МЕХАНИКА 2020. Т. 30. Вып. 4. С. 657–671.

УДК 531.1, 521.1

© *А. П. Маркеев*

О НОРМАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ В ОКРЕСТНОСТИ ЛАГРАНЖЕВЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Рассматривается плоская ограниченная эллиптическая задача трех тел. Изучаются движения, близкие к треугольным точкам либрации. Предполагается, что параметры задачи (эксцентриситет орбиты основных притягивающих тел и отношение их масс) лежат внутри области устойчивости в первом приближении точек либрации. Величина эксцентриситета считается малой. С точностью до второй степени эксцентриситета включительно получено аналитическое представление для линейного, периодического по истинной аномалии, канонического преобразования, приводящего функцию Гамильтона линеаризованных уравнений возмущенного движения в окрестности точек либрации к их вещественной нормальной форме. Эта форма соответствует двум, не связанным один с другим, гармоническим осцилляторам, частоты которых зависят от параметров задачи. При построении нормализующего канонического преобразования используется метод Депри–Хори теории возмущений гамильтоновых систем. Его реализация в конкретной рассматриваемой задаче существенно опирается на компьютерные системы аналитических вычислений.

Ключевые слова: задача трех тел, эксцентриситет орбиты, треугольные точки либрации, система Гамильтона, каноническое преобразование.

DOI: 10.35634/vm200409

§ 1. Введение

Рассмотрим три тела (материальные точки) S, J и P, движущиеся под действием гравитационного притяжения по закону Ньютона. Считаем, что масса точки P мала по сравнению с массами m_1 и m_2 точек S и J, и, следовательно, движение точки J относительно точки S определяется из задачи двух тел (материальных точек). Предположим, что орбита точки J в ее движении относительно точки S является эллипсом с эксцентриситетом e, и будем рассматривать такие движения точки P, при которых она остается в плоскости орбиты точки J.

Через X и Y обозначим координаты точки P в системе координат с началом в центре масс O тел S и J и осью OX, направленной по прямой SJ в сторону точки J; направление кратчайшего поворота от оси OX к оси OY совпадает с направлением вращения точки J относительно точки S. Пусть r — расстояние между точками S и J. Если ввести координаты Нехвилла $x = X/r$, $y = Y/r$ и в качестве независимой переменной принять истинную аномалию ν в эллиптическом движении точки J, то дифференциальные уравнения движения точки P запишутся [1,2] в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - \frac{1}{1+e\cos\nu}\,x &= -\frac{1}{1+e\cos\nu}\frac{\partial\Pi}{\partial x},\\ \ddot{y} + 2\dot{x} - \frac{1}{1+e\cos\nu}\,y &= -\frac{1}{1+e\cos\nu}\frac{\partial\Pi}{\partial y},\end{aligned} \tag{1.1}$$

где точкой обозначено дифференцирование по ν, а

$$\Pi = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1+m_2},$$
$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+\mu-1)^2 + y^2}.$$

Уравнения (1.1) можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода с функцией Лагранжа L, задаваемой равенством

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + (\dot{y}x - y\dot{x}) + \frac{1}{2\,(1+e\cos\nu)}\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{1+e\cos\nu}\Pi. \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1) имеют пять постоянных решений, называемых точками либрации L_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$. Точки L_1, L_2, L_3 лежат на прямой $y = 0$ и называются прямолинейными (или эйлеровыми) точками либрации; существование этих точек установлено Л. Эйлером в 1767 г. [3]. Точки L_4 и L_5 называются треугольными (или лагранжевыми) точками либрации. Они расположены симметрично относительно прямой $y = 0$; для решений, отвечающих этим точкам, три тела S, J и P во все время движения образуют равносторонний треугольник. Существование точек L_4 и L_5 показано Ж. Лагранжем в 1772 г. [4].

Задачам об устойчивости точек либрации и о характере движения в их окрестностях посвящено очень много исследований. Достаточно подробное обсуждение полученных результатов содержится в публикациях [2, 5–11] и в приведенной в них библиографии.

