ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 4. С. 651–667.

УДК 517.954

© *Б. Х. Турметов, В. В. Карачик*

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С МНОЖЕСТВЕННОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ

В пространстве R^l, $l \geqslant 2$, рассматриваются преобразования типа инволюции. Исследуются свойства матриц этих преобразований. Определена структура рассматриваемой матрицы и доказано, что матрица этих преобразований определяется элементами первой строки. Доказана также симметричность исследуемой матрицы. Кроме того, в явном виде найдены собственные векторы и собственные значения рассматриваемой матрицы. Найдена также обратная матрица и доказано, что обратная матрица имеет такую же структуру, как и основная матрица. В качестве приложений рассматриваемых преобразований введены и изучены свойства нелокального аналога оператора Лапласа. Для соответствующего нелокального уравнения Пуассона в единичном шаре исследованы вопросы разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана. Доказана теорема об однозначной разрешимости задачи Дирихле, построены явный вид функции Грина и интегральное представление решения, а также найден порядок гладкости решения задачи в классе Гёльдера. Найдены также необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Неймана, явный вид функции Грина и интегральное представление.

Ключевые слова: множественная инволюция, матрица преобразований, нелокальный оператор Лапласа, уравнение Пуассона, задача Дирихле, задача Неймана.

DOI: 10.35634/vm210409

§ 1. Введение

Дифференциальные уравнения, в которых наряду с искомой функцией $u(t)$ присутствует значение $u(S(t))$, где $S^2(t) = t$, называются уравнениями со сдвигами Карлемана [1] или уравнениями с инволюцией. Теория уравнений с инволютивно преобразованными аргументами и их приложения подробно описаны в монографиях [2–4]. К настоящему моменту для дифференциальных уравнений с различными видами инволюции достаточно хорошо изучены корректность краевых и начально-краевых задач, качественные свойства решений и спектральные вопросы [5–17]. Помимо этого для классических уравнений можно исследовать нелокальные краевые задачи типа Бицадзе–Самарского, в которых значения искомой функции $u(x)$ на границе области связаны со значениями $u(Sx)$ [18–20].

Перейдем к постановке задач, исследуемых в настоящей работе. Пусть Ω — единичный шар в R^l, $l \geqslant 2$, а $\partial\Omega$ — единичная сфера и $S_1, \ldots, S_n$ — набор действительных симметричных коммутативных матриц ($S_iS_j = S_jS_i$) таких, что $S_i^2 = E$. Отметим, что поскольку $|x|^2 = ({S_i}^2x, x) = (S_ix, S_ix) = |S_ix|^2$, то $x \in \Omega \Rightarrow S_ix \in \Omega$ и $x \in \partial\Omega \Rightarrow S_ix \in \partial\Omega$. Например, матрица S_i может быть матрицей следующего линейного отображения

$$S_ix = (x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_l).$$

Пусть $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^n-1}$ — некоторый набор действительных чисел. Если ввести запись индекса суммирования i в двоичной системе счисления $(i_n \ldots i_1)_2 \equiv i$, где $i_k = 0, 1$ при $k = 1, \ldots, n$, то будем записывать эти коэффициенты также в виде $a_{(0\ldots00)_2}$, $a_{(0\ldots01)_2}$, $a_{(0\ldots11)_2}$, $\ldots$, $a_{(1\ldots11)_2}$.

Введем дифференциальный оператор

$$L_n u \equiv \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \Delta u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x).$$

Рассмотрим следующие задачи.

Задача Дирихле. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(x) = g_0(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.2}$$

Задача Неймана. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и граничному условию

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = g_1(x), x \in \partial\Omega, \tag{1.3}$$

где ν — вектор внешней нормали к единичной сфере $\partial\Omega$.

§ 2. Некоторые вспомогательные утверждения

В этом параграфе приведем некоторые вспомогательные утверждения, которыми мы в дальнейшем будем пользоваться. Введем функцию

$$v(x) = \sum_{i \equiv (i_n \dots i_1)_2 = 0}^{(1\dots1)_2} a_i u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x), \tag{2.1}$$

где суммирование происходит по возрастанию индекса i. Из этого равенства нетрудно заключить, что функции вида $v(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x)$ при $j = 0, \dots, 2^n - 1$ могут быть линейно выражены через функции $u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x)$. Если рассмотреть следующие вектора

$$U(x) = \big(u(x), \dots, u(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x), \dots, u(S_n^1 \dots S_1^1 x)\big)^T,$$
$$V(x) = \big(v(x), \dots, v(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} x), \dots, v(S_n^1 \dots S_1^1 x)\big)^T$$

порядка 2^n, то эта зависимость может быть выражена в матричном виде

$$V(x) = A_n U(x), \tag{2.2}$$

где $A_n = (a_{i,j})_{i,j=0,\dots,2^n-1}$ — матрица порядка $2^n \times 2^n$.

Теорема 1. *Матрица A_n из равенства (2.2) имеет вид*

$$A_n = (a_{i,j})_{i,j=0,\dots,2^n-1} = (a_{i\oplus j})_{i,j=0,\dots,2^n-1}, \tag{2.3}$$

где суммирование в нижнем индексе коэффициентов матрицы A_n понимается в следующем смысле: $i \oplus j \equiv (i)_2 \oplus (j)_2 = ((i_n + j_n \bmod 2) \dots (i_1 + j_1 \bmod 2))_2$, $(i)_2 = (i_n \dots i_1)_2$ — запись индекса i в двоичной системе счисления. Линейная комбинация матриц вида (2.3) есть матрица вида (2.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n = 1$, тогда имеем $A_1 = \begin{pmatrix} a_{0\oplus 0} & a_{0\oplus 1} \\ a_{1\oplus 0} & a_{1\oplus 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}$, а если $n = 2$, то получаем

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{(00)_2\oplus(00)_2} & a_{(00)_2\oplus(01)_2} & a_{(00)_2\oplus(10)_2} & a_{(00)_2\oplus(11)_2} \\ a_{(01)_2\oplus(00)_2} & a_{(01)_2\oplus(01)_2} & a_{(01)_2\oplus(10)_2} & a_{(01)_2\oplus(11)_2} \\ a_{(10)_2\oplus(00)_2} & a_{(10)_2\oplus(01)_2} & a_{(10)_2\oplus(10)_2} & a_{(10)_2\oplus(11)_2} \\ a_{(11)_2\oplus(00)_2} & a_{(11)_2\oplus(01)_2} & a_{(11)_2\oplus(10)_2} & a_{(11)_2\oplus(11)_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию $v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x)$, у которой коэффициенты при $u(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1})$ составляют $i \equiv (i_n \dots i_1)_2$-ю строку матрицы A_n:

$$v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = \sum_{j\equiv(j_n\dots j_1)_2=0}^{2^n-1=(1\dots1)_2} a_{(j_n\dots j_1)_2} u(S_n^{j_n} \dots S_1^{j_1} S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) =$$
$$= \sum_{j\equiv(j_n\dots j_1)_2=0}^{(1\dots1)_2} a_{(j_n\dots j_1)_2} u(S_n^{j_n+i_n \bmod 2} \dots S_1^{j_1+i_1 \bmod 2} x). \quad (2.4)$$

