ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 4. С. 668–696.

УДК 517.9

© *А. Г. Ченцов*

О СВОЙСТВАХ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА, ИСПОЛЬЗУЕМОГО В ПРОГРАММНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Исследуются нелинейная дифференциальная игра (ДИ) сближения–уклонения, а также релаксации игровой задачи сближения (имеется в виду ослабление условий окончания игры сближения). Рассматривается вариант метода программных итераций, реализуемый в пространстве функций и доставляющий в пределе функцию цены ДИ на минимакс–максимин для специальных функционалов траектории. Данная предельная функция реализует для каждой позиции игры наименьший размер окрестности целевого множества, для которого при пропорциональном ослаблении фазовых ограничений игрок, заинтересованный в сближении, еще гарантирует его осуществление. Исследуются свойства вышеупомянутых функционалов и предельной функции. В частности, получены достаточные условия реализации значений данной функции при выполнении конечного числа итераций.

Ключевые слова: дифференциальная игра, метод программных итераций, функция цены.

DOI: 10.35634/vm210410

Введение

Теорема об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [1,2] является фундаментальным фактом современной теории диференциальных игр (ДИ); данная теорема определяет решение ДИ игры сближения–уклонения. На основе данной теоремы было установлено [2] существование седловой точки для ДИ с типичными функционалами качества. В основе теории ДИ находятся актуальные практические задачи; в этой связи отметим монографию [3], где были указаны и некоторые методы решения ДИ. Важное место в исследованиях по теории ДИ традиционно занимали так называемые программные конструкции, то есть конструкции решения на основе вспомогательных задач программного управления (см. [2, 4–6]). Эти конструкции наиболее эффективны в так называемых регулярных ДИ, когда решение игровых задач программного управления непосредственно доставляет ключевые элементы решения позиционных ДИ, в которых процедуры управления определяются соответствующими законами обратной связи. В общем случае ДИ инструментом решения на основе программных конструкций является известный (см. [7–11] и др.) метод программных итераций (МПИ), реализуемый в различных вариантах в зависимости от исследуемой задачи. Определенный итог ранних исследований по МПИ был подведен в монографии [12]. Настоящая статья продолжает эти исследования. В этой связи отметим важный результат А. В. Кряжимского [13], где альтернатива Красовского–Субботина была распространена на системы, в которых может не выполняться традиционное условие Липшица по фазовой переменной в управляемом дифференциальном уравнении. Важную роль в [13] сыграло так называемое условие обобщенной единственности, формулируемое в терминах программных управлений–мер, или обобщенных управлений (ОУ).

Среди других исследований по теории ДИ и задачам управления с элементами неопределенности отметим [14–20]. Особо отметим интенсивно развивающееся направление, связанное с исследованием А. И. Субботиным обобщенных решений уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (см. [20, 21]).

Настоящая работа является непосредственным продолжением работы [22], которой предшествовали [23,24]. Основное внимание уделяется проблеме релаксации игровой задачи сближения с замкнутым в пространстве позиций целевым множеством (ЦМ) при фазовых ограничениях (ФО), определяемых множеством с замкнутыми сечениями, отвечающими фиксации моментов времени (напомним, что в [22] для такой пары множеств в получающейся при этом ДИ сближения–уклонения было получено утверждение об альтернативной разрешимости). В условиях, когда позиция игры не принадлежит множеству успешной разрешимости задачи сближения, релаксация сводится к ослаблению условий окончания игры сближения; при этом определяется наименьший размер окрестности ЦМ, для которого, при пропорциональном ослаблении ФО, игрок, заинтересованный в сближении, еще может гарантировать его осуществление при упомянутом ослаблении условий окончания. Если рассматривать данный размер как функцию позиции, то получается [22] функция цены для системы вспомогательных ДИ со специальными функционалами качества (имеются в виду ДИ с разными начальными позициями). Упомянутые функционалы качества учитывают и «степень» сближения с ЦМ и «степень» соблюдения ФО. Свойства данных функционалов, как представляется, могут служить предметом специального исследования, которому в основном и посвящена настоящая статья.

§ 1. Сведения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика: кванторы, связки и др.; $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению 1. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора.

Объектам x и y сопоставляется их неупорядоченная пара $\{x;y\}$ (см. [25, с. 60]): $x \in \{x;y\}$, $y \in \{x;y\}$ и при $z \in \{x;y\}$ имеет место $(x = z) \vee (y = z)$). Если h — объект, то $\{h\} \triangleq \{h;h\}$ (синглетон, содержащий h). Следуя [25, с. 67], полагаем для объектов a и b, что $(a,b) \triangleq \{\{a\};\{a;b\}\}$, получая упорядоченную пару (УП) с первым элементом a и вторым элементом b. Если h есть УП, то через $pr_1(h)$ и $pr_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h, однозначно определяемые равенством $h = (pr_1(h), pr_2(h))$. Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H и $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ (семейство всех непустых п/м H). Множеству $\mathbb{M}$ и семейству $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ сопоставляем двойственное семейство

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M \colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})).$$

Если $\mathcal{A}$ — семейство, а B — множество, то $\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B \colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$ есть след $\mathcal{A}$ на множество B. Для произвольных множеств A и B полагаем (см. [25, с. 77]), что B^A есть множество всех отображений (функций) из A в B. Если A и B — множества, $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $g^1(C) \triangleq \{g(x) \colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии g, а $(g \mid C) \in B^C$ — сужение g на множество C: $(g \mid C)(x) \triangleq g(x) \ \ \forall x \in C$.

Далее $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая; промежутки $\mathbb{R}$ всех типов обозначаем только посредством квадратных скобок, как в [26, с. 35–36]). Как обычно, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N}$. При $m \in \mathbb{N}$ полагем, что $\overline{1,m} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant m\}$ и $\overrightarrow{m,\infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid m \leqslant k\}$. Полагаем при этом, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — множествами не являются; с учетом этого для всяких множества H и числа $k \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,k}}$ (множество всех отображений из $\overline{1,k}$ в H) используем более традиционное обозначение H^k; в качестве H может, конечно, использоваться семейство. В дальнейшем часто используется индексная форма записи отображений (семейство с индексом, см. [27, с. 11]). Если $\mathcal{H}$ — семейство, то $\mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ — множество всех последовательностей в $\mathcal{H}$; если $(H_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{H}$ — множество, то

$$((H_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbb{H}) \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} ((\mathbb{H} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} H_i) \ \&\ (H_{k+1} \subset H_k \ \ \forall k \in \mathbb{N})).$$

Непустому множеству S сопоставляется $\mathcal{R}_+[S] \triangleq (\mathbb{R}_+)^S$ — множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на S. Если $\mathcal{S}$ — семейство, то элементы $\mathcal{R}_+[\mathcal{S}]$ — суть функции множеств.

Измеримые пространства и меры. Каждому множеству E сопоставляем семейство $(\sigma - \mathrm{alg})[E]$ всех σ-алгебр п/м E; если $\mathcal{E} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$, то $(E, \mathcal{E})$ есть стандартное измеримое пространство (ИП), а множества из $\mathcal{E}$ называются измеримыми в смысле $(E, \mathcal{E})$. При $\mathfrak{C} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ в виде $\sigma_E^0(\mathfrak{C}) \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$ имеем σ-алгебру п/м E, порожденную семейством $\mathfrak{C}$ (см. [28, гл. I]), то есть наименьшую в упорядоченности по включению σ-алгебру из $(\sigma - \mathrm{alg})[E]$, еще содержащую $\mathfrak{C}$. Если $\mathfrak{C}$ — топология на E, то $\sigma_E^0(\mathfrak{C})$ есть σ-алгебра борелевских п/м E.

Для множеств X и $Y \in \mathcal{P}(X)$, а также семейств $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ и $\mathcal{X}|_Y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ имеем равенство $\sigma_Y^0(\mathcal{X}|_Y) = \sigma_X^0(\mathcal{X})|_Y$, причем

$$(Y \in \sigma_X^0(\mathcal{X})) \Leftrightarrow (\sigma_Y^0(\mathcal{X}|_Y) = \{\Sigma \in \sigma_X^0(\mathcal{X}) \mid \Sigma \subset Y\}). \tag{1.1}$$

Для стандартного ИП $(E, \mathcal{E})$ через $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех в/з неотрицательных счетно-аддитивных (с.-а.) мер на $\mathcal{E}$, $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}] \subset \mathcal{R}_+[\mathcal{E}]$; если $\mathcal{E} = \sigma_E^0(\tau)$, где τ — топология на E, то меры из $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}]$ называют борелевскими (в случае метризуемости пространства (E, τ) все меры из $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}] = (\sigma - \mathrm{add})_+[\sigma_E^0(\tau)]$ регулярны; [29, гл. 1]).

§ 2. Дифференциальная игра сближения уклонения (содержательное обсуждение)

Фиксируем число $n \in \mathbb{N}$ в качестве размерности фазового пространства следующей конфликтно-управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \tag{2.1}$$

функционирование которой рассматривается на промежутках $[t, \vartheta_0]$, $t \in T$, где $T \triangleq [t_0, \vartheta_0]$ при $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta_0$. В (2.1) P и Q — суть непустые компакты в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно, где $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$,

$$f\colon T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$$

есть непрерывная (по совокупности переменных) функция; $u \in P$ и $v \in Q$ — суть управления игроков I и II соответственно. При $t \in T$ через $\mathcal{U}_t$ и $\mathcal{V}_t$ обозначим множества всех кусочно-постоянных, непрерывных справа и непрерывных слева в точке ϑ_0 функций на $[t, \vartheta_0]$ со значениями в P и Q соответственно. Для простоты полагаем сейчас (ниже рассматривается более общий случай), что при $t_* \in T$ игроки I и II могут использовать для управления на $[t_*, \vartheta_0]$ только функции $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{t_*}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}_{t_*}$ соответственно; полагаем также, что при $x_* \in \mathbb{R}^n$ каждой паре таких функций соответствует единственная непрерывная траектория

$$\mathbf{x}(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) = (\mathbf{x}(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \in \mathbb{R}^n;\ t \in [t_*, \vartheta_0]).$$

Сами управляющие функции $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ могут формироваться некоторыми допустимыми способами; непустые множества $\mathfrak{U}(t_*, x_*)$ и $\mathfrak{V}(t_*, x_*)$ данных способов (стратегий) оговорены заранее для каждой позиции $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Считается, что $\mathbb{U} \in \mathfrak{U}(t_*, x_*)$ выбирает игрок I, а $\mathbb{V} \in \mathfrak{V}(t_*, x_*)$ — игрок II. Способу $\mathbb{U} \in \mathfrak{U}(t_*, x_*)$ (способу $\mathbb{V} \in \mathfrak{V}(t_*, x_*)$) сопоставляется непустой пучок $\mathfrak{X}_I(t_*, x_*, \mathbb{U})$ (пучок $\mathfrak{X}_{II}(t_*, x_*, \mathbb{V})$) обобщенных, вообще говоря, траекторий, возможных при использовании $\mathbb{U}$ (при использовании $\mathbb{V}$) и стартующих из (t_*, x_*); предполагается, что данные обобщенные траектории — суть равномерные пределы обычных траекторий вида $\mathbf{x}(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$.

Рассмотрим ряд игровых задач, фиксируя $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ в качестве ЦМ для игрока I и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ в качестве множества, формирующего его ФО. Возникают следующие две задачи о построении множеств успешной разрешимости.

$I(M, N)$. Найти множество всех позиций $(t_*, x_*) \in N$ таких, что $\exists \mathbb{U} \in \mathfrak{U}(t_*, x_*)$ $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}_I(t_*, x_*, \mathbb{U})$ $\exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \& ((t, x(t)) \in N \quad \forall t \in [t_*, \vartheta\,[). \tag{2.2}$$

$II(M, N)$. Найти множество всех позиций $(t^*, x^*) \in N$ таких, что $\exists \mathbb{V} \in \mathfrak{V}(t^*, x^*)$ $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}_{II}(t^*, x^*, \mathbb{V})$ $\forall \vartheta \in [t^*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \Rightarrow (\exists t \in [\,t^*, \vartheta[\colon (t, x(t) \notin N). \tag{2.3}$$

Ситуацию (2.2) рассматриваем как (M, N)-сближение, а (2.3) — как (M, N)-уклонение. В случае, когда множества — решения задач $I(M, N)$ и $II(M, N)$ — образуют разбиение N, будем говорить, что реализуется альтернатива. Такая интерпритация согласуется с понятием альтернативы в [1, 2], где (при традиционных условиях на правую часть (2.1), включая локальную липшицевость по фазовой переменной) предполагалось, что M и N — замкнутые множества в пространстве $T \times \mathbb{R}^n$ с обычной топологией покоординатной сходимости. В последующем изложении требование замкнутости ЦМ, то есть множества M, сохраняется, а требование замкнутости множества, определяющего ФО (то есть множества N), ослабляется до требования замкнутости всех сечений N гиперплоскостями $t = \mathrm{const}$, где $t \in T$.

