha u_{x_\alpha} + \nu\left(k_\alpha u_{x_\alpha}\right)_t\right)\Big|_0^{l_\alpha} dx' - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(k, u_x^2) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(q, u^2) + \frac{1}{2}\|u_t\|_0^2 + \\ + \nu\left(c_0 - \varepsilon\right)\|u_t\|_0^2 - \nu\left(c_0 - \varepsilon\right)\|u_{xt}\|_0^2 + M_8^\varepsilon(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2).\end{gathered} \tag{1.28}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (1.28). Тогда получим

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^p \int_{G'} u_t\left(k_\alpha u_{x_\alpha} + \nu\left(k_\alpha u_{x_\alpha}\right)_t\right)\Big|_0^{l_\alpha} dx' = \\ = \sum_{k=1}^p \int_{G'} u_t(l_\alpha, x', t)(\mu_{+k} - \beta_{+k}u(l_\alpha, x', t)) + u_t(0, x', t)(\mu_{-k} - \beta_{-k}u(0, x', t)) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon_1 M_9\left(\|u_t\|_0^2 + \|u_{xt}\|_0^2\right) + M_{10}^{\varepsilon_1}\|u\|_0^2 + M_{11}^{\varepsilon_1}(\mu_{+k}^2 + \mu_{-k}^2).\end{gathered} \tag{1.29}$$

Учитывая (1.28), (1.29), после несложных преобразований из (1.27) получаем неравенство

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1 M_9 + \nu\left(c_0 - 2\varepsilon\right)\right)\|u_t\|_0^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(k, u_x^2) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(q, u^2) + \\ + \nu\left(c_0 - \varepsilon - \varepsilon_1 M_9\right)\|u_{xt}\|_0^2 \leqslant M_{12}^{\varepsilon,\varepsilon_1}(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2) + M_{13}^{\varepsilon_1}(\|f\|_0^2 + \mu_{+k}^2 + \mu_{-k}^2).\end{gathered} \tag{1.30}$$

Выбирая $\varepsilon = \dfrac{c_0}{8}$, $\varepsilon_1 = \min\left\{\dfrac{1}{4M_9}, \dfrac{c_0}{8M_9}\right\}$, из (1.30) находим

$$\frac{d}{dt}(k, u_x^2) + \frac{d}{dt}(q, u^2) + \|u_t\|_0^2 + \|u_{xt}\|_0^2 \leqslant M_{14}(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2) + M_{15}(\|f\|_0^2 + \mu_{+k}^2 + \mu_{-k}^2). \tag{1.31}$$

Проинтегрируем (1.31) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2+\int_0^t\left(\|u_\tau\|_0^2+\|u_{x\tau}\|_0^2\right)d\tau\leqslant M_{16}\int_0^t\left(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\right)d\tau+ \\ +M_{17}\left(\int_0^t(\|f\|_0^2+\mu_{+k}^2+\mu_{-k}^2)\,d\tau+\|u_0(x)\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\right). \tag{1.32}$$

На основании леммы Гронуолла (см. [43, лемма 1.1, с. 152]) из (1.32) получаем неравенство

$$\int_0^t\|\upsilon_\tau\|_0^2\,d\tau\leqslant M_{18}\left(\int_0^t(\|f\|_0^2+\mu_{+k}^2+\mu_{-k}^2)\,d\tau+\|u_0(x)\|_0^2+\|u_0'(x)\|_0^2\right). \tag{1.33}$$

Учитывая (1.33), из (1.26) получаем неравенство

$$\varepsilon\|\tilde z\|_0^2+\int_0^t\left(\|\tilde z\|_0^2+\|\tilde z_x\|_0^2\right)d\tau\leqslant\varepsilon^2M\left(\int_0^t(\|f\|_0^2+\mu_{+k}^2+\mu_{-k}^2)\,d\tau+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(G)}\right). \tag{1.34}$$

где $\tilde z=u^\varepsilon-u$, а M зависит только от входных данных задачи (1.1)–(1.4).

Из априорной оценки (1.34) следует сходимость u^ε к u при $\varepsilon\to0$ в норме $\|\tilde z\|_1^2=$ $=\varepsilon\|\tilde z\|_0^2+\|\tilde z\|_{2,Q_t}^2+\|\tilde z_x\|_{2,Q_t}^2$, где $\|\tilde z_x\|_{2,Q_t}^2=\int_0^t\|\tilde z_x\|_0^2\,d\tau$. Поэтому при малом ε решение задачи (1.7)–(1.9) будем принимать за приближенное решение краевой задачи для многомерного псевдопараболического уравнения с граничными условиями третьего рода (1.1)–(1.4).

§ 2. Построение локально-одномерной схемы

На отрезке $[0,T]$ введем равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0,1,\ldots,j_0\}$, с шагом $\tau=T/j_0$. Каждый интервал (t_j,t_{j+1}) разобьем на p частей точками $t_{j+\frac{\alpha}{p}}=t_j+\tau\frac{\alpha}{p}$, $\alpha=1,2,\ldots,p$, и обозначим через $\Delta_\alpha=(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}},t_{j+\frac{\alpha}{p}}]$.

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha=\frac{1}{N_\alpha}$, $\alpha=1,2,\ldots,p$:

$$\overline{\omega}_h=\prod_{\alpha=1}^p\overline{\omega}_{h_\alpha},\quad \overline{\omega}_{h_\alpha}=\{x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha\hbar_\alpha,\ i_\alpha=0,1,\ldots,N_\alpha,\alpha=1,2,\ldots,p\},$$

$$\hbar_\alpha=\begin{cases}h_\alpha, & i_\alpha=1,2,\ldots,N_\alpha-1,\\ \frac{h_\alpha}{2}, & i_\alpha=0,N_\alpha.\end{cases}$$

Уравнение (1.9) перепишем в виде

$$\sum_{\alpha=1}^p\mathcal{L}_\alpha u^\varepsilon=0,\quad \mathcal{L}_\alpha u^\varepsilon=\frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}-L_\alpha u^\varepsilon-\frac{1}{p\nu^2}\int_0^te^{-\frac{1}{\nu^2}(t-\tau)}u^\varepsilon\,d\tau+\frac{1}{p\nu}u^\varepsilon-f_\alpha,$$

где $f_\alpha(x,t)$, $\alpha=1,2,\ldots,p$, — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$, и удовлетворяющие условию $\sum\limits_{\alpha=1}^pf_\alpha=f$.

На каждом полуинтервале Δ_α, $\alpha=1,2,\ldots,p$, будем последовательно решать задачи

$$\mathcal{L}_\alpha\vartheta_{(\alpha)}=\frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial\vartheta_{(\alpha)}}{\partial t}-L_\alpha\vartheta_{(\alpha)}-\frac{1}{p\nu^2}\int_0^te^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}\vartheta_{(\alpha)}d\tau+\frac{1}{p\nu}\vartheta_{(\alpha)}-f_\alpha=0, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases}k_\alpha(x,t)\frac{\partial\vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha}=\mathcal{B}_{-\alpha}\vartheta_{(\alpha)}-\widetilde{\mu}_{-\alpha}(x,t), & x_\alpha=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial\vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha}=\mathcal{B}_{+\alpha}\vartheta_{(\alpha)}-\widetilde{\mu}_{+\alpha}(x,t), & x_\alpha=1,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\end{cases} \tag{2.2}$$

полагая при этом [42, с. 522]

$$\vartheta_{(1)}(x,0)=u_0(x),\quad \vartheta_{(1)}(x,t_j)=\vartheta_{(p)}(x,t_j),\quad j=1,2,\ldots,$$
$$\vartheta_{(\alpha)}(x,t_{j+\frac{\alpha-1}{p}})=\vartheta_{(\alpha-1)}(x,t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}),\quad \alpha=2,3,\ldots,p.$$

Аппроксимируем каждое уравнение (2.1) номера α неявной схемой на полуинтервале $\Delta_\alpha=\left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}},t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$, тогда получим цепочку p одномерных разностных уравнений:

$$\varepsilon\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}}-y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}=\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau-\frac{1}{p\nu}y(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}})+\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},\quad (2.3)$$

где $\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}=\left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha}-d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}$, $a_\alpha=k_\alpha(x^{(-0.5\alpha)},\bar{t})$, $\bar{t}=t^{j+1/2}$, $d_\alpha=q_\alpha(x,\bar{t})$, $x^{(-0.5\alpha)}=$ $=(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},x_\alpha-0.5h_\alpha,x_{\alpha+1},\ldots,x_p)$, $\gamma_{h,\alpha}$ — множество граничных по направлению x_α узлов.

