ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 4. С. 519–535.

УДК 517.559, 517.57

© *Б. И. Абдуллаев, С. А. Имомкулов, Р. А. Шарипов*

СТРУКТУРА ОСОБЫХ МНОЖЕСТВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В данной работе дается обзор результатов об устранимых особых множествах для классов m-субгармонических ($m-sh$) и сильно m-субгармонических (sh_m), а также α-субгармонических функций, которые применяются для изучения особых множеств sh_m функций. Для сильно m-субгармонических функций из класса L^p_{loc}, доказывается, что множество является устранимым особым множеством, если имеет нулевую $C_{q,s}$-емкость. Доказательство этого утверждения основано на том, что пространство основных функций, с носителем на множестве $D\backslash E$, плотно по L^s_q-норме в пространстве основных функций, определенных на множестве D. Аналогичные результаты в случае классических (суб)гармонических функций были изучены в работах Л. Карлесона, Е. Долженко, М. Бланшет, С. Гардинера, Ж. Риихентаус, В. Шапиро, А. Садуллаева и Ж. Ярметова, Б. Абдуллаева и С. Имомкулова.

Ключевые слова: субгармонические функции, m-субгармонические функции, сильно m-субгармонические функции, α-субгармонические функции, борелевская мера, $C_{q,s}$-емкость, полярное множество.

DOI: 10.35634/vm210401

Задача об описании структур особых множеств тех или иных классов функций (класс аналитических функций, класс гармонических и субгармонических функций и др.) является одним из основных вопросов теории функций. В частности, характеристики особенностей множеств аналитических функций и аналитических множеств подробно приведены в монографии Е. М. Чирки [57]. Устранимые особенности класса голоморфных, гармонических, субгармонических и плюрисубгармонических функций изучены в работах многих авторов, таких как Ф. Хартогс, А. Пуанкаре [58], П. Лелон [36], Л. Карлесон [56], У. Сегрел [31], М. Бланшет [30], П. Матилла [43], С. Гардинер [35], Нгуен Хуан Ю [44, 45], А. Г. Витушкин [5], Е. М. Долженко [6, 7], Е. М. Чирка [21, 22, 32, 57], Ж. Риихентаус [50–52, 60], Р. Кауфман [53], А. Садуллаев, С. Имомкулов, Б. Абдуллаев [2, 15–17] и др.

Важное место занимает описание особых множеств решений и субрешений уравнения Лапласа, т. е. гармонических и субгармонических функций. Так, замкнутое множество $E \subset G$ является устранимым для ограниченных сверху субгармонических функций тогда и только тогда, когда оно имеет нулевую емкость: $C(E) = 0$. В терминах хаусдорфовой меры, условие устранения особого множества гармонических функций класса Lip_λ изучены в работах Л. Карлесона [56] (в случае $0 < \lambda \leqslant 1$) и Е. П. Долженко [6, 7] (в случае $1 < \lambda \leqslant 2$). Особые множества субгармонических функций из класса Lip_λ изучены в работе В. Л. Шапиро [54] (в случае $0 < \lambda < 1$) и в работе А. Садуллаева и Ж. Ярметова [15] (в случае $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$).

Далее, устранимые особые множества субгармонических функций класса $L^{k,p}(G)$ изучены в работах Б. И. Абдуллаева и С. А. Имомкулова [2], для субрешений класса $L^{k,p}(G)$ эллиптических операторов в работе Б. Абдуллаева и Ж. Ярметова [3]. Устранимые особенности решений нелинейных эллиптических уравнений были рассмотрены также в совместных исследованиях М. Маркуса и Л. Верона [41], Дж. Чинг и Ф. Кирстя [33] и в работе А. В. Покровского [12]. Здесь $L^{k,p}(G)$ — класс функций, имеющих производные до k-го порядка, причем производные k-го порядка принадлежат пространству L^p.

Отметим, что класс $m - sh$ функций является более общим классом субгармонических и плюрисубгармонических функций; при $m = n$ он совпадает с классом субгармонических, а при $m = 1$ — с классом плюрисубгармонических функций. В работах А. Садуллаева и Б. Абдуллаева (см. [16, 17]) доказан ряд теорем об устранимых особых множествах для класса ограниченных сверху $m - sh\,(D\backslash E)$ функций и для класса $\mathrm{Lip}_\lambda\,(D) \bigcap m - sh\,(D\backslash E)$ функций.

В данной работе проводится обзор недавних исследований авторов статьи и доказываются две новые теоремы об исключительных особых множествах m-субгармонических функций.

Первый параграф работы посвящен m-субгармоническим функциям, которые имеют ясную геометрическую характеристику. Во втором параграфе мы докажем ряд теорем о структуре устранимых особых множеств сильно m-субгармонических функций. Основное место в доказательстве этих теорем играет описание структур α-субгармонических функций. Поэтому в начале второго параграфа сначала мы изучаем особые множества α-субгармонических функций.

§ 1. Устранимые особенности m-субгармонических функций

С классом сильно m-субгармонических функций связан класс m-субгармонических функций, имеющий наглядную геометрическую характеристику: она является субгармонической на m-мерных комплексных плоскостях. Класс m-субгармонических функций рассмотрен и изучен в работах З. Хусанова [19, 20], М. Вербитского [55], Д. Жойса [59] и Б. Абдуллаева [1, 23].

Определение 1. Функция $u(z) \in L^1_{loc}\,(D)$, заданная в области $D \subset \mathbb{C}^n$, называется *m-субгармонической* функцией (субгармонической функцией на m-мерных комплексных плоскостях), $1 \leqslant m \leqslant n$, в D если:

1) она полунепрерывна сверху в D, т. е. $\overline{\lim\limits_{z\to z^0}}\, u(z) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\limits_{B(z^0,\varepsilon)} u(z) \leqslant u(z^0)$;

2) поток $dd^c u \wedge \left(dd^c\,|z^2|\right)^{m-1} \geqslant 0$ в D, т. е.

$$dd^c u \wedge \left(dd^c\,|z|^2\right)^{m-1}(\omega) = \int u\left(dd^c\,|z|^2\right)^{m-1} \wedge dd^c\omega \geqslant 0, \quad \forall \omega \in F^{(n-m,n-m)}, \quad \omega \geqslant 0.$$

Определение 2. Множество $E \subset D$ называется *устранимым особым множеством* относительно подкласса $\Im$ функций, m-субгармонических в $D\backslash E$, если

$$\forall\, u \in \Im\ \exists\ v \in m - sh\,(D) : v|_{D\backslash E} \equiv u.$$

Обычно в качестве подкласса $\Im$ берут m-субгармонические функции из пространств L^∞_{loc}, Lip_γ, $L^{\gamma,p}_{loc}$ и др. Для формулировки основных результатов этого параграфа нам необходимо ввести одну емкостную величину, $C_{n-s,q}$-емкость, $1 < q \leqslant \frac{n}{s}$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ ядро $K_s(x) = -\frac{1}{|x|^{n-s}}$, при $0 < s < n$ и $K_s(x) = \ln|x|$, при $s = n$. Для положительной борелевской меры μ, как обычно, определяем потенциал Рисса:

$$U^\mu_{n-s}\,(x) = \int K_s\,(x-y)\,d\mu(y).$$

Определение 3 (см. [11]). Емкостной величиной произвольного компактного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$C_{n-s,q}(E) = \sup \mu(E), \quad 1 < q < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всем положительным, сосредоточенным на множестве E борелевским мерам, удовлетворяющим условию

$$\|U_{n-s}^{\mu}(x)\|_p = \left[\int |U_{n-s}^{\mu}(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.1}$$

Для $p > \frac{n}{n-s}$, т. е. $qs < n$ интеграл $\int\limits_{|x|\geqslant 1} |U_{n-s}^{\mu}(x)|^p\, dx$ существует. Однако, при $p = \frac{n}{n-s}$, т. е. $qs = n$, в выше приведенном определении емкости $C_{n-s,q}$ есть неудобство в связи с тем, что для таких s потенциал $U_{n-s}^{\mu}(x)$ может не принадлежать классу $L_p(\mathbb{R}^n)$ и интеграл в (1.1), вообще говоря, не определен из-за поведения ядра $K_s(x)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. В таком случае мы можем предположить, что $E \subset B\,(0,1)$ и определить емкость только для таких множеств:

$$C_{n-s,q}(E) = \sup \mu(E), \quad 1 < q < +\infty,$$

где верхняя грань теперь берется по всем положительным, сосредоточенным на множестве E борелевским мерам, удовлетворяющим условию

$$\|U_{n-s}^{\mu}(x)\|_p = \left[\int\limits_{B(0,1)} |U_{n-s}^{\mu}(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant 1, \quad p = \frac{n}{n-s}.$$

Существует следующее эквивалентное определение $(n-s,q)$-емкости (см. [9, 10]).