Заметим, что с практической точки зрения представляются возможными замены задач $I(M, N)$, $II(M, N)$ задачами $I(\tilde{M}, \tilde{N})$, $II(\tilde{M}, \tilde{N})$, где $M \subset \tilde{M}$ и $N \subset \tilde{N}$. Эти замены отвечают идее ослабления условий окончания игры сближения.

§ 3. Обобщенные управления–меры

В общем случае системы (2.1) для последующих построений существенно применение обобщенных управлений (ОУ), определяемых в виде борелевских мер на произведении конечномерных компактов (все такие меры регулярны; см. [29, гл. 1]). При $t \in T$ рассматриваем компакты $[t, \vartheta_0]$, $Y_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times P$, $Z_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times Q$ и $\Omega_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times P \times Q$, оснащаемые следующими σ-алгебрами борелевских множеств $\mathcal{I}_t \in (\sigma - \mathrm{alg})[[t, \vartheta_0]]$, $\mathcal{K}_t \in (\sigma - \mathrm{alg})[Y_t]$, $\mathcal{D}_t \in (\sigma - \mathrm{alg})[Z_t]$ и $\mathcal{C}_t \in (\sigma - \mathrm{alg})[\Omega_t]$ соответственно; итак, $([t, \vartheta_0], \mathcal{I}_t)$, $(Y_t, \mathcal{K}_t)$, $(Z_t, \mathcal{D}_t)$ и $(\Omega_t, \mathcal{C}_t)$ — суть стандартные ИП. Используем свойства [29, Добавление II], [30]. Тогда имеем борелевскую измеримость цилиндров: при $t \in T$ получаем в случае $I \in \mathcal{I}_t$, что $I \times P \in \mathcal{K}_t$, $I \times Q \in \mathcal{D}_t$ и $I \times P \times Q \in \mathcal{C}_t$, $S \times Q \in \mathcal{C}_t$ при $S \in \mathcal{K}_t$ (учитываем, что $\Omega_t = ([t, \vartheta_0] \times P) \times Q = Y_t \times Q$; см. [31, с. 17]) и, наконец, $D \underline{\times} P \triangleq \{(\xi, u, v) \in \Omega_t \mid (\xi, v) \in D\} \in \mathcal{C}_t$ при $D \in \mathcal{D}_t$. Из (1.1) получаем при $t_1 \in T$ и $t_2 \in [t_1, \vartheta_0]$, что

$$\mathcal{C}_{t_1}^{t_2} \triangleq \mathcal{C}_{t_1}|_{[t_1, t_2[\times P \times Q} =$$
$$= \{C \in \mathcal{C}_{t_1} \mid C \subset [t_1, t_2[\times P \times Q\} \in (\sigma - \mathrm{alg})[[t_1, t_2[\times P \times Q],$$
$$\mathcal{D}_{t_1}^{t_2} \triangleq \mathcal{D}_{t_1}|_{[t_1, t_2[\times Q} = \{D \in \mathcal{D}_{t_1} \mid D \subset [t_1, t_2[\times Q\} \in (\sigma - \mathrm{alg})[[t_1, t_2[\times Q].$$

Если $t \in T$, то через λ_t обозначаем след меры Лебега на σ-алгебру $\mathcal{I}_t$,

$$\mathcal{R}_t \triangleq \{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}_t] \mid \mu(I \times P) = \lambda_t(I) \ \ \forall I \in \mathcal{I}_t\},$$
$$\mathcal{E}_t \triangleq \{\nu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{D}_t] \mid \nu(I \times Q) = \lambda_t(I) \ \ \forall I \in \mathcal{I}_t\},$$
$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t] \mid \eta(I \times P \times Q) = \lambda_t(I) \ \ \forall I \in \mathcal{I}_t\}.$$

Заметим, что (см. [12, гл. IV, § 2]) $\mathcal{U}_t \times \mathcal{V}_t$ допускает погружение в $\mathcal{H}_t$, а $\mathcal{U}_t$ и $\mathcal{V}_t$ допускают аналогичное погружение в $\mathcal{R}_t$ и в $\mathcal{E}_t$ соответственно. Полагаем, что при $t \in T$

$$(\pi_t(\mu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(K \times Q) = \mu(K) \ \ \forall K \in \mathcal{K}_t\} \ \ \forall \mu \in \mathcal{R}_t)\&$$
$$\&(\Pi_t(\nu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(D \underline{\times} P) = \nu(D) \ \ \forall D \in \mathcal{D}_t\} \ \ \forall \nu \in \mathcal{E}_t)$$

(использованы условия маргинальной согласованности); эти множества именуем программами. Пусть $\mathcal{B} \in (\sigma - \mathrm{alg})[Q]$ есть по определению σ-алгебра борелевских п/м Q, а $\delta_v \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{B}]$ при $v \in Q$ есть след меры Дирака, сосредоточенной в точке v, на σ-алгебру $\mathcal{B}$. Если $t \in T$, $\mu \in \mathcal{R}_t$ и $v \in Q$, то $\mu \otimes v \in \pi_t(\mu)$ определяется условием $(\mu \otimes v)(K \times B) \triangleq \mu(K)\delta_v(B) \ \ \forall K \in \mathcal{K}_t \ \ \forall B \in \mathcal{B}$; введено обычное произведение мер μ и δ_v.

Совсем кратко напомним нужные топологические свойства, отсылая за подробностями к [12, гл. IV, § 2] и [30]. Фиксируем $t \in T$ до конца параграфа. Через $C(Y_t)$, $C(Z_t)$ и $C(\Omega_t)$ обозначаем множества всех непрерывных в/з функций на компактах Y_t, Z_t и Ω_t соответственно; в оснащении поточечно определяемыми линейными операциями и нормами равномерной сходимости получаем сепарабельные банаховы пространства с топологическими сопряженными $C^*(Y_t)$, $C^*(Z_t)$ и $C^*(\Omega_t)$ (имеем пространства ограниченных линейных функционалов на $C(Y_t)$, $C(Z_t)$ и $C(\Omega_t)$ соответственно). Оснащая $C^*(Y_t)$, $C^*(Z_t)$ и $C^*(\Omega_t)$ $*$-слабыми топологиями, получаем с учетом теоремы Рисса [32, гл. IV] и теоремы Алаоглу [32, гл. V] в виде $\mathcal{R}_t$, $\mathcal{E}_t$ и $\mathcal{H}_t$ непустые метризуемые $*$-слабые компакты (используем также факт сепарабельности предсопряженных пространств; см. [32, гл. V]). Тогда замкнутость и компактность в $\mathcal{R}_t$, $\mathcal{E}_t$ и $\mathcal{H}_t$ отождествимы с секвенциальной замкнутостью и секвенциальной компактностью (см. [33, § 2.7]). Используя $\rightharpoonup$ для обозначения $*$-слабой сходимости последовательностей, получаем, в частности, что

$$\mathfrak{F}_t^* \triangleq \{\mathbb{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_t) \mid \forall (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \forall \eta \in \mathcal{H}_t \ \ ((\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \eta) \Rightarrow (\eta \in \mathbb{F})\}$$

есть семейство всех $*$-слабо замкнутых п/м $\mathcal{H}_t$;

$$(\pi_t(\mu) \in \mathfrak{F}_t^* \ \ \forall \mu \in \mathcal{R}_t)\&(\Pi_t(\nu) \in \mathfrak{F}_t^* \ \ \forall \nu \in \mathcal{E}_t) \tag{3.1}$$

((3.1) означает, в частности, $*$-слабую компактность программ).

§ 4. Неупреждаемость и определение стратегий

В теории ДИ для различных целей используются реакции на программные управления игрока-противника. Так, они играют ключевую роль в конструкциях решения регулярных ДИ (см. [2, 4–6] и др.), когда игровые задачи программного управления с дискриминацией игрока-противника непосредственно доставляют цену ДИ. В общем случае ДИ реакции на программные управления также играют важную роль; они, в частности, используются в конструкциях МПИ. Среди всех реакций такого типа выделяются неупреждающие. Мы назывем их квазистратегиями. В рассматриваемом общем случае нелинейной ДИ используем квазистратегии многозначные и обобщенные, понимая под этим то, что они действуют в пространствах ОУ.

До тех пор, пока не оговорено противное, фиксируем $t_* \in T$. Множество всех квазистратегий игрока I на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$ определяется [34, раздел 10] в виде

$$\tilde{A}_{t_*} \triangleq \{\alpha \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t_*}(\nu)) \mid \forall \nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \forall \nu_2 \in \mathcal{E}_{t_*} \forall \theta \in [t_*, \vartheta_0] \tag{4.1}$$
$$((\nu_1 \mid \mathcal{D}^{\theta}_{t_*}) = (\nu_2 \mid \mathcal{D}^{\theta}_{t_*})) \Rightarrow (\{(\eta \mid \mathcal{C}^{\theta}_{t_*})\colon \eta \in \alpha(\nu_1)\} = \{(\eta \mid \mathcal{C}^{\theta}_{t_*})\colon \eta \in \alpha(\nu_2)\})\}.$$

Среди всевозможных квазистратегий выделяем квазипрограммы — квазистратегии с улучшенными свойствами:

$$\tilde{A}^{\Pi}_{t_*} \triangleq \{\alpha \in \tilde{A}_{t_*} \mid \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu) \in \mathfrak{F}^*_{t_*}\} \tag{4.2}$$

есть множество всех квазипрограмм на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$; $\Pi_{t_*}(\cdot) \triangleq (\Pi_{t_*}(\nu))_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}$. Так, (4.1), (4.2) — суть непустые множества.

В связи с определением стратегий–троек игрока II сначала введем $\mathfrak{V}_{\mathrm{pos}} \triangleq \mathcal{P}'(Q)^{T \times \mathbb{R}^n}$ — непустое множество многозначных позиционных стратегий игрока II, подобных на идейном уровне применяемым в [1,2]. Моменту $t \in T$ сопоставляем (см. [35,36])

$$G^*(t) \triangleq \{g^* \in \mathcal{P}'([t, \vartheta_0])^{C_n([t,\vartheta_0])} \mid \forall g_1 \in C_n([t, \vartheta_0]) \ \ \forall g_2 \in C_n([t, \vartheta_0]) \tag{4.3}$$
$$\forall \theta \in [t, \vartheta_0] \ ((g_1 \mid [t, \theta]) = (g_2 \mid [t, \theta])) \Rightarrow (g^*(g_1) \cap [t, \theta] = g^*(g_2) \cap [t, \theta])\},$$

где (здесь и ниже) $C_n([t, \vartheta_0])$ — множество всех непрерывных отображений из $[t, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$. Элементы (4.3) — неупреждающие мультифункционалы на $C_n([t, \vartheta_0])$ — используются для выбора моментов коррекции формируемого управления; полагаем при $t \in T$, что $\mathbb{G}^*_0(t) \triangleq G^*(t)^{\mathbb{R}^n}$. Тогда в виде

$$\mathbb{G}^*_{t_*} \triangleq \prod_{t \in [t_*, \, \vartheta_0]} \mathbb{G}^*_0(t)$$

получаем непустое множество стратегий коррекции на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$. Стратегией–тройкой на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$ назывем всякий триплет $(V, \beta, m) \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}} \times \mathbb{G}^*_{t_*} \times \mathbb{N}$, где число m определяет ограничение на возможное число переключений формируемого управления из $\mathcal{V}_{t_*}$. Действие стратегии–тройки (V, β, m) характеризуется следующим образом: если $\tau_* \in [t_*, \vartheta_0]$ — момент коррекции и $x_* \in \mathbb{R}^n$, то «включается» $v_* \in V(\tau_*, x_*)$ и начинается формирование фрагмента $x(\cdot)$ траектории на $[\tau_*, \vartheta_0]$; «включается» также неупреждающий мультифункционал $\beta(\tau_*)(x_*) \in G^*(\tau_*)$. Следующий момент коррекции τ^* формируется согласно условию $\tau^* \in \beta(\tau_*)(x_*)(x(\cdot))$. В этот момент «включается» $v^* \in V(\tau^*, x(\tau^*))$ и начинается формирование нового фрагмента $\tilde{x}(\cdot)$ траектории, отвечающего промежутку $[\tau^*, \vartheta_0]$.