Запишем разностный аналог для граничных условий (2.2)

$$\begin{cases}a_\alpha^{(1_\alpha)}y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}=\mathcal{B}_{-\alpha}y^{j+\frac{\alpha}{p}}-\widetilde{\mu}_{-\alpha}, & x_\alpha=0,\\ -a_\alpha^{(N_\alpha)}y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}=\mathcal{B}_{+\alpha}y^{j+\frac{\alpha}{p}}-\widetilde{\mu}_{+\alpha}, & x_\alpha=1.\end{cases}\quad (2.4)$$

Условия (2.4) имеют порядок аппроксимации $O(h_\alpha)$. Повысим порядок аппроксимации до $O(h_\alpha^2)$ на решениях уравнения (2.1) при каком-либо α:

$$a_\alpha^{(1_\alpha)}\vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}=\mathcal{B}_{-\alpha}y^{j+\frac{\alpha}{p}}+\widetilde{\mu}_{-\alpha}+O(h_\alpha).$$

С помощью разложения Тейлора находим

$$k_\alpha\vartheta'_{(\alpha)}=a_\alpha^{(1_\alpha)}\vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}-0.5h_\alpha\left(k_\alpha\vartheta'_{(\alpha)}\right)'+O(h_\alpha^2)=a_\alpha^{(1_\alpha)}\vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}-$$
$$-0.5h_\alpha\Big(\varepsilon\frac{\vartheta^{j+\frac{\alpha}{p}}-\vartheta^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}-\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}\vartheta(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau+$$
$$+q_\alpha\vartheta(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}})+\frac{1}{p\nu}\vartheta(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}})-f^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big)+O(h_\alpha^2).$$

Итак,

$$a_\alpha^{(1_\alpha)}\vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}-0.5h_\alpha\Big(\varepsilon\frac{\vartheta^{j+\frac{\alpha}{p}}-\vartheta^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}-\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}\vartheta(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau+q_\alpha\vartheta(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}})+$$
$$+\frac{1}{p\nu}\vartheta(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}})-f^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big)_0=\mathcal{B}_{-\alpha}\vartheta(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}})+\widetilde{\mu}_{-\alpha}+O(h_\alpha^2)+O(h_\alpha\tau).\quad (2.5)$$

В (2.5) отбросим величины порядка малости $O(h_\alpha^2)$ и $O(h_\alpha\tau)$, заменим $\vartheta_{(\alpha)}$ на $y^{j+\frac{\alpha}{p}}$, тогда (2.5) при $x_\alpha=0$ перепишется так:

$$\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar{t},0}^{j+\frac{\alpha}{p}}=\frac{a_\alpha^{(1_\alpha)}y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-\mathcal{B}_{-\alpha}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha}+\frac{\overline{\mu}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha}.$$

Аналогично, при $x_\alpha = 1$:

$$\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar{t},N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = -\frac{a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau + \mathcal{B}_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + 0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,N_\alpha}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha} + \frac{\overline{\mu}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha},$$

где

$$\overline{d}_{\alpha,0} = d_{\alpha,0} + \frac{1}{p\nu}, \qquad \overline{d}_{\alpha,N_\alpha} = d_{\alpha,N_\alpha} + \frac{1}{p\nu},$$

$$\mathcal{B}_{-\alpha}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} = \frac{1}{\nu}\sum_{j'=0}^{pj+\alpha} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}\beta_{-\alpha}y_0^{\frac{j'}{p}}\tau, \qquad \mathcal{B}_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \frac{1}{\nu}\sum_{j'=0}^{pj+\alpha} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}\beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{\frac{j'}{p}}\tau,$$

$$\overline{\mu}_{-\alpha} = 0.5h_\alpha f_{\alpha,0} + \widetilde{\mu}_{-\alpha}, \qquad \overline{\mu}_{+\alpha} = 0.5h_\alpha f_{\alpha,0} + \widetilde{\mu}_{+\alpha}.$$

Итак, разностный аналог задачи (1.7)–(1.9) имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} + \Phi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1,2,\dots,p, \quad x \in \overline{\omega}_h,\\ y(x,0) = u_0(x),\end{gathered} \tag{2.6}$$

где

$$\overline{\Lambda}_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \begin{cases} \widetilde{\Lambda}_\alpha y = \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha} - d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\tau - \frac{1}{p\nu}y^{j+\frac{\alpha}{p}},\\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\Lambda_\alpha^- y = \frac{a_\alpha^{(1\alpha)}y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau - \mathcal{B}_{-\alpha}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha},\\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\Lambda_\alpha^+ y = -\frac{a_\alpha^{(N_\alpha)}y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau + \mathcal{B}_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + 0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,N_\alpha}y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha}, \end{cases}$$

$$\Phi_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha},\\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\overline{\mu}_{-\alpha}, & x_\alpha = 0,\\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\overline{\mu}_{+\alpha}, & x_\alpha = 1, \end{cases} \qquad y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\frac{\tau}{p}}.$$

§ 3. Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы.

Характеристикой точности решения локально-одномерной схемы является разность $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ — решение исходной задачи (1.7)–(1.9). Подставляя $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в разностную задачу (2.6), получим задачу для погрешности $z^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$\varepsilon\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}} - z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}z(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau - \frac{1}{\nu p}z(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}}) + \psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \tag{3.1}$$

где $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}u(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau - \frac{1}{p\nu}u(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}}) + \varphi^{j+\frac{\alpha}{p}} - \varepsilon\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}$.

Обозначив через $\overset{\circ}{\psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + \frac{1}{p\nu^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}u d\tau - \frac{1}{p\nu}u + f_\alpha - \frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}$, и замечая, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_\alpha = 0$, если $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$, представим погрешность в виде суммы $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*$:

$$\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}u(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau - \frac{1}{p\nu}u(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}}) + \varphi^{j+\frac{\alpha}{p}} -$$

$$-\varepsilon\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \overset{\circ}{\psi}_\alpha = \left(\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_\alpha u^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{p\nu}u(x,t^{j+\frac{\alpha}{p}}) - \frac{1}{p\nu}u^{j+\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}u(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\tau-\frac{1}{p\nu^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}u^{j+\frac{1}{2}}\,d\tau\right)+$$

$$+\left(\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}-f_\alpha^{j+\frac{1}{2}}\right)-\left(\varepsilon\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}}-u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}-\frac{\varepsilon}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}\right)+\overset{\circ}{\psi}_\alpha=\overset{\circ}{\psi}_\alpha+\psi_\alpha^*.$$

Очевидно, что $\psi_\alpha^*=O(h_\alpha^2+\tau)$, $\overset{\circ}{\psi}_\alpha=O(1)$,

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}=\sum_{\alpha=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{p}\psi_\alpha^*=O(|h|^2+\tau),\ |h|^2=h_1^2+h_2^2+\ldots+h_p^2.$$

Запишем граничное условие при $x_\alpha=0$ так:

$$\frac{0.5h_\alpha\varepsilon}{p}y_{\bar t}^{(\alpha)}=a_\alpha^{(1\alpha)}y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-$$
$$-\mathcal{B}_{-\alpha}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}+0.5h_\alpha f_{\alpha,0}+\widetilde{\mu}_{-\alpha}. \tag{3.2}$$

Пусть $z^{j+\frac{\alpha}{p}}=y^{j+\frac{\alpha}{p}}-u^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где u — решение исходной дифференциальной задачи (1.7)–(1.9). Подставим $y^{j+\frac{\alpha}{p}}=z^{j+\frac{\alpha}{p}}+u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в (3.2). Тогда получим

$$\frac{0.5h_\alpha\varepsilon}{p}z_{\bar t}^{(\alpha)}=a_\alpha^{(1\alpha)}z_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-\mathcal{B}_{-\alpha}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}+$$

$$+a_\alpha^{(1\alpha)}u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-\mathcal{B}_{-\alpha}u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{0.5h_\alpha\varepsilon}{p}u_{\bar t,0}^{(\alpha)}+$$
$$+0.5h_\alpha f_{\alpha,0}+\widetilde{\mu}_{-\alpha}.$$

К правой части полученного выражения добавим и вычтем

$$0.5h_\alpha\overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}=0.5h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)-q_\alpha u+\frac{1}{p\nu^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}u\,d\tau-\frac{1}{p\nu}u+f_\alpha-\frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_\alpha=0}^{j+1/2}.$$

Тогда

$$\psi_{-\alpha}=0.5h_\alpha\left(f_{\alpha,0}-\frac{\varepsilon}{p}u_{\bar t,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)+a_\alpha^{(1\alpha)}u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}+$$
$$+\frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-\mathcal{B}_{-\alpha}u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-0.5h_\alpha\overline{d}_{\alpha,0}u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}+\widetilde{\mu}_{-\alpha}-$$
$$-0.5h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)-q_\alpha u+\frac{1}{p\nu^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}ud\tau-\frac{1}{p\nu}u+f_\alpha-\frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_\alpha=0}^{j+1/2}+0.5h_\alpha\overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}=$$
$$=a_\alpha^{(1\alpha)}u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}-\mathcal{B}_{-\alpha}u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}+\widetilde{\mu}_{-\alpha}-0.5h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right]^{j+\frac{1}{2}}+0.5h_\alpha\overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}+O(h_\alpha^2)+$$
$$+O(h_\alpha\tau)=k_\alpha\frac{\partial u^{j+\frac{\alpha}{p}}}{\partial x_\alpha}+0.5h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right]_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-0.5h_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right]^{j+\frac{1}{2}}-$$
$$-\mathcal{B}_{-\alpha}u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}+\widetilde{\mu}_{-\alpha}+0.5h_\alpha\overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}+O(h_\alpha^2)+O(h_\alpha\tau)=\left(k_\alpha\frac{\partial u^{j+\frac{\alpha}{p}}}{\partial x_\alpha}-\mathcal{B}_{-\alpha}u_0^{j+\frac{\alpha}{p}}+\widetilde{\mu}_{-\alpha}\right)_{x_\alpha=0}+$$
$$+0.5h_\alpha\overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}+O(h_\alpha^2)+O(h_\alpha\tau).$$