Определение 4. Пусть E — компактное множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть

$$\Phi(E) = \left\{\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) \colon \varphi(x) > 1 \;\text{ при любом }\; x \in E\right\}.$$

Назовем $(n-s,q)$-*емкостью* множества E число

$$\gamma_{n-s,q}(E) = \inf\left\{\|\varphi\|_{q,s} : \varphi \in \Phi(E)\right\}.$$

Здесь

$$\|\varphi\|_{q,s} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x^s\, \varphi(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=s} \frac{s!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!} \left(\frac{\partial^s \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2\right]^{\frac{q}{2}} dx\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Отметим, что существуют константы $0 < A_1 < A_2$, зависящие лишь от n, s и q:

$$A_1 C_{n-s,q}(E) \leqslant \gamma_{n-s,q}(E) \leqslant A_2 C_{n-s,q}(E), \quad 1 < q \leqslant \frac{n}{s}.$$

Множества $C_{n-s,q}$-емкости нуль, $C_{n-s,q}(E) = 0$, имеют следующие метрические свойства (см. [9]):

a) если $qs < n$, $0 < \lambda < n - qs$ и $H_\lambda(E) = 0$, то $C_{n-s,q}(E) = 0$;

б) если $qs < n$, $n - qs < \lambda$ и $H_\lambda(E) > 0$, то $C_{n-s,q}(E) > 0$;

в) если $qs = n$, $\varphi(r) = |\ln r|^{1-q}$, $q > 1$ и $H_\varphi(E) < \infty$, то $C_{n-s,q}(E) = 0$;

г) если $qs = n$, $\lambda > 0$ и $H_\lambda(E) > 0$, то $C_{n-s,q}(E) > 0$.

Из а), б), в) и г) следует, что размерность множества нулевой $C_{n-s,q}$-емкости равна $n - qs$.

В классическом случае $n > 2$, $0 < s \leqslant m$, П. Маттила [42] (см. также [14]) доказал следующий результат: пусть E — компакт из $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$. Если ньютоновская емкость $C_{n+m-s}(E) = 0$, $0 < s \leqslant m$, определенная при помощи ядра Рисса $K(x) = |x|^{s-m-n}$, равна нулю, то для почти всех $a \in \mathbb{R}^n_x$ пересечение $E \bigcap \{x = a\} \subset \mathbb{R}^m_y$ имеет ньютоновскую емкость нуль в плоскости $\{x = a\} \in \mathbb{R}^m_y : C_{m-s}(E \bigcap \{x = a\}) = 0$ (если $m = s$, то C_0-емкость в $\mathbb{R}^m_y$ есть по определению логарифмическая емкость).

Имеет место более общая теорема.

Теорема 1 (см. [24]). *Пусть $F \subset \mathbb{R}^{n+m}$ — компакт и $C_{n+m-s,q}(F) = 0$, $(0 < s < m$, $1 < q \leqslant \frac{m}{s})$. Тогда для почти всех $a \in \mathbb{R}^n_x$ пересечение $F \bigcap \{x = a\} \subset \mathbb{R}^m_y$ имеет нулевую $(m - s, q)$-емкость: $C_{m-s,q}(F \bigcap \{x = a\}) = 0$.*

Теорема 2 (см. [24]). *Если для компактного множества F области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, имеет место $C_{2n-2,q}(F) = 0$, $1 \leqslant q < \infty$, то оно является устранимым для функций $u \in m - sh\,(D \backslash F) \bigcap L^p_{loc}(D)$ при $\frac{m}{m-1} \leqslant p < +\infty$, где $p = \frac{q}{q-1}$.*

Замечание 1. При $m = 1$ функция $u \in 1 - sh\,(D \backslash F)$ будет плюрисубгармонической функцией, а пространство $L^p_{loc}(D) = L^\infty_{loc}(D)$, ибо $p = \infty$. Следовательно, в этом случае мы получим продолжение ограниченных плюрисубгармонических функций на компакты нулевой $C_{2n-2,q}(F)$-емкости, $C_{2n-2,q}(F) = 0$. При $m = n$ функция $u \in n - sh\,(D \backslash F)$ будет обычной субгармонической функцией и мы получаем один результат, доказанный Абдуллаевым и Имомкуловым (см. ниже теорему 4).

Замечание 2. При $1 < m \leqslant n$ имеем $\frac{m}{m-1} \leqslant \frac{n}{n-1}$. Следовательно, условие $\frac{m}{m-1} \leqslant p < +\infty$ в теореме 2 сильнее, чем условие $\frac{n}{n-1} \leqslant p < \infty$ в теореме 4 для субгармонических функций. Это естественно, если учесть известный пример У. Сегрела о том, что существует полярный компакт $F \subset \mathbb{C}^n$, что является устранимым для класса субгармонических функций, но не являющегося устранимым для класса плюрисубгармонических функций.

Теорема 3 (см. [24]). *Если для компактного множества F области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, имеет место $C_{2n-1,q}(F) = 0$, $1 \leqslant q < \infty$, то оно является устранимым для функций $u \in m - sh\,(D \backslash F) \bigcap L^{1,p}_{loc}(D)$ при $\frac{2m}{2m-1} \leqslant p < +\infty$, $p = \frac{q}{q-1}$.*

В этих теоремах $L^p_{loc}(D)$ обозначает класс локально суммируемых со степенью p функций, а $L^{1,p}_{loc}(D)$ класс функций, имеющих производные первого порядка, принадлежащих в $L^p_{loc}(D)$.

Замечание 3. Применяя эту теорему для $m = 1$ (плюрисубгармонические функции), мы получим, что если $C_{2n-1,q}(F) = 0$, $1 \leqslant q < \infty$, то F является устранимым множеством для класса $psh\,(D \backslash F) \bigcap L^{1,p}_{loc}(D)$, $2 \leqslant p < +\infty$, $p = \frac{q}{q-1}$. Для $m = n$ (субгармонические функции) мы получим теорему 5 (см. ниже).

В доказательствах этих теорем мы используем теорему 1. Отметим также, что для класса субгармонических функций (случай $m = n$) теоремы 4 и 5 доказаны в работе Б. И. Абдуллаева и С. А. Имомкулова (см. [2]):

Теорема 4 (см. [2]). *Замкнутое множество $F \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$, является устранимым для класса $u(x) \in L^p_{loc}(D) \bigcap sh\,(D \backslash F)$, $\frac{n}{n-2} \leqslant p < \infty$, тогда и только тогда, когда емкость $C_{n-2,q}(F) = 0$, $q = \frac{p}{p-1}$.*

Замечание 4. При $n = 2$ емкость $C_{n-2,q}(F) = C_{0,q}(F)$ совпадает с логарифмической емкостью, а пространство $L^p_{loc}(D)$ совпадает с $L^\infty_{loc}(D)$, ибо $p = \infty$ при $n = 2$. Следовательно, в этом случае теорема 4 очевидным образом вытекает из известной теоремы о том, что полярные множества являются устранимым особым множеством для ограниченных субгармонических функций.