§ 5. Обобщенные траектории

Следуя идейно [13], введем основные условия на систему. Прежде всего (обобщенная единственность) полагаем, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$ интегральная воронка

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) \triangleq \{x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \mid x(\theta) =$$
$$= x_* + \int\limits_{[t_*, \theta[\times P \times Q} f(t, x(t), u, v) \eta(d(t, u, v)) \ \ \forall \theta \in [t_*, \vartheta_0]\}$$

одноэлементна: $\Phi(t_*, x_*, \eta) = \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\}$, где $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) = (\varphi(t, t_*, x_*, \eta))_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \in$ $\in C_n([t_*, \vartheta_0])$ есть обобщенная траектория, порожденная ОУ η из позиции (t_*, x_*). Пусть $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{B}_n(c) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant c\}$ при $c \in \mathbb{R}_+$. Как и в [13], полагаем, что $\forall a \in \mathbb{R}_+ \ \exists b \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(\tau, t, x, \eta) \in \mathbf{B}_n(b) \ \ \forall t \in T \ \ \forall x \in \mathbf{B}_n(a) \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_t \ \ \forall \tau \in [t, \vartheta_0] \tag{5.1}$$

(условие равномерной ограниченности). При $t \in T$ отображение

$$(x, \eta) \mapsto \varphi(\cdot, t, x, \eta) \colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_t \to C_n([t, \vartheta_0]) \tag{5.2}$$

непрерывно, где $\mathcal{H}_t$ оснащается относительной $*$-слабой топологией, $\mathbb{R}^n$ — топологией покоординатной сходимости, а $C_n([t, \vartheta_0])$ — топологией равномерной сходимости; см. [34, с. 309]. При $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ в виде

$$\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) \colon \eta \in \Pi_{t_*}(\nu)\} \tag{5.3}$$

имеем непустой компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости. Кроме того, при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$

$$\mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) \colon \eta \in \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])) \tag{5.4}$$

есть (непустой) пучок траекторий, порожденных квазистратегией α из позиции (t_*, x_*); если $\alpha \in \tilde{A}^{\Pi}_{t_*}$, то (5.4) — непустой компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$. Напомним определения [35, 36], относящиеся к траекториям, порожденным стратегиями–тройками игрока II. Так (см. [35, раздел 7], [36, (7.4)–(7.9)]) при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\beta \in \mathbb{G}^*_t$ и $m \in \mathbb{N}$ в виде $\mathfrak{X}[t; x; V; \beta; m] \in \mathcal{P}'(C_n([t, \vartheta_0]))$ имеем пучок траекторий, порожденных стратегией–тройкой (V, β, m) из позиции (t, x) (они отвечают каждая совместному воздействию на систему (2.1) стратегии–тройки и ОУ игрока I при стартовой позиции (t, x)). Полагая при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$, что $\mathcal{X}_\pi(t_*, x_*, v) \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \otimes v) \colon \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\}$, получаем непустой компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$. Тогда [35, (7.7)] $\mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; 1]$ есть объединение всех множеств $\mathfrak{X}_\pi(t_*, x_*, v)$, $v \in V(t_*, x_*)$, при всяком выборе $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}}$ и $\beta \in \mathbb{G}^*_{t_*}$.

§ 6. Метод программных итераций

В настоящем параграфе введем итерационную процедуру [30, 34], являющуюся развитием [8]. Однако, сначала напомним некоторые топологические понятия. На множестве $T \times \mathbb{R}^n$ позиций игры задаем метрику $\rho \in \mathcal{R}_+[(T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n)]$ посредством [34, (5.1)], сопоставляя позициям (t_1, x_1) и (t_2, x_2) в виде $\rho((t_1, x_1), (t_2, x_2))$ наибольшее из чисел $|t_1 - t_2|$ и $\|x_1 - x_2\|$. Метрическая топология $\mathbf{t}$ на $T \times \mathbb{R}^n$, порожденная метрикой ρ, есть обычная топология покоординатной сходимости, а $\mathcal{F} \triangleq \mathbf{C}_{T \times \mathbb{R}^n}[\mathbf{t}]$ — семейство всех замкнутых в $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$ п/м $T \times \mathbb{R}^n$; $\mathcal{F}' \triangleq \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ есть семейство всех непустых замкнутых п/м $T \times \mathbb{R}^n$.

Для введения другого оснащения $T \times \mathbb{R}^n$ полагаем сначала, что $\tau_\partial \triangleq \mathcal{P}(T)$ (дискретная топология на T), а $\tau^{(n)}_{\mathbb{R}}$ — топология на $\mathbb{R}^n$, порожденная нормой $\|\cdot\|$ (обычная топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$). Через $\tau_\partial \otimes \tau^{(n)}_{\mathbb{R}}$ обозначаем топологию стандартного произведения пространств (T, τ_∂) и $(\mathbb{R}^n, \tau^{(n)}_{\mathbb{R}})$; данная топология метризуема. Если $E \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $t \in T$, то полагаем, что

$$E\langle t \rangle \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in E\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),$$

получая сечение E. Полагая, что $\mathbf{F} \triangleq \mathbf{C}_{\mathbb{R}^n}[\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}]$ (семейство всех замкнутых п/м $\mathbb{R}^n$), для семейства $\mathfrak{F} \triangleq \mathbf{C}_{T\times\mathbb{R}^n}[\tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}]$ замкнутых в $(T \times \mathbb{R}^n, \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ п/м $T \times \mathbb{R}^n$ имеем, что

$$\mathfrak{F} = \{F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \mid F\langle t\rangle \in \mathbf{F} \ \ \forall t \in T\},$$

получая представление $\mathfrak{F}$ в терминах множеств с замкнутыми сечениями. Пусть $\mathfrak{F}' \triangleq \mathfrak{F} \setminus \{\varnothing\}$. Ясно, что $\mathcal{F} \subset \mathfrak{F}$ и $\mathcal{F}' \subset \mathfrak{F}'$. Введем оператор программного поглощения, фиксируя множество $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$: полагаем, что $\mathbb{A}[M]$ действует в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ по правилу

$$\mathbb{A}[M](S) \triangleq \{(t,x) \in S \mid \forall \nu \in \mathcal{E}_t \ \ \exists \mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t,x,\nu) \ \ \exists \vartheta \in [t,\vartheta_0]\colon ((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \\ \&((\tau, \mathbf{x}(\tau)) \in S \ \ \forall \tau \in [t,\vartheta[)\} \ \ \forall S \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n).$$

В общем случае $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ определена [34, раздел 6] последовательность $(W_k(M,N))_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}_0}$, для которой

$$(W_0(M,N) \triangleq N)\&(W_{k+1}(M,N) = \mathbb{A}[M](W_k(M,N)) \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0), \tag{6.1}$$

а также следующее предельное множество

$$W(M,N) \triangleq \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} W_k(M,N). \tag{6.2}$$

Важно отметить (см. [34, раздел 6]), что при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$

$$(W_s(M,N) \in \mathfrak{F} \ \ \forall s \in \mathbb{N}_0)\&(W(M,N) = \mathbb{A}[M](W(M,N)) \in \mathfrak{F}). \tag{6.3}$$

Второе важное свойство касается вопросов секвенциальной сходимости: если $(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, причем $((M_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow M)\&((N_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow N)$, то $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathfrak{F}$ и самое главное

$$((W_k(M_i,N_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow W_k(M,N) \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0)\&((W(M_i,N_i))_{i\in N} \downarrow W(M,N)). \tag{6.4}$$

Свойства (6.3), (6.4) являются базовыми; особо выделим свойство неподвижной точки в (6.3). Итак, пары $(M,N) \in \mathcal{F} \times \mathfrak{F}$ в наших построениях играют (см. (6.3), (6.4)) важную роль.

Всюду в дальнейшем фиксируем $\mathbf{M} \in \mathcal{F}'$ и $\mathbf{N} \in \mathfrak{F}'$, получая пару

$$(\mathbf{M},\mathbf{N}) \in \mathcal{F}' \times \mathfrak{F}'; \tag{6.5}$$

введены параметры ДИ сближения–уклонения, для которой в краткой форме отметим свойство альтернативной разрешимости. Прежде всего (см. [34, теорема 10.1]) имеем цепочку равенств

$$\begin{gathered} W(\mathbf{M},\mathbf{N}) = \{(t,x) \in \mathbf{N} \mid \exists \alpha \in \tilde{A}_t \ \ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t;x;\alpha] \\ \exists \vartheta \in [t,\vartheta_0]\colon ((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M})\&((\xi,\mathbf{x}(\xi)) \in \mathbf{N} \ \ \forall \xi \in [t,\vartheta[)\} = \\ = \{(t,x) \in \mathbf{N} \mid \exists \alpha \in \tilde{A}_t^{\Pi} \ \ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t;x;\alpha] \ \ \exists \vartheta \in [t,\vartheta_0]\colon ((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M})\& \\ \&((\xi,\mathbf{x}(\xi)) \in \mathbf{N} \ \ \forall \xi \in [t,\vartheta[)\}, \end{gathered} \tag{6.6}$$

характеризующую решение нужного варианта задачи $I(\mathbf{M},\mathbf{N})$ (2.2). В связи с применением квазистратегий отметим, что в [37] указана возможность конструировать на их основе реализуемые процедуры управления с поводырем (моделью). С другой стороны (см. [30, с. 61, 62], [35, теорема 9.2]),

$$\begin{gathered} \mathbf{N} \setminus W(\mathbf{M},\mathbf{N}) = \{(t,x) \in \mathbf{N} \mid \exists (V,\beta,m) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbb{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N} \\ \forall \mathbf{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t;x;V;\beta;m] \ \ \forall \vartheta \in [t,\vartheta_0] \ \ ((\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \Rightarrow (\exists \xi \in [t,\vartheta[\colon (\xi,\mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbf{N})\}. \end{gathered} \tag{6.7}$$

Из (6.6), (6.7) вытекает нужный вариант альтернативы, отвечающий паре множеств (6.5).

§ 7. Релаксация игровой задачи сближения

Всюду в дальнейшем, наряду с (6.5), полагаем, что $\mathbf{N}\langle t\rangle \neq \varnothing \;\; \forall t \in T$. При $(t,x) \in T\times\mathbb{R}^n$ имеем $\rho((t,x);\mathbf{M}) \triangleq \inf(\{\rho((t,x),(\tau,y))\colon (\tau,y) \in \mathbf{M}\}) \in \mathbb{R}_+$. С учетом этого при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$S_0(\mathbf{M},\varepsilon) \triangleq \{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho((t,x);\mathbf{M}) \leqslant \varepsilon\} \in \mathcal{F}'.$$

Кроме того, при $S \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $(\|\cdot\| - \inf)[x;S] \triangleq \inf(\{\|x-y\|\colon y \in S\}) \in \mathbb{R}_+$. Если $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и $t \in T$, определено

$$B_n^0(\mathbf{N}\langle t\rangle,\varepsilon) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\|\cdot\| - \inf)[x;\mathbf{N}\langle t\rangle] \leqslant \varepsilon\} \in \mathbf{F}',$$

где (здесь и ниже) $\mathbf{F}' \triangleq \mathbf{F} \setminus \{\varnothing\}$. Получаем теперь при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, что

$$\mathbf{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \triangleq \{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid x \in B_n^0(\mathbf{N}\langle t\rangle,\varepsilon)\} \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n).$$

Легко видеть, что $S_0(\mathbf{M},0) = \mathbf{M}$ и $\mathbf{S}(\mathbf{N},0) = \mathbf{N}$. Кроме того, имеем, что $\mathbf{S}(\mathbf{N},\varepsilon)\langle t\rangle = B_n^0(\mathbf{N}\langle t\rangle,\varepsilon)$ при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и $t \in T$. Как следствие $\mathbf{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \in \mathfrak{F}' \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Получили, что при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$(S_0(\mathbf{M},\varepsilon) \in \mathcal{F}')\&(\mathbf{S}(\mathbf{N},\varepsilon) \in \mathfrak{F}'). \tag{7.1}$$

При построении релаксаций используем замены $\mathbf{M} \to S_0(\mathbf{M},\varepsilon)$ и $\mathbf{N} \to \mathbf{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)$, где $\kappa \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ — параметр приоритетности (см. [38], где обсуждалась возможность изменения κ; в настоящем изложении κ фиксировано). Легко видеть, что

$$\Big(T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} W_k(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbf{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon)) \;\; \forall k \in \mathbb{N}_0\Big)\&\Big(T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} W(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbf{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon))\Big).$$

Совсем кратко напомним построения [22, 38] с несущественными коррекциями. Так, при $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{gathered}(\Sigma_0^{(k)}(t,x \mid \kappa) \triangleq \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t,x) \in W_k(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbf{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+) \;\; \forall k \in \mathbb{N}_0)\&\\ \&(\Sigma_0(t,x \mid \kappa) \triangleq \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t,x) \in W(S_0(\mathbf{M},\varepsilon),\mathbf{S}(\mathbf{N},\kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+));\end{gathered}$$