К настоящему времени большое развитие получили задачи о решениях, аналогичных точкам либрации в случае произвольного числа $n > 3$ тел [12–15], а также задачи о существовании и устойчивости точек либрации ограниченной задачи трех тел при учете светового давления [16–18].

Исследования о точках либрации представляют большой интерес не только с теоретической точки зрения. Существует много проектов использования точек либрации для решения практических задач космических исследований, ряд таких проектов уже осуществлен [19–21].

В статье предполагается, что параметр μ лежит в одном из интервалов

$$\begin{aligned} 0 < \mu < \mu_0 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.028595479\ldots \\ \text{или} \quad \mu_0 < \mu < \mu_* &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} = 0.038520896\ldots. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Для таких значений μ треугольные точки либрации ограниченной эллиптической задачи трех тел устойчивы в первом (линейном) приближении, если эксцентриситет e достаточно мал.

Цель статьи состоит в построении линейного 2π-периодического по ν канонического преобразования, приводящего соответствующую линеаризованным уравнениям (1.1) функцию Гамильтона к нормальным координатам. В этих координатах линейные колебания тела P вблизи треугольной точки либрации являются колебаниями двух, не связанных между собой, гармонических осцилляторов, частоты которых зависят от μ и e. Исследование проводится в аналитической форме при помощи метода Депри–Хори теории возмущений [22, 23]. Вычисления выполнены до второй степени e включительно.

§ 2. Функция Гамильтона возмущенного движения и ее предварительное преобразование

Введем обобщенные импульсы

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x. \tag{2.1}$$

Из (2.1) и (1.2) получим выражение для функции Гамильтона:

$$G = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + p_x y - p_y x + \frac{e\cos\nu}{2\,(1+e\cos\nu)}\left(x^2+y^2\right) + \frac{1}{1+e\cos\nu}\Pi. \tag{2.2}$$

Соответствующие этой функции канонические уравнения движения допускают следующее решение

$$x_0 = \frac{1-2\mu}{2}, \quad y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_{x0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_{y0} = \frac{1-2\mu}{2}, \tag{2.3}$$

отвечающее треугольной точке либрации L_4. Положим

$$x = x_0 + q_1, \quad y = y_0 + q_2, \quad p_x = p_{x0} + p_1, \quad p_y = p_{y0} + p_2.$$

В переменных q_i, p_i $(i = 1, 2)$ решение (2.3) будет положением равновесия $q_1 = q_2 = p_1 = = p_2 = 0$. Линейным уравнениям возмущенного движения отвечает квадратичная часть функции Гамильтона (2.2) в ее разложении в ряд по степеням q_i, p_i:

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2\right) + p_1 q_2 - p_2 q_1 + \frac{1}{8}q_1^2 - k q_1 q_2 - \frac{5}{8}q_2^2 + \\ + \frac{e\cos\nu}{8\,(1+e\cos\nu)}\left(3q_1^2 + 8k q_1 q_2 + 9q_2^2\right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$k = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,(1-2\mu)\,.$$

Через ω_1 и ω_2 обозначим частоты малых колебаний в окрестности точки либрации в случае круговой задачи (когда $e = 0$). Они являются корнями уравнения

$$\omega^4 - \omega^2 + \frac{27}{4}\mu\,(1-\mu) = 0.$$

В рассматриваемых областях (1.3) изменения μ величины ω_1 и ω_2 удовлетворяют неравенствам $1 > \omega_1 > \sqrt{2}/2 > \omega_2 > 0$, $\omega_2 \neq 1/2$.