Здесь были учтены следующие свойства матриц $S_1, \dots, S_n$: $S_j^2 x = x$ и $S_j S_i x = S_i S_j x$. Сделаем замену индекса $i \oplus j = l$. Тогда $l \oplus i = i \oplus j \oplus i = j$, и соответствие $j \sim l$ взаимно однозначно. Замена индекса $j \to l$ только изменит порядок суммирования в сумме (2.4). После замены индекса будем иметь

$$v(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x) = \sum_{l=0}^{(1\dots1)_2} a_{(i_n+l_n \bmod 2 \dots i_1+l_1 \bmod 2)_2} u(S_n^{l_n} \dots S_1^{l_1} x),$$

откуда получаем $a_{i,l} = a_{(i_n+l_n \bmod 2\dots i_1+l_1 \bmod 2)_2} = a_{i\oplus l}$. Ясно, что если α, β — const, то $\alpha(a_{i\oplus j})_{i,j=0,\dots,2^n-1} + \beta(b_{i\oplus j})_{i,j=0,\dots,2^n-1} = (\alpha a_{i\oplus j} + \beta b_{i\oplus j})_{i,j=0,\dots,2^n-1}$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Матрица A_n однозначно определяется элементами первой строки, т. е. $(a_0, a_1, \dots, a_{2^n-1})$.*

Следствие 2. *Матрица A_n обладает симметрией*

$$(a_{i,j})_{i,j=0,\dots,2^n-1} = (a_{j,i})_{i,j=0,\dots,2^n-1}$$

и может быть записана в виде

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1}(a_0, \dots, a_{2^{n-1}-1}) & A_{n-1}(a_{2^{n-1}}, \dots, a_{2^n-1}) \\ A_{n-1}(a_{2^{n-1}}, \dots, a_{2^n-1}) & A_{n-1}(a_0, \dots, a_{2^{n-1}-1}) \end{pmatrix},$$

или более общо в виде матрицы A_{n-m}, состоящей из матриц A_m:

$$A_n = A_{n-m}\left(A_m^{(0\dots0)_2}, \dots, A_m^{(k_n\dots k_{m+1})_2}, \dots, A_m^{(1\dots1)_2}\right),$$

где $A_m^{(k_n\dots k_{m+1})_2}(a_{(k_n\dots k_{m+1}0\dots0)_2}, \dots, a_{(k_n\dots k_{m+1}1\dots1)_2})$ — матрица вида (2.3) порядка 2^m.

Легко доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Умножение матриц вида (2.3) коммутативно. Произведение матриц вида (2.3) есть опять матрица вида (2.3).*

Теорема 3. *Собственные вектора матрицы $A_n(a_0,\dots,a_{2^n-1})$ можно выбрать в виде*

$$\mathbf{a}_n^k=\left(\mathbf{a}_{n-1}^k,\pm\mathbf{a}_{n-1}^k\right)^T,\quad k=0,\dots,2^{n-1}-1,$$

где $\mathbf{a}_{n-1}^k$ — собственный вектор матрицы $A_{n-1}(a_0,\dots,a_{2^{n-1}-1})$, $k=0,\dots,2^{n-1}-1$, причем при $n=1$ имеем $\mathbf{a}_1^0=(1,1)^T$, $\mathbf{a}_1^1=(1,-1)^T$. Собственные вектора матрицы A_n ортогональны. Собственные числа матрицы A_n имеют вид

$$\mu_n^{k,\pm}=\mu_{n-1}^k\pm\hat{\mu}_{n-1}^k,\quad k=0,\dots,2^{n-1}-1,$$

где μ_{n-1}^k и $\hat{\mu}_{n-1}^k$ являются собственными числами матриц $A_{n-1}(a_0,\dots,a_{2^{n-1}-1})$ и $\hat{A}_{n-1}=$ $=A_{n-1}(a_{2^{n-1}},\dots,a_{2^n-1})$, отвечающих собственному вектору $\mathbf{a}_{n-1}^k$ соответственно, причем $\mu_1^0=a_0+a_1$, $\mu_1^1=a_0-a_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по n. Предположим, что собственные вектора матрицы $A_n(a_0,\dots,a_{2^n-1})$ не зависят от чисел $a_0,\dots,a_{2^n-1}$. При $n=1$ очевидно, что собственные вектора матрицы $A_1(a_0,a_1)$ можно выбрать в виде $\mathbf{a}_1^+=(1,1)^T$, $\mathbf{a}_1^-=(1,-1)^T$, а собственные числа, им соответствующие, имеют вид $\mu_1^+=a_0+a_1$, $\mu_1^-=a_0-a_1$. Для матрицы

$$A_2=\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2&a_3\\a_1&a_0&a_3&a_2\\a_2&a_3&a_0&a_1\\a_3&a_2&a_1&a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1(a_0,a_1)&A_1(a_2,a_3)\\A_1(a_2,a_3)&A_1(a_0,a_1)\end{pmatrix}$$

собственные вектора имеют вид

$$\mathbf{a}_2^{(+,+)}=(\mathbf{a}_1^+,\mathbf{a}_1^+)^T,\quad \mathbf{a}_2^{(-,+)}=(\mathbf{a}_1^-,\mathbf{a}_1^-)^T,\quad \mathbf{a}_2^{(+,-)}=(\mathbf{a}_1^+,-\mathbf{a}_1^+)^T,\quad \mathbf{a}_2^{(-,-)_2}=(\mathbf{a}_1^-,-\mathbf{a}_1^-)^T,$$

или кратко $\mathbf{a}_2^{(\pm_1,\pm_2)}=(\mathbf{a}_1^{\pm_1},\pm_2\mathbf{a}_1^{\pm_1})^T$. Знаки $+$ и $-$ в выражениях $\pm_1$ и $\pm_2$ принимаются независимо друг от друга. Действительно, верны равенства

$$A_2\mathbf{a}_2^{(\pm_1,\pm_2)}=\begin{pmatrix}A_1(a_0,a_1)&A_1(a_2,a_3)\\A_1(a_2,a_3)&A_1(a_0,a_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1^{\pm_1}\\\pm_2\mathbf{a}_1^{\pm_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1(a_0,a_1)\mathbf{a}_1^{\pm_1}\pm_2A_1(a_2,a_3)\mathbf{a}_1^{\pm_1}\\A_1(a_2,a_3)\mathbf{a}_1^{\pm_1}\pm_2A_1(a_0,a_1)\mathbf{a}_1^{\pm_1}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}(a_0\pm_1a_1)\mathbf{a}_1^{\pm_1}\pm_2(a_2\pm_1a_3)\mathbf{a}_1^{\pm_1}\\(a_2\pm_1a_3)\mathbf{a}_1^{\pm_1}\pm_2(a_0\pm_1a_1)\mathbf{a}_1^{\pm_1}\end{pmatrix}=\left(a_0\pm_1a_1\pm_2(a_2\pm_1a_3)\right)\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1^{\pm_1}\\\pm_2\mathbf{a}_1^{\pm_1}\end{pmatrix}=$$
$$=\left(a_0\pm_1a_1\pm_2(a_2\pm_1a_3)\right)\mathbf{a}_2^{(\pm_1,\pm_2)},$$