В силу граничных условий (1.7) выражение, стоящее в скобках есть ноль. Поэтому

$$\psi_{-\alpha} = 0.5h_\alpha \mathring{\psi}_{-\alpha} + \psi^*_{-\alpha}, \qquad \psi^*_{-\alpha} = O(h_\alpha^2 + \tau) + O(h_\alpha \tau),$$

$$\frac{\varepsilon}{p} z^{j+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{t},0} = \frac{a^{(1_\alpha)}_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}}_{x_\alpha,0} + \frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau - \mathcal{B}_{-\alpha} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha \overline{d}_{\alpha,0} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha} + \mathring{\psi}_{-\alpha} + \frac{\psi^*_{-\alpha}}{0.5h_\alpha},$$

$$\frac{\varepsilon}{p} z^{j+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{t},N_\alpha} = -\frac{a^{(N_\alpha)}_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha} - \frac{0.5h_\alpha}{p\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau + \mathcal{B}_{+\alpha} z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + 0.5h_\alpha \overline{d}_{\alpha,N_\alpha} z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha} +$$
$$+ \mathring{\psi}_{+\alpha} + \frac{\psi^*_{+\alpha}}{0.5h_\alpha}.$$

Итак, задача для погрешности $z^{j+\frac{\alpha}{p}}$ принимает вид:

$$\frac{\varepsilon}{p} z^{(\alpha)}_{\bar{t}} = \overline{\Lambda}_\alpha z^{(\alpha)} + \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \qquad z(x,0) = 0, \tag{3.3}$$

где

$$\overline{\Lambda}_\alpha = \begin{cases} \widetilde{\Lambda}_\alpha, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\Lambda^-_\alpha, & x_\alpha = 0, \\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\Lambda^+_\alpha, & x_\alpha = 1, \end{cases} \qquad \Psi_\alpha = \begin{cases} \psi_\alpha, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\psi_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\psi_{+\alpha}, & x_\alpha = 1, \end{cases}$$

$$\psi_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \psi^*_\alpha, \quad \mathring{\psi}_\alpha = O(1), \quad \psi^*_\alpha = O(h_\alpha^2 + \tau), \quad \psi_{-\alpha} = 0.5h_\alpha \mathring{\psi}_{-\alpha} + \psi^*_{-\alpha},$$

$$\psi_{+\alpha} = 0.5h_\alpha \mathring{\psi}_{+\alpha} + \psi^*_{+\alpha}, \quad \psi^*_{\pm\alpha} = O(h_\alpha^2 + \tau), \quad \mathring{\psi}_{\pm\alpha} = O(1), \quad \sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_{\pm\alpha} = 0.$$

§ 4. Устойчивость локально-одномерной схемы.

Для доказательства устойчивости схемы (2.6) воспользуемся методом энергетических неравенств. Для этого умножим уравнение (2.6) скалярно на $y^{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$\Big[\frac{\varepsilon}{p} y^{(\alpha)}_{\bar{t}}, y^{(\alpha)}\Big] - \Big[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big] = \Big[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big], \tag{4.1}$$

где

$$\Big[u,v\Big]_\alpha = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} \hbar_\alpha, \qquad \|\, y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)} = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y^2 \hbar_\alpha,$$

$$\Big[u,v\Big] = \sum_{x\in\bar{\omega}_h} uvH, \qquad H = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha, \qquad \|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} = \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)} H/\hbar_\alpha.$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (4.1):

$$\Big[\frac{\varepsilon}{p} y^{(\alpha)}_{\bar{t}}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha = \frac{\varepsilon}{2p}\Big(\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}\Big)_{\bar{t}} + \frac{\varepsilon\tau}{2p}\|y^{\alpha}_{\bar{t}}\|^2_{L_2(\alpha)}, \tag{4.2}$$

$$\left[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha = \left(\widetilde{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} y^{(\alpha)} + \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} =$$

$$= -\left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^2\right]_\alpha - \left[d_\alpha, (y^{(\alpha)})^2\right]_\alpha + \frac{1}{p\nu^2}\left[y^{(\alpha)}, \sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\tau\right]_\alpha - \tag{4.3}$$

$$- \frac{1}{p\nu}\left[y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha - y_0^{(\alpha)}\mathcal{B}_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} - y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\mathcal{B}_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)},$$

$$\left[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha = \left[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha - \widetilde{\mu}_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} - \widetilde{\mu}_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}. \tag{4.4}$$

Оценим слагаемые, стоящие в правой части (4.4):

$$\widetilde{\mu}_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \widetilde{\mu}_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} \leqslant \frac{1}{4\varepsilon_1}\left(\widetilde{\mu}_{-\alpha}^2 + \widetilde{\mu}_{+\alpha}^2\right) + \varepsilon_1\varepsilon \|y_{\bar{x}_\alpha}]|_{L_2(\alpha)}^2 + \varepsilon_1\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2.$$

Выбирая $\varepsilon = 1, \varepsilon_1 = \frac{c_0}{8}$, получаем

$$\widetilde{\mu}_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \widetilde{\mu}_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} \leqslant \frac{2}{c_0}\left(\widetilde{\mu}_{-\alpha}^2 + \widetilde{\mu}_{+\alpha}^2\right) + \frac{c_0}{8}\|y_{\bar{x}_\alpha}]|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{c_0}{4}\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2, \tag{4.5}$$

$$\left[d_\alpha, \left(y^{(\alpha)}\right)^2\right]_\alpha \geqslant c_0\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2, \tag{4.6}$$

$$\left[\frac{1}{p\nu} y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha = \left[\frac{1}{p\nu}, \left(y^{(\alpha)}\right)^2\right]_\alpha = \frac{1}{p\nu}\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2, \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered}
\left[\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} y\left(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau, y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right]_\alpha = \\
= \left\|\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} y\left(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau\right\|_{L_2(\alpha)} \left\|\frac{1}{p\nu^2} y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|_{L_2(\alpha)} \leqslant \\
\leqslant \left\|\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} y\left(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{1}{4p\nu^2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2 = \\
= \frac{1}{p\nu^2}\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha - 1}\left(\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} y\left(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau\right)^2 h_\alpha + \frac{1}{4p\nu^2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2 \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{p\nu^2}\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha - 1}\left(\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{2}{\nu}(t_j - t_{j'})}\tau \sum_{j'=0}^{j} y^2\left(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau\right) h_\alpha + \frac{1}{4p\nu^2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2 \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{2}{\nu}(t_j - t_{j'})}\tau \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha - 1} h_\alpha \sum_{j'=0}^{j} y^2\left(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau + \frac{1}{4p\nu^2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2 = \\
= \frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{2}{\nu}(t_j - t_{j'})}\tau \sum_{j'=0}^{j}\tau \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha - 1} y^2(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) h_\alpha + \frac{1}{4p\nu^2}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|_{L_2(\alpha)}^2 = \\
= \frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{2}{\nu}(t_j - t_{j'})}\tau \sum_{j'=0}^{j}\|y(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\|_{L_2(\alpha)}^2\tau + \frac{1}{4p\nu^2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2,
\end{gathered} \tag{4.8}$$

Так как

$$\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{2}{\nu}(t_j - t_{j'})}\tau = e^{-\frac{2}{\nu}t_j}\sum_{j'=0}^{j} e^{\frac{2}{\nu}t_{j'}}\tau = e^{-\frac{2}{\nu}t_j}\frac{e^{\frac{2}{\nu}t_j} - 1}{e^{\frac{2}{\nu}\tau} - 1}\tau = \nu\frac{1 - e^{-\frac{2}{\nu}t_j}}{2},$$

тогда из (4.8) получаем

$$
\begin{gathered}
\left[\frac{1}{p\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{2}{\nu}(t_j-t_{j'})} y\left(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau, y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right]_{\alpha} \leqslant \\
\leqslant \frac{1-e^{-\frac{2}{\nu}t_j}}{2p\nu}\sum_{j'=0}^{j}\|y(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\|^2_{L_2(\alpha)}\tau + \frac{1}{4p\nu^2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)},
\end{gathered} \tag{4.9}
$$

$$
\begin{gathered}
-y_0^{(\alpha)}\mathcal{B}_{-\alpha}y_0^{(\alpha)} - y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\mathcal{B}_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{(\alpha)} = -y_0^{(\alpha)}\frac{1}{\nu}\sum_{j'=0}^{pj+\alpha} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}\beta_{-\alpha}y_0^{\frac{j'}{p}}\tau - \\
- y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\frac{1}{\nu}\sum_{j'=0}^{pj+\alpha} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}\beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{\frac{j'}{p}}\tau \leqslant \varepsilon_2\left(\left(y_0^{(\alpha)}\right)^2 + \left(y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2\right) + \\
+ M_1(\varepsilon_2)\left[\left(\sum_{j'=0}^{pj+\alpha} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}\beta_{-\alpha}y_0^{\frac{j'}{p}}\tau\right)^2 + \left(\sum_{j'=0}^{pj+\alpha} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}\beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{\frac{j'}{p}}\tau\right)^2\right] \leqslant \\
\leqslant \varepsilon_2\left(\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)} + \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\alpha)}\right) + M_2(\varepsilon)\sum_{j'=0}^{pj+\alpha}\left(\|y^{\frac{j'}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)} + \|y_{\bar{x}_\alpha}^{\frac{j'}{p}}]|^2_{L_2(\alpha)}\right)\tau,
\end{gathered} \tag{4.10}
$$

$$
\left[\varphi_\alpha, y^{(\alpha)}\right]_\alpha \leqslant \frac{1}{2c_0}\|\varphi_\alpha\|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{c_0}{2}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}. \tag{4.11}
$$