с учетом этого получаем, что $(\varepsilon_0^{(k)}(t,x \mid \kappa) \triangleq \inf(\Sigma_0^{(k)}(t,x \mid \kappa)) \in \mathbb{R}_+)\&(\varepsilon_0(t,x \mid \kappa) \triangleq \inf(\Sigma_0(t,x \mid \kappa)) \in \mathbb{R}_+)$. На $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ введем поточечный порядок $\leqq$; при этом

$$\begin{gathered}(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \triangleq (\varepsilon_0^{(k)}(z \mid \kappa))_{z\in T\times\mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \;\; \forall k \in \mathbb{N}_0)\&\\ \&(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \triangleq (\varepsilon_0(z \mid \kappa))_{z\in T\times\mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]).\end{gathered}$$

Тогда $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \leqq \varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot \mid \kappa)$ при $k \in \mathbb{N}_0$. Кроме того, $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ есть точная верхняя грань множества $\{\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)\colon k \in \mathbb{N}_0\}$ в частности упорядоченном множестве (ЧУМ) $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n],\leqq)$. Наконец, при $(t_*,x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ имеем, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(t_*,x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0^{(k)}(t_*,x_* \mid \kappa) \;\; \forall k \in \mathbb{N}_0)\&(\varepsilon_0(t_*,x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0(t_*,x_* \mid \kappa)).$$

Условимся называть функцию $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ основной. Отметим легкопроверяемые свойства лучей: если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$(\Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) = [\,\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa), \infty[\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0) \& (\Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa) = [\,\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa), \infty\,[\,).$$

Полезно напомнить (см. [22,38]) связь с итерационной процедурой (6.1), (6.2): если $b \in \mathbb{R}_+$, то

$$\begin{gathered}(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0,b]) = W_k(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa b)) \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0) \& \\ \& (\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0,b]) = W(S_0(\mathbf{M}, b), \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa b))).\end{gathered} \tag{7.2}$$

В частности, $W_k(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid \varepsilon_0^{(k)}(t, x \mid \kappa) = 0\}$ при $k \in \mathbb{N}_0$; аналогично, $W(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid \varepsilon_0(t, x \mid \kappa) = 0\}$. Пусть $\mathfrak{M} \triangleq \{g \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] | g^{-1}([0,b]) \in \mathfrak{F}$ $\forall b \in \mathbb{R}_+\}$ (множество всех полунепрерывных снизу неотрицательных в/з функций на $(T \times \mathbb{R}^n, \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$). Из (6.3), (7.1) и (7.2) вытекает, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M} \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0) \& (\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M}). \tag{7.3}$$

Введем $\rho(\cdot; \mathbf{M}) \triangleq (\rho(z; \mathbf{M}))_{z \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ (непрерывная в/з функция расстояния до $\mathbf{M}$), а также

$$\zeta_\kappa \triangleq (\frac{1}{\kappa}(\|\cdot\| - \inf)[x; \mathbf{N}\langle t\rangle])_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]. \tag{7.4}$$

Тогда $(\zeta_\kappa)^{-1}([0,b]) = \mathbf{S}(\mathbf{N}, \kappa b)$ при $b \in \mathbb{R}_+$ (см. (6.1), (7.2)) и $\varepsilon_0^{(0)}(\cdot \mid \kappa) = \zeta_\kappa$. В виде

$$\psi_\kappa \triangleq (\sup(\{\rho((t,x); \mathbf{M}); \zeta_\kappa(t,x)\}))_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathfrak{M} \tag{7.5}$$

имеем точную верхнюю грань множества $\{\rho(\cdot; \mathbf{M}); \zeta_\kappa\}$ в $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \leqq)$. Полагая $\mathfrak{M}_\psi \triangleq$ $\triangleq \{g \in \mathfrak{M} \mid g \leqq \psi_\kappa\}$, имеем весьма очевидное следствие (7.3):

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0) \& (\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi). \tag{7.6}$$

§ 8. Вспомогательные функционалы качества

Как и в [22,38], полагаем в дальнейшем, что для некоторого $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbf{B}_n(\mathbf{c}) \cap \mathbf{N}\langle t\rangle \neq \varnothing \ \ \forall t \in T \tag{8.1}$$

(квазиограниченность $\mathbf{N}$). Тогда (см. (8.1)) при $t_* \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$

$$(\|\cdot\| - \inf)[x(\tau); \mathbf{N}\langle\tau\rangle] \leqslant \mathbf{c} + \max_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \|x(t)\|;$$

как следствие получаем теперь, что

$$\zeta_\kappa(\tau, x(\tau)) \leqslant \frac{1}{\kappa}\Big[\mathbf{c} + \max_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \|x(t)\|\Big]. \tag{8.2}$$

Далее (см. [22,38]) при $t \in T$ определяем мультифункционал $\mathbb{I}_t \in \mathcal{P}'([t, \vartheta_0])^{[t, \vartheta_0]}$ посредством условий

$$(\mathbb{I}_t(t) \triangleq \{t\}) \& (\mathbb{I}_t(\vartheta) \triangleq [t, \vartheta\,[\ \ \forall \vartheta \in]\,t, \vartheta_0]). \tag{8.3}$$

С учетом (8.3) при $t_* \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ определено конечное значение

$$\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \triangleq \sup(\{\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}); \sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta_\kappa(t, x(t))\}) \in \mathbb{R}_+. \tag{8.4}$$

Отметим, что согласно (7.5), (8.3), (8.4) имеем при $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned}\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), t_*) = \sup(\{\rho((t_*, x(t_*)); \mathbf{M}); \sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(t_*)} \zeta_\kappa(t, x(t))\}) = \\ = \sup(\{\rho((t_*, x(t_*)); \mathbf{M}); \zeta_\kappa(t_*, x(t_*))\}) = \psi_\kappa(t_*, x(t_*)).\end{aligned} \tag{8.5}$$

С учетом (8.4), (8.5) полагаем при $t_* \in T$, что функционал $\gamma_{t_*}^{(\kappa)} \in \mathcal{R}_+[C_n([t_*, \vartheta_0])]$ определяется условиями

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \triangleq \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \ \ \forall x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]); \tag{8.6}$$

ясно, что $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\bar{x}(\cdot)) \leqslant \psi_\kappa(t_*, \bar{x}(t_*))$ при $\bar{x}(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$. При $t_* \in T$ полагаем, что $\|\cdot\|_{t_*}^{(\mathbf{C})}$ есть норма равномерной сходимости на $C_n([t_*, \vartheta_0])$.

Предложение 1. *Если $t_* \in T$, $x_1(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $x_2(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, то*

$$|\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x_1(\cdot)) - \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x_2(\cdot))| \leqslant \sup(\{1; \frac{1}{\kappa}\})\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(C)}. \tag{8.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $t_* \in T$, $x_1(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $x_2(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$. Тогда (см. [33, (2.7.14)]) $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\begin{aligned}|\rho((\vartheta, x_1(\vartheta)); \mathbf{M}) - \rho((\vartheta, x_2(\vartheta)); \mathbf{M})| \leqslant \rho((\vartheta, x_1(\vartheta)), (\vartheta, x_2(\vartheta))) = \\ = \|x_1(\vartheta) - x_2(\vartheta)\| \leqslant \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(C)}.\end{aligned} \tag{8.8}$$

Далее, фиксируем $\theta \in [t_*, \vartheta_0]$. Если $y \in \mathbf{N}\langle\theta\rangle$, то

$$|\|x_1(\theta) - y\| - \|x_2(\theta) - y\|| \leqslant \|x_1(\theta) - x_2(\theta)\| \leqslant \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(C)}. \tag{8.9}$$

Поэтому согласно (8.9) имеем, что $\forall y \in \mathbf{N}\langle\theta\rangle$

$$(\|\cdot\| - \inf)[x_1(\theta); \mathbf{N}\langle\theta\rangle] \leqslant \|x_2(\theta) - y\| + \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(C)}.$$

Как следствие получаем неравенство

$$(\|\cdot\| - \inf)[x_1(\theta); \mathbf{N}\langle\theta\rangle] - \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(C)} \leqslant (\|\cdot\| - \inf)[x_2(\theta); \mathbf{N}\langle\theta\rangle]. \tag{8.10}$$

Аналогичным образом устанавливается неравенство

$$(\|\cdot\| - \inf)[x_2(\theta); \mathbf{N}\langle\theta\rangle] - \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(C)} \leqslant (\|\cdot\| - \inf)[x_1(\theta); \mathbf{N}\langle\theta\rangle]. \tag{8.11}$$

Получили из (7.4), (8.10) и (8.11), что

$$|\zeta_\kappa(\theta, x_1(\theta)) - \zeta_\kappa(\theta, x_2(\theta))| \leqslant \frac{1}{\kappa}\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(C)}.$$

Поскольку выбор θ был произвольным, установлено, что

$$|\zeta_\kappa(t,x_1(t))-\zeta_\kappa(t,x_2(t))|\leqslant\frac{1}{\kappa}\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|^{(C)}_{t_*}\quad\forall t\in[t_*,\vartheta_0].$$

В частности, получаем при $\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$ и $t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)$, что

$$|\zeta_\kappa(t,x_1(t))-\zeta_\kappa(t,x_2(t))|\leqslant\frac{1}{\kappa}\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|^{(C)}_{t_*}. \tag{8.12}$$

Из (8.12) вытекает теперь, что при $\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$ и $\tilde t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)$

$$\zeta_\kappa(\tilde t,x_1(\tilde t))\leqslant\sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)}\zeta_\kappa(t,x_2(t))+\frac{1}{\kappa}\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|^{(C)}_{t_*}.$$

Как следствие, при $\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$ реализуется следующее неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)}\zeta_\kappa(t,x_1(t))\leqslant\sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)}\zeta_\kappa(t,x_2(t))+\frac{1}{\kappa}\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|^{(C)}_{t_*}. \tag{8.13}$$

Аналогичным образом из (8.12) извлекается при $\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$ неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)}\zeta_\kappa(t,x_2(t))\leqslant\sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)}\zeta_\kappa(t,x_1(t))+\frac{1}{\kappa}\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|^{(C)}_{t_*}. \tag{8.14}$$

Из (8.13), (8.14) получаем следующее важное свойство:

$$\Big|\sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)}\zeta_\kappa(t,x_1(t))-\sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)}\zeta_\kappa(t,x_2(t))\Big|\leqslant\frac{1}{\kappa}\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|^{(C)}_{t_*}\quad\forall\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]. \tag{8.15}$$

Возвращаясь к (8.4), заметим с учетом (8.8), что при $\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$

$$\rho((\vartheta,x_1(\vartheta));\mathbf{M})\leqslant\omega_\kappa(t_*,x_2(\cdot),\vartheta)+\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|^{\vartheta}_{t_*}$$

и, вместе с тем, имеет место (см. (8.4), (8.15))

$$\sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)}\zeta_\kappa(t,x_1(t))\leqslant\omega_\kappa(t_*,x_2(\cdot),\vartheta)+\frac{1}{\kappa}\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|^{(C)}_{t_*}.$$

Из двух последних неравенств вытекает, что (см. (8.4)) при $\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$

$$\omega_\kappa(t_*,x_1(\cdot),\vartheta)\leqslant\omega_\kappa(t_*,x_2(\cdot),\vartheta)+\sup(\{1;\frac{1}{\kappa}\})\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|^{(C)}_{t_*}.$$

Аналогичными рассуждениями из (8.8) и (8.15) извлекается при $\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$ неравенство

$$\omega_\kappa(t_*,x_2(\cdot),\vartheta)\leqslant\omega_\kappa(t_*,x_1(\cdot),\vartheta)+\sup(\{1;\frac{1}{\kappa}\})\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|^{(C)}_{t_*}.$$

Комбинируя два последних неравенства, получаем следующее свойство:

$$|\omega_\kappa(t_*,x_1(\cdot),\vartheta)-\omega_\kappa(t_*,x_2(\cdot),\vartheta)|\leqslant\sup(\{1;\frac{1}{\kappa}\})\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|^{(C)}_{t_*}\quad\forall\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]. \tag{8.16}$$

Из (8.6) и (8.16) вытекает с очевидностью, что

$$\begin{aligned}&(\gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x_1(\cdot))\leqslant\omega_\kappa(t_*,x_2(\cdot),\vartheta)+\sup(\{1;\frac{1}{\kappa}\})\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|^{(C)}_{t_*}\quad\forall\vartheta\in[t_*,\vartheta_0])\&\\ &\&(\gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x_2(\cdot))\leqslant\omega_\kappa(t_*,x_1(\cdot),\vartheta)+\sup(\{1;\frac{1}{\kappa}\})\|x_1(\cdot)-x_2(\cdot)\|^{(C)}_{t_*}\quad\forall\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]);\end{aligned} \tag{8.17}$$

комбинируя (8.6) и (8.17), получаем неравенства

$$(\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x_1(\cdot)) \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x_2(\cdot)) + \sup(\{1; \frac{1}{\kappa}\})\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(C)})\&$$
$$\&(\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x_2(\cdot)) \leqslant \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x_1(\cdot)) + \sup(\{1; \frac{1}{\kappa}\})\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(C)}),$$

откуда, в свою очередь, вытекает требуемое неравенство (8.7).