а значит, $\left(\mathbf{a}_1^{\pm_1},\pm_2\mathbf{a}_1^{\pm_1}\right)^T$ — собственные вектора при четырех различных комбинациях знаков $\pm_1$ и $\pm_2$. Видно, что собственные вектора $\mathbf{a}_2^{(\pm_1,\pm_2)}=(1,\pm_11,\pm_21,\pm_2\pm_11)^T$ матрицы $A_2(a_0,a_1,a_2,a_3)$ не зависят от чисел $\{a_k\}$. Далее, предполагая, что собственные вектора $\mathbf{a}_{n-1}^0,\dots,\mathbf{a}_{n-1}^{2^{n-1}-1}$ матрицы $A_{n-1}(a_0,\dots,a_{2^{n-1}-1})$ не зависят от ее коэффициентов, докажем, что это свойство верно и для матрицы $A_n(a_0,\dots,a_{2^n-1})$.

Пусть $\mu_{n-1}^0,\dots,\mu_{n-1}^{2^{n-1}-1}$ — собственные числа, соответствующие указанным выше собственным векторам матрицы $A_{n-1}(a_0,\dots,a_{2^{n-1}-1})$, не зависящим от ее коэффициентов, тогда вектора вида $\mathbf{a}_n^k=\left(\mathbf{a}_{n-1}^k,\pm\mathbf{a}_{n-1}^k\right)^T$, где $k=0,\dots,2^{n-1}-1$, являются собственными векторами матрицы $A_n(a_0,\dots,a_{2^n-1})$. Действительно, имеем

$$A_n\mathbf{a}_n^k=A_n\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{n-1}^k\\\pm\mathbf{a}_{n-1}^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{n-1}(a_0,\dots,a_{2^{n-1}-1})&A_{n-1}(a_{2^{n-1}},\dots,a_{2^n-1})\\A_{n-1}(a_{2^{n-1}},\dots,a_{2^n-1})&A_{n-1}(a_0,\dots,a_{2^{n-1}-1})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{n-1}^k\\\pm\mathbf{a}_{n-1}^k\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}A_{n-1}(a_0,\dots,a_{2^{n-1}-1})\mathbf{a}_{n-1}^k\pm A_{n-1}(a_{2^{n-1}},\dots,a_{2^n-1})\mathbf{a}_{n-1}^k\\A_{n-1}(a_{2^{n-1}},\dots,a_{2^n-1})\mathbf{a}_{n-1}^k\pm A_{n-1}(a_0,\dots,a_{2^{n-1}-1})\mathbf{a}_{n-1}^k\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\mu_{n-1}^k\mathbf{a}_{n-1}^k\pm\hat{\mu}_{n-1}^k\mathbf{a}_{n-1}^k\\\hat{\mu}_{n-1}^k\mathbf{a}_{n-1}^k\pm\mu_{n-1}^k\mathbf{a}_{n-1}^k\end{pmatrix}=\left(\mu_{n-1}^k\pm\hat{\mu}_{n-1}^k\right)\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{n-1}^k\\\pm\mathbf{a}_{n-1}^k\end{pmatrix}=\left(\mu_{n-1}^k\pm\hat{\mu}_{n-1}^k\right)\mathbf{a}_n^k,$$

где $\hat{\mu}_{n-1}^k$ — собственное число матрицы $A_{n-1}(a_{2^{n-1}}, \ldots, a_{2^n-1})$, соответствующее собственному вектору $\mathbf{a}_{n-1}^k$. Очевидно, что векторов $\mathbf{a}_n^k = \left(\mathbf{a}_{n-1}^k, \pm\mathbf{a}_{n-1}^k\right)^T$ будет 2^n штук. Поэтому собственные числа матрицы $A_n(a_0, \ldots, a_{2^n-1})$ имеют вид $\mu_n^{k,\pm} = \mu_{n-1}^k \pm \hat{\mu}_{n-1}^k$. Очевидно, что собственные вектора $\mathbf{a}_1^+ = (1,1)^T$, $\mathbf{a}_1^- = (1,-1)^T$ матрицы $A_1(a_0, a_1)$ ортогональны. Если собственные вектора $\mathbf{a}_{n-1}^k$, $0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}-1$, матрицы $A_{n-1}(a_{2^{n-1}}, \ldots, a_{2^n-1})$ выбрать ортогональными, то собственные вектора $\mathbf{a}_n^k = \left(\mathbf{a}_{n-1}^k, \pm\mathbf{a}_{n-1}^k\right)^T$ матрицы $A_n(a_0, \ldots, a_{2^n-1})$ тоже ортогональны:

$$\mathbf{a}_n^{k_1}\mathbf{a}_n^{k_2} = \left(\mathbf{a}_{n-1}^{k_1}, \pm\mathbf{a}_{n-1}^{k_1}\right)^T\left(\mathbf{a}_{n-1}^{k_2}, \pm\mathbf{a}_{n-1}^{k_2}\right)^T = \mathbf{a}_{n-1}^{k_1}\mathbf{a}_{n-1}^{k_2} + \mathbf{a}_{n-1}^{k_1}\mathbf{a}_{n-1}^{k_2} = 0, \qquad k_1 \neq k_2,$$

и $\left(\mathbf{a}_{n-1}^k, \mathbf{a}_{n-1}^k\right)^T\left(\mathbf{a}_{n-1}^k, -\mathbf{a}_{n-1}^k\right)^T = 0$. Теорема доказана. □

Следствие 3. *Пусть $k = (k_n, \ldots, k_1)_2$, $k_i = 0, 1$, тогда собственный вектор матрицы A_n, имеющий номер k, можно записать в виде*

$$\mathbf{a}_n^k = (1, (-1)^{k_1}, (-1)^{k_2}, (-1)^{k_2+k_1}, (-1)^{k_3}, (-1)^{k_3+k_1}, (-1)^{k_3+k_2}, \\ (-1)^{k_3+k_2+k_1}, (-1)^{k_4}, \ldots, (-1)^{k_n+\ldots+k_1})^T = \left((-1)^{k\otimes m}\right)_{=0,\ldots,2^n-1},$$