После суммирования по $i_\beta \neq i_\alpha$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$, подставим (4.2)–(4.11) в тождество (4.1). Тогда, выбирая $\varepsilon_2 = \frac{c_0}{8}$, получим

$$
\begin{gathered}
\frac{\varepsilon}{2p}\left(\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right)_{\bar{t}} + \frac{\varepsilon\tau}{2p}\|y_{\bar{t}}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \frac{3c_0}{4}\|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \left(\frac{c_0}{8} + \frac{1}{p\nu} - \frac{1}{4p\nu^2}\right)\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \\
+ \frac{e^{-\frac{2}{\nu}t_j}}{2p\nu}\sum_{j'=0}^{j}\|y(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}})\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\tau \leqslant M_3\sum_{j'=0}^{j}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\tau + \\
+ M_4\sum_{j'=0}^{pj+\alpha}\left(\|y^{\frac{j'}{p}}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \|y_{\bar{x}_\alpha}^{\frac{j'}{p}}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right)\tau + \frac{1}{2c_0}\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \\
+ \frac{2}{c_0}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha} + \widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha.
\end{gathered} \tag{4.12}
$$

Суммируем (4.12) сначала по α от 1 до p:

$$
\begin{gathered}
\frac{\varepsilon}{2p}\left(\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right)_{\bar{t}} + \frac{3c_0}{4}\sum_{\alpha=1}^{p}\|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \left(\frac{c_0}{4} + \frac{1}{p\nu} - \frac{1}{4p\nu^2}\right)\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} \leqslant \\
\leqslant M_3\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{j'=0}^{j}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\tau + M_4\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{j'=0}^{pj+\alpha'}\left(\|y^{\frac{j'}{p}}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \|y_{\bar{x}_{\alpha'}}^{\frac{j'}{p}}]|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right)\tau + \\
+ M_5\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha} + \widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\right),
\end{gathered}
$$

а затем, суммируя по j' от 0 до j:

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{2}\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)}+\frac{3c_0}{4}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\omega_h)}+\\ +\left(\frac{c_0}{4}+\frac{1}{p\nu}-\frac{1}{4p\nu^2}\right)\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\omega_h)}\leqslant \\ \leqslant M_3\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j'}\|y^{s+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\tau+\frac{1}{2p\nu}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{pj'+\alpha'}\left(\|y^{\frac{s}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|y^{\frac{s}{p}}_{\bar{x}_{\alpha'}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau+\\ +M_4\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\right)+\frac{\varepsilon}{2}\|y^0\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}.\end{gathered}\tag{4.13}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (4.13), тогда имеем

$$\begin{gathered}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{pj'+\alpha'}\left(\|y^{\frac{s}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|y^{\frac{s}{p}}_{\bar{x}'_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau\leqslant\\ \leqslant M_7\|y^0\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j'}\sum_{\alpha'=1}^{p}\left(\|y^{s+\frac{\alpha'}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|y^{s+\frac{\alpha'}{p}}_{\bar{x}_{\alpha'}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau\leqslant\\ \leqslant M_7\|y^0\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)}+p\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j'}\left(\|y^{s+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|y^{s+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau.\end{gathered}$$

С учетом последнего, выбирая $\nu\geqslant\frac{1}{4}$, перепишем (4.13) в виде

$$\begin{gathered}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\leqslant\\ \leqslant M_5\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j'}\left(\|y^{s+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|y^{s+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau+M_6F_1^j,\end{gathered}\tag{4.14}$$

где $F_1^j=\sum\limits_{j'=0}^{j}\tau\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\right)+\|y^0\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)}$.

Применяя разностный аналог леммы Гронуолла (см. [44, лемма 4, с. 171]) к неравенству (4.14), получим

$$\begin{gathered}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\leqslant\\ \leqslant M_7\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\right)+\|y^0\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)}\right),\end{gathered}\tag{4.15}$$

Учитывая (4.15), из (4.14) при $\nu \geqslant \frac{1}{4}$ получаем априорную оценку

$$\varepsilon\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}_{\bar x_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\widetilde\mu^2_{-\alpha}+\widetilde\mu^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\right) + \|y^0\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)}\right), \tag{4.16}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$ и не зависит от h_α и τ, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p)$.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.5)*, тогда локально-одномерная схема* (2.6) *устойчива по правой части и начальным данным, так что для решения схемы* (2.6) *справедлива оценка* (4.16).

§ 5. Сходимость локально-одномерной схемы.

По аналогии с [42] решение $z_{(\alpha)} = z^{j+\frac{\alpha}{p}}$ задачи для погрешности

$$\frac{\varepsilon}{p}z^{(\alpha)}_{\bar t} = \overline\Lambda_\alpha z^{(\alpha)} + \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},\qquad z(x,0)=0, \tag{5.1}$$

представим в виде суммы $z_{(\alpha)} = \upsilon_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\varepsilon\frac{\eta_{(\alpha)}-\eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \mathring\psi_\alpha,\quad x\in\omega_h+\gamma_\alpha,\quad \alpha=1,2,\ldots,p,$$
$$\eta(x,0)=0,\qquad \mathring\psi_\alpha = \begin{cases}\mathring\psi_\alpha, & x_\alpha\in\omega_{h_\alpha},\\ \mathring\psi_{-\alpha}, & x_\alpha=0,\\ \mathring\psi_{+\alpha}, & x_\alpha=l_\alpha.\end{cases} \tag{5.2}$$

Из (5.2) следует $\varepsilon\eta^{j+1} = \varepsilon\eta_{(p)} = \varepsilon\eta^j + \tau\left(\mathring\psi_1+\mathring\psi_2+\ldots+\mathring\psi_p\right) = \varepsilon\eta^j = \ldots = \varepsilon\eta^0 = 0$. Для $\eta^\alpha = \frac{\tau}{\varepsilon}\left(\mathring\psi_1+\mathring\psi_2+\ldots+\mathring\psi_\alpha\right) = -\frac{\tau}{\varepsilon}\left(\mathring\psi_{\alpha+1}+\ldots+\mathring\psi_p\right) = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$.

Функция $\upsilon_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\varepsilon\frac{\upsilon_{(\alpha)}-\upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \widetilde\Lambda_\alpha\upsilon_{(\alpha)} + \widetilde\psi_\alpha,\quad \widetilde\psi_\alpha = \widetilde\Lambda_\alpha\eta_{(\alpha)} + \psi^*_\alpha,\quad x_\alpha\in\omega_{h_\alpha}, \tag{5.3}$$

$$0.5h_\alpha\varepsilon\frac{\upsilon_{(\alpha)}-\upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda^-_\alpha\upsilon_{(\alpha)} + \widetilde\psi_{-\alpha},\quad \widetilde\psi_{-\alpha} = \Lambda^-_\alpha\eta_{(\alpha)} + \psi^*_{-\alpha},\quad x_\alpha=0, \tag{5.4}$$

$$0.5h_\alpha\varepsilon\frac{\upsilon_{(\alpha)}-\upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda^+_\alpha\upsilon_{(\alpha)} + \widetilde\psi_{+\alpha},\quad \widetilde\psi_{+\alpha} = \Lambda^+_\alpha\eta_{(\alpha)} + \psi^*_{+\alpha},\quad x_\alpha=1, \tag{5.5}$$

$$\upsilon(x,0)=0. \tag{5.6}$$

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\overline Q_T$ производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2\partial x_\beta^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2\partial t}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}$, $\alpha = 1,2,\ldots,p$, $\alpha\neq\beta$, то $\widetilde\Lambda_\alpha\eta_{(\alpha)} = -\frac{\tau}{\varepsilon}\widetilde\Lambda_\alpha\left(\mathring\psi_{\alpha+1}+\ldots+\mathring\psi_p\right) = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$, $\Lambda^\pm_\alpha\eta_{(\alpha)} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$.