Предложение 2. *При $t_* \in T$ множество нулей функционала $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ исчерпывается непрерывными на $[t_*, \vartheta_0]$ n-вектор-функциями, реализующими $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$-наведение:*

$$(\gamma_{t_*}^{(\kappa)})^{-1}(\{0\}) = \{x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \mid \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \colon ((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathbf{M})\& \\ \&((t, x(t)) \in \mathbf{N} \ \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta))\}. \tag{8.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в правой части (8.18). Пусть $\bar{x}(\cdot) \in \Omega$. Тогда $\bar{x}(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и для некоторого $\vartheta_* \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta_*, \bar{x}(\vartheta_*)) \in \mathbf{M})\&((t, \bar{x}(t)) \in \mathbf{N} \ \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta_*)); \tag{8.19}$$

в силу второго положения в (8.19) имеем, что $\bar{x}(t) \in \mathbf{N}\langle t\rangle \quad \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta_*)$. Как следствие $(\|\cdot\| - \inf)[\bar{x}(t); \mathbf{N}\langle t\rangle] = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta_*)$. С учетом (7.4) получаем свойство

$$\zeta_\kappa(t, \bar{x}(t)) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta_*)). \tag{8.20}$$

Вместе с тем, из первого положения в (8.19) вытекает, что $\rho((\vartheta_*, \bar{x}(\vartheta_*)); \mathbf{M}) = 0$. Поэтому с учетом (8.4) и (8.20) получаем, что $\omega_\kappa(t_*, \bar{x}(\cdot), \vartheta_*) = 0$ и, тем более, $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\bar{x}(\cdot)) = 0$ (см. (8.6)). Следовательно, $\bar{x}(\cdot) \in (\gamma_{t_*}^{(\kappa)})^{-1}(\{0\})$. Итак,

$$\Omega \subset (\gamma_{t_*}^{(\kappa)})^{-1}(\{0\}). \tag{8.21}$$

Выберем произвольно $y(\cdot) \in (\gamma_{t_*}^{(\kappa)})^{-1}(\{0\})$. Итак, $y(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(y(\cdot)) = 0$. С учетом (8.6) получаем, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \ \exists \tilde{\vartheta}_\varepsilon \in [t_*, \vartheta_0] \colon \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \tilde{\vartheta}_\varepsilon) < \varepsilon$. Поэтому для некоторой последовательности $(\vartheta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in [t_*, \vartheta_0]^{\mathbb{N}}$

$$0 \leqslant \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta_j) < \frac{1}{j} \ \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{8.22}$$

С учетом компактности $[t_*, \vartheta_0]$ будем полагать, что для некоторого $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_0]$

$$(\vartheta_k)_{k \in \mathbb{N}} \to \vartheta^*. \tag{8.23}$$

При этом $(\vartheta^* = t_*) \vee (t_* < \vartheta^*)$. Оба случая рассмотрим отдельно, однако сначала заметим, что в силу непрерывности $y(\cdot)$ и (8.23)

$$(\rho((\vartheta_k, y(\vartheta_k)); \mathbf{M}))_{k \in \mathbb{N}} \to \rho((\vartheta^*, y(\vartheta^*)); \mathbf{M}),$$

а потому (см. (8.22)) $\rho((\vartheta^*, y(\vartheta^*)); \mathbf{M}) = 0$ и, как следствие,

$$(\vartheta^*, y(\vartheta^*)) \in \mathbf{M}. \tag{8.24}$$

1) Пусть $\vartheta^* = t_*$. Тогда в силу (8.4) и того, что $\vartheta^* \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta_s)$ при $s \in \mathbb{N}$ (см. (8.3)), получаем следующее свойство. Именно, при $s \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \zeta_\kappa(t_*, y(t_*)) = \zeta_\kappa(\vartheta^*, y(\vartheta^*)) \leqslant \sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta_s)} \zeta_\kappa(t, y(t)) \leqslant \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta_s) < \frac{1}{s}.$$

Поэтому $\zeta_\kappa(t_*, y(t_*)) = 0$ и, как следствие, $(\|\cdot\| - \inf)[y(t_*); \mathbf{N}\langle t_*\rangle] = 0$; см. (7.4). Это означает, что $y(t_*) \in \mathbf{N}\langle t_*\rangle$, а потому $(t_*, y(t_*)) \in \mathbf{N}$. С учетом (8.3) получаем, что

$$(t, y(t)) \in \mathbf{N} \ \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*)$$

в рассматриваемом случае 1). Итак, истинна импликация

$$(\vartheta^* = t_*) \Rightarrow ((t, y(t)) \in \mathbf{N} \ \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*)). \tag{8.25}$$

2) Пусть $t_* < \vartheta^*$. Тогда $\vartheta^* \in]\, t_*, \vartheta_0]$ и согласно (8.3) $\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*)) = [t_*, \vartheta^*[$. Выберем произвольно $t^* \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*))$, получая, как следствие, что $t^* \in [t_*, \vartheta^*\,[$. Тогда $\vartheta^* - t^* \in]\,0, \infty\,[$ и согласно (8.23) для некоторого $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ имеем, что

$$|\vartheta_k - \vartheta^*| < \vartheta^* - t^* \ \ \forall k \in \overrightarrow{\mathbf{n}, \infty}.$$

Поэтому при $k \in \overrightarrow{\mathbf{n}, \infty}$ имеем $\vartheta^* - \vartheta_k < \vartheta^* - t^*$ и, как следствие, $t^* < \vartheta_k$. В итоге $t^* \in [t_*, \vartheta_k\,[$ и $\vartheta_k \in]\,t_*, \vartheta_0]$ при $k \in \overrightarrow{\mathbf{n}, \infty}$; как следствие для таких k имеем в силу (8.3), что $\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta_k) = [t_*, \vartheta_k\,[$ и, следовательно, $t^* \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta_k)$. В этом случае согласно (8.4) и (8.22) $\zeta_\kappa(t^*, y(t^*)) \leqslant \omega_\kappa(t_*, y(\cdot), \vartheta_k) < \frac{1}{k} \ \ \forall k \in \overrightarrow{\mathbf{n}, \infty}$. Это означает, что $\zeta_\kappa(t^*, y(t^*)) = 0$. Из (7.4) имеем теперь, что

$$(\|\cdot\| - \inf)[y(t^*); \mathbf{N}\langle t^*\rangle] = 0,$$

что означает справедливость включения $y(t^*) \in \mathbf{N}\langle t^*\rangle$, а потому $(t^*, y(t^*)) \in \mathbf{N}$. Поскольку выбор t^* был произвольным, мы и в случае 2) получаем, что $(t, y(t)) \in \mathbf{N} \ \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*)$. Итак, истинна импликация

$$(t_* < \vartheta^*) \Rightarrow ((t, y(t)) \in \mathbf{N} \ \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*));$$

с учетом (8.25) имеем теперь во всех возможных случаях свойство $(t, y(t) \in \mathbf{N} \ \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*)$. Тогда (см. (8.24))

$$((\vartheta^*, y(\vartheta^*)) \in \mathbf{M}) \& ((t, y(t)) \in \mathbf{N} \ \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta^*)). \tag{8.26}$$

Коль скоро $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_0]$, из (8.26) следует, что $\exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, y(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \& ((t, y(t)) \in \mathbf{N} \ \ \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)).$$

Иными словами, $y(\cdot) \in \Omega$, чем и завершается проверка вложения $(\gamma_{t_*}^{(\kappa)})^{-1}(\{0\}) \subset \Omega$. С учетом (8.21) имеем требуемое равенство $(\gamma_{t_*}^{(\kappa)})^{-1}(\{0\}) = \Omega$. $\square$

Отметим, что из предложения 1 следует, конечно, что при $t_* \in T$ функционал $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ является равномерно непрерывным (установили ранее липшицевость данного функционала).

§ 9. Итерации на пространстве функций

Ниже рассматривается вариант МПИ, подобный [22,38,39] и реализуемый в $\mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]$. Нашей целью здесь является представление преобразований

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot\mid\kappa)\to\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot\mid\kappa),\quad k\in\mathbb{N}_0, \tag{9.1}$$

в терминах действия некоторого оператора. В (9.1), в частности, выделяем случай $k=0$, имея целью получить представление $\varepsilon_0^{(1)}(\cdot\mid\kappa)$. Сначала, однако, рассмотрим некоторые вспомогательные конструкции. Напомним, что согласно (7.5) и (8.2) при $t_*\in T$ и $x(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0])$ функция

$$\tau\mapsto\psi_\kappa(\tau,x(\tau))\colon[t_*,\vartheta_0]\to\mathbb{R}_+ \tag{9.2}$$

ограничена; как следствие при $g\in\mathfrak{M}_\psi$ ограничена функция

$$\tau\longmapsto g(\tau,x(\tau))\colon[t_*,\vartheta_0]\to\mathbb{R}_+$$

и при $\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$ имеем конечное значение

$$\sup(\{\sup_{\tau\in\mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)}g(\tau,x(\tau));\rho((\vartheta,x(\vartheta));\mathbf{M})\})\in\mathbb{R}_+.$$

С учетом этого при $g\in\mathfrak{M}_\psi$ и $t\in T$ вводим функционал

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}[g;t]\overset{\triangle}{=}(\sup(\{\sup_{\tau\in\mathbb{I}_t(\vartheta)}g(\tau,x(\tau));\rho((\vartheta,x(\vartheta));\mathbf{M})\}))_{(x(\cdot),\vartheta)\in C_n([t,\vartheta_0])\times[t,\vartheta_0]}\in\\ \in\mathcal{R}_+[C_n([t,\vartheta_0])\times[t,\vartheta_0]].\end{aligned} \tag{9.3}$$

Предложение 3. *Если $g\in\mathfrak{M}_\psi$ и $t_*\in T$, то $\forall x(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0])$ $\forall\vartheta\in[t_*,\vartheta_0]$*

$$\mathfrak{H}[g;t_*](x(\cdot),\vartheta)\leqslant\sup_{t\in[t_*,\vartheta_0]}\psi_\kappa(t,x(t)).$$

Доказательство. Фиксируем $g\in\mathfrak{M}_\psi$ и $t_*\in T$. С учетом ограниченности функции (9.2) имеем, что $\forall x(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0])$

$$\sup_{t\in[t_*,\vartheta_0]}\psi_\kappa(t,x(t))\in\mathbb{R}_+.$$

Рассмотрим $\mathfrak{H}[g;t_*]\in\mathcal{R}_+[C_n([t_*,\vartheta_0])\times[t_*,\vartheta_0]]$. Пусть $\bar{x}(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0])$ и $\bar{\vartheta}\in[t_*,\vartheta_0]$. Тогда по определению $g\in\mathfrak{M}_\psi$ имеем, что

$$g(t,\bar{x}(t))\leqslant\psi_\kappa(t,\bar{x}(t))\quad\forall t\in[t_*,\vartheta_0].$$

Как следствие получаем (см. (8.3)), что

$$\sup_{t\in\mathbb{I}_{t_*}(\bar{\vartheta})}g(t,\bar{x}(t))\leqslant\sup_{t\in[t_*,\vartheta_0]}\psi_\kappa(t,\bar{x}(t)). \tag{9.4}$$

Кроме того, в силу (7.5) получаем также, что

$$\rho((\bar{\vartheta},\bar{x}(\bar{\vartheta});\mathbf{M})\leqslant\psi_\kappa(\bar{\vartheta},\bar{x}(\bar{\vartheta}))\leqslant\sup_{t\in[t_*,\vartheta_0]}\psi_\kappa(t,\bar{x}(t)).$$

С учетом (9.3) и (9.4) получаем теперь неравенство

$$\mathfrak{H}[g;t_*](\bar{x}(\cdot),\bar{\vartheta}) \leqslant \sup_{t\in[t_*,\vartheta_0]} \psi_\kappa(t,\bar{x}(t)).$$

Поскольку выбор $\bar{x}(\cdot)$ и $\bar{\vartheta}$ был произвольным, требуемое утверждение доказано. □

Напомним, что (см. [22,39]) при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$ и $\vartheta \in [t_*,\vartheta_0]$ функционал

$$\mathfrak{H}[g;t_*](\cdot,\vartheta) \triangleq (\mathfrak{H}[g;t_*](x(\cdot),\vartheta))_{x(\cdot)\in C_n([t_*,\vartheta_0])} \in \mathcal{R}_+[C_n([t_*,\vartheta_0])] \tag{9.5}$$

обладает замкнутыми множествами Лебега $\mathfrak{H}[g;t_*](\cdot,\vartheta)^{-1}([0,b])$, $b \in \mathbb{R}_+$. Доказательство подобно обоснованию [24, предложение 13]. Заметим, что в качестве аргументов в (9.5) можно использовать обобщенные траектории. В этой связи при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ введем

$$\mathbf{h}[g;t_*;x_*;\nu] \triangleq (\mathfrak{H}[g;t_*] \mid \mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)\times[t_*,\vartheta_0]) \in \mathcal{R}_+[\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)\times[t_*,\vartheta_0]]; \tag{9.6}$$

по аналогии с (9.5) определяем при $\theta \in [t_*,\vartheta_0]$ сечение функционала (9.6):

$$\mathbf{h}[g;t_*;x_*;\nu](\cdot,\theta) \triangleq (\mathbf{h}[g;t_*;x_*;\nu](x(\cdot),\theta))_{x(\cdot)\in\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)]. \tag{9.7}$$

С учетом замкнутости множеств Лебега функционалов–сечений (9.5), получаем аналогичное свойство и для множеств Лебега функционалов (9.7). Отсюда вытекает следующее полезное положение.