Для дальнейшего анализа целесообразно предварительно сделать линейное каноническое преобразование $q_1,\ q_2,\ p_1,\ p_2 \to x_1,\ x_2,\ X_1,\ X_2$, приводящее при $e = 0$ функцию Гамильтона (2.4) к вещественной нормальной форме, соответствующей двум не связанным один с другим осцилляторам с частотами ω_1 и ω_2. Следуя [2], это преобразование можно получить в таком виде:

$$\begin{aligned} q_i = n_{i1}x_1 + n_{i2}x_2 + n_{i3}X_1 + n_{i4}X_2, \\ p_i = n_{2+i,1}x_1 + n_{2+i,2}x_2 + n_{2+i,3}X_1 + n_{2+i,4}X_2 \quad (i = 1, 2)\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$n_{11}=\left(4\omega_1^2+9\right)\sigma_1,\quad n_{12}=\left(4\omega_2^2+9\right)\sigma_2,\quad n_{13}=0,\quad n_{14}=0,$$
$$n_{21}=-4k\sigma_1,\quad n_{22}=-4k\sigma_2,\quad n_{23}=8\omega_1\sigma_1,\quad n_{24}=-8\omega_2\sigma_2,$$
$$n_{31}=4k\sigma_1,\quad n_{32}=4k\sigma_2,\quad n_{33}=\omega_1\left(4\omega_1^2+1\right)\sigma_1,\quad n_{34}=-\omega_2\left(4\omega_2^2+1\right)\sigma_2,$$
$$n_{41}=\left(9-4\omega_1^2\right)\sigma_1,\quad n_{42}=\left(9-4\omega_2^2\right)\sigma_2,\quad n_{43}=-4k\omega_1\sigma_1,\quad n_{44}=4k\omega_2\sigma_2,$$
$$\sigma_i=\frac{1}{2\sqrt{\omega_i\left|2\omega_i^2-1\right|\left(4\omega_i^2+9\right)}}\qquad(i=1,2).$$

В переменных x_i, X_i функция Гамильтона (2.4) запишется в следующем виде

$$H\left(x_1,x_2,X_1,X_2,\nu\right)=H_0+eH_1+\frac{1}{2}e^2H_2+\ldots,\tag{2.6}$$

где многоточием обозначена совокупность слагаемых выше второй степени относительно e, а

$$H_0\left(x_1,x_2,X_1,X_2\right)=\frac{1}{2}\omega_1\left(x_1^2+X_1^2\right)-\frac{1}{2}\omega_2\left(x_2^2+X_2^2\right),\tag{2.7}$$
$$H_1=\cos\nu\cdot A,\quad H_2=-\left(1+\cos2\nu\right)\cdot A.\tag{2.8}$$

Здесь A — не зависящая от ν квадратичная форма от x_1, x_2, X_1, X_2,

$$A=\sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=2}a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\cdot x_1^{\nu_1}\cdot_2^{\nu_2}\cdot X_1^{\mu_1}\cdot X_2^{\mu_2}.$$

Коэффициенты $a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ вычисляются по формулам

$$a_{2000}=-\delta_1\omega_1\left(8\omega_1^4-2\omega_1^2-9\right),\quad a_{1100}=16\chi\omega_1^2\omega_2^2,\quad a_{1010}=16k\delta_1\omega_1^2,$$
$$a_{1001}=-8k\chi\omega_1^2\omega_2,\quad a_{0200}=\delta_2\omega_2\left(8\omega_2^4-2\omega_2^2-9\right),\quad a_{0110}=8k\chi\omega_1\omega_2^2,$$
$$a_{0101}=16k\delta_2\omega_2^2,\quad a_{0020}=36\delta_1\omega_1,\quad a_{0011}=-36\chi\omega_1\omega_2,\quad a_{0002}=-36\delta_2\omega_2,$$
$$\chi=\frac{1}{\sqrt{\omega_1\omega_2\left(16\omega_2^2\omega_1^2+117\right)\left(1-4\omega_2^2\omega_1^2\right)}},\qquad\delta_i=\frac{1}{2\left(2\omega_i^2-1\right)\left(4\omega_i^2+9\right)}\qquad(i=1,2).$$

§ 3. Нормальные координаты и колебания при малых значениях эксцентриситета

Пусть эксцентриситет e мал, но отличен от нуля. Построим каноническое унивалентное 2π-периодическое по ν преобразование $x_1,x_2,X_1,X_2\to y_1,y_2,Y_1,Y_2$, приводящее функцию Гамильтона (2.6) к виду, аналогичному (2.7),

$$K=\frac{1}{2}\lambda_1\left(y_1+Y_1^2\right)+\frac{1}{2}\lambda_2\left(y_2^2+Y_2^2\right),\tag{3.1}$$