Решение задачи (5.3)–(5.6) оценим с помощью теоремы 1:

$$\varepsilon\|\upsilon^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\upsilon^{j'+\frac{\alpha}{p}}_{\bar x_\alpha}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \|\upsilon^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant M\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\widetilde\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\widetilde\psi^2_{-\alpha}+\widetilde\psi^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\right), \tag{5.7}$$

Так как $\eta^{j+1}=0,\ \eta_{(\alpha)},\eta_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}=O\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right)$ и

$$\|z^{j+1}\|_1^2=\varepsilon\|z^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|z_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|z^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)=$$

$$=\varepsilon\|v^{j+1}+\eta^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|v_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}+\eta_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|v^{j'+\frac{\alpha}{p}}+\eta^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\|v^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+2\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|v_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|v^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|\eta_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\right.$$

$$\left.+\|\eta^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\leqslant 2\Big(\varepsilon\|v^{j+1}\|_1^2+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\eta_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|\eta^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\Big),$$

тогда из оценки (5.7) следует следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть задача (1.7)–(1.9) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ при всех значениях ε и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2\partial x_\beta^2},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2\partial t},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2},\quad \alpha=1,2,\ldots,p,\quad \alpha\neq\beta,$$

а также выполнены условия (1.5). Тогда локально-одномерная схема (2.6) сходится к решению дифференциальной задачи (1.7)–(1.9) со скоростью $O\left(|h|^2+\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right)$, $\tau=o\,(\varepsilon)$, для всех $\nu\geqslant\frac14$, так что

$$\|y^{j+1}-u^{j+1}\|_1\leqslant M\left(|h|^2+\frac{\tau}{\varepsilon}\right),$$

где ε — малый параметр, $|h|^2=h_1^2+h_2^2+\ldots+h_p^2$,

$$\|z^{j+1}\|_1=\left(\varepsilon\|z^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|z_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\|z^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\right)^{1/2}.$$

Замечание 1. Если $\varepsilon=\tau^\rho$, где $0<\rho<1$, тогда с учетом условия (1.34) решение схемы (2.6) сходится к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) со скоростью $O(|h|^2+\tau^{1-\rho}+\tau^\rho)$.

Замечание 2. Полученные априорные оценки справедливы и в случае, когда область G представляет собой p-мерный прямоугольный параллелепипед

$$G=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_p)\colon 0<x_\alpha<l_\alpha,\quad \alpha=1,2,\ldots,p\}.$$

Замечание 3. Полученные в данной работе результаты справедливы и для уравнения влагопереноса дробного порядка следующего вида

$$\partial_{0t}^\delta u=Lu+\partial_{0t}^\delta Lu-u+f(x,t),\qquad (x,t)\in Q_T, \tag{5.8}$$

с краевыми

$$k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\partial_{0t}^\delta\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)=\beta_{-\alpha}(x,t)u+\mu_{-\alpha}(x,t),\qquad x_\alpha=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{5.9}$$

$$-\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\partial_{0t}^\delta\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right)=\beta_{+\alpha}(x,t)u+\mu_{+\alpha}(x,t),\qquad x_\alpha=1,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{5.10}$$

и начальными условиями

$$u(x,0)=u_0(x), \qquad x\in\overline{G}, \tag{5.11}$$

где $\partial_{0t}^{\delta}u=\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^t\frac{u_\tau\,d\tau}{(t-\tau)^\delta}$ —дробная производная в смысле Капуто порядка δ, $0<\delta<1$. Тогда, умножая обе части (5.8), (5.9), (5.10) на $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}$ и действуя оператором дробного интегрирования $D_{0t}^{-\delta}=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t\frac{u\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\delta}}$, после несложных преобразований получаем

$$Lu-u=-\widetilde{f}(x,t), \tag{5.12}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=\mathcal{B}_{-\alpha}u+\widetilde{\mu}_{-\alpha}(x,t), & x_\alpha=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T,\\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=\mathcal{B}_{+\alpha}u+\widetilde{\mu}_{+\alpha}(x,t), & x_\alpha=1, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \end{cases} \tag{5.13}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \qquad x\in\overline{G}, \tag{5.14}$$

где

$$\widetilde{f}(x,t)=\frac{D_{0t}^{-\delta}\left(f(x,t)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}\right)+Lu_0(x)-u_0(x)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}},$$

$$\mathcal{B}_{-\alpha}u(0,x',t)=\frac{D_{0t}^{-\delta}\left(\beta_{-\alpha}(0,x',t)u(0,x',t)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}\right)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}},$$

$$\mathcal{B}_{+\alpha}u(1,x',t)=\frac{D_{0t}^{-\delta}\left(\beta_{+\alpha}(1,x',t)u(1,x',t)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}\right)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}},$$

$$\widetilde{\mu}_{-\alpha}(0,x',t)=\frac{D_{0t}^{-\delta}\left(\mu_{-\alpha}(0,x',t)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}\right)+k_\alpha(0,x',0)u_0'(0,x')}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}},$$

$$\widetilde{\mu}_{+\alpha}(1,x',t)=\frac{D_{0t}^{-\delta}\left(\mu_{+\alpha}(1,x',t))\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}\right)-k_\alpha(1,x',0)u_0'(1,x')}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}},$$

$D_{0t}^{-\delta}u=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t\frac{u\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\delta}}$ — дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка δ, $0<\delta<1$.

Далее вместо уравнения (5.12) рассматривается уравнение с малым параметром

$$\varepsilon u_t=Lu-u+\widetilde{f}(x,t).$$

Далее, повторяя рассуждения этой статьи, легко проверить справедливость теорем 1 и 2 для задачи (5.12)–(5.14).

§ 6. Алгоритм численного решения исходной задачи (1.1)–(1.4).

Для численного решения дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) выпишем расчетные формулы ($0 \leqslant x_\alpha \leqslant 1$, $\alpha = 1, 2$, $p = 2$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(k_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(k_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) + \\ &+ \nu\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_1}\Big(k_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \nu\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_2}\Big(k_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) - \\ &- q_1(x_1,x_2,t)u(x_1,x_2,t) - q_2(x_1,x_2,t)u(x_1,x_2,t) + f(x_1,x_2,t), \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} k_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial}{\partial t}\left(k_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \beta_{-1}(x,t)u + \mu_{-1}(x,t), & x_1 = 0, \\ -\left(k_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial}{\partial t}\left(k_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right) = \beta_{+1}(x,t)u + \mu_{+1}(x,t), & x_1 = 1, \\ k_2(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial}{\partial t}\left(k_2(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = \beta_{-2}(x,t)u + \mu_{-2}(x,t), & x_2 = 0, \\ -\left(k_2(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial}{\partial t}\left(k_2(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right) = \beta_{+2}(x,t)u + \mu_{+2}(x,t), & x_2 = 1, \end{cases} \tag{6.2}$$

$$u(x_1,x_2,0) = u_0(x_1,x_2). \tag{6.3}$$

Рассмотрим сетку $x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, $t_j = j\tau$, где $i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha$, $h_\alpha = 1/N_\alpha$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $\tau = T/m$. Вводится один дробный шаг $t_{j+\frac12} = t_j + 0.5\tau$. Обозначим через $y_{i_1,i_2}^{j+\frac{\alpha}{2}} = y^{j+\frac{\alpha}{2}} = y(i_1h_1, i_2h_2, (j+0.5\alpha)\tau)$, $\alpha = 1, 2$, сеточную функцию.

Напишем локально-одномерную схему

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{y^{j+\frac12} - y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac12} + \frac{1}{2\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} y^{j+\frac12}\tau - \frac{1}{2\nu}y^{j+\frac12} + \varphi_1, \\ \varepsilon\frac{y^{j+1} - y^{j+\frac12}}{\tau} = \Lambda_2 y^{j+1} + \frac{1}{2\nu^2}\sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} y^{j+1}\tau - \frac{1}{2\nu}y^{j+1} + \varphi_2, \end{cases} \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} y_{0,i_2}^{j+\frac12} = \varkappa_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac12})y_{1,i_2}^{j+\frac12} + \mu_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac12}), \\ y_{N_1,i_2}^{j+\frac12} = \varkappa_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac12})y_{N_1-1,i_2}^{j+\frac12} + \mu_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac12}), \\ y_{i_1,0}^{j+\frac12} = \varkappa_{21}(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,1}^{j+1} + \mu_{21}(i_1h_1, t_{j+1}), \\ y_{i_1,N_2}^{j+1} = \varkappa_{22}(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,N_2-1}^{j+1} + \mu_{22}(i_1h_1, t_{j+1}), \end{cases} \tag{6.5}$$

$$y_{i_1,i_2}^0 = u_0(i_1h_1, i_2, h_2), \tag{6.6}$$

$$\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha} - d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{2\nu}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j - t_{j'})} f^{j+\frac{\alpha}{2}}\tau - e^{-t_{j+\frac{\alpha}{2}}}\left[\left(y_{\bar{x}_1x_1}^{j+\frac{\alpha-1}{2}} + y_{\bar{x}_2x_2}^{j+\frac{\alpha-1}{2}}\right) - \frac{1}{\nu}y^{j+\frac{\alpha-1}{2}}\right], \quad p = 2,$$

Приведем расчетные формулы для решения задачи (6.4)–(6.6).