При $1 < p < \frac{n}{n-2}$ можно построить компакт $F \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $C_{n-2,q}(F) = 0$, но существует функция $u(x) \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, гармоническая в $\mathbb{R}^n \backslash F$, причем она не продолжается в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 5 (см. [2]). *Замкнутое множество $E \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, является устранимым для класса $u(x) \in L^{1,p}_{loc}(D) \bigcap sh\,(D \backslash E)$, $\frac{n}{n-1} \leqslant p < +\infty$, тогда и только тогда, когда емкость $C_{n-1,q}(E) = 0$, $q = \frac{p}{p-1}$.*

Замечание 5. При $1 < p < \frac{n}{n-1}$ можно построить компакт $F \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $C_{n-1,q}(F) = 0$, но существует функция $u(x) \in L^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, гармоническая в $\mathbb{R}^n \backslash F$, причем не продолжающаяся в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что в отличие от субгармонических функций (случай $m = n$) для m-субгармонических функций при $m < n$ единый критерий устранимых множеств получить невозможно, ибо рассматриваемые нами критерии не учитывают комплексную структуру, а в определении m-субгармонических функций участвует комплексная структура. Далее, в пространстве $\mathbb{C}^n$ существует компакт $K \subset \mathbb{C}^n$, который является устранимым множеством в классе плюрисубгармонических функций (случай $m = 1$), но не является устранимым для субгармонических функций. Этот компакт не удовлетворяет даже критерию устранимых множеств класса субгармонических функций.

Замечание 6. Класс $L^{2,p}_{loc}$ характеризуется тем, что функции класса $L^{2,p}_{loc}$ имеют производные до второго порядка, причем вторые производные принадлежат L^p_{loc}. Следовательно, при $p \geqslant 1$ замкнутое множество $F \subset D$, $\mathrm{mes} F = 0$, является устранимым особым множеством для $m - sh(D \backslash F) \bigcap L^{2,p}_{loc}$. Если же $u \in m - sh(D \backslash F) \bigcap C^2(D)$, то нигде не плотное множество $F \subset D$ является устранимым для u. Поэтому случаи $m - sh(D \backslash F) \bigcap L^{2,p}_{loc}$ и $u \in m - sh(D \backslash F) \bigcap C^2(D)$ являются тривиальными, и мы на них специально останавливаться не будем.

§ 2. Устранимые особые множества сильно m-субгармонических функций

2.1. sh_m функции. Класс сильно m-субгармонических функций введен З. Блоцким [29], исследован С. Диневым и С. Колодзеем [34], С. Ли [37], Х. Ч. Лу [38, 39], Х. Ч. Лу и В.-Д. Нгуен [40], Н. С. Нгуен [46, 47], В. Т. Нгуен [48, 49], Абдул Карим С. А. и В. Т. Нгуен [25], Ахаг П., Чиз Р., Хед Л. [26–28]. Теория потенциала в нем построена А. Садуллаевым и Б. Абдуллаевым [13].

Определение 5. Дважды гладкая функция $u \in C^2(D)$, где $D \subset \mathbb{C}^n$, называется *сильно m-субгармонической* в D, $(1 \leqslant m \leqslant n)$, если оператор

$$(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geqslant 0, \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.1}$$

где $\beta = dd^c |z|^2$ — форма объема в $\mathbb{C}^n$. Неравенство (2.1) эквивалентно тому, что

$$\left[dd^c \left(u + t_1 dd^c |z_1|^2 + \ldots + t_n dd^c |z_n|^2\right)\right]^m \wedge \beta^{n-m} \geqslant 0, \quad \forall\, t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n_+.$$

Совокупность сильно m-субгармонических в D функций обозначается через $sh_m(D)$. Отметим, что если $u, v \in C^2(D)$ являются sh_m функциями в D, то сумма $au + bv$ также sh_m в D для любых неотрицательных чисел $a, b \in \mathbb{R}_+$. Более того, имеет место следующее утверждение (см. [29]).

Теорема 6 (см. [29]). *Если* $v_1, \ldots, v_k \in sh_m(D) \bigcap C^2(D)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, *то* $dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge$ $\wedge\, dd^c v_k \wedge \beta^{n-m} \geqslant 0$. *В частности, при* $k = m$

$$dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_m \wedge \beta^{n-m} \geqslant 0.$$

Отсюда мы получаем очень важное утверждение, что если $u \in sh_m$, то

$$dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \geqslant 0, \quad \forall\, v_1, \ldots, v_{m-1} \in sh_m(D) \bigcap C^2(D). \tag{2.2}$$

и наоборот, если дважды гладкая функция u удовлетворяет условию (2.2) для всех $v_1, \ldots,$ $v_{m-1} \in sh_m(D) \bigcap C^2(D)$, то u непременно является sh_m функцией. Отметим также, что для проверки $u \in sh_m(D)$ достаточно взять квадратичные функции

$$v_j(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} |z_k|^2, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \quad a_{k,j} = \mathrm{const}, \quad v_1, \ldots, v_{m-1} \in sh_m(\mathbb{C}^n). \tag{2.3}$$

Используя это обстоятельство, определяются сильно sh_m функции в классе L^1_{loc} функций.

Определение 6. Функция $u \in L^1_{loc}(D)$ называется $sh_m(D)$, если она полунепрерывна сверху и для любых дважды гладких $sh_m(D)$ функций $v_1, \ldots, v_{m-1} \in sh_m(D) \bigcap C^2(D)$ поток $dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m}$, определяемый как

$$\left[dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m}\right](\omega) =$$
$$= \int u dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \wedge dd^c \omega, \quad \omega \in F(D)$$

положителен, где $F(D) = \{\omega \in C^\infty(D) : \operatorname{supp} \omega \Subset D\}$ —пространство основных функций.

Здесь в определении 6 вместо $v_1, \ldots, v_{m-1} \in sh_m(D) \bigcap C^2(D)$ можно взять квадратичные функции (2.3).

Отметим, что $sh = sh_1 \supset \ldots \supset sh_m \supset \ldots \supset sh_n = psh$ и многие свойства субгармонических и плюрисубгармонических функций остаются в силе и для sh_m функций. Кроме того, класс сильно sh_m функций является подклассом класса $(n - m + 1) - sh$ функций, $sh_m \subset (n - m + 1) - sh$.

В вопросах описания структур особых множеств sh_m функций, мы воспользуемся теоремой 6 и соотношениями (2.2), (2.3). Точнее, применяем тот факт, что функция $u \in sh_m(D)$ тогда и только тогда, когда поток $dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \geqslant 0$ в D для всех квадратичных sh_m функций $v_j(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,j} |z_k|^2$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $a_{k,j}$ – const. Более того, согласно теореме 6, $\alpha = dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m} = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k dz[k] \wedge d\,\bar{z}[k]$, A_k – const, является положительной дифференциальной формой бистепени $(n-1, n-1)$. Здесь $dz[k] =$ $= dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_{k-1} \wedge dz_{k+1} \wedge \ldots \wedge dz_n$, $d\,\bar{z}[k] = d\,\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\,\bar{z}_{k-1} \wedge d\,\bar{z}_{k+1} \wedge \ldots \wedge d\,\bar{z}_n$. Рассматривая дифференциальные формы $\alpha + \varepsilon \left(dd^c |z|^2\right)^{n-1}$ для $\varepsilon \to 0$ мы, без нарушения общности можем предполагать, что α — строго положительная дифференциальная форма.

Это означает, что $A_k > 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$. Так мы получаем критерий для $u \in sh_m(D)$ в терминах так называемых α-субгармонических функций.