где $k\otimes i \equiv (k_n \ldots k_1)_2 \otimes (i_n \ldots i_1)_2 = k_n i_n + \ldots + k_1 i_1$ — «скалярное» произведение чисел $(k)_2$ и $(i)_2$. Собственное число, соответствующее собственному вектору $\mathbf{a}_n^{(k_n\ldots k_1)_2}$, записывается в похожем виде

$$\mu_n^k \equiv \mu_n^{(k_n\ldots k_1)_2} = \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k\otimes i} a_i = \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k_n i_n+\ldots+k_1 i_1} a_{(i_n\ldots i_1)_2}.$$

Обозначим операцию взятия присоединенной матрицы к матрице $A_n(a_0, \ldots, a_{2^n-1})$, для удобства изложения, в виде $\overline{A_n}(a_0, \ldots, a_{2^n-1})$. Тогда по определению присоединенной матрицы

$$A_n(a_0, \ldots, a_{2^n-1})\overline{A_n}(a_0, \ldots, a_{2^n-1}) = (\det A_n)\, E_{2^n}.$$

Теорема 4. *Определитель матрицы $A_n\left(a_0, \ldots, a_{2^n-1}\right)$ имеет вид*

$$\det A_n\left(a_0, \ldots, a_{2^n-1}\right) = \prod_{k=0}^{2^n-1}\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k_n i_n+\ldots+k_1 i_1} a_{(i_n\ldots i_1)_2}\right). \tag{2.5}$$

Для любого $m = 0, \ldots, n$ верно равенство

$$\overline{A_n}\left(a_0, \ldots, a_{2^n-1}\right) = \overline{(\det A_{n-m})}\left(A_m^{(0\ldots0)_2}, \ldots, A_m^{(k_n\ldots k_{m+1})_2}, \ldots, A_m^{(1\ldots1)_2}\right) \times \\ \times \overline{A_{n-m}}\left(A_m^{(0\ldots0)_2}, \ldots, A_m^{(k_n\ldots k_{m+1})_2}, \ldots, A_m^{(1\ldots1)_2}\right), \tag{2.6}$$

где $\det A_{n-m}$ вычисляется для блочной матрицы A_{n-m} сначала с числовыми коэффициентами, а затем вместо них подставляются соответствующие матрицы $A_m^{(k_n\ldots k_{m+1})_2}$, и для результирующей матрицы берется присоединенная матрица. Кроме того, присоединенная матрица $\overline{A_{n-m}}$ строится тоже для числовых коэффициентов, а затем вместо них подставляются соответствующие матрицы $A_m^{(k_n\ldots k_{m+1})_2}$.

Следствие 4. *Матрица $\overline{A_n}\left(a_0, \ldots, a_{2^n-1}\right)$ является матрицей вида (2.3). Если матрица $A_n^{-1}\left(a_0, \ldots, a_{2^n-1}\right)$ существует, то она тоже имеет вид (2.3).*

Следствие 5. *Матрица* $\overline{A_n}\,(a_0,\ldots,a_{2^n-1})$ *может быть вычислена по рекуррентной формуле*

$$\overline{A_n}\,(a_0,\ldots,a_{2^n-1}) = \overline{(\det A_{n-1})}\left(A_1^{(0\ldots0)_2},\ldots,A_1^{(k_n\ldots k_2)_2},\ldots,A_1^{(1\ldots1)_2}\right)\times$$
$$\times\,\overline{A_{n-1}}\left(A_1^{(0\ldots0)_2},\ldots,A_1^{(k_n\ldots k_2)_2},\ldots,A_1^{(1\ldots1)_2}\right) =$$
$$= \prod_{(k_n\ldots k_2)_2=0}^{2^{n-1}-1}\left(\sum_{(i_n\ldots i_2)_2=0}^{2^{n-1}-1}(-1)^{k_ni_n+\ldots+k_2i_2}\overline{A_1^{(i_n\ldots i_2)_2}}\right)\times$$
$$\times\,\overline{A_{n-1}}\,(b_0,\ldots,b_{2^{n-1}-1})\big|_{b_{(k_n\ldots k_2)_2}=A_1^{(k_n\ldots k_2)_2}},$$

где обозначено $A_1^{(k_n\ldots k_2)_2} = A_1(a_{(k_n\ldots k_2 0)_2}, a_{(k_n\ldots k_2 1)_2})$.

Это равенство следует из (2.6) при $m = n-1$ с учетом (2.5) и того, что $\overline{A_1+B_1} = \overline{A_1}+\overline{B_1}$.

§ 3. Единственность решения исследуемых задач

Лемма 1 (см. [13]). *Пусть S — ортогональная матрица, тогда оператор $I_Su(x) = u(Sx)$ и оператор Лапласа Δ коммутируют: $\Delta I_Su(x) = I_S\Delta u(x)$ на функциях $u\in C^2(\Omega)$. Тогда оператор $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} x_iu_{x_i}(x)$ и оператор I_S также коммутируют $\Lambda I_Su(x) = I_S\Lambda u(x)$ на функциях $u\in C^1(\bar\Omega)$, и верно равенство $\nabla I_S = I_SS^T\nabla$.*

Следствие 6. *Если функция $u(x)$ — гармоническая в Ω, то функция $u(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x) = I_{S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}}u(x)$, а значит, функция $v(x)$ из* (2.1)*, тоже гармоническая в Ω.*

Верно и обратное утверждение.

Лемма 2. *Пусть функция $u\in C^2(\Omega)$ удовлетворяет однородному уравнению* (1.1)*, и*

$$\sum_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{k\otimes i}a_i \neq 0 \text{ при } k = 0,\ldots,2^n-1,$$

тогда функция $u(x)$ является гармонической в области Ω.

Теорема 5. *Пусть коэффициенты оператора L_n при $k = 0,\ldots,2^n-1$ удовлетворяют условию $\sum_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{k\otimes i}a_i\neq 0$. Тогда, если решение задач Дирихле и Неймана существуют, то:*

1) *решение задачи Дирихле* (1.1), (1.2) *единственно;*

2) *решение задачи Неймана* (1.1), (1.3) *единственно с точностью до постоянного слагаемого.*

Доказательство. 1) Докажем, что однородная задача (1.1), (1.2) имеет только нулевое решение, а значит, решение неоднородной задачи (1.1), (1.2), если оно существует, то оно единственно. Пусть $u(x)$ — решение однородной задачи (1.1), (1.2). По лемме 2 функция $u(x)$ является гармонической в области Ω и удовлетворяет однородному условию (1.2). Следовательно, функция $u(x)$ — решение следующей задачи Дирихле:

$$\Delta u(x) = 0,\quad x\in\Omega;\qquad u(x)|_{\partial\Omega} = 0.$$

В силу единственности решения этой задачи Дирихле имеем $u(x) \equiv 0$ в Ω.