На первом этапе находим решение $y_{i_1,i_2}^{j+\frac12}$. Для этого при каждом значении $i_2 = \overline{1, N_2 - 1}$ решается следующая задача:

$$\begin{aligned} A_{1(i_1,i_2)}y_{i_1-1,i_2}^{j+\frac12} - C_{1(i_1,i_2)}y_{i_1,i_2}^{j+\frac12} + B_{1(i_1,i_2)}y_{i_1+1,i_2}^{j+\frac12} &= -F_{1(i_1,i_2)}^{j+\frac12}, \quad 0 < i_1 < N_1, \\ y_{0,i_2}^{j+\frac12} &= \varkappa_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac12})y_{1,i_2}^{j+\frac12} + \mu_{11}(i_2h_2, t_{j+\frac12}), \\ y_{N_1,i_2}^{j+\frac12} &= \varkappa_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac12})y_{N_1-1,i_2}^{j+\frac12} + \mu_{12}(i_2h_2, t_{j+\frac12}), \end{aligned} \tag{6.7}$$

где

$$A_{1(i_1,i_2)}=\frac{(a_1)_{i_1,i_2}}{h_1^2},\quad B_{1(i_1,i_2)}=\frac{(a_1)_{i_1+1,i_2}}{h_1^2},$$
$$C_{1(i_1,i_2)}=A_{1(i_1,i_2)}+B_{1(i_1,i_2)}+\frac{\varepsilon}{\tau}-\frac{\tau}{2\nu^2}+d_{1(i_1,i_2)}+\frac{1}{2\nu},$$
$$F^{j+\frac12}_{1(i_1,i_2)}=\frac{\varepsilon}{\tau}y^j_{i_1,i_2}+\frac{1}{2\nu^2}\sum_{j\,'=0}^{j-1}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j\,'})}y^{j\,'+\frac12}\tau+\varphi_{1(i_1,i_2)},$$
$$\varkappa_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac12})=\frac{\frac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1}}{\frac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1}-\frac{0.5h_1\tau}{2\nu^2}+\frac{\tau}{\nu}\beta^{j+\frac12}_{-1,i_2}+0.5h_1d^{j+\frac12}_{-1,i_2}+\frac{0.5h_1}{2\nu}+\frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}},$$
$$\varkappa_{12}(i_2h_2,t_{j+\frac12})=\frac{\frac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1}}{\frac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1}-\frac{0.5h_1\tau}{2\nu^2}+\frac{\tau}{\nu}\beta^{j+\frac12}_{+1,i_2}+0.5h_1d^{j+\frac12}_{+1,i_2}+\frac{0.5h_1}{2\nu}+\frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}},$$
$$\mu_{11}(i_2h_2,t_{j+\frac12})=\frac{\widetilde{\mu}_{-1}(i_2h_2,t_{j+\frac12})+\frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}y^j_0+\frac{1}{\nu}\sum\limits_{j\,'=0}^{2j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j\,'})}\beta^{j+\frac12}_{-1,i_2}y_0^{j\,'+\frac12}\tau}{\frac{(a_1)_{1,i_2}}{h_1}-\frac{0.5h_1\tau}{2\nu^2}+\frac{\tau}{\nu}\beta^{j+\frac12}_{-1,i_2}+0.5h_1d^{j+\frac12}_{-1,i_2}+\frac{0.5h_1}{2\nu}+\frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}},$$
$$\mu_{12}(i_2h_2,t_{j+\frac12})=\frac{\widetilde{\mu}_{+1}(i_2h_2,t_{j+\frac12})+\frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}y^j_{N_1}+\frac{1}{\nu}\sum\limits_{j\,'=0}^{2j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j\,'})}\beta^{j+\frac12}_{+1,i_2}y_{N_1}^{j\,'+\frac12}\tau}{\frac{(a_1)_{N_1,i_2}}{h_1}-\frac{0.5h_1\tau}{2\nu^2}+\frac{\tau}{\nu}\beta^{j+\frac12}_{+1,i_2}+0.5h_1d^{j+\frac12}_{+1,i_2}+\frac{0.5h_1}{2\nu}+\frac{0.5h_1\varepsilon}{\tau}}.$$

Для вычисления правых частей $F^{j+\frac12}_{1(i_1,i_2)}$, $\mu^{j+\frac12}_{11(i_1,i_2)}$, $\mu^{j+\frac12}_{12(i_1,i_2)}$ на $j+\frac12$-м слое необходимо использовать значение искомой функции $y^j_{i_1,i_2}$ со всех предыдущих (нижних) слоев из-за слагаемого $\frac{1}{2\nu^2}\sum\limits_{j\,'=0}^{2j+2}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j\,'})}y^{j'+\frac12}\tau$, что значительно увеличивает объем вычислений даже при малых разбиениях сетки. Во избежание этого, предлагается рекуррентная формула для быстрого счета в многомерном случае, которая позволяет хранить на предыдущем слое значение указанной суммы, что по количеству операций не уступает двухслойной схеме.

Аппроксимируя $\frac{1}{\nu^2}\int_0^t e^{-\frac{1}{\nu}(t-\tau)}u(x,\tau)\,d\tau$ суммой $\frac{1}{\nu}\sum\limits_{s=1}^{pj+\alpha}\left(e^{-\frac{1}{\nu}t_{j+\frac{\alpha-s}{p}}}-e^{-\frac{1}{\nu}t_{j+\frac{\alpha-s+1}{p}}}\right)u^{\frac{s}{p}}$ таким образом, при $p=2$ на $j+\frac12$-м слое рекуррентная формула для быстрого счета примет вид:

$$\frac12S^{j+\frac12}=\frac{1}{2\nu^2}\sum_{j\,'=0}^{j}e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j\,'})}y^{j+\frac12}\tau=\frac{1}{2\nu}\sum_{s=0}^{2j}\left(e^{-\frac{1}{\nu}t_{j-\frac{s}{2}}}-e^{-\frac{1}{\nu}t_{j+\frac{1-s}{2}}}\right)y^{\frac{s}{p}}=$$
$$=\frac{\left(1-e^{-\frac{\tau}{2\nu}}\right)}{\nu}y^{j+\frac12}+e^{-\frac{\tau}{2\nu}}\frac12S^j,\qquad S^0=0.$$

На втором этапе находим решение $y^{j+1}_{i_1,i_2}$. Для этого, как и в первом случае, при каждом значении $i_1=\overline{1,N_1-1}$ решается задача

$$A_{2(i_1,i_2)}y^{j+1}_{i_1,i_2-1}-C_{2(i_1,i_2)}y^{j+1}_{i_1,i_2}+B_{2(i_1,i_2)}y^{j+1}_{i_1,i_2+1}=-F^{j+1}_{2(i_1,i_2)},\quad 0<i_2<N_2, \tag{6.8}$$

$$y_{i_1,0}^{j+1} = \varkappa_{21}(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,1}^{j+1} + \mu_{21}(i_1h_1, t_{j+1}),$$
$$y_{i_1,N_2}^{j+1} = \varkappa_{22}(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,N_2-1}^{j+1} + \mu_{22}(i_1h_1, t_{j+1}),$$
$$A_{2(i_1,i_2)} = \frac{(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2^2}, \quad B_{2(i_1,i_2)} = \frac{(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2^2},$$
$$C_{2(i_1,i_2)} = A_{2(i_1,i_2)} + B_{2(i_1,i_2)} + \frac{\varepsilon}{\tau} - \frac{\tau}{2\nu^2} + d_{2(i_1,i_2)} + \frac{1}{2\nu},$$
$$F_{2(i_1,i_2)}^{j+1} = \frac{\varepsilon}{\tau}y_{i_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\nu^2}\sum_{j'=0}^{j-1} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y^{j'+1}\tau + \varphi_{2(i_1,i_2)}.$$

$$\varkappa_{21}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\frac{(a_2)_{i_1,1}}{h_2}}{\frac{(a_2)_{i_1,1}}{h_1} - \frac{0.5h_2\tau}{2\nu^2} + \frac{\tau}{\nu}\beta_{-2,i_1}^{j+1} + 0.5h_2d_{-2,i_1}^{j+1} + \frac{0.5h_2}{2\nu} + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}},$$

$$\varkappa_{22}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\frac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2}}{\frac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} - \frac{0.5h_2\tau}{2\nu^2} + \frac{\tau}{\nu}\beta_{+2,i_1}^{j+1} + 0.5h_2d_{+2,i_1}^{j+1} + \frac{0.5h_2}{2\nu} + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}},$$

$$\mu_{21}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\widetilde{\mu}_{-2}(i_1h_1, t_{j+1}) + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}y_0^j + \frac{1}{\nu}\sum\limits_{j'=0}^{2j+1} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}\beta_{-2,i_1}^{j+1}y_0^{j'+1}\tau}{\frac{(a_2)_{i_1,1}}{h_1} - \frac{0.5h_2\tau}{2\nu^2} + \frac{\tau}{\nu}\beta_{-2,i_1}^{j+1} + 0.5h_2d_{-2,i_1}^{j+1} + \frac{0.5h_2}{2\nu} + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}},$$

$$\mu_{22}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\widetilde{\mu}_{+2}(i_1h_1, t_{j+1}) + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}y_{N_2}^j + \frac{1}{\nu}\sum\limits_{j'=0}^{2j+1} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}\beta_{+2,i_1}^{j+1}y_{N_1}^{j'+1}\tau}{\frac{(a_2)_{i_1,N_2}}{h_2} - \frac{0.5h_2\tau}{2\nu^2} + \frac{\tau}{\nu}\beta_{+2,i_1}^{j+1} + 0.5h_2d_{+2,i_1}^{j+1} + \frac{0.5h_2}{2\nu} + \frac{0.5h_2\varepsilon}{\tau}}.$$

На $j+1$-м слое рекуррентная формула для быстрого счета имеет вид:

$$\frac{1}{2}S^{j+1} = \frac{1}{2\nu^2}\sum_{j'=0}^{j} e^{-\frac{1}{\nu}(t_j-t_{j'})}y^{j+\frac{1}{2}}\tau = \frac{1}{2\nu}\sum_{s=0}^{2j+1}\left(e^{-\frac{1}{\nu}t_{j-\frac{1-s}{2}}} - e^{-\frac{1}{\nu}t_{j+\frac{2-s}{2}}}\right)y^{\frac{s}{p}} =$$
$$= \frac{\left(1-e^{-\frac{\tau}{2\nu}}\right)}{\nu}y^{j+1} + e^{-\frac{\tau}{2\nu}}\frac{1}{2}S^{j+\frac{1}{2}}.$$

Каждая из задач (6.7), (6.8) решается методом прогонки [42].