Предложение 4. *Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, $\theta \in [t_*,\vartheta_0]$ и $b \in \mathbb{R}_+$, то множество $\mathbf{h}[g;t_*;x_*;\nu](\cdot,\theta)^{-1}([0,b])$ компактно в $C_n([t_*,\vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости.*

Доказательство. Фиксируем $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, $\theta \in [t_*,\vartheta_0]$ и $b \in \mathbb{R}_+$. Тогда в силу (9.6)

$$\mathbf{h}[g;t_*;x_*;\nu](\cdot,\theta)^{-1}([0,b]) = \mathfrak{H}[g;t_*](\cdot,\theta)^{-1}([0,b]) \cap \mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu), \tag{9.8}$$

а потому по свойствам функционалов (9.5) множество (9.8) замкнуто в топологии равномерной сходимости пространства $C_n([t_*,\vartheta_0])$. С другой стороны $\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)$ компактно в $C_n([t_*,\vartheta_0])$, а, стало быть, в оснащении индуцированной топологией оно компактно как топологическое пространство. При этом (9.8) замкнуто в $\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu)$ с упомянутым оснащением и, следовательно, компактно в данном подпространстве $C_n([t_*,\vartheta_0])$. С учетом транзитивности операции перехода к подпространству (см. [40, предложение 2.1.2]) получаем, что (9.8) компактно и в самом пространстве $C_n([t_*,\vartheta_0])$. □

Следствие 1. *При $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $\theta \in [t_*,\vartheta_0]$ функционал*

$$x(\cdot) \mapsto \mathbf{h}[g;t_*;x_*;\nu](x(\cdot),\theta)\colon \mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu) \to \mathbb{R}_+$$

достигает минимума.

Доказательство — очевидное следствие известного эквивалентного определения компактности (см. [40, теорема 3.1.1]), поскольку зависимость

$$b \mapsto \mathbf{h}[g;t_*;x_*;\nu](\cdot,\theta)^{-1}([0,b])\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{P}(\mathcal{X}_\Pi(t_*,x_*,\nu))$$

изотонна в смысле упорядоченности по включению на $\mathcal{P}(\mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu))$. Заметим, что согласно предложению 3 и (9.6)

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant \sup_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \psi_\kappa(t, x(t)) \ \ \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \ \ \forall t_* \in T$$
$$\forall x_* \in \mathbb{R}^n \ \ \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0].$$

Учтем условие равномерной ограниченности обобщенных траекторий.

Предложение 5. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$*, то* $\exists b \in \mathbb{R}_+$:

$$\psi_\kappa(t, x(t)) \leqslant b \ \ \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{9.9}$$

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и, с учетом (5.1), подберем $\beta \in \mathbb{R}_+$ так, что

$$\|\varphi(t, t_*, x_*, \eta)\| \leqslant \beta \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0].$$

Используя непустоту множества $\mathbf{M}$, выберем и зафиксируем $(\tau_*, y_*) \in \mathbf{M}$. Получаем, что

$$b_* \triangleq \sup(\{\sup(\{\vartheta_0 - t_0; \beta + \|y_*\|\}); \frac{1}{\kappa}(\mathbf{c} + \beta)\}) \in \mathbb{R}_+.$$

Имеем очевидное свойство

$$\begin{gathered}\rho((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)); \mathbf{M}) \leqslant \rho((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)), (\tau_*, y_*)) = \\ = \sup(\{|t - \tau_*|; \|\varphi(t, t_*, x_*, \eta) - y_*\|\}) \leqslant \sup(\{\vartheta_0 - t_0; \|\varphi(t, t_*, x_*, \eta)\| + \|y_*\|\}) \leqslant \\ \leqslant \sup(\{\vartheta_0 - t_0; \beta + \|y_*\|\}) \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_* \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0],\end{gathered} \tag{9.10}$$

где $\sup(\{\vartheta_0 - t_0; \beta + \|y_*\|\}) \in \mathbb{R}_+$. При этом $\mathcal{H}_{t_*}$ есть объединение всех множеств $\Pi_{t_*}(\nu)$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$; см. [30]. Поэтому (см. (5.3), (9.10)) имеем, что

$$\rho((t, x(t)); \mathbf{M}) \leqslant \sup(\{\vartheta_0 - t_0; \beta + \|y_*\|\}) \ \ \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{9.11}$$

Напомним (8.2). Тогда по выбору β имеем, что

$$\zeta_\kappa(t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \leqslant \frac{1}{\kappa}(\mathbf{c} + \beta) \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{9.12}$$

Поэтому получаем, как следствие (см. (5.3), (9.12)), что

$$\zeta_\kappa(t, x(t)) \leqslant \frac{1}{\kappa}(\mathbf{c} + \beta) \ \ \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{9.13}$$

Теперь учтем (7.5). Тогда (см. (9.11), (9.13)) $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\psi_\kappa(t, x(t)) = \sup(\{\rho((t, x(t)); \mathbf{M}); \zeta_\kappa(t, x(t))\}) \leqslant b_*.$$

Число b_* может использоваться в качестве b в соотношении (9.9). Требуемое свойство установлено. $\square$

Из (9.9) и предложения 4 вытекает, что $\forall t_* \in T \ \ \forall x_* \in \mathbb{R}^n \ \ \exists b \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant b \ \ \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \ \ \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \ \ \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \ \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0].$$

Как следствие получаем, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ непременно $\exists b \in \mathbb{R}_+$:

$$\inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \quad \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leqslant b \;\; \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \;\; \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}. \tag{9.14}$$

Это означает, в частности, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $g \in \mathfrak{M}_\psi$ определено (конечное) значение

$$\sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \quad \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+.$$

С учетом этого полагаем, что $\Gamma\colon \mathfrak{M}_\psi \to \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ определяется условием: при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ функция $\Gamma(g) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ такова, что

$$\Gamma(g)(t, x) \triangleq \sup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \inf_{\vartheta \in [t, \vartheta_0]} \quad \min_{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, \nu)} \mathbf{h}[g; t; x; \nu](\mathbf{x}(\cdot), \vartheta) \;\; \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{9.15}$$

Предложение 6. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, *то*

$$\exists b \in \mathbb{R}_+\colon \Gamma(g)(t_*, x_*) \leqslant b \;\; \forall g \in \mathfrak{M}_\psi.$$

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Тогда для некоторого $b \in \mathbb{R}_+$ выполнено (9.14). В силу (9.14) и (9.15) имеем, что $\Gamma(g)(t_*, x_*) \leqslant b \;\; \forall g \in \mathfrak{M}_\psi$. □

§ 10. Итерационная реализация основной функции

В настоящем параграфе приводится с несущественными изменениями итерационная процедура [22, 39], реализуемая в $\mathfrak{M}_\psi$ и осуществляющая (9.1). Однако, сначала отметим два очевидных свойства:

$$(g \leqq \Gamma(g) \;\; \forall g \in \mathfrak{M}_\psi) \& (\forall g_1 \in \mathfrak{M}_\psi \;\; \forall g_2 \in \mathfrak{M}_\psi \;\; (g_1 \leqq g_2) \Rightarrow (\Gamma(g_1) \leqq \Gamma(g_2))); \tag{10.1}$$

в связи с несложной проверкой (10.1) отметим, в частности, [41, предложения 15, 16]. Напомним, что (см. § 7)

$$\Gamma(\zeta_\kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(0)}(\cdot \mid \kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]. \tag{10.2}$$

В связи с (10.2) отметим следующее полезное предложение.

Предложение 7. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ *и* $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$, *то*

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta).$$

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$. Тогда имеем (8.4), (8.5) и, вместе с тем, согласно (9.3), (9.6)

$$\begin{gathered} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \mathfrak{H}[\zeta_\kappa; t_*](x(\cdot), \vartheta) = \\ = \sup(\{ \sup_{t \in \mathbb{I}_{t_*}(\vartheta)} \zeta_\kappa(t, x(t)); \rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M})\}) \;\; \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \end{gathered} \tag{10.3}$$

Из (8.4) и (10.3) получаем, как следствие, что

$$\mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \;\; \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{10.4}$$

Но в этом случае из (8.6) и (10.4) вытекает, что

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) = \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta). \qquad \square$$

С учетом компактности множеств (5.3) и непрерывности функционалов $\gamma_t^{(\kappa)}$, $t \in T$, получаем следующее представление: если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, то

$$\begin{aligned} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) &= \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) = \\ &= \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{10.5}$$

С учетом следствия 1 получаем, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ определено конечное значение

$$\min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+.$$

Предложение 8. *Если* $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$*, то*

$$\Gamma(\zeta_\kappa)(t_*, x_*) = \sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \tag{10.6}$$

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Тогда (см. (10.5); [31, гл. 1, раздел 3]) при $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$

$$\begin{aligned} &\inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \\ &= \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \\ &= \inf_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \\ &= \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \\ &= \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \inf_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\zeta_\kappa; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \end{aligned} \tag{10.7}$$

Из (9.15) и (10.7) получаем требуемое равенство (10.6). $\square$

Заметим, что, по свойствам множеств (5.3), все они являются непустыми ограниченными замкнутыми множествами в $C_n([t_*, \vartheta_0])$, где $t_* \in T$, с метрикой, порожденной нормой $\|\cdot\|_{t_*}^{(C)}$. На семействе всех таких множеств определена [40, 4.5.22] метрика Хаусдорфа; кроме того, при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ отображение

$$\nu \mapsto \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \colon \mathcal{E}_{t_*} \to \mathrm{comp}(C_n([t_*, \vartheta_0])),$$

где $\mathrm{comp}(C_n([t_*, \vartheta_0]))$ — семейство всех непустых компактов в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией, порождаемой нормой $\|\cdot\|_{t_*}^{(C)}$, непрерывно (см. [30, лемма 10.1]) в упомянутой метрике Хаусдорфа ($\mathcal{E}_{t_*}$ оснащается при этом относительной $*$-слабой топологией). Фиксируя позицию $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, мы в силу равномерной непрерывности $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ получаем в виде

$$\nu \mapsto \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \colon \mathcal{E}_{t_*} \to \mathbb{R}_+$$

непрерывный функционал на метризуемом компакте, который достигает максимума. Поэтому с учетом предложения 8 получаем при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, что $\Gamma(\zeta_\kappa)(t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+$ есть программный максимин функционала $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$:

$$\Gamma(\zeta_\kappa)(t_*, x_*) = \max_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \min_{x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \tag{10.8}$$

В связи с проблемой реализации (9.1) отметим, что [39, теорема 1]

$$\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot\ |\kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot\ |\kappa))\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Итак (см. § 7; [39, (4.12)]), получаем итерационную процедуру вида

$$(\varepsilon_0^{(0)}(\cdot\ |\kappa) = \zeta_\kappa) \& (\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot\ |\kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot\ |\kappa))\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0). \tag{10.9}$$

Мы рассматриваем (10.9) как прямую итерационную процедуру, реализующую «в пределе» (см. § 7) основную функцию. Заметим также, что в силу (10.2), (10.8) и (10.9) в виде $\varepsilon_0^{(1)}(\cdot\ |\kappa)$ имеем функцию программного максимина.