2) Если $u(x)$ — решение однородной задачи (1.1), (1.3), то по лемме 2 функция $u(x)$ удовлетворяет условиям следующей задачи Неймана:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega; \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = 0.$$

Решением этой задачи является функция $u(x) \equiv C$. Теорема доказана. □

§ 4. Существование решения задачи Дирихле

В этом параграфе исследуем существование решения задачи Дирихле (1.1), (1.2). Пусть $P(x,y) = \frac{1}{\omega_l}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^l}$ — ядро Пуассона, ω_l — площадь единичной сферы, $G(x,y)$ — функция Грина задачи Дирихле, которая представляется в виде (см., например, [21])

$$G(x,y) = \frac{1}{\omega_l}\left[E(x,y) - E\left(x|y|, \frac{y}{|y|}\right)\right], \qquad E(x,y) = \begin{cases} -\ln|x-y|, & l = 2, \\ \frac{1}{l-2}|x-y|^{2-l}, & l \geqslant 3. \end{cases}$$

Теорема 6. *Пусть коэффициенты оператора L_n при $k = 0,\dots,2^n-1$ удовлетворяют условию $\sum\limits_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{k\otimes i}a_i \neq 0$, и $f \in C^\lambda(\bar\Omega)$, $g \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$, $0 < \lambda < 1$. Тогда решение задачи (1.1), (1.2) существует, единственно, принадлежит классу $C^{\lambda+2}\left(\bar\Omega\right)$ и представляется в виде*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G_S(x,y) f(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega} P(x,y) g(y)\,ds_y, \tag{4.1}$$

где

$$G_S(x,y) = \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i G(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x, y), \tag{4.2}$$

а коэффициенты b_j, $j = 0,\dots,2^n-1$, являются элементами первой строки матрицы, обратной к матрице $A_n = A_n(a_0,\dots,a_{2^n-1})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(x)$ — решение задачи Дирихле (1.1), (1.2). Рассмотрим функцию

$$v(x) = \sum_{i\equiv(i_n\dots i_1)_2=0}^{(1\dots1)_2} a_i u(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x).$$

Тогда для функции $v(x)$, в силу леммы 1, получаем следующую краевую задачу

$$\Delta v(x) = f(x), \quad x \in \Omega; \qquad v(x)|_{\partial\Omega} = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_k g(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x) \equiv \tilde g(x). \tag{4.3}$$

Если $g(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$, то очевидно, что $\tilde g(x) = \sum\limits_{i=0}^{2^n-1} a_k g(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$. Известно (см., например, [21]), что для заданных функций $f(x)$ и $\tilde g(x) = \sum\limits_{i=0}^{2^n-1} a_k g_j(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x)$ решение задачи Дирихле (4.3) существует и единственно. Как и в случае равенства (2.1) между функциями $v(x)$ и $u(x)$ получаем алгебраическое соотношение вида $V(x) = A_n U(x)$. Если $\sum\limits_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{k\otimes i}a_i \neq 0$, то неизвестная функция $u(x)$ однозначно определяется через функцию $v(x)$. Пусть, наоборот, функция $v(x)$ является решением задачи (4.3). Покажем, что функция $u(x)$, определяемая по формуле

$$u(x) = \sum_{i\equiv(i_n\ldots i_1)_2=0}^{(1\ldots1)_2} b_i v(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x),$$

удовлетворяет всем условиям задачи (1.1), (1.2). Действительно, если $f(x) \in C^\lambda(\bar\Omega)$, $g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$, то будем иметь $v(x) \in C^{2+\lambda}(\bar\Omega)$. Отсюда получим $u(x) \in C^{2+\lambda}(\bar\Omega)$. Поэтому, согласно лемме 1, имеем в Ω равенство

$$\Delta u(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j \Delta v(S_n^{j_n}\ldots S_1^{j_1}x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j I_{S_n^{j_n}\ldots S_1^{j_1}}\Delta v(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j f(S_n^{j_n}\ldots S_1^{j_1}x).$$

Обозначим $w(x) = \sum\limits_{j=0}^{2^n-1} b_j f(S_n^{j_n}\ldots S_1^{j_1}x)$ и рассмотрим следующую функцию $\hat u(x) = \sum\limits_{i=0}^{2^n-1} a_i w(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x)$. Тогда для векторов

$$W = \big(w(x),\ldots,w(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x),\ldots,w(S_n^1\ldots S_1^1x)\big)^T,$$
$$F = \big(f(x),\ldots,f(S_n^{j_n}\ldots S_1^{j_1}x),\ldots,f(S_n^1\ldots S_1^1x)\big)^T$$

будем иметь равенства $W(x) = B_nF(x)$, $\hat U(x) = A_nW(x)$, а значит, $A_nW(x) = A_nB_nF(x) = F(x)$, и поэтому

$$\sum_{i\equiv(i_n\ldots i_1)_2=0}^{(1\ldots1)_2} a_i\Delta u(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x) \equiv \sum_{i\equiv(i_n\ldots i_1)_2=0}^{(1\ldots1)_2} a_i w(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x) =$$
$$= (A_nW(x))_{j=0} = (A_nB_nF(x))_{j=0} = F(x)_{j=0} = f(x).$$

Таким образом функция, $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Проверим граничное условие (1.2) рассматриваемой задачи. Учитывая, что

$$\left(\tilde G(x)\right)_{j=0} = \tilde g(x) = \sum_{i\equiv(i_n\ldots i_1)_2=0}^{(1\ldots1)_2} a_i g(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x) = (A_nG(x))_{j=0},$$

при $x\in\partial\Omega$ получим

$$u(x) = \sum_{i\equiv(i_n\ldots i_1)_2=0}^{(1\ldots1)_2} b_i v(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x) = (B_nV(x))_{j=0} = \left(B_n\tilde G(x)\right)_{j=0} = (B_nA_nG(x))_{j=0} = g(x).$$

Значит, граничное условие (1.2) для функции $u(x)$ выполнено. Далее, для решения задачи Дирихле (4.3) имеет место представление [21]

$$v(x) = \int\limits_\Omega G(x,y)f(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)\tilde g(y)\,ds_y.$$

Тогда

$$u(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i v(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x)=\int\limits_{\Omega}\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i G\left(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x,y\right) f(y)\,dy+$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^n-1} b_i a_k P\left(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x,y\right) g(S_n^{k_n}\dots S_1^{k_1}y)\,ds_y. \qquad (4.4)$$