§ 7. Численные эксперименты

Коэффициенты уравнения и граничных условий задачи (1.7)–(1.9) подбираются таким образом, чтобы точным решением задачи была функция $u(x,t) = e^t(\sin(x_1) + \sin(x_2))$.

Ниже в таблице 1 при уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости в норме $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in\bar{w}_{h\tau}} |y|$, когда $\tilde{h} = h_1 = h_2 = \tau$. Порядок сходимости будем определять по формуле ПС $= \log_2\frac{||z_1||}{||z_2||}$, где z_1 и z_2 — погрешности, соответствующие шагам $0.5\tilde{h}$, $\tilde{h}$.

Численные расчеты показывают, что если взять ρ, h, τ достаточно малыми, то решение схемы (2.6) сходится к решению дифференциальной задачи (1.7)–(1.9) со скоростью $O\left(\tau^{1-\rho}\right)$.

Таблица 1:

ρ	ν	$\tilde{h}$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0.001	0.25	1/128	0.039778478	
		1/256	0.027088254	0.5543
		1/512	0.016760975	0.6926
		1/1024	0.009627567	0.8000
	1	1/128	0.041737547	
		1/256	0.028685184	0.5410
		1/512	0.017942654	0.6769
		1/1024	0.010405651	0.7860
	10	1/128	0.042507146	
		1/256	0.029235379	0.5400
		1/512	0.018304306	0.6755
		1/1024	0.010624146	0.7848

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свешников А. А., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
2. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. № 5. С. 852–864.
3. Дзекцер Е. С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 3. С. 540–543. http://mi.mathnet.ru/dan38808
4. Рубинштейн Л. И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1948. Т. 12. № 1. С. 27–45.
5. Ting T. W. A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1974. Vol. 45. Issue 1. P. 23–31. https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90116-4
6. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement // L'eau et la production végétale. Paris: Institut national de la recherche agronomique, 1964. № 9. Pp. 27–62.
7. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.
8. Канчукоев В. З. Краевые задачи для уравнений псевдопараболического и смешанного гиперболо-псевдопараболического типов и их приложения к расчету тепломассобмена в почвогрунтах // САПР и АСПР в мелиорации. Нальчик: 1983. С. 131–138.
9. Кочина Н. Н. Вопросы регулирования уровня грунтовых вод при поливах // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. № 1. С. 51–54. http://mi.mathnet.ru/dan37901
10. Нахушев А. М., Борисов В. Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 105–110. http://mi.mathnet.ru/de2971
11. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // Journal of Differential Equations. 1972. Vol. 12. Issue 3. P. 559–565. https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90025-3
12. Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J. Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1965. Vol. 19. Issue 2. P. 100–116. https://doi.org/10.1007/BF00282277
13. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 689–699. http://mi.mathnet.ru/de4523
14. Showalter R. E., Ting T. W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1970. Vol. 1. No. 1. P. 1–26. https://doi.org/10.1137/0501001

15. Ting T. W. Certain non-steady flows of second-order fluids // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1963. Vol. 14. Issue 1. P. 1–26. https://doi.org/10.1007/BF00250690
16. Бештоков М. Х. Метод Римана для решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2013. Вып. 4 (33). С. 15–24. https://doi.org/10.14498/vsgtu1238
17. Бештоков М. Х. Разностный метод решения одной нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1170–1177. https://elibrary.ru/item.asp?id=20280569
18. Jachimavičienė J., Sapagovas M., Štikonas A., Štikonienė O. On the stability of explicit finite difference schemes for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. 2014. Vol. 19. No. 2. P. 225–240. https://doi.org/10.15388/NA.2014.2.6
19. Amiraliyev G .M., Cimen E., Amirali I., Cakir M. High-order finite difference technique for delay pseudo-parabolic equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. Vol. 321. P. 1–7. https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.02.017
20. Бештоков М. Х. О численном решении нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1393–1406. https://doi.org/10.1134/S0374064116100125
21. Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2016. Vol. 158. 012019. https://doi.org/10.1088/1757-899x/158/1/012019
22. Бештоков М. Х. Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся уравнений соболевского типа с нелокальным источником в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 249–266. https://doi.org/10.1134/S0374064118020115
23. Бештоков М. Х. Численное исследование начально-краевых задач для уравнения соболевского типа с дробной по времени производной // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59. № 2. С. 185–202. https://doi.org/10.1134/S0044466919020054
24. Бештоков М. Х. Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 158–175. https://doi.org/10.35634/vm200202
25. Mesloub S., Bachar I. On a nonlocal 1-D initial value problem for a singular fractional-order parabolic equation with Bessel operator // Advances in Difference Equations. 2019. Vol. 2019. Article number: 254. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2196-z
26. Luc N. H., Jafari H., Kumam P., Tuan N. H. On an initial value problem for time fractional pseudo-parabolic equation with Caputo derivative // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. https://doi.org/10.1002/mma.7204
27. Čiegis R., Tumanova N. On construction and analysis of finite difference schemes for pseudoparabolic problems with nonlocal boundary conditions // Mathematical Modelling and Analysis. 2014. Vol. 19. Issue 2. P. 281–297. https://doi.org/10.3846/13926292.2014.910562
28. Čiegis R., Subač O., Bugajev A. Parallel algorithms for three-dimensional parabolic and pseudoparabolic problems with different boundary conditions // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. 2014. Vol. 19. Issue 3. P. 382–395. https://doi.org/10.15388/NA.2014.3.5
29. Hussain M., Haq S., Ghafoor A. Meshless RBFs method for numerical solutions of two-dimensional high order fractional Sobolev equations // Computers and Mathematics with Applications. 2020. Vol. 79. Issue 3. P. 802–816. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.07.033
30. Aslefallah M., Abbasbandy S., Shivanian E. Meshless singular boundary method for two-dimensional pseudo-parabolic equation: analysis of stability and convergence // Journal of Applied Mathematics and Computing. 2020. Vol. 63. Issues 1–2. P. 585–606. https://doi.org/10.1007/s12190-020-01330-x
31. Аблабеков Б. С., Байсеркеева А. Б. Явное решение задачи Коши для двумерного псевдопараболического уравнения // Известия высших учебных заведений Кыргызстана. 2015. № 10. С. 3–7.

32. Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. № 3. С. 41–47.
33. Бештоков М. Х. Численный метод решения второй начально-краевой задачи для многомерного псевдопараболического уравнения третьего порядка // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 384–408. https://doi.org/10.35634/vm210303
34. Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Математические заметки. 1969. Т. 6. Вып. 2. С. 237–248. http://mi.mathnet.ru/mz6928
35. Игнатьев В. Н., Задорин А. И. О плохой обусловленности при численном решении уравнений с малым параметром // Препринт ВЦ СО АН СССР. Новосибирск. 1981. № 84. С. 29.
36. Лукащук С. Ю. Приближение обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений дифференциальными уравнениями с малым параметром // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 4. С. 515–531. https://doi.org/10.20537/vm170403
37. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. Вып. 5 (77). С. 3–122. http://mi.mathnet.ru/umn7705
38. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
39. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
40. Ладыженская О. А., Серегин Г. А. Об одном способе приближенного решения начально-краевых задач для уравнений Навье–Стокса // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1992. Т. 197. С. 87–119. http://mi.mathnet.ru/znsl5062
41. Temam R. Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis. Amsterdam: North-Holland, 1977.
42. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
43. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
44. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 26.07.2022

Принята к публикации 05.10.2022

Бештоков Мурат Хамидбиевич, к. ф.-м. н., доцент, ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет», Северо-Кавказский центр математических исследований, 355017, Россия, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2968-9211
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Цитирование: М. Х. Бештоков. Конечно-разностный метод решения многомерного псевдопараболического уравнения с граничными условиями третьего рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 502–527.

M. Kh. Beshtokov

Finite-difference method for solving a multidimensional pseudoparabolic equation with boundary conditions of the third kind

Keywords: pseudoparabrolic equation, Hallaire's equation, locally one-dimensional scheme, stability, convergence of difference scheme, sum approximation method.