2.2. α-субгармонические функции. Пусть α — произвольная замкнутая, строго положительная $(n-1, n-1)$-дифференциальная форма в области $D \subset \mathbb{C}^n$:

$$\alpha = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z) dz[j] \wedge d\bar{z}[k], \quad \alpha_{jk}(z) \in C^1(D), \quad d\alpha = 0.$$

Строгая положительность α означает, что для любой компактной области $G \Subset D$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что дифференциальная форма $\alpha - \varepsilon\beta^{n-1} \geqslant 0$.

Определение 7 (см. [4]). Дважды гладкая функция $u(z) \in C^2(D)$ называется *α-субгармонической* в области $D \subset \mathbb{C}^n$, если дифференциальная форма $dd^c u \wedge \alpha \geqslant 0$ в D. Функция $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ называется α-субгармонической в области $D \subset \mathbb{C}^n$, если:

1) она полунепрерывна сверху в D, т. е. $u(z^0) \geqslant \overline{\lim\limits_{z \to z^0}}\, u(z)$, $\forall z^0 \in D$;

2) оператор $dd^c u \wedge \alpha$ положителен в обобщенном смысле, т. е.

$$\int u(z)\, \alpha(z) \wedge dd^c \omega(z) \geqslant 0, \quad \forall \omega \in F(D), \quad \omega \geqslant 0.$$

Класс α-субгармонических функций обозначается через $\alpha - sh(D)$, причем для удобства включаем в этот класс и функцию $u(z) \equiv -\infty$. Отметим, что часто используют эквивалентное определение α-субгармоничности.

Определение 8. Функция $u(z)$ называется *α-субгармонической* в области D, если выполняются следующие условия:

1) $u(z)$ полунепрерывна сверху в области D;

2) $u(z) \leqslant \int\limits_{\partial B(z^0, r)} P_\alpha(z, w) u(w)\, d\sigma(w)$, $z \in B(z^0, r)$, для любых $z^0 \in D$ и для достаточно малых $r > 0$. Здесь $P_\alpha(z, w)$ — ядро Пуассона для эллиптического оператора $dd^c u \wedge \alpha$.

Следующая теорема является аналогом теоремы об устранении особых множеств субгармонических функций, с той разницей, что в ее доказательстве используется ядро Рисса $K_\alpha(z, w)$ (см. [4]).

Теорема 7. *Пусть E — компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Множество E устранимо для всех локально ограниченных сверху, α-субгармонических в $D \backslash E$ функций тогда и только тогда, когда E является α-полярным. Другими словами, если функция $u(z) \in \alpha - sh(D \backslash E)$ локально ограничена сверху, где E — α-полярное, то $\exists U \in \alpha - sh(D) : U|_{D \backslash E} = u$, и наоборот, если любая локально ограниченная сверху, α-субгармоническая в $D \backslash E$, функция продолжается в D, то E непременно будет α-полярным.*

Следующие теоремы доказываются аналогично теоремам 3 и 4, их доказательства мы опускаем.

Теорема 8. *Пусть E компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Множество E устранимо для всех α-субгармонических в $D \backslash E$ функций $u(z)$ из класса $L^p_{loc}(D)$, $\frac{n}{n-1} \leqslant p < +\infty$, тогда и только тогда, когда емкость $C_{q,2}(E) = 0$, $q = \frac{p}{p-1}$.*

Теорема 9. *Пусть E — компактное подмножество области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. Множество E устранимо для всех $\alpha-$субгармонических в $D\backslash E$ функций $u(z)$ из класса $L^{1,p}_{loc}(D)$, $\frac{2n}{2n-1} \leqslant p < +\infty$, тогда и только тогда, когда емкость $C_{q,1}(E) = 0$, $q = \frac{p}{p-1}$.*

2.3. Устранимые особенности sh_m-функций. В работе [18] было доказано, что полярное множество в смысле класса субгармонических функций в $\mathbb{R}^{2n} \sim \mathbb{C}^n$ является устранимым для локально ограниченных сверху sh_m-функций. Здесь мы приведем более простое доказательство этого результата.

Теорема 10 (см. [18]). *Замкнутое полярное (относительно класса субгармонических функций) подмножество $E \subset D$ является устранимым особым множеством для локально ограниченных сверху sh_m функций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как sh_m функция в то же время является и субгармонической функцией, то $u(z)$ продолжается в D как sh и локально ограниченная сверху функция и мы можем предположить, что $u(z) \in sh(D) \bigcap sh_m(D\backslash E)$. Докажем сильную m-субгармоничность функции в D.

Воспользуемся определением 6. Фиксируем произвольные квадратичные sh_m функции

$$v_1, \ldots v_{m-1} \in sh_m(D), \quad v_j(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \left|z_k\right|^2, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \quad a_{k,j} - \mathrm{const},$$

и положим $\alpha = dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m}$. Как мы отметили выше, рассматривая дифференциальные формы $\alpha + \varepsilon \left(dd^c \left|z\right|^2\right)^{n-1}$ для $\varepsilon \to 0$, мы без нарушения общности можем предполагать, что α — строго положительная, замкнутая дифференциальная форма бистепени $(n-1, n-1)$. Тогда $dd^c u \wedge \alpha \geqslant 0$, т. е. u является α-субгармонической в $D\backslash E$. Так как E — полярное множество, и полярное множество в то же время является и α-полярным множеством, то согласно теореме 7 оно устранимое, т. е. $u\left(z\right) \in \alpha - sh\left(D\right)$. Отсюда и из определения 6 sh_m функций, $u\left(z\right) \in sh_m\left(D\right)$. Теорема доказана. □

Имеют место следующие две основные теоремы работы, которые характеризуют устранимые особые множества сильно m-субгармонических функций из класса $L^{k,p}_{loc}(D)$.

Теорема 11. *Если для компактного подмножества E области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, имеет место $C_{q,2}(E) = 0$, то оно является устранимым для функций $u(z) \in sh_m(D\backslash E) \bigcap L^{p}_{loc}(D)$, при $\frac{2n}{2n-2} \leqslant p < +\infty$, где $q = \frac{p}{p-1}$.*

Теорема 12. *Если для компактного подмножества E области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, имеет место $C_{q,1}(E) = 0$, то оно является устранимым для функций $u(z) \in sh_m(D\backslash E) \bigcap L^{1,p}_{loc}(D)$, при $\frac{2n}{2n-1} \leqslant p < +\infty$, где $q = \frac{p}{p-1}$.*

Отметим, что в частном случае $m = 1$, т. е. для субгармонических функций теоремы 11 и 12 были доказаны в работе [2]. Докажем их в общем случае.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 11. В доказательствах мы используем введенную в § 1 емкостную величину $C_{q,s}(E)$ и следующую лемму из работы В. Г. Мазья (см. [8]).

Лемма 1. *Пусть E — компактное подмножество области $D \subset \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$), и s — натуральное число. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $C_{q,s}(E) = 0$;

2) *множество основных функций $F(D\backslash E)$ плотно на множестве основных функций $F(D)$ по норме L^s_q.*

Пусть $u(z) \in sh_m(D \backslash E) \bigcap L^p_{loc}(D)$. Тогда она субгармонически продолжается в D. Значит, $u(z) \in sh(D) \bigcap sh_m(D \backslash E)$. Фиксируем, как выше, произвольные квадратичные sh_m функции

$$v_1, \ldots, v_{m-1} \in sh_m(D), \quad v_j(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \left|z_k\right|^2, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \quad a_{k,j} = \mathrm{const}.$$

Тогда $\alpha = dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \geqslant 0$ и рассматривая $\alpha + \varepsilon \left(dd^c \left|z\right|^2\right)^{n-1}$, $\varepsilon > 0$, мы можем считать, что α — строго положительная $(n-1, n-1)$-форма. В множестве $D \backslash E$ поток $dd^c u \wedge \alpha \geqslant 0$ в обобщенном смысле:

$$\int u\,(z)\; \alpha\,(z) \wedge dd^c \omega\,(z) \geqslant 0, \quad \forall \omega \in F\,(D \backslash E)\,, \quad \omega \geqslant 0,$$

т. е. функция $u\,(z)$ является α-субгармонической в $D \backslash E$.