где

$$\lambda_1=\omega_1+e\lambda_1^{(1)}+e^2\lambda_1^{(2)}+\ldots,\quad\lambda_2=-\omega_2+e\lambda_2^{(1)}+e^2\lambda_2^{(2)}+\ldots.\tag{3.2}$$

Здесь ω_1, ω_2 — частоты малых колебаний вблизи точки либрации в случае $e=0$, а $\lambda_i^{(1)},\lambda_i^{(2)}$ $(i=1,2)$ — величины, зависящие от μ. Эти величины определяются из условия периодичности преобразования x_1, x_2, X_1, $X_2\to y_1$, y_2, Y_1, Y_2 по переменной ν.

Построение преобразования $x_1,\ x_2,\ X_1,\ X_2 \to y_1,\ y_2,\ Y_1,\ Y_2$ осуществляется при помощи метода Депри–Хори [22, 23]. В этом методе производящая функция W преобразования зависит от старых переменных и представляется рядом вида

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^m}{m!} W_{m+1}\left(x_1, x_2, X_1, X_2, \nu\right).$$

Преобразованная функция Гамильтона, имеющая в нашем случае вид нормальной формы (3.1), записывается так:

$$\begin{gathered} K = K_0 + eK_1 + \frac{1}{2!}e^2 K_2 + \ldots, \\ K_0 = H_0\left(y_1, y_2, Y_1, Y_2\right), \quad K_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \lambda_i^{(1)}\left(y_i^2 + Y_i^2\right), \quad K_2 = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i^{(2)}\left(y_i^2 + Y_i^2\right). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Для вычисления членов разложения (3.3) в методе Депри–Хори получены следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{gathered} K_0 = H_0, \\ K_m = H_m - \frac{\partial W_m}{\partial \nu} + \left(H_0, W_m\right) + \sum_{j=1}^{m-1}\left[C_{m-1}^{j-1}\left(H_{m-j}, W_j\right) + C_{m-1}^{j} K_{j,m-j}\right]. \end{gathered}$$

Здесь

$$K_{j,i} = \left(K_i, W_j\right) - \sum_{s=1}^{j-1} C_{j-1}^{s-1}\left(K_{j-s,i}, W_s\right), \quad C_r^k = \frac{r!}{k!\,(r-k)!},$$

через (f, g) обозначена скобка Пуассона функций f и g.

Выкладки, необходимые для получения величин K_m и соответствующих им функций W_m, весьма громоздки и проводились с использованием систем компьютерных вычислений. Искомое преобразование $x_1,\ x_2,\ X_1,\ X_2 \to y_1,\ y_2,\ Y_1,\ Y_2$ получено в аналитической форме с точностью до второй степени e включительно.

3.1. Нормализация функции Гамильтона (2.6) в первом приближении по e

Построение функции K_1 и соответствующего канонического преобразования в первом приближении по e приводит к рассмотрению следующего линейного уравнения в частных производных относительно функции $W_1\left(y_1, y_2, Y_1, Y_2, \nu\right)$:

$$K_1 = H_1\left(y_1, y_2, Y_1, Y_2, \nu\right) - \frac{\partial W_1}{\partial \nu} + \left(H_0, W_1\right). \tag{3.4}$$

Развернутая запись последнего слагаемого в правой части уравнения имеет вид

$$\left(H_0, W_1\right) = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial H_0}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial Y_i} - \frac{\partial H_0}{\partial Y_i} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial y_i}\right).$$

Функцию W_1 из уравнения (3.4) ищем 2π-периодической по ν. Представим ее в виде квадратичной формы

$$W_1 = \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=2} W_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}^{(1)}\left(\nu\right) \cdot y_1^{\nu_1} \cdot y_2^{\nu_2} \cdot Y_1^{\mu_1} \cdot Y_2^{\mu_2}. \tag{3.5}$$