MSC2020: 35L35

DOI: 10.35634/vm220402

We study an initial-boundary value problem for a multidimensional pseudoparabolic equation with variable coefficients and boundary conditions of the third kind. The multidimensional pseudoparabolic equation is reduced to an integro-differential equation with a small parameter. It is shown that as the small parameter tends to zero, the solution of the resulting modified problem converges to the solution of the original problem. For an approximate solution of the obtained problem, a locally one-dimensional difference scheme by A. A. Samarsky is constructed. An a priori estimate is obtained by the method of energy inequalities, from which the uniqueness, stability, and convergence of the solution of the locally one-dimensional difference scheme to the solution of the original differential problem follow. For a two-dimensional problem, an algorithm for the numerical solution of the initial-boundary value problem for a pseudoparabolic equation with conditions of the third kind is developed.

REFERENCES

1. Sveshnikov A. A., Al'shin A. B., Korpusov M. O., Pletner Yu. D. *Lineinye i nelineinye uravneniya sobolevskogo tipa* (Linear and nonlinear Sobolev-type equations), Moscow: Fizmatlit, 2007.
2. Barenblatt G. I., Zheltov Iu. P., Kochina I. N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata], *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1960, vol. 24, issue 5, pp. 1286–1303. https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6
3. Dzekcer E. S. Equation of motion of underground water with a free surface in multilayer media, *Soviet Physics. Doklady*, 1975, vol. 20, pp. 24–26. https://zbmath.org/?q=an:0331.76056
4. Rubinshtein L. I. On a question about the propagation of heat in heterogeneous media, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Geograf. Geofiz.*, 1948, vol. 12, issue 1, pp. 27–45 (in Russian). https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=24020
5. Ting T. W. A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1974, vol. 45, issue 1, pp. 23–31. https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90116-4
6. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement, *L'eau et la production végétale*, Paris: Institut national de la recherche agronomique, 1964, no. 9, pp. 27–62.
7. Chudnovskii A. F. *Teplofizika pochv* (Thermal physics of soils), Moscow: Nauka, 1976.
8. Kanchukoev V. Z. Boundary-value problems for equations of pseudoparabolic and mixed hyperbolic-pseudoparabolic types and their applications to the calculation of heat and mass transfer in soils, *SAPR i ASPR v melioratsii* (CAD and ASPR in melioration), Nalchick: 1983, pp. 131–138 (in Russian).
9. Kochina N. N. Regulation of the level of ground waters during irrigation, *Soviet Physics. Doklady*, 1973, vol. 18, pp. 689–691. https://zbmath.org/?q=an:0303.73085
10. Nakhushev A. M., Borisov V. N. Boundary value problems for loaded parabolic equations and their applications to the prediction of ground water level, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1977, vol. 13, no. 1, pp. 105–110 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de2971
11. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable, *Journal of Differential Equations*, 1972, vol. 12, issue 3, pp. 559–565. https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90025-3
12. Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J. Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1965, vol. 19, issue 2, pp. 100–116. https://doi.org/10.1007/BF00282277

13. Shkhanukov M. Kh. Some boundary value problems for a third-order equation that arise in the modeling of the filtration of a fluid in porous media, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1982, vol. 18, no. 4, pp. 689–699 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de4523
14. Showalter R. E., Ting T. W. Pseudoparabolic partial differential equations, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1970, vol. 1, no. 1, pp. 1–26. https://doi.org/10.1137/0501001
15. Ting T. W. Certain non-steady flows of second-order fluids, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1963, vol. 14, issue 1, pp. 1–26. https://doi.org/10.1007/BF00250690
16. Beshtokov M. Kh. Riemann method for solving non-local boundary value problems for the third order pseudoparabolic equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, issue 4 (33), pp. 15–24 (in Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1238
17. Beshtokov M. Kh. Finite-difference method for a nonlocal boundary value problem for a third-order pseudoparabolic equation, *Differential Equations*, 2013, vol. 49, issue 9, pp. 1134–1141. https://doi.org/10.1134/S0012266113090085
18. Jachimavičienė J., Sapagovas M., Štikonas A., Štikonienė O. On the stability of explicit finite difference schemes for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 225–240. https://doi.org/10.15388/NA.2014.2.6
19. Amiraliyev G. M., Cimen E., Amirali I., Cakir M. High-order finite difference technique for delay pseudo-parabolic equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 321, pp. 1–7. https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.02.017
20. Beshtokov M. Kh. On the numerical solution of a nonlocal boundary value problem for a degenerating pseudoparabolic equation, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, issue 10, pp. 1341–1354. https://doi.org/10.1134/S0012266116100104
21. Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2016, vol. 158, 012019. https://doi.org/10.1088/1757-899x/158/1/012019
22. Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for degenerating and nondegenerating Sobolev-type equations with a nonlocal source in differential and difference forms, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, issue 2, pp. 250–267. https://doi.org/10.1134/S0012266118020118
23. Beshtokov M. Kh. Numerical analysis of initial-boundary value problem for a Sobolev-type equation with a fractional-order time derivative, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, issue 2, pp. 175–192. https://doi.org/10.1134/S0965542519020052
24. Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 158–175. https://doi.org/10.35634/vm200202
25. Mesloub S., Bachar I. On a nonlocal 1-D initial value problem for a singular fractional-order parabolic equation with Bessel operator, *Advances in Difference Equations*, 2019, vol. 2019, article number: 254. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2196-z
26. Luc N. H., Jafari H., Kumam P., Tuan N. H. On an initial value problem for time fractional pseudoparabolic equation with Caputo derivative, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021. https://doi.org/10.1002/mma.7204
27. Čiegis R., Tumanova N. On construction and analysis of finite difference schemes for pseudoparabolic problems with nonlocal boundary conditions, *Mathematical Modelling and Analysis*, 2014, vol. 19, issue 2, pp. 281–297. https://doi.org/10.3846/13926292.2014.910562
28. Čiegis R., Suboč̌ O., Bugajev A. Parallel algorithms for three-dimensional parabolic and pseudoparabolic problems with different boundary conditions, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2014, vol. 19, issue 3, pp. 382–395. https://doi.org/10.15388/NA.2014.3.5
29. Hussain M., Haq S., Ghafoor A. Meshless RBFs method for numerical solutions of two-dimensional high order fractional Sobolev equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 2020, vol. 79, issue 3, pp. 802–816. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.07.033
30. Aslefallah M., Abbasbandy S., Shivanian E. Meshless singular boundary method for two-dimensional pseudo-parabolic equation: analysis of stability and convergence, *Journal of Applied Mathematics*

and Computing, 2020, vol. 63, issues 1–2, pp. 585–606. https://doi.org/10.1007/s12190-020-01330-x

31. Ablabekov B. S., Baiserkeeva A. B. Explicit solution of Cauchy problem for two-dimensional pseudoparabolic equations, *Izvestiya Vysshih Uchebnyh Zavedeniy Kyrgyzstana*, 2015, no. 10, pp. 3–7 (in Russian).
32. Ablabekov B. S., Mukanbetova A. T. On solvability of solutions of the second initial-boundary problem for pseudoparabolic equations with a small parameter, *Science, New Technologies and Innovations in Kyrgyzstan*, 2019, no. 3, pp. 41–47 (in Russian).
33. Beshtokov M. Kh. A numerical method for solving the second initial-boundary value problem for a multidimensional third-order pseudoparabolic equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 3, pp. 384–408 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm210303
34. Il'in A. M. Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1969, vol. 6, issue 2, pp. 596–602. https://doi.org/10.1007/BF01093706
35. Ignat'ev V. N., Zadorin A. I. On bad conditionality in the numerical solution of equations with a small parameter, Preprint of the Computing Center of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences. Novosibirsk. 1981. Vol. 84.
36. Lukashchuk S. Yu. Approximation of ordinary fractional differential equations by differential equations with a small parameter, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 515–531 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170403
37. Vishik M. I., Lyusternik L. A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1957, vol. 12, issue 5 (77), pp. 3–122 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/umn7705
38. Godunov S. K., Ryaben'kii V. S. *Raznostnye skhemy* (Difference schemes), Moscow: Nauka, 1977.
39. Ladyzhenskaya O. A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neszhimaemoi zhidkosti* (Mathematical questions of the dynamics of a viscous incompressible fluid), Moscow: Nauka, 1970.
40. Ladyzhenskaya O. A., Seregin G. A. On one method of approximation of initial boundary value problems for the Navier–Stokes equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 1995, vol. 75, issue 6, pp. 2038–2057. https://doi.org/10.1007/BF02362945
41. Temam R. *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Amsterdam: North-Holland, 1977.
42. Samarskii A. A. *The theory of difference schemes*, Boca Raton: CRC Press, 2001. https://doi.org/10.1201/9780203908518
43. Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* (Boundary value problems of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1973.
44. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* (Stability of difference schemes), Moscow: Nauka, 1973.

Received 26.07.2022

Accepted 05.10.2022

Murat Khamidbievich Beshtokov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Researcher, North-Caucasus Federal University, North-Caucasus Center for Mathematical Research, ul. Pushkina, 1, Stavropol, 355017, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2968-9211
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Citation: M. Kh. Beshtokov. Finite-difference method for solving a multidimensional pseudoparabolic equation with boundary conditions of the third kind, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 502–527.