Заметим, что если $y=S_i z$, то по лемме 4.1 из [19] $\int_{\partial\Omega} g(S_i\xi)\,ds_\xi=\int_{\partial\Omega} g(\xi)\,ds_\xi$. Кроме того, $|x-S_i z|=|S_i(S_i x-z)|=|S_i x-z|$, и значит, $P(S_i x,z)=P(x,S_i z)$. С помощью этого равенства последнее слагаемое формулы (4.4) можно преобразовать к виду

$$\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^n-1} b_i a_j P\left(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x,y\right) g(S_n^{j_n}\dots S_1^{j_1}y)\,ds_y=$$
$$=\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^n-1} a_j b_i P\left(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x,S_n^{j_n}\dots S_1^{j_1}z\right) g(z)\,ds_z=\int\limits_{\partial\Omega} P(x,z)g(z)\,ds_z,$$

где в силу свойств коэффициентов b_j было учтено, что

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} a_{0\oplus j}b_{j\oplus k}=\begin{cases}0, & k\neq 0,\\ 1, & k=0.\end{cases}$$

Если теперь воспользоваться обозначением (4.2), то для решения задачи Дирихле (1.1), (1.2) получаем формулу (4.1). Теорема доказана. □

§ 5. Существование решения задачи Неймана

В этом пункте исследуем необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Неймана (1.1), (1.3).

Теорема 7. *Пусть выполняются условия* $\sum\limits_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{k\otimes i}a_i\neq 0$, $k=0,\dots,2^n-1$, $f\in C^\lambda(\bar\Omega)$, $g\in C^{\lambda+1}(\partial\Omega)$, $0<\lambda<1$. *Тогда для разрешимости задачи* (1.1), (1.3) *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_{\Omega} f(y)\,dy+\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\right)\int\limits_{\partial\Omega} g(y)\,ds_y=0. \qquad (5.1)$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(x)=\int\limits_{\Omega} G_{N,S}(x,y)f(y)\,dy+\int\limits_{\partial\Omega} G_{N,S,n}(x,y)g(y)\,ds_y, \qquad (5.2)$$

где коэффициенты b_j, $j=0,\dots,2^n-1$, *являются элементами первой строки матрицы, обратной к матрице* $A_n=A_n(a_0,\dots,a_{2^n-1})$, *и*

$$G_{N,S}(x,y)=\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i G_N(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x,y);$$
$$G_{N,S,n}(x,y)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^n-1} a_k b_i G_N(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x,S_n^{k_n}\dots S_1^{k_1}y). \qquad (5.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(x)$ является решением задачи (1.1), (1.3). Для удобства изложения будем считать, что функция $u(x)$ принадлежит классу $C^3(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$ (для этого достаточно потребовать, чтобы $f(x)\in C^\lambda(\bar\Omega)$, $g(x)\in C^{\lambda+1}(\partial\Omega)$, $\lambda>1$). Применим оператор Λ к функции $u(x)$ и обозначим $w(x)=\Lambda u(x)$. Тогда, учитывая равенство $\Delta\Lambda u(x)=(\Lambda+2)\,\Delta u(x)$, где $x\in\Omega$, и коммутируемость операторов Λ и I_S (лемма 1), будем иметь

$$L_n w\equiv\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\Delta I_{S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}}\Lambda u(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\Delta\Lambda I_{S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}}u(x)=$$
$$=(\Lambda+2)\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\Delta u(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x)=(\Lambda+2)\,Lu(x)=(\Lambda+2)\,f(x).$$

Из граничного условия (1.3) следует, что

$$w(x)|_{\partial\Omega}=\Lambda u(x)|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=g(x).$$

Таким образом, если $u(x)$ — решение задачи (1.1), (1.3), то для функции $w(x)=\Lambda u(x)$ мы получаем краевую задачу Дирихле типа (1.1), (1.2):

$$Lw(x)=(\Lambda+2)\,f(x),\quad x\in\Omega;\qquad w(x)|_{\partial\Omega}=g(x).\tag{5.4}$$

Кроме того, из равенства $w(x)=\Lambda u(x)$ следует необходимость выполнения условия $w(0)=0$.

Далее, если функции $F(x)=(\Lambda+2)\,f(x)$, $g(x)$ достаточно гладкие, то по утверждению теоремы 6 решение задачи (5.4) существует, единственно и представляется в виде

$$w(x)=\int\limits_\Omega G_S(x,y)F(y)\,dy+\int\limits_{\partial\Omega}P(x,y)g(y)\,ds_y,\tag{5.5}$$

где функция $G_S(x,y)$ определяется из (4.2), а $P(x,y)$ — ядро Пуассона. Найдем условия, при которых выполняется равенство $w(0)=0$. Из представления (5.5) получаем

$$w(0)=\int\limits_\Omega G_S(0,y)F(y)\,dy+\int\limits_{\partial\Omega}P(0,y)g(y)\,ds_y.$$

Далее, при $n>2$ имеем

$$G_S(0,y)=\sum_{i=0}^{2^n-1}b_iG(0,y)=G(0,y)\sum_{i=0}^{2^n-1}b_i=C_1\left[|y|^{2-l}-1\right],$$
$$P(0,y)=\frac{1}{\omega_l},\qquad C_1=\frac{1}{(l-2)\omega_l}\sum_{i=0}^{2^n-1}b_i.$$

В [13] доказано следующее равенство

$$\int\limits_\Omega\left[|y|^{2-n}-1\right](\Lambda+2)\,f(y)\,dy=(n-2)\int\limits_\Omega f(y)\,dy.$$

Тогда

$$w(0) = \int\limits_{\Omega} G_S(0,y)F(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega} P(0,y)g(y)\,ds_y = \frac{1}{\omega_n}\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i\right)\int\limits_{\Omega} f(y)\,dy + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega} g(y)\,ds_y.$$

Следовательно, для выполнения условия $w(0)=0$ необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i\right)\int\limits_{\Omega} f(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega} g(y)\,ds_y = 0.$$

Так как

$$\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i\right)\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\right) = 1 \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\right) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i\right)^{-1},$$

то отсюда запишем

$$\int\limits_{\Omega} f(y)\,dy + \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\right)\int\limits_{\partial\Omega} g(y)\,ds_y = 0.$$

Таким образом, необходимость выполнения условия (5.1) для существования решения задачи (1.1), (1.3) доказана. Покажем, что выполнение условия (5.1) является и достаточным для существования решения задачи (1.1), (1.3). Для этого рассмотрим в области Ω следующую задачу Неймана относительно функции $v(x)$:

$$\Delta v(x) = f(x), \quad x\in\Omega; \qquad \left.\frac{\partial v(x)}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i g(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x) \equiv \tilde g(x). \tag{5.6}$$

Известно, что условие разрешимости этой задачи имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} \tilde g(x)\,ds_x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{\Omega} f(x)\,dx + \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \int\limits_{\partial\Omega} g(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x)\,ds_x = 0. \tag{5.7}$$