Принимая во внимание равенства (2.7), (2.8), (3.5), приравняем коэффициенты одинаковых одночленов в правой и левой частях уравнения (3.4). В результате получим систему дифференциальных уравнений для коэффициентов $W^{(1)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ функции (3.5). Эта система распадается на три не зависимые одна от другой подсистемы:

$$\begin{cases} \dfrac{dW^{(1)}_{2000}}{d\nu} - \omega_1 W^{(1)}_{1010} = \cos\nu\, a_{2000} - \dfrac{1}{2}\lambda^{(1)}_1, \\ \dfrac{dW^{(1)}_{1010}}{d\nu} + 2\omega_1 \left(W^{(1)}_{2000} - W^{(1)}_{0020}\right) = \cos\nu\, a_{1010}, \\ \dfrac{dW^{(1)}_{0020}}{d\nu} + \omega_1 W^{(1)}_{1010} = \cos\nu\, a_{0020} - \dfrac{1}{2}\lambda^{(1)}_1, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dW^{(1)}_{0200}}{d\nu} + \omega_2 W^{(1)}_{0101} = \cos\nu\, a_{0200} - \dfrac{1}{2}\lambda^{(1)}_2, \\ \dfrac{dW^{(1)}_{0101}}{d\nu} - 2\omega_2 \left(W^{(1)}_{0200} - W^{(1)}_{0002}\right) = \cos\nu\, a_{0101}, \\ \dfrac{dW^{(1)}_{0002}}{d\nu} - \omega_2 W^{(1)}_{0101} = \cos\nu\, a_{0002} - \dfrac{1}{2}\lambda^{(1)}_2, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dW^{(1)}_{1100}}{d\nu} + \omega_2 W^{(1)}_{1001} - \omega_1 W^{(1)}_{0110} = \cos\nu\, a_{1100}, \\ \dfrac{dW^{(1)}_{1001}}{d\nu} - \omega_2 W^{(1)}_{1100} - \omega_1 W^{(1)}_{0011} = \cos\nu\, a_{1001}, \\ \dfrac{dW^{(1)}_{0110}}{d\nu} + \omega_1 W^{(1)}_{1100} + \omega_2 W^{(1)}_{0011} = \cos\nu\, a_{0110}, \\ \dfrac{dW^{(1)}_{0011}}{d\nu} + \omega_1 W^{(1)}_{1001} - \omega_2 W^{(1)}_{0110} = \cos\nu\, a_{0011}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Из первого и третьего уравнений подсистем (3.6), (3.7) следует, что для периодичности функции W_1 следует положить

$$\lambda^{(1)}_1 = \lambda^{(1)}_2 = 0.$$

При таком выборе величин $\lambda^{(1)}_i$ $(i = 1, 2)$ функция K_1 в разложении (3.3) тождественно равна нулю, а коэффициенты $W^{(1)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(\nu)$ функции (3.5) можно получить из уравнений (3.6), (3.7), (3.8) в виде

$$W^{(1)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = \alpha_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\cos\nu + \beta_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\sin\nu,$$