Согласно лемме 1, пространство основных функций $F(D \backslash E)$ всюду плотно в пространстве $F(D)$ относительно L^2_q-нормы, т. е. для любого $\omega \in F(D)$ существует последовательность $\omega_j \in F(D \backslash E)$ такая, что $\|\omega_j - \omega\|_{L^2_q(D)} \to 0,\ \ j \to \infty$. Здесь $q = \frac{p}{p-1}$.

Так как непрерывный функционал является ограниченным по норме L^2_q, то из оценки

$$\left\| \int u\,(z)\; \alpha\,(z) \wedge dd^c \omega\,(z) - \int u\,(z)\; \alpha\,(z) \wedge dd^c \omega_j\,(z) \right\| \leqslant c \cdot \|u\,(z)\| \cdot \|\omega\,(z) - \omega_j\,(z)\|_{L^2_q}\,,$$

(где $c = \mathrm{const}$), мы получим, что

$$\int u\,(z)\; \alpha\,(z) \wedge dd^c \omega\,(z) = \lim_{j \to \infty} \int u\,(z)\; \alpha\,(z) \wedge dd^c \omega_j\,(z)\,,$$

и следовательно,

$$\int u\,(z)\; \alpha\,(z) \wedge dd^c \omega\,(z) \geqslant 0, \quad \forall \omega \in F(D), \quad \omega(z) \geqslant 0, \quad z \in D.$$

Так как здесь $v_1, \ldots, v_{m-1}$ — произвольные фиксированные квадратичные sh_m функции, то из сказанного выше $u\,(z) \in sh_m\,(D)$. Теорема 11 доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 12. Пусть $u(z) \in sh_m(D \backslash E) \bigcap L^{1,p}_{loc}(D)$. Тогда она субгармонически продолжается в D. Значит, $u(z) \in sh(D) \bigcap sh_m(D \backslash E)$. Фиксируем, как выше, произвольные квадратичные sh_m функции

$$v_1, \ldots, v_{m-1} \in sh_m(D), \quad v_j(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \left|z_k\right|^2, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \quad a_{k,j} = \mathrm{const}.$$

Тогда $\alpha = dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \geqslant 0$ и рассматривая $\alpha + \varepsilon \left(dd^c \left|z\right|^2\right)^{n-1}$, $\varepsilon > 0$, мы можем считать, что α строго положительная $(n-1, n-1)$-форма. В множестве $D \backslash E$ поток $dd^c u \wedge \alpha \geqslant 0$ в обобщенном смысле:

$$\int u\,(z)\; \alpha\,(z) \wedge dd^c \omega\,(z) \geqslant 0, \quad \forall \omega \in F\,(D \backslash E)\,, \quad \omega \geqslant 0,$$

т. е. функция $u\,(z)$ является α-субгармонической в $D \backslash E$.

Согласно лемме 1 пространство основных функций $F(D \backslash E)$ всюду плотно в пространстве $F(D)$ относительно L^1_q-нормы, т. е. для любого $\omega \in F(D)$ существует последовательность $\omega_j \in F(D \backslash E)$ такая, что $\|\omega_j - \omega\|_{L^1_q(D)} \to 0,\ \ j \to \infty$. Здесь $q = \frac{p}{p-1}$.

Следовательно, из оценки

$$\left\| \int u(z)\ \alpha(z) \wedge dd^c\omega(z) - \int u(z)\ \alpha(z) \wedge dd^c\omega_j(z) \right\| \leqslant c \cdot \|u(z)\| \cdot \|\omega(z) - \omega_j(z)\|_{L^1_q},$$

(где $c = \mathrm{const}$), мы получим, что

$$\int u(z)\ \alpha(z) \wedge dd^c\omega(z) \geqslant 0, \quad \forall\omega \in F(D), \quad \omega(z) \geqslant 0, \quad z \in D,$$

т. е. $u(z) \in sh_m(D)$. Теорема 12 доказана. □

§ 3. Заключение

Из изложенных выше результатов условия устранимости особых множеств является, такими же, как и в случае классических субгармонических функций. Это было ожидаемо, так как функциональные свойства α-субгармонических функций и m-субгармонических функций очень близки к функциональным свойствам классических субгармонических функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллаев Б. И. $m - wsh$ функции // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2012. № 5. С. 15–18.
2. Абдуллаев Б. И, Имомкулов С. А. Устранимые особенности субгармонических функций из класса L_p и L_p^1 // Узбекский математический журнал. 1997. № 4. С. 10–14. https://zbmath.org/?q=an:0921.31002
3. Абдуллаев Б. И., Ярметов Ж. Р. Об особых множествах субрешений эллиптических операторов // Вестник Красноярского государственного университета. 2006. № 9. С. 74–80.
4. Ваисова М. Д. Теория потенциала в классе α-субгармонических функций // Узбекский математический журнал. 2016. № 3. С. 46–52.
5. Витушкин А. Г. Пример множества положительной длины, но нулевой емкости // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 127. С. 246–249. https://zbmath.org/?q=an:0087.07103
6. Долженко Е. П. О представлении непрерывных гармонических функций в виде потенциалов // Известия Академии наук СССР. Сер. математическая. 1964. Т. 28. Вып. 5. С. 1113–1130. http://mi.mathnet.ru/izv3043
7. Долженко Е. П. Об особых точках непрерывных гармонических функций // Известия Академии наук СССР. Сер. математическая. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1251–1270. http://mi.mathnet.ru/izv3053
8. Мазья В. Г. Классы множеств и мер, связанные с теоремами вложения // Теоремы вложения и их приложения. М.: Наука, 1970. С. 142–159.
9. Мазья В. Г., Хавин В. П. Нелинейная теория потенциала // Успехи математических наук. 1972. Т. 27. Вып. 6 (168). С. 67–138. http://mi.mathnet.ru/umn5140
10. Мазья В. Г. О (p, l)-емкости, теоремах вложения и спектре самосопряженного эллиптического оператора // Известия Академии наук СССР. Сер. математическая. 1973. Т. 37. Вып. 2. С. 356–385. http://mi.mathnet.ru/izv2252
11. Мельников М. С., Синанян С. О. Вопросы теории приближений функций одного комплексного переменного // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики». 1975. Т. 4. С. 143–250. http://mi.mathnet.ru/intd13
12. Покровский А. В. Устранимые особенности решений нелинейных эллиптических уравнений // Успехи математических наук. 2007. Т. 62. Вып. 3 (375). С. 215–216. https://doi.org/10.4213/rm6423
13. Садуллаев А., Абдуллаев Б. Теория потенциалов в классе m-субгармонических функций // Труды Математического Института им. В. А. Стеклова. 2012. Т. 279. С. 166–192. http://mi.mathnet.ru/tm3431