Так как $\int\limits_{\partial\Omega} g(S_i x)\,ds_x = \int\limits_{\partial\Omega} g(x)\,ds_x$, то

$$\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\right)\int\limits_{\partial\Omega} g(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x)\,ds_x = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\right)\int\limits_{\partial\Omega} g(x)\,ds_x,$$

и поэтому условие (5.7) можно переписать в виде (5.1). Если это условие выполняется, то решение задачи (5.6) существует, единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде (см., например, [22])

$$v(x) = \int\limits_{\Omega} G_N(x,y)dx + \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \int\limits_{\partial\Omega} G_N(x,y) g(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x)\,ds_x, \tag{5.8}$$

где $G_N(x,y)$ — функция Грина задачи (5.6). Явный вид функции Грина $G_N(x,y)$ в случаях $l=2,3$ приведены в учебниках по уравнениям в частных производных, а в случае $l\geqslant 4$

построена в работе [23]. Далее, как и в случае задачи Дирихле, решение задачи Неймана можно найти по формуле

$$u(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i v(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x). \tag{5.9}$$

Аналогичным образом, как в случае задачи Дирихле, можно показать, что функция (5.9) удовлетворяет всем условиям задачи (1.1), (1.3). Далее, подставляя функцию $v(x)$ из (5.8) в правую часть равенства (5.9) будем иметь

$$\begin{aligned} u(x)&=\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \int\limits_{\Omega} G_N(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x,y)f(y)\,dy+\\ &+\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \int\limits_{\partial\Omega} G_N(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x,y)\sum_{k=0}^{2^n-1} a_k g(S_n^{k_n}\dots S_1^{k_1}y)\,ds_y=\\ &=\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \int\limits_{\Omega} G_N(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x,y)f(y)\,dy+\\ &+\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \int\limits_{\partial\Omega} G_N(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x,S_n^{k_n}\dots S_1^{k_1}y)g(y)\,ds_y=\int\limits_{\Omega} G_{N,S}(x,y)f(y)\,dy+\\ &+\int\limits_{\partial\Omega} G_{N,S,n}(x,y)g(y)\,ds_y, \end{aligned}$$

где $G_{N,S}(x,y)$ и $G_{N,S,n}(x,y)$ определяются из (5.3). Таким образом, для решения задачи (1.1), (1.3) мы получили представление (5.2). Теорема доказана. □

Финансирование. Исследования первого автора выполнены при финансовой поддержке грантового финансирования Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан в рамках научного проекта № AP08855810. Исследования второго автора выполнены при финансовой поддержке Правительства РФ (Постановление №211 от 16.03.2013 г.), соглашение №02.A03.21.0011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carleman T. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications // Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresse. Zürich: 1932. Vol. 1. P. 138–151 (in French). https://zbmath.org/?q=an:0006.40001
2. Karapetiants N., Samko S. Equations with involutive operators. Boston: Birkhäuser, 2001. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0183-0
3. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977.
4. Cabada A., Tojo F. A. F. Differential equations with involutions. Paris: Atlantis Press, 2015. https://doi.org/10.2991/978-94-6239-121-5
5. Андреев А. А. Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 8. С. 1126–1128. http://mi.mathnet.ru/de11126
6. Андреев А. А., Огородников Е. Н. К постановке и обоснованию корректности начальной краевой задачи для одного класса нелокальных вырождающихся уравнений гиперболического типа // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2006. Вып. 43. С. 44–51. https://doi.org/10.14498/vsgtu452

7. Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-posedness of a parabolic equation with involution // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2017. Vol. 38. No. 10. P. 1295–1304. https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997
8. Ashyralyev A., Sarsenbi A. M. Well-posedness of an elliptic equation with involution // Electronic Journal of Differential Equations. 2015. Vol. 2015. No. 284. P. 1–8. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2015/284/ashyralyev.pdf
9. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10. Вып. 3. С. 11–34. http://mi.mathnet.ru/ufa433
10. Баскаков А. Г., Ускова Н. Б. Спектральный анализ дифференциальных операторов с инволюцией и группы операторов // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 9. С. 1287–1291. https://doi.org/10.1134/S0374064118090133
11. Бурлуцкая М. Ш. Некоторые свойства функционально-дифференциальных операторов с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$ и их приложения // Известия высших учебных заведений. Математика. 2021. № 5. С. 89–97. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-5-89-97
12. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. Вып. 1. С. 10–20. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-10-20
13. Karachik V. V., Sarsenbi A. M., Turmetov B. Kh. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation // Turkish Journal of Mathematics. 2019. Vol. 43. No. 3. P. 1604–1625. https://doi.org/10.3906/mat-1901-71
14. Kirane M., Al-Salti N. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation // Journal of Nonlinear Sciences and Applications. 2016. Vol. 9. No. 3. P. 1243–1251. https://doi.org/10.22436/JNSA.009.03.49
15. Kritskov L. V., Sadybekov M. A., Sarsenbi A. M. Properties in L_p of root functions for a nonlocal problem with involution // Turkish Journal of Mathematics. 2019. Vol. 43. No. 1. P. 393–401. https://doi.org/10.3906/mat-1809-12
16. Линьков А. В. Обоснование метода Фурье для краевых задач с инволютивным отклонением // Вестн. Сам. гос. ун-та. Матем. 1999. Т. 12. № 2. С. 60–66.
17. Сарсенби А. А., Турметов Б. Х. Базисность системы собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 2. С. 183–196. https://doi.org/10.20537/vm190204
18. Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument // Commentationes Mathematicae. 1974. Vol. 17. No. 2. P. 451–457. https://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/commentationes-mathematicae/article/viewArticle/5790
19. Karachik V., Turmetov B. On solvability of some nonlocal boundary value problems for biharmonic equation // Mathematica Slovaca. 2020. Vol. 70. No. 2. P. 329–342. https://doi.org/10.1515/ms-2017-0355
20. Karachik V., Turmetov B. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation // Novi Sad Journal of Mathematics. 2020. Vol. 50. No. 1. P. 67–88. https://doi.org/10.30755/NSJOM.08942
21. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.
22. Evans L. C. Partial differential equations. Providence: American Mathematical Society, 1998. https://doi.org/10.1090/gsm/019
23. Sadybekov M. A., Torebek B. T., Turmetov B. Kh. Representation of Green’s function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. 2016. Vol. 61. No. 1. P. 104–123. https://doi.org/10.1080/17476933.2015.1064402

Поступила в редакцию 14.07.2021

Турметов Батирхан Худайбергенович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математики, Международный Казахско-Турецкий университет им. А. Ясави, 161200, Казахстан, г. Туркестан, ул. Б. Саттарханова, 29.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7735-6484
E-mail: turmetovbh@mail.ru

Карачик Валерий Валентинович, д. ф.-м. н., профессор кафедры «Математический анализ и методика преподавания математики», Южно-Уральский государственный университет, 454080, Россия, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3077-3595
E-mail: karachik@susu.ru

Цитирование: Б. Х. Турметов, В. В. Карачик. О разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона с множественной инволюцией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 4. С. 651–667.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 4. Pp. 651–667.