где

$$\begin{aligned}
&\alpha_{2000} = a_{1010}\omega_1\phi_1, && \beta_{2000} = \left(2\omega_1^2 a_{0020} + \left(2\omega_1^2 - 1\right) a_{2000}\right)\phi_1, \\
&\alpha_{1100} = -\left(a_{1001}\omega_1 - a_{0110}\omega_2\right)\psi, && \beta_{1100} = -a_{0011}\psi, \\
&\alpha_{1010} = 2\omega_1\left(a_{0020} - a_{2000}\right)\phi_1, && \beta_{1010} = -a_{1010}\phi_1, \\
&\alpha_{1001} = \left(\omega_1 a_{1100} + \omega_2 a_{0011}\right)\psi, && \beta_{1001} = a_{0110}\psi, \\
&\alpha_{0200} = -\omega_2 a_{0101}\phi_2, && \beta_{0200} = \left(\left(2\omega_2^2 - 1\right) a_{0200} + 2\omega_2^2 a_{0002}\right)\phi_2, \\
&\alpha_{0110} = -\left(\omega_2 a_{1100} + \omega_1 a_{0011}\right)\psi, && \beta_{0110} = a_{1001}\psi, \\
&\alpha_{0101} = -2\omega_2\left(a_{0002} - a_{0200}\right)\phi_2, && \beta_{0101} = -a_{0101}\phi_2, \\
&\alpha_{0020} = -a_{1010}\omega_1\phi_1, && \beta_{0020} = \left(\left(2\omega_1^2 - 1\right) a_{0020} + 2\omega_1^2 a_{2000}\right)\phi_1, \\
&\alpha_{0011} = \left(a_{0110}\omega_1 - \omega_2 a_{1001}\right)\psi, && \beta_{0011} = -a_{1100}\psi,
\end{aligned}$$

$$\alpha_{0002} = \omega_2 a_{0101}\phi_2, \qquad \beta_{0002} = \left(2\omega_2^2 a_{0200} + \left(2\omega_2^2 - 1\right) a_{0002}\right)\phi_2,$$
$$\psi = \frac{1}{2\omega_1\omega_2}, \qquad \phi_i = \frac{1}{4\omega_i^2 - 1} \quad (i = 1, 2).$$

Старые переменные x_i, X_i выражаются через y_i, Y_i посредством равенств

$$x_i = y_i + e\frac{\partial W_1}{\partial Y_i} + O\left(e^2\right), \quad X_i = Y_i - e\frac{\partial W_1}{\partial y_i} + O\left(e^2\right).$$

Отметим, что другим путем и в несколько иной форме первое приближение получено в [2].

3.2. Построение второго приближения

При построении второго приближения надо найти периодическое по ν решение $W_2\left(y_1, y_2, Y_1, Y_2, \nu\right)$ уравнения

$$K_2 = H_2\left(y_1, y_2, Y_1, Y_2, \nu\right) + \left(H_1, W_1\right) + \left(K_1, W_1\right) - \frac{\partial W_2}{\partial \nu} + \left(H_0, W_2\right) \tag{3.9}$$

при учете того, что, согласно предыдущему разделу, $K_1 \equiv 0$.

Функцию W_2 ищем в виде

$$W_2 = \sum_{\nu_1+\nu_2+\mu_1+\mu_2=2} W^{(2)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}(\nu) \cdot y_1^{\nu_1} \cdot y_2^{\nu_2} \cdot Y_1^{\mu_1} \cdot Y_2^{\mu_2}. \tag{3.10}$$

Из (2.7), (2.8), (3.5), (3.9) и (3.10) получим систему десяти обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов квадратичной формы (3.10). Эта система, аналогично случаю первого приближения из предыдущего раздела 3.1, распадается на три подсистемы вида (3.6), (3.7), (3.8), в левых частях которых функции $W^{(1)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ следует заменить на $W^{(2)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$. Правые же их части выражаются через коэффициенты функций H_1, H_2, W_1 и выглядят весьма громоздко. Для краткости их явные выражения здесь не выписываются.

Величины $\lambda_i^{(2)}$ $(i = 1, 2)$, необходимые для получения функции (3.3) во втором приближении по e, находятся из условия периодичности функции W_2 по ν. После некоторых выкладок получим, что они могут быть записаны в виде функций от ω_1, ω_2:

$$\lambda_1^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{\omega_1\omega_2^2\left(6\omega_1^2 - 7\right)}{4\left(4\omega_1^2 - 1\right)\left(2\omega_1^2 - 1\right)}, \quad \lambda_2^{(2)} = \lambda_1^{(2)}(-\omega_2, \omega_1). \tag{3.11}$$

Коэффициенты же квадратичной формы (3.10) могут быть представлены в виде

$$W^{(2)}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = d_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} + c_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\cos 2\nu + s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\sin 2\nu, \tag{3.12}$$

где коэффициенты $d_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$, $c_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$, $s_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ зависят только от параметра μ. При этом величины d_{2000} и d_{0200} произвольны. Положим их равными нулю. Остальные коэффициенты функций (3.12) определяются тогда однозначно. Выражения для них приведены в Приложении.