14. Садуллаев А. С. Рациональные аппроксимации и плюриполярные множества // Математический сборник (новая серия). 1982. Т. 119 (161). № 1 (9). С. 96–118. http://mi.mathnet.ru/msb2839
15. Садуллаев А. С., Ярметов Ж. Р. Устранимые особенности субгармонических функций класса Lip_α // Математический сборник. 1995. Т. 186. № 1. С. 131–148. http://mi.mathnet.ru/msb8
16. Садуллаев А. С., Абдуллаев Б. И. Устранимые особенности ограниченных сверху $m-wsh$ функций // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2015. № 5. С. 12–14.
17. Садуллаев А. С., Абдуллаев Б. И. Устранимые особенности $m-wsh$ функций класса Lip_α // Вестник Национального университета Узбекистана. 2015. № 1. С. 4–6.
18. Садуллаев А. С., Абдуллаев Б. И., Шарипов Р. А. Устранимые особенности ограниченных сверху $m-sh$ функций // Узбекский математический журнал. 2016. № 3. С. 118–124.
19. Хусанов З. Х. Емкостные свойства q-субгармонических функций. I. // Известия Академии наук УзССР. Сер. физ.-матем. наук. 1990. № 1. С. 41–45. https://zbmath.org/?q=an:0709.31006
20. Хусанов З. Х. Емкостные свойства q-субгармонических функций. II. // Известия Академии наук УзССР. Сер. физ.-матем. наук. 1990. № 5. С. 28–33. https://zbmath.org/?q=an:0729.31010
21. Чирка Е. М. Об устранимых особенностях голоморфных функций // Математический сборник. 2016. Т. 207. № 9. С. 161–170. http://mi.mathnet.ru/msb8665
22. Чирка Е. М. Об устранимых особенностях комплексных аналитических множеств // Математический сборник. 2017. Т. 208. № 7. С. 172–186. http://mi.mathnet.ru/msb8756
23. Abdullaev B. I. Subharmonic functions on complex hyperplanes of $\mathbb{C}^n$ // Журнал Сибирского федерального университета. Сер. «Математика и физика». 2013. Т. 6. Вып. 4. С. 409–416. http://mi.mathnet.ru/jsfu326
24. Abdullaev B. I., Imomkulov S. A., Sharipov R. A. Removable singular sets of m-subharmonic functions // Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. Cham: Springer, 2018. P. 1–11. https://doi.org/10.1007/978-3-030-01144-4_1
25. Karim S. A. A., Nguyen V. T. On the space of m-subharmonic functions // Theoretical, Modelling and Numerical Simulations Toward Industry 4.0. Singapore: Springer, 2020. P. 133–166. https://doi.org/10.1007/978-981-15-8987-4_9
26. Åhag P., Czyż R., Hed L. Extension and approximation of m-subharmonic functions // Complex Variables and Elliptic Equations. 2018. Vol. 63. Issue 6. P. 783–801. https://doi.org/10.1080/17476933.2017.1345888
27. Åhag P., Czyż R., Hed L. The geometry of m-hyperconvex domains // The Journal of Geometric Analysis. 2018. Vol. 28. Issue 3. P. 3196–3222. https://doi.org/10.1007/s12220-017-9957-2
28. Åhag P., Czyż R. On a characterization of m-subharmonic functions with weak singularities // Annales Polonici Mathematici. 2019. Vol. 123. P. 21–29. https://doi.org/10.4064/ap180628-10-9
29. Blocki Z. Weak solutions to the complex Hessian equation // Annales de l'institut Fourier. 2005. Vol. 55. No. 5. P. 1735–1756. https://doi.org/10.5802/aif.2137
30. Blanchet P. On removable singularities of subharmonic and plurisubharmonic functions // Complex Variables. 1995. Vol. 26. Issue 4. P. 311–322. https://doi.org/10.1080/17476939508814792
31. Cegrell U. Sur les ensembles singuliers impropes des plurisubharmonic // Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Sér. A. 1975. Vol. 281. P. 905–908 (in French). https://zbmath.org/?q=an:0313.32023
32. Chirka E. M. On the removal of subharmonic singularities of plurisubharmonic functions // Annales Polonici Mathematici. 2003. Vol. 80. P. 113–116. https://doi.org/10.4064/ap80-0-8
33. Ching J., Cîrstea F. Existence and classification of singular solutions to nonlinear elliptic equations with a gradient term // Analysis and PDE. 2015. Vol. 8. No. 8. P. 1931–1962. http://doi.org/10.2140/apde.2015.8.1931
34. Dinew S., Kolodziej S. A priori estimates for the complex Hessian equation // Analysis and PDE. 2014. Vol. 7. No. 1. P. 227–244. https://doi.org/10.2140/apde.2014.7.227
35. Gardiner S. J. Removable singularities for subharmonic functions // Pacific Journal of Mathematics. 1991. Vol. 147. Issue 1. P. 71–80. https://zbmath.org/?q=an:0663.31004

36. Lelong P. Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série. 1957. Vol. 36. P. 263–303 (in French). https://zbmath.org/?q=an:0122.31902
37. Li S.-Yi. On the Dirichlet problems for symmetric function equations of the eigenvalues of the complex Hessian // The Asian Journal of Mathematics. 2004. Vol. 8. No. 1. P. 87–106. https://zbmath.org/?q=an:1068.32024
38. Lu H. C. Solutions to degenerate Hessian equations // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 2013. Vol. 100. Issue 6. P. 785–805. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2013.03.002
39. Lu H. C. A variational approach to complex Hessian equations in $\mathbb{C}^n$ // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2015. Vol. 431. Issue 1. P. 228–259. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.05.067
40. Lu H. C., Nguyen V.-D. Degenerate complex Hessian equations on compact Kähler manifolds // Indiana University Mathematics Journal. 2015. Vol. 64. No. 6. P. 1721–1745. https://www.jstor.org/stable/26316203
41. Marcus M., Veron L. Removable singularities and boundary traces // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 2001. Vol. 80. Issue 9. P. 879–900. https://doi.org/10.1016/S0021-7824(01)01209-0
42. Mattila P. Integralgeometric properties of capacities // Transactions of the American Mathematical Society. 1981. Vol. 266. No. 2. P. 539–554. https://doi.org/10.2307/1998439
43. Mattila P. A class of sets with positive length and zero analytic capacity // Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Series A. I. Mathematica. 1985. Vol. 10. P. 387–395. https://doi.org/10.5186/aasfm.1985.1043
44. Nguyen X. U. Removable sets of analytic functions satisfying a Lipschitz condition // Arkiv för Matematik. 1979. Vol. 17. No. 1–2. P. 19–27. https://doi.org/10.1007/BF02385454
45. Nguyen X. U. A removable set for Lipschitz harmonic functions // Michigan Mathematical Journal. 1990. Vol. 37. Issue 1. P. 45–51. https://doi.org/10.1307/mmj/1029004065
46. Nguyen N. C. Hölder continuous solutions to complex Hessian equations // Potential Analysis. 2014. Vol. 41. Issue 3. P. 887–902. https://doi.org/10.1007/s11118-014-9398-5
47. Nguyen N. C. Subsolution theorem for the complex Hessian equation // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica. 2012. No. 50. P. 69–88.
48. Nguyen V. T. The convexity of radially symmetric m-subharmonic functions // Complex Variables and Elliptic Equations. 2018. Vol. 63. Issue 10. P. 1396–1407. https://doi.org/10.1080/17476933.2017.1373347
49. Nguyen V. T. On delta m-subharmonic functions // Annales Polonici Mathematici. 2016. Vol. 118. P. 25–49. http://doi.org/10.4064/ap3959-9-2916
50. Riihentaus J. Exceptional sets for subharmonic functions // Journal of Basic and Applied Sciences. 2015. Vol. 11. P. 567–571. http://doi.org/10.6000/1927-5129.2015.11.75
51. Riihentaus J. Removability results for subharmonic functions, for harmonic functions and for holomorphic functions // Matematychni Studii. 2016. Vol. 46. Issue 2. P. 152–158. http://doi.org/10.15330/ms.46.2.152-158
52. Riihentaus J. A removability results for holomorphic functions of several complex variables // Journal of Basic and Applied Sciences. 2016. Vol. 12. P. 50–52. http://doi.org/10.6000/1927-5129.2016.12.07
53. Kaufman R., Wu J.-M. Removable singularities for analytic or subharmonic functions // Arkiv fór Matematik. 1980. Vol. 18. Issue 1–2. P. 107–116. https://doi.org/10.1007/BF02384684
54. Shapiro V.L. Subharmonic functions and Hausdorff measure // Journal of Differential Equations. 1978. Vol. 27. Issue 1. P. 28–45. https://doi.org/10.1016/0022-0396(78)90111-0
55. Verbitsky M. Plurisubharmonic functions in calibrated geometry and q-convexity // Mathematische Zeitschrift. 2010. Vol. 264. Issue 4. P. 939–957. https://doi.org/10.1007/s00209-009-0498-7
56. Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств. М.: Мир, 1971.
57. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985.
58. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1985.
59. Joyce D. Riemannian holonomy groups and calibrated geometry. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. https://doi.org/10.1007/978-3-642-19004-9_1