B. Kh. Turmetov, V. V. Karachik

On solvability of the Dirichlet and Neumann boundary value problems for the Poisson equation with multiple involution

Keywords: multiple involution, transformation matrix, nonlocal Laplace operator, Poisson equation, Dirichlet problem, Neumann problem.

MSC2020: 35A09, 35J05, 35J25

DOI: 10.35634/vm210409

Transformations of the involution type are considered in the space R^l, $l \geqslant 2$. The matrix properties of these transformations are investigated. The structure of the matrix under consideration is determined and it is proved that the matrix of these transformations is determined by the elements of the first row. Also, the symmetry of the matrix under study is proved. In addition, the eigenvectors and eigenvalues of the matrix under consideration are found explicitly. The inverse matrix is also found and it is proved that the inverse matrix has the same structure as the main matrix. The properties of the nonlocal analogue of the Laplace operator are introduced and studied as applications of the transformations under consideration. For the corresponding nonlocal Poisson equation in the unit ball, the solvability of the Dirichlet and Neumann boundary value problems is investigated. A theorem on the unique solvability of the Dirichlet problem is proved, an explicit form of the Green's function and an integral representation of the solution are constructed, and the order of smoothness of the solution of the problem in the Hölder class is found. Necessary and sufficient conditions for the solvability of the Neumann problem, an explicit form of the Green's function, and the integral representation are also found.

Funding. The study of the first author was funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan within the framework of a scientific project no. AP08855810. The study of the second author was partly supported by Act 211 of the Government of the Russian Federation, contract no. 02.A03.21.0011

REFERENCES

1. Carleman T. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications, *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresse*, Zürich: 1932, vol. 1, pp. 138–151 (in French). https://zbmath.org/?q=an:0006.40001
2. Karapetiants N., Samko S. Equations with involutive operators. Boston: Birkhäuser, 2001. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0183-0
3. Litvinchuk G. S. *Kraevye zadachi i singulyarnye integral'nye uravneniya so sdvigom* (Boundary value problems and singular integral equations with a shift), Moscow: Nauka, 1977.
4. Cabada A., Tojo F. A. F. *Differential equations with involutions*, Paris: Atlantis Press, 2015. https://doi.org/10.2991/978-94-6239-121-5
5. Andreev A. A. Analogs of classical boundary value problems for a second-order differential equation with deviating argument, *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 8, pp. 1192–1194. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000049836.04104.6f
6. Andreev A. A., Ogorodnikov E. N. On the formulation and substantiation of the well-posedness of the initial boundary value problem for a class of nonlocal degenerate equations of hyperbolic type, *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2006, issue 43, pp. 44–51 (in Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu452
7. Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-posedness of a parabolic equation with involution, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2017, vol. 38, no. 10, pp. 1295–1304. https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997
8. Ashyralyev A., Sarsenbi A. M. Well-posedness of an elliptic equation with involution, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, vol. 2015, no. 284, pp. 1–8. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2015/284/ashyralyev.pdf

9. Baskakov A. G., Uskova N. B. Fourier method for first order differential equations with involution and groups of operators, *Ufa Mathematical Journal*, 2018, vol. 10, no. 3, pp. 11–34. https://doi.org/10.13108/2018-10-3-11
10. Baskakov A. G., Uskova N. B. Spectral analysis of differential operators with involution and operator groups, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 9, pp. 1261–1265. https://doi.org/10.1134/S0012266118090136
11. Burlutskaya M. Sh. Some properties of functional-differential operators with involution $\nu(x) = 1 - x$ and their applications, *Russian Mathematics*, 2021, vol. 65, no. 5, pp. 69–76. https://doi.org/10.3103/S1066369X21050108
12. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Mixed problem for simplest hyperbolic first order equations with involution, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 10–20 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-10-20
13. Karachik V. V., Sarsenbi A. M., Turmetov B. Kh. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation, *Turkish Journal of Mathematics*, 2019, vol. 43, no. 3, pp. 1604–1625. https://doi.org/10.3906/mat-1901-71
14. Kirane M., Al-Salti N. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 1243–1251. https://doi.org/10.22436/JNSA.009.03.49
15. Kritskov L. V., Sadybekov M. A., Sarsenbi A. M. Properties in L_p of root functions for a nonlocal problem with involution, *Turkish Journal of Mathematics*, 2019, vol. 43, no. 1, pp. 393–401. https://doi.org/10.3906/mat-1809-12
16. Lin'kov A. V. Justification of the Fourier method for boundary value problems with involutive deviation, *Vestn. Samar. Gos. Univ. Mat. Mekh. Fiz. Khim. Biol.*, 1999, vol. 12, no. 2, pp. 60–66.
17. Sarsenbi A. A., Turmetov B. Kh. Basis property of a system of eigenfunctions of a second-order differential operator with involution, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 183–196 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm190204
18. Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument, *Commentationes Mathematicae*, 1974, vol. 17, no. 2, pp. 451–457. https://wydawnictwa.ptm.org.pl/index.php/commentationes-mathematicae/article/viewArticle/5790
19. Karachik V., Turmetov B. On solvability of some nonlocal boundary value problems for biharmonic equation, *Mathematica Slovaca*, 2020, vol. 70, no. 2, pp. 329–342. https://doi.org/10.1515/ms-2017-0355
20. Karachik V., Turmetov B. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation, *Novi Sad Journal of Mathematics*, 2020, vol. 50, no. 1, pp. 67–88. https://doi.org/10.30755/NSJOM.08942
21. Bitsadze A. V. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1982.
22. Evans L. C. *Partial differential equations*, Providence: American Mathematical Society, 1998. https://doi.org/10.1090/gsm/019
23. Sadybekov M. A., Torebek B. T., Turmetov B. Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2016, vol. 61, no. 1, pp. 104–123. https://doi.org/10.1080/17476933.2015.1064402

Received 14.07.2021

Batirkhan Khudaybergenovich Turmetov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, ul. B. Sattarkhanov, 29, Turkistan, 161200, Kazakhstan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7735-6484
E-mail: turmetovbh@mail.ru

Valeriy Valentinovich Karachik, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis and Methods of Mathematics, South Ural State University, pr. Lenina, 76, Chelyabinsk, 454080, Russia.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3077-3595
E-mail: karachik@susu.ru

Citation: B. Kh. Turmetov, V. V. Karachik. On solvability of the Dirichlet and Neumann boundary value problems for the Poisson equation with multiple involution, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 4, pp. 651–667.