§ 11. Свойства неподвижной точки и функции цены

В настоящем параграфе рассмотрим сначала положения [39, теоремы 2, 3], которые для полноты изложения сформулируем в виде единого утверждения. Итак, введем в рассмотрение $\mathfrak{M}_\psi^{(\Gamma)} \triangleq \{g \in \mathfrak{M}_\psi \mid g = \Gamma(g)\}$ и

$$\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)} \triangleq \{g \in \mathfrak{M}_\psi^{(\Gamma)} \mid \zeta_\kappa \leqq g\} = \{g \in \mathfrak{M}_\psi \mid (g = \Gamma(g)) \& (\zeta_\kappa \leqq g)\}.$$

Теорема 1. *Основная функция $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ является неподвижной точкой Γ, то есть $\varepsilon_0(\cdot|\kappa) \in \in \mathfrak{M}_\psi^{(\Gamma)}$ и, более того, $\varepsilon_0(\cdot|\kappa)$ есть $\leqq$ — наименьший элемент $\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$, то есть*

$$(\varepsilon_0(\cdot\ |\kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}) \& (\varepsilon_0(\cdot\ |\kappa) \leqq g\ \ \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}).$$

Доказательство получается комбинацией теорем 2 и 3 работы [39]. Наконец, как отмечено в [39, раздел 6], $\forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$(\kappa\rho((t, x); \mathbf{M}) \leqslant (\|\cdot\| - \inf)[x; \mathbf{N}\langle t\rangle]) \Rightarrow (\varepsilon_0(t, x \mid \kappa) = \zeta_\kappa(t, x)). \tag{11.1}$$

В (11.1) указано фактически эффективно определяемое множество позиций, для которых значения основной функции совпадают со значениями начальной (см. (10.9)) функции ζ_κ. Введем порядковые интервалы в ЧУМ $(\mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n], \leqq)$: $\forall g_1 \in \mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]$ $\forall g_2 \in \mathcal{R}_+[T\times\mathbb{R}^n]$

$$[g_1; g_2]_{\leqq}^{(0)} \triangleq \{g \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \mid (g_1 \leqq g) \& (g \leqq g_2)\};$$

ясно, что $\varepsilon_0(\cdot\ |\kappa) \in [\zeta_\kappa; \psi_\kappa]_{\leqq}^{(0)}$ (см. § 7 и, в частности, (7.6)). Из определений § 7 следует

Предложение 9. *Если $k \in \mathbb{N}_0$, то $\varepsilon_0(\cdot\ |\kappa) \in [\varepsilon_0^{(k)}(\cdot\ |\kappa); \psi_\kappa]_{\leqq}^{(0)}$.*

Предложение 10. *Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{N}_0$, то истинна импликация*

$$(\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \leqslant \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*\ |\kappa)) \Rightarrow (\varepsilon_0(t_*, x_*\ |\kappa) = \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_*\ |\kappa)). \tag{11.2}$$

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Тогда $\zeta_\kappa(t_*, x_*) = \varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_* \,|\kappa) \leqslant \leqslant \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \,|\kappa)$; см. § 7. Поэтому

$$\psi_\kappa(t_*, x_*) = \sup(\{\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}); \zeta_\kappa(t_*, x_*)\}) \leqslant \sup(\{\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}); \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \,|\kappa)\}). \quad (11.3)$$

Пусть $\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \leqslant \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \,|\kappa)$. Тогда получаем равенство

$$\sup(\{\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}); \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \,|\kappa)\}) = \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \,|\kappa). \quad (11.4)$$

Из (11.3), (11.4) следует очевидное неравенство

$$\psi_\kappa(t_*, x_*) \leqslant \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \,|\kappa). \quad (11.5)$$

С другой стороны, в силу предложения 9 имеем цепочку неравенств

$$\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \,|\kappa) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_* \,|\kappa) \leqslant \psi_\kappa(t_*, x_*),$$

откуда с учетом (11.5) вытекает равенство $\varepsilon_0(t_*, x_* \,|\kappa) = \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \,|\kappa)$. Итак, импликация (11.2) установлена. □

Заметим, что, как легко видеть с учетом (7.4), свойство (11.1) есть частный случай утверждения предложения 10.

Следствие 2. *Если $k \in \mathbb{N}_0$, то истинна импликация*

$$(\rho(\cdot; \mathbf{M}) \leqq \varepsilon_0^{(k)}(\cdot \,|\kappa)) \Rightarrow (\varepsilon_0(\cdot \,|\kappa) = \varepsilon_0^{(k)}(\cdot \,|\kappa)). \quad (11.6)$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}_0$ и истинна посылка доказываемой импликации (11.6), то есть $\rho(\cdot; \mathbf{M}) \leqq \varepsilon_0^{(k)}(\cdot \,|\kappa)$. Тогда по определению $\leqq$ имеем, что

$$\rho((t, x); \mathbf{M}) \leqq \varepsilon_0^{(k)}(t, x \,|\kappa) \ \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (11.7)$$

Сравним функции $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \,|\kappa)$ и $\varepsilon_0(\cdot \,|\kappa)$. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Тогда в силу (11.7) $\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \leqslant \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \,|\kappa)$. Из предложения 10 следует равенство $\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \,|\kappa) = = \varepsilon_0(t_*, x_* \,|\kappa)$. Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, имеем, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(t, x \,|\kappa) = \varepsilon_0(t, x \,|\kappa) \ \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n.$$

Это означает справедливость равенства $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \,|\kappa) = \varepsilon_0(\cdot \,|\kappa)$. Импликация (11.6) установлена. □

В заключении отметим совсем кратко важное положение о свойствах основной функции: значения данной функции являются ценой игры на минимакс–максимин функционалов вида (8.6). Более подробные сведения на этот счет см. в [22,39]. Напомним сначала, что (см. [39, (7.1), (7.2)]) при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{gathered}\mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*) \triangleq \pi_{t_*, x_*}^{(W)}\langle \cdot \mid S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa))\rangle = \\ = (\{\eta \in \Pi_{t_*}(\nu) \mid \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \colon ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)))\& \\ \&((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa))) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta\,[)\})_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}.\end{gathered}$$

Тогда (см. [39, теорема 4]) при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ имеем цепочку равенств

$$\begin{gathered}\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \\ = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)).\end{gathered} \quad (11.8)$$

С другой стороны, из [39, теорема 5] имеем при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ равенство

$$\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \sup_{(V,\beta,k) \in \mathfrak{V}_{\mathrm{pos}} \times \mathbb{G}^*_{t_*} \times \mathbb{N}} \ \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma^{(\kappa)}_{t_*}(x(\cdot)); \tag{11.9}$$

из (11.8) и (11.9) получаем, что $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)$ есть цена игры на минимакс–максимин функционала $\gamma^{(\kappa)}_{t_*}$. При этом игрок I использует многозначные обобщенные квазистратегии, а игрок II — стратегии–тройки. Отметим, однако, полезное следствие (11.8).

Теорема 2. *Если $t_* \in T$, то непрерывна функция*

$$x \mapsto \varepsilon_0(t_*, x \mid \kappa) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+. \tag{11.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $t_* \in T$. Тогда (см. § 5)

$$(x, \eta) \mapsto \varphi(\cdot, t_*, x, \eta) \colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_{t_*} \to C_n([t_*, \vartheta_0]) \tag{11.11}$$

есть непрерывное отображение (см. свойства (5.2)). Зафиксируем $x_* \in \mathbb{R}^n$, получая $(t_*, x_*) \in$ $\in T \times \mathbb{R}^n$. Выберем произвольно последовательность $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ со свойством

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \to x_*. \tag{11.12}$$

Покажем, что $\forall \varepsilon \in]\,0, \infty[\ \ \exists m \in \mathbb{N}$:

$$\|\varphi(\cdot, t_*, x_k, \eta) - \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\|^{(C)}_{t_*} < \varepsilon \ \ \forall k \in \overrightarrow{m, \infty} \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*}. \tag{11.13}$$

В самом деле, допустим противное, то есть предположим, что для некоторого $\bar{\varepsilon} \in]\,0, \infty\,[$ имеет место свойство:

$$\forall m \in \mathbb{N} \ \ \exists k \in \overrightarrow{m, \infty} \ \ \exists \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \colon \bar{\varepsilon} \leqslant \|\varphi(\cdot, t_*, x_k, \eta) - \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\|^{(C)}_{t_*}.$$

Тогда, как следствие, имеем, что для некоторых последовательностей

$$((k_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \& ((\eta_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{H}_{t_*})^{\mathbb{N}})$$

выполняются следующие условия: $\forall m \in \mathbb{N}$

$$(m \leqslant k_m) \& (\bar{\varepsilon} \leqslant \|\varphi(\cdot, t_*, x_{k_m}, \eta_m) - \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta_m)\|^{(C)}_{t_*}). \tag{11.14}$$

С учетом ($*$-слабой) компактности $\mathcal{H}_{t_*}$ можно полагать, что для некоторого $\eta_* \in \mathcal{H}_{t_*}$

$$(\eta_m)_{m \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \eta_*. \tag{11.15}$$

В силу (11.12) и первого положения в (11.14) имеем сходимость

$$(x_{k_m})_{m \in \mathbb{N}} \to x_*,$$

а тогда в силу (11.15) по свойству непрерывности отображения (11.11) имеем, что

$$((\varphi(\cdot, t_*, x_{k_m}, \eta_m))_{m \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta_*)) \& ((\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta_m))_{m \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta_*)),$$

где $\rightrightarrows$ означает равномерную сходимость. С учетом неравенства треугольника получаем, что

$$\exists r \in \mathbb{N} \colon \|\varphi(\cdot, t_*, x_{k_r}, \eta_r) - \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta_r)\|^{(C)}_{t_*} < \bar{\varepsilon},$$

что невозможно в силу (11.14). Полученное противоречие доказывает (11.13). Теперь в силу равномерной непрерывности $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ получаем, что $\forall \varepsilon \in]\,0, \infty\,[\ \exists m \in \mathbb{N}$:

$$|\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_k, \eta)) - \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta))| < \varepsilon \ \ \forall k \in \overrightarrow{m, \infty} \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*}. \tag{11.16}$$

Воспользуемся представлением (11.8), учитывая (5.4):

$$\varepsilon_0(t_*, x \mid \kappa) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}} \ \max_{\eta \ \in \bigcup\limits_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x, \eta)) \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{11.17}$$

Фиксируем $\varepsilon^* \in]\,0, \infty\,[$, после чего (см. (11.16)) подберем $m^* \in \mathbb{N}$ так, что

$$|\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_k, \eta)) - \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta))| < \varepsilon^* \ \ \forall k \in \overrightarrow{m^*, \infty} \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*}.$$

Тогда, в частности (см. (4.1), (4.2)),

$$\begin{gathered} |\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_k, \eta)) - \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta))| < \varepsilon^* \\ \forall k \in \overrightarrow{m^*, \infty} \ \ \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi} \ \ \forall \eta \in \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu). \end{gathered} \tag{11.18}$$

Поэтому имеем, в частности, что

$$\begin{gathered} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_k, \tilde{\eta})) < \max_{\eta \ \in \bigcup\limits_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) + \varepsilon^* \\ \forall k \in \overrightarrow{m^*, \infty} \ \ \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi} \ \ \forall \tilde{\eta} \in \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu). \end{gathered}$$

Поэтому имеем (см. (4.2)) с учетом непрерывности $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$, что

$$\max_{\eta \ \in \bigcup\limits_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_k, \eta)) < \max_{\eta \ \in \bigcup\limits_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) + \varepsilon^* \ \ \forall k \in \overrightarrow{m^*, \infty} \ \ \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}.$$

Из этого вытекает с учетом (11.17) следующее свойство:

$$\begin{gathered} \varepsilon_0(t_*, x_k \mid \kappa) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}} \ \max_{\eta \ \in \bigcup\limits_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_k, \eta)) < \\ < \max_{\eta \ \in \bigcup\limits_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \bar{\alpha}(\nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) + \varepsilon^* \ \ \forall k \in \overrightarrow{m^*, \infty} \ \ \forall \bar{\alpha} \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}. \end{gathered}$$

Как следствие (см. (11.17)) реализуется важное положение

$$\begin{gathered} \varepsilon_0(t_*, x_k \mid \kappa) < \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}} \ \max_{\eta \ \in \bigcup\limits_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) + \varepsilon^* = \\ = \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) + \varepsilon^* \ \ \forall k \in \overrightarrow{m^*, \infty}. \end{gathered}$$

Поэтому получаем следующее свойство:

$$\varepsilon_0(t_*, x_k \mid \kappa) - \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) < \varepsilon^* \ \ \forall k \in \overrightarrow{m^*, \infty}. \tag{11.19}$$

Вернемся к (11.18). Тогда, в частности, получаем, что

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot,t_*,x_*,\tilde{\eta})) < \max_{\eta\ \in \bigcup\limits_{\nu\in\mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot,t_*,x_k,\eta)) + \varepsilon^* \\ \forall k \in \overrightarrow{m^*,\infty}\ \ \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}\ \ \forall \tilde{\eta} \in \bigcup_{\nu\in\mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu). \tag{11.20}$$

В свою очередь, из (11.20) вытекает очевидное следствие

$$\max_{\eta\ \in \bigcup\limits_{\nu\in\mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot,t_*,x_*,\eta)) < \max_{\eta\ \in \bigcup\limits_{\nu\in\mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot,t_*,x_k,\eta)) + \varepsilon^*\ \ \forall k \in \overrightarrow{m^*,\infty}\ \ \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}.$$