60. Riihentaus J. Subharmonic functions, generalizations, holomorphic functions, meromorphic functions, and properties. Bentham Science Publishers, 2021. https://doi.org/10.2174/97898114987011210101

Поступила в редакцию 14.07.2021

Абдуллаев Бахром Исмоилович, д. ф.-м. н., кафедра математического анализа, Ургенчский государственный университет, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Алимжана, 14.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2803-2955
E-mail: abakhrom1968@mail.ru

Имомкулов Севдиёр Акрамович, д. ф.-м. н., Институт математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, 100060, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Ходжаева, 29.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6071-7263
E-mail: sevdiyor_i@mail.ru

Шарипов Расулбек Ахмедович, PhD, кафедра математического анализа, Ургенчский государственный университет, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Алимжана, 14.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3033-3047
E-mail: r.sharipov@urdu.uz

Цитирование: Б. И. Абдуллаев, С. А. Имомкулов, Р. А. Шарипов. Структура особых множеств некоторых классов субгармонических функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 4. С. 519–535.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 4. Pp. 519–535.

B. I. Abdullaev, S. A. Imomkulov, R. A. Sharipov

Structure of singular sets of some classes of subharmonic functions

Keywords: subharmonic functions, m-subharmonic functions, strongly m-subharmonic functions, α-subharmonic functions, Borel measure, $C_{q,s}$-capacity, polar set.

MSC2020: 32U30, 31C05

DOI: 10.35634/vm210401

In this paper, we survey the recent results on removable singular sets for the classes of m-subharmonic ($m-sh$) and strongly m-subharmonic (sh_m), as well as α-subharmonic functions, which are applied to study the singular sets of sh_m functions. In particular, for strongly m-subharmonic functions from the class L^p_{loc}, it is proved that a set is a removable singular set if it has zero $C_{q,s}$-capacity. The proof of this statement is based on the fact that the space of basic functions, supported on the set $D\backslash E$, is dense in the space of test functions defined in the set D on the L^s_q-norm. Similar results in the case of classical (sub)harmonic functions were studied in the works by L. Carleson, E. Dolzhenko, M. Blanchet, S. Gardiner, J. Riihentaus, V. Shapiro, A. Sadullaev and Zh. Yarmetov, B. Abdullaev and S. Imomkulov.

REFERENCES

1. Abdullaev B. I. $m-wsh$ functions, *Doklady Akademii Nauk Respubliki Uzbekistan*, 2012, no. 5, pp. 15–18 (in Russian).
2. Abdullaev B. I., Imomkulov S. A. Removable singularities of subharmonic functions in the level L_p and L^1_p, *Uzbekskii Matematicheskii Zhurnal*, 1997, no. 4, pp. 10–14 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0921.31002
3. Abdullaev B. I., Yarmetov Zh. R. On singular sets of subsolutions of elliptic operators, *Vestnik Krasnoyarskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2006, no. 9, pp. 74–80 (in Russian).
4. Vaisova M. D. Potential theory in the class of α-subharmonic functions, *Uzbek Mathematical Journal*, 2016, vol. 3, pp. 46–52 (in Russian).
5. Vitushkin A. G. A set of positive length having a zero analytic capacity, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1959, vol. 127, pp. 246–249 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0087.07103
6. Dolzhenko E. P. On the representation of continuous harmonic functions in the form of potentials, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Ser. Matematicheskaya*, 1964, vol. 28, issue 5, pp. 1113–1130 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/izv3043
7. Dolzhenko E. P. On the singularities of continuous harmonic functions, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Ser. Matematicheskaya*, 1964, vol. 28, issue 6, pp. 1251–1270. http://mi.mathnet.ru/eng/izv3053
8. Maz'ya V. G. Classes of sets and measures connected with embedding theorems, *Embedding theorems and their applications*, Moscow: Nauka, 1970, pp. 142–159.
9. Maz'ya V. G., Khavin V. P. Non-linear potential theory, *Russian Mathematical Surveys*, 1972, vol. 27, issue 6, pp. 71–148. https://doi.org/10.1070/RM1972v027n06ABEH001393
10. Maz'ja V. G. On (p,l)-capacity, embedding theorems, and the spectrum of a selfadjoint elliptic operator, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1973, vol. 7, issue 2, pp. 357–387. https://doi.org/10.1070/IM1973v007n02ABEH001942
11. Mel'nikov M. S., Sinanyan S. O. Aspects of approximation theory for functions of one complex variable, *Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 5, issue 5, pp. 688–752. https://doi.org/10.1007/BF01091909
12. Pokrovskii A. V. Removable singularities of solutions of non-linear elliptic equations, *Russian Mathematical Surveys*, 2007, vol. 62, issue 3, pp. 629–630. https://doi.org/10.1070/RM2007v062n03ABEH004422
13. Sadullaev A., Abdullaev B. Potential theory in the class of m-subharmonic functions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 279, issue 1, pp. 155–180. https://doi.org/10.1134/S0081543812080111

14. Sadullaev A. Rational approximation and pluripolar sets, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1984, vol. 47, no. 1, pp. 91–113. https://doi.org/10.1070/SM1984v047n01ABEH002632
15. Sadullaev A. S., Yarmetov Zh. R. Removable singularities of plurisubharmonic functions of class Lip_α, *Sbornik: Mathematics*, 1995, vol. 186, no. 1, pp. 133–150. http://doi.org/10.1070/SM1995v186n01ABEH000008
16. Sadullaev A. S., Abdullaev B. A removable singularity of the bounded above $m - wsh$ functions, *Doklady Akademii Nauk Respubliki Uzbekistan*, 2015, no. 5, pp. 12–14 (in Russian).
17. Sadullaev A. S., Abdullaev B. I. Removable singularity $m - wsh$ functions of the class Lip_α, *Vestnik NUUz*, 2015, no. 1, pp. 4–6 (in Russian).
18. Sadullaev A. S., Abdullaev B. I., Sharipov R. A. A removable singularity of the bounded above $m - sh$ functions, *Uzbek Mathematical Journal*, 2016, no. 3, pp. 118–124 (in Russian).
19. Khusanov Z. Kh. Capacity properties of q-subharmonic functions. I, *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1990, no. 1, pp. 41–45 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0709.31006
20. Khusanov Z. Kh. Capacity properties of q-subharmonic functions. II, *Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1990, no. 5, pp. 28–33 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0729.31010
21. Chirka E. M. Removable singularities of holomorphic functions, *Sbornik: Mathematics*, 2016, vol. 207, no. 9, pp. 1335–1343. https://doi.org/10.1070/SM8665
22. Chirka E. M. On removable singularities of complex analytic sets, *Sbornik: Mathematics*, 2017, vol. 208, no. 7, pp. 1073–1086. https://doi.org/10.1070/SM8756
23. Abdullaev B. I. Subharmonic functions on complex hyperplanes of $\mathbb{C}^n$, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2013, vol. 6, issue 4, pp. 409–416. http://mi.mathnet.ru/eng/jsfu326
24. Abdullaev B. I., Imomkulov S. A., Sharipov R. A. Removable singular sets of m-subharmonic functions, *Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory*, Cham: Springer, 2018, pp. 1–11. https://doi.org/10.1007/978-3-030-01144-4_1
25. Karim S. A. A., Nguyen V. T. On the space of m-subharmonic functions, *Theoretical, Modelling and Numerical Simulations Toward Industry 4.0*, Singapore: Springer, 2020, pp. 133–166. https://doi.org/10.1007/978-981-15-8987-4_9
26. Åhag P., Czyż R., Hed L. Extension and approximation of m-subharmonic functions, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2018, vol. 63, issue 6, pp. 783–801. https://doi.org/10.1080/17476933.2017.1345888
27. Åhag P., Czyż R., Hed L. The geometry of m-hyperconvex domains, *The Journal of Geometric Analysis*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 3196–3222. https://doi.org/10.1007/s12220-017-9957-2
28. Åhag P., Czyż R. On a characterization of m-subharmonic functions with weak singularities, *Annales Polonici Mathematici*, 2019, vol. 123, pp. 21–29. https://doi.org/10.4064/ap180628-10-9
29. Blocki Z. Weak solutions to the complex Hessian equation, *Annales de l'institut Fourier*, 2005, vol. 55, no. 5, pp. 1735–1756. https://doi.org/10.5802/aif.2137
30. Blanchet P. On removable singularities of subharmonic and plurisubharmonic functions, *Complex Variables*, 1995, vol. 26, issue 4, pp. 311–322. https://doi.org/10.1080/17476939508814792
31. Cegrell U. Sur les ensembles singuliers impropes des plurisubharmonic, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Sér. A*, 1975, vol. 281, pp. 905–908 (in French). https://zbmath.org/?q=an:0313.32023
32. Chirka E. M. On the removal of subharmonic singularities of plurisubharmonic functions, *Annales Polonici Mathematici*, 2003, vol. 80, pp. 113–116. https://doi.org/10.4064/ap80-0-8
33. Ching J., Cîrstea F. Existence and classification of singular solutions to nonlinear elliptic equations with a gradient term, *Analysis and PDE*, 2015, vol. 8, no. 8, pp. 1931–1962. http://doi.org/10.2140/apde.2015.8.1931
34. Dinew S., Kolodziej S. A priori estimates for the complex Hessian equation, *Analysis and PDE*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 227–244. https://doi.org/10.2140/apde.2014.7.227
35. Gardiner S. J. Removable singularities for subharmonic functions, *Pacific Journal of Mathematics*, 1991, vol. 147, issue 1, pp. 71–80. https://zbmath.org/?q=an:0663.31004
36. Lelong P. Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques, *Journal de Mathé-*

matiques Pures et Appliquées. Neuvième Série, 1957, vol. 36, pp. 263–303 (in French). https://zbmath.org/?q=an:0122.31902

37. Li S.-Yi. On the Dirichlet problems for symmetric function equations of the eigenvalues of the complex Hessian, *The Asian Journal of Mathematics*, 2004, vol. 8, no. 1, pp. 87–106. https://zbmath.org/?q=an:1068.32024
38. Lu H. C. Solutions to degenerate Hessian equations, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2013, vol. 100, issue 6, pp. 785–805. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2013.03.002
39. Lu H. C. A variational approach to complex Hessian equations in $\mathbb{C}^n$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, vol. 431, issue 1, pp. 228–259. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.05.067
40. Lu H. C., Nguyen V.-D. Degenerate complex Hessian equations on compact Kähler manifolds, *Indiana University Mathematics Journal*, 2015, vol. 64, issue 6, pp. 1721–1745. https://www.jstor.org/stable/26316203
41. Marcus M., Veron L. Removable singularities and boundary traces, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2001, vol. 80, issue 9, pp. 879–900. https://doi.org/10.1016/S0021-7824(01)01209-0
42. Mattila P. Integralgeometric properties of capacities, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1981, vol. 266, no. 2, pp. 539–554. https://doi.org/10.2307/1998439
43. Mattila P. A class of sets with positive length and zero analytic capacity, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Series A. I. Mathematica*, 1985, vol. 10, pp. 387–395. https://doi.org/10.5186/aasfm.1985.1043
44. Nguyen X. U. Removable sets of analytic functions satisfying a Lipschitz condition, *Arkiv för Matematik*, 1979, vol. 17, no. 1–2, pp. 19–27. https://doi.org/10.1007/BF02385454
45. Nguyen X. U. A removable set for Lipschitz harmonic functions, *Michigan Mathematical Journal*, 1990, vol. 37, issue 1, pp.45–51. https://doi.org/10.1307/mmj/1029004065
46. Nguyen N. C. Hölder continuous solutions to complex Hessian equations, *Potential Analysis*, 2014, vol. 41, issue 3, pp. 887–902. https://doi.org/10.1007/s11118-014-9398-5
47. Nguyen N. C. Subsolution theorem for the complex Hessian equation, *Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica*, 2012, no. 50, pp. 69–88.
48. Nguyen V. T. The convexity of radially symmetric m-subharmonic functions, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2018, vol. 63, issue 10, pp. 1396–1407. https://doi.org/10.1080/17476933.2017.1373347
49. Nguyen V. T. On delta m-subharmonic functions, *Annales Polonici Mathematici*, 2016, vol. 118, pp. 25–49. http://doi.org/10.4064/ap3959-9-2916
50. Riihentaus J. Exceptional sets for subharmonic functions, *Journal of Basic and Applied Sciences*, 2015, vol. 11, pp. 567–571. http://doi.org/10.6000/1927-5129.2015.11.75
51. Riihentaus J. Removability results for subharmonic functions, for harmonic functions and for holomorphic functions, *Matematychni Studii*, 2016, vol. 46, issue 2, pp. 152–158. http://doi.org/10.15330/ms.46.2.152-158
52. Riihentaus J. A removability results for holomorphic functions of several complex variables, *Journal of Basic and Applied Sciences*, 2016, vol. 12, pp. 50–52. http://doi.org/10.6000/1927-5129.2016.12.07
53. Kaufman R., Wu J.-M. Removable singularities for analytic or subharmonic functions, *Arkiv för Matematik*, 1980, vol. 18, issue 1–2, pp. 107–116. https://doi.org/10.1007/BF02384684
54. Shapiro V. L. Subharmonic functions and Hausdorff measure, *Journal of Differential Equations*, 1978, vol. 27, issue 1, pp. 28–45. https://doi.org/10.1016/0022-0396(78)90111-0
55. Verbitsky M. Plurisubharmonic functions in calibrated geometry and q-convexity, *Mathematische Zeitschrift*, 2010, vol. 264, issue 4, pp. 939–957. https://doi.org/10.1007/s00209-009-0498-7
56. Carleson L. *Selected problems on exceptional sets*, Princeton: D. Van Nostrand Company, 1967. https://zbmath.org/?q=an:0189.10903
57. Chirka E. M. *Kompleksnye analiticheskie mnozhestva* (Complex analytic sets), Moscow: Nauka, 1985.
58. Shabat B. V. *Vvedenie v kompleksnyi analiz. Chast' 2* (Introduction to complex analysis. Part 2), Moscow: Nauka, 1985.
59. Joyce D. *Riemannian holonomy groups and calibrated geometry*, Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. https://doi.org/10.1007/978-3-642-19004-9_1

60. Riihentaus J. *Subharmonic functions, generalizations, holomorphic functions, meromorphic functions, and properties*, Bentham Science Publishers, 2021. https://doi.org/10.2174/97898114987011210101

Received 14.07.2021

Bakhrom Ismoilovich Abdullaev, Doctor of Physics and Mathematics, Department of Mathematical Analysis, Urgench State University, ul. H. Alimjan, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2803-2955
E-mail: abakhrom1968@mail.ru

Sevdiyor Akramovich Imomkulov, Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy, Academy of Sciences of Uzbekistan, ul. Khodjaev, 29, Tashkent, 100060, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6071-7263
E-mail: sevdiyor_i@mail.ru

Rasulbek Axmedovich Sharipov, PhD, Department of Mathematical Analysis, Urgench State University, ul. H. Alimjan, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3033-3047
E-mail: r.sharipov@urdu.uz

Citation: B. I. Abdullaev, S. A. Imomkulov, R. A. Sharipov. Structure of singular sets of some classes of subharmonic functions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 4, pp. 519–535.