Поэтому тем более имеем с учетом (11.17) неравенства

$$\varepsilon_0(t_*,x_* \mid \kappa) = \min_{\alpha\in\tilde{A}_{t_*}^{\Pi}} \max_{\eta\ \in \bigcup\limits_{\nu\in\mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot,t_*,x_*,\eta)) < \\ < \max_{\eta\ \in \bigcup\limits_{\nu\in\mathcal{E}_{t_*}} \tilde{\alpha}(\nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot,t_*,x_k,\eta)) + \varepsilon^*\ \ \forall k \in \overrightarrow{m^*,\infty}\ \ \forall \tilde{\alpha} \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}.$$

В итоге получаем очевидное свойство

$$\varepsilon_0(t_*,x_* \mid \kappa) - \varepsilon^* < \min_{\alpha\in\tilde{A}_{t_*}^{\Pi}} \max_{\eta\ \in \bigcup\limits_{\nu\in\mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot,t_*,x_k,\eta)) = \\ = \varepsilon_0(t_*,x_k \mid \kappa)\ \ \forall k \in \overrightarrow{m^*,\infty}.$$

Иными словами, получаем неравенства

$$\varepsilon_0(t_*,x_* \mid \kappa) - \varepsilon_0(t_*,x_k \mid \kappa) < \varepsilon^*\ \ \forall k \in \overrightarrow{m^*,\infty}.$$

С учетом (11.19) имеем теперь свойство

$$|\varepsilon_0(t_*,x_k \mid \kappa) - \varepsilon_0(t_*,x_* \mid \kappa)| < \varepsilon^*\ \ \forall k \in \overrightarrow{m^*,\infty}.$$

Таким образом, $\exists m \in \mathbb{N}$: $|\varepsilon_0(t_*,x_* \mid \kappa) - \varepsilon_0(t_*,x_k \mid \kappa)| < \varepsilon^*\ \ \forall k \in \overrightarrow{m,\infty}$. Поскольку $\varepsilon^* \in]\,0,\infty\,[$ выбиралось произвольно, установлено, что при условии (11.12)

$$(\varepsilon_0(t_*,x_k \mid \kappa))_{k\in\mathbb{N}} \to \varepsilon_0(t_*,x_* \mid \kappa).$$

Итак, получили следующую импликацию (см. (11.12))

$$((x_k)_{k\in\mathbb{N}} \to x_*) \Rightarrow ((\varepsilon_0(t_*,x_k \mid \kappa))_{k\in\mathbb{N}} \to \varepsilon_0(t_*,x_* \mid \kappa)). \tag{11.21}$$

Поскольку x_* и $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ выбирались произвольно, из (11.21) вытекает непрерывность функции (11.10). □

Итак, все временные сечения нашей основной функции непрерывны.

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ, грант 19-01-00573

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34. № 6. С. 1005–1022.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
4. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
5. Красовский Н. Н. Дифференциальная игра сближения–уклонения. I // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1973. № 2. С. 3–18.
6. Красовский Н. Н. Дифференциальная игра сближения–уклонения. II // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1973. № 3. С. 22–42.
7. Ченцов А. Г. О структуре одной игровой задачи сближения // Доклады Академии наук СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275. http://mi.mathnet.ru/dan39354
8. Ченцов А. Г. К игровой задаче наведения // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76. http://mi.mathnet.ru/dan39693
9. Ченцов А. Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Математический сборник (новая серия). 1976. Т. 99 (141). № 3. С. 394–420. http://mi.mathnet.ru/msb2757
10. Чистяков С. В. К решению игровых задач преследования // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.
11. Ухоботов В. И. Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–361. https://elibrary.ru/item.asp?id=35676362
12. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
13. Кряжимский А. В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения–уклонения // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239. № 4. С. 779–782. http://mi.mathnet.ru/dan41626
14. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр // Успехи математических наук. 1966. Т. 21. Вып. 4 (130). С. 219–274. http://mi.mathnet.ru/umn5903
15. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 1 // Доклады Академии наук СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280. http://mi.mathnet.ru/dan33165
16. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2 // Доклады Академии наук СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766. http://mi.mathnet.ru/dan33242
17. Пшеничный Б. Н. Структура дифференциальных игр // Доклады Академии наук СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 285–287. http://mi.mathnet.ru/dan34373
18. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
19. Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Amsterdam: Gordon and Breach, 1995. https://zbmath.org/?q=an:0884.34015
20. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.
21. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
22. Ченцов А. Г. Некоторые вопросы теории дифференциальных игр с фазовыми ограничениями // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 138–184. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-10
23. Chentsov A. G., Khachay D. M. Relaxation of a dynamic game of guidance and program constructions of control // Minimax Theory and its Applications. 2020. Vol. 5. No. 2. P. 275–304. https://zbmath.org/?q=an:1455.91048
24. Ченцов А. Г., Хачай Д. М. Оператор программного поглощения и релаксация дифференциальной игры сближения–уклонения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 64–91. https://doi.org/10.35634/vm200106
25. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
26. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. I. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008.
27. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

28. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
29. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
30. Ченцов А. Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения–уклонения. Деп. в ВИНИТИ. №1933-79 / Уральский политехнический институт им. С. М. Кирова. Свердловск, 1979.
31. Дьёдонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
32. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
33. Chentsov A. G., Morina S. I. Extensions and relaxations. Dordrecht: Springer, 2002. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1527-0
34. Ченцов А. Г. Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 304–321. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-304-321
35. Ченцов А. Г. Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 285–302. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-285-302
36. Ченцов А. Г. Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений формируемого управления // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2017. Т. 49. С. 17–54. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-49-02
37. Кряжимский А. В., Ченцов А. Г. О структуре игрового управления в задачах сближения и уклонения. Деп. в ВИНИТИ. № 1729-80 / Уральский политехнический институт им. С. М. Кирова. Свердловск, 1979.
38. Ченцов А. Г. О релаксации игровой задачи сближения с элементами приоритетности // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 281–297. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-2-281-297
39. Ченцов А. Г. Метод программных итераций и проблема релаксации // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 3. С. 211–226. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-3-211-226
40. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1981.
41. Chentsov A. G., Khachay D. M. Program iterations method and relaxation of a pursuit–evasion differential game // Advanced Control Techniques in Complex Engineering Systems: Theory and Applications. Cham: Springer, 2019. P. 129–161. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21927-7_7

Поступила в редакцию 21.09.2021

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов. О свойствах одного функционала, используемого в программных конструкциях решения дифференциальных игр // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 4. С. 668–696.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 4. Pp. 668–696.

A. G. Chentsov

On properties of one functional used in software constructions for solving differential games

Keywords: differential game, program iteration method, value function.

MSC2020: 49L20, 90C39

DOI: 10.35634/vm210410

Nonlinear differential game (DG) is investigated; relaxations of the game problem of guidance are investigated also. The variant of the program iterations method realized in the space of position functions and delivering in limit the value function of the minimax-maximin DG for special functionals of a trajectory is considered. For every game position, this limit function realizes the least size of the target set neighborhood for which, under proportional weakening of phase constraints, the player interested in a guidance yet guarantees its realization. Properties of above-mentioned functionals and limit function are investigated. In particular, sufficient conditions for realization of values of given function under fulfilment of finite iteration number are obtained.

Funding. The study was funded by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00573)

REFERENCES

1. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. An alternative for the game problem of convergence, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965. https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90158-9
2. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3716-7
3. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965.
4. Krasovskii N. N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems on the encounter of motions), Moscow: Nauka, 1970.
5. Krasovskiy N. N. A differential game of approach and evasion. I, *Engineering Cybernetics*, 1973, vol. 11, no. 2, pp. 189–203.
6. Krasovskiy N. N. A differential game of approach and evasion. II, *Engineering Cybernetics*, 1973, vol. 11, no. 3, pp. 376–394.
7. Chentsov A. G. On the structure of a game problem of convergence, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1975, vol. 16, pp. 1404–1408. https://zbmath.org/?q=an:0351.90094
8. Chentsov A. G. On a game problem of guidance, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1976, vol. 17, pp. 73–77. https://zbmath.org/?q=an:0395.90105
9. Čencov A. G. On a game problem of converging at a given instant of time, *Mathematics of the USSR — Sbornik*, 1976, vol. 28, pp. 353–376. https://doi.org/10.1070/SM1976v028n03ABEH001657
10. Chistiakov S. V. On solving pursuit game problems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, issue 5, pp. 845–852. https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90167-8
11. Ukhobotov V. I. Construction of a stable bridge for a class of linear games, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, issue 2, pp. 350–354. https://doi.org/10.1016/0021-8928(77)90021-1
12. Subbotin A. I., Chentsov A. G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), Moscow: Nauka, 1981.
13. Kryazimskii A. V. On the theory of positional differential games of convergence–evasion, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1978, vol. 19, no. 2, pp. 408–412. https://zbmath.org/?q=an:0399.90118
14. Pontryagin L. S. On the theory of differential games, *Russian Mathematical Surveys*, 1966, vol. 21, no. 4, pp. 193–246. http://doi.org/10.1070/RM1966v021n04ABEH004171
15. Pontryagin L. S. Linear differential games. I, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1967, vol. 8, pp. 769–771. https://zbmath.org/?q=an:0157.16304

16. Pontryagin L. S. Linear differential games. II, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1967, vol. 8, pp. 910–912. https://zbmath.org/?q=an:0157.16401
17. Pshenichnyj B. N. The structure of differential games, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1969, vol. 10, pp. 70–72. https://zbmath.org/?q=an:0227.90062
18. Kurzhanskii A. B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* (Control and observation under uncertainty conditions), Moscow: Nauka, 1977.
19. Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions*, Amsterdam: Gordon and Breach, 1995. https://zbmath.org/?q=an:0884.34015
20. Subbotin A. I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* (Minimax inequalities and Hamilton–Jacobi equations), Moscow: Nauka, 1991.
21. Subbotin A. I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective*, Boston: Birkhäuser, 1995. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0847-1
22. Chentsov A. G. Some questions of differential game theory with phase constraints, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 138–184 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-10
23. Chentsov A. G., Khachay D. M. Relaxation of a dynamic game of guidance and program constructions of control, *Minimax Theory and its Applications*, 2020, vol. 5, no. 2, pp. 275–304. https://zbmath.org/?q=an:1455.91048
24. Chentsov A. G, Khachai D. M. Relaxation of pursuit–evasion differential game and program absorption operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 64–91 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm200106
25. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967. https://zbmath.org/?q=an:0337.02034
26. Chentsov A. G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery. I* (The elements of finitely additive measures theory. I), Yekaterinburg: USTU-UPI, 2008.
27. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York: Academic Press, 1972. https://doi.org/10.1016/C2013-0-11669-8
28. Neveu J. *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Paris: Masson, 1964.
29. Billingsley P. *Convergence of probability measures*, John Wiley and Sons, 1968.
30. Chentsov A. G. *Metod programmnykh iteratsii dlya differentsial'noi igry sblizheniya–ukloneniya* (The method of program iterations for a differential approach–evasion game). Sverdlovsk, 1979. Available from VINITI, no. 1933-79.
31. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press, 1960.
32. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part I: General theory*, New York–London: Interscience, 1958.
33. Chentsov A. G., Morina S. I. *Extensions and relaxations*, Dordrecht: Springer, 2002. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1527-0
34. Chentsov A. G. The program iteration method in a game problem of guidance, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. 43–61. https://doi.org/10.1134/S0081543817050066
35. Chentsov A. G. Stability iterations and an evasion problem with a constraint on the number of switchings, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 285–302 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-285-302
36. Chentsov A. G. Iterations of stability and the evasion problem with a constraint on the number of switchings of the formed control, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2017, vol. 49, pp. 17–54. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-49-02
37. Kryazhimskii A. V., Chentsov A. G. *O strukture igrovogo upravleniya v zadachakh sblizheniya i ukloneniya* (On the structure of game control in the problems of approach and evasion), Sverdlovsk, 1979. Available from VINITI, no. 1729-80.
38. Chentsov A. G. On the relaxation of a game problem of approach with priority elements, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 281–297. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-2-281-297

39. Chentsov A. G. The program iteration method and the relaxation problem, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 211–226. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-3-211-226
40. Engelking R. *General topology*, Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1977.
41. Chentsov A. G., Khachay D. M. Program iterations method and relaxation of a pursuit–evasion differential game, *Advanced Control Techniques in Complex Engineering Systems: Theory and Applications*, Cham: Springer, 2019, pp. 129–161. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21927-7_7

Received 21.09.2021

Aleksandr Georgievich Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Citation: A. G. Chentsov. On properties of one functional used in software constructions for solving differential games, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 4, pp. 668–696.