Связь между переменными x_i, X_i и y_i, Y_i $(i = 1, 2)$ задается равенствами

$$\begin{gathered} x_i = y_i + e\frac{\partial W_1}{\partial Y_i} + \frac{1}{2}e^2\left[\frac{\partial W_2}{\partial Y_i} + \left(\frac{\partial W_1}{\partial Y_i}, W_1\right)\right] + O\left(e^3\right), \\ X_i = Y_i - e\frac{\partial W_1}{\partial y_i} - \frac{1}{2}e^2\left[\frac{\partial W_2}{\partial y_i} + \left(\frac{\partial W_1}{\partial y_i}, W_1\right)\right] + O\left(e^3\right) \quad (i = 1, 2). \end{gathered} \tag{3.13}$$

Заключение

Итак, решение сформулированной выше задачи о нормализации функции Гамильтона, отвечающей линеаризованным уравнениям движения в окрестности треугольной точки либрации ограниченной эллиптической задачи трех тел, получено. Каноническое преобразование $q_i,\ p_i \to y_i,\ Y_i$, задаваемое равенствами (2.5) и (3.13), приводит исходную функцию Гамильтона (2.4) к форме (3.1), (3.2), в которой величины $\lambda_i^{(1)}$ равны нулю, а $\lambda_i^{(2)}$ $(i=1,2)$ вычисляются по формулам (3.11).

Приложение

После довольно громоздких выкладок, использующих компьютерные системы аналитических вычислений, для коэффициентов функций (3.12) получены следующие выражения:

$$\begin{gathered}
d_{1100} = -Q\Big\{\omega_1\big[-2a_{1100}\alpha_{0020} - a_{1010}\alpha_{0110} - 2a_{0200}\alpha_{0011} + (\alpha_{1010} - \alpha_{0101} + 2)\, a_{0110} + \\
+ a_{0101}\alpha_{0110} + 2a_{0020}\alpha_{1100} + 2\alpha_{0200}a_{0011}\big] + \\
+ \omega_2\big[-2a_{2000}\alpha_{0011} - 2a_{1100}\alpha_{0002} + a_{1010}\alpha_{1001} + (\alpha_{0101} - \alpha_{1010} + 2)\, a_{1001} - \\
- a_{0101}\alpha_{1001} + 2a_{0011}\alpha_{2000} + 2\alpha_{1100}a_{0002}\big]\Big\}, \\
d_{1010} = 2\omega_1 A_1\big[-\alpha_{0110}a_{0011} + 2\,(\alpha_{0020} + \alpha_{2000})\, a_{1010} + 2\,(1 - \alpha_{1010})\, a_{2000} + \\
+ \alpha_{1100}a_{1001} + \alpha_{0011}a_{0110} - \alpha_{1001}a_{1100} - 2\,(1 + \alpha_{1010})\, a_{0020}\big], \\
d_{1001} = -Q\Big\{\omega_1\big[-\alpha_{0011}a_{1010} - 2\alpha_{0020}a_{1001} - 2\alpha_{0002}a_{0110} - \alpha_{0011}a_{0101} + \\
+ 2\alpha_{1001}a_{0020} + (\alpha_{1010} + \alpha_{0101} + 2)\, a_{0011} + 2\alpha_{0110}a_{0002}\big] + \\
+ \omega_2\big[2\alpha_{0110}a_{2000} + (\alpha_{1010} + \alpha_{0101} - 2)\, a_{1100} - \alpha_{1100}a_{1010} - 2\alpha_{0200}a_{1001} + \\
+ 2\alpha_{1001}a_{0200} - 2\alpha_{2000}a_{0110} - \alpha_{1100}a_{0101}\big]\Big\}, \\
d_{0110} = -Q\Big\{\omega_1\big[2\alpha_{0110}a_{2000} + (\alpha_{1010} + \alpha_{0101} - 2)\, a_{1100} - \alpha_{1100}a_{1010} - \\
- 2\alpha_{0200}a_{1001} + 2\alpha_{1001}a_{0200} - 2\alpha_{2000}a_{0110} - \alpha_{1100}a_{0101}\big] + \\
+ \omega_2\big[-\alpha_{0011}a_{1010} - 2\alpha_{0020}a_{1001} - 2\alpha_{0002}a_{0110} - \alpha_{0011}a_{0101} + 2\alpha_{1001}a_{0020} + \\
+ (\alpha_{1010} + \alpha_{0101} + 2)\, a_{0011} + 2\alpha_{0110}a_{0002}\big]\Big\}, \\
d_{0101} = 2\omega_2 A_2\big[\alpha_{0110}a_{1100} - 2\,(1 - \alpha_{0101})\, a_{0200} - 2\,(\alpha_{0200} + \alpha_{0002})\, a_{0101} + \\
+ 2\,(1 + \alpha_{0101})\, a_{0002} - \alpha_{1100}a_{0110} - \alpha_{0011}a_{1001} + \alpha_{1001}a_{0011}\big], \\
d_{0020} = 2\omega_1 A_1\big(-\alpha_{0011}a_{1100} + \alpha_{1100}a_{0011} + 2a_{1010} - \alpha_{1001}a_{0110} + \\
+ 4\alpha_{2000}a_{0020} + \alpha_{0110}a_{1001} - 4\alpha_{0020}a_{2000}\big), \\
d_{0011} = -Q\Big\{\omega_1\big[2a_{2000}\alpha_{0011} + 2a_{1100}\alpha_{0002} - a_{1010}\alpha_{1001} + (\alpha_{1010} - \alpha_{0101} - 2)\, a_{1001} + \\
+ a_{0101}\alpha_{1001} - 2a_{0011}\alpha_{2000} - 2\alpha_{1100}a_{0002}\big] + \\
+ \omega_2\big[2a_{1100}\alpha_{0020} - a_{0101}\alpha_{0110} + (\alpha_{0101} - \alpha_{1010} - 2)\, a_{0110} - 2\alpha_{0200}a_{0011} - \\
- 2a_{0020}\alpha_{1100} + 2a_{0200}\alpha_{0011} + a_{1010}\alpha_{0110}\big]\Big\}, \\
d_{0002} = 2\omega_2 A_2\big(4\alpha_{0002}a_{0200} + \alpha_{0110}a_{1001} - 4\alpha_{0200}a_{0002} - \alpha_{1100}a_{0011} - \\
- \alpha_{1001}a_{0110} - 2a_{0101} + \alpha_{0011}a_{1100}\big), \\
c_{2000} = A_2\Big\{a_2\,(-2\beta_{1010}a_{2000} - \beta_{1001}a_{1100} + 2\beta_{2000}a_{1010} + \beta_{1100}a_{1001}) +
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
+\,\omega_1\bigl[-4\alpha_{0020}a_{2000}-\alpha_{0011}a_{1100}+2a_{1010}+4\alpha_{2000}a_{0020}+\alpha_{0110}a_{1001}-\alpha_{1001}a_{0110}+\\
+\,\alpha_{1100}a_{0011}+(\beta_{0011}a_{0110}+2\beta_{0020}a_{1010}-2\beta_{1010}a_{0020}-\beta_{0110}a_{0011})\,\omega_1\bigr]\Bigr\},\\
c_{1100}=-R\Bigl\{\omega_1\xi\bigl[-2a_{1100}\alpha_{0020}-a_{1010}\alpha_{0110}-2a_{0200}\alpha_{0011}+(\alpha_{1010}-\alpha_{0101}+2)\,a_{0110}+\\
+\,a_{0101}\alpha_{0110}+2a_{0020}\alpha_{1100}+2\alpha_{0200}a_{0011}\bigr]+\\
+\,\omega_2\eta\bigl[-2a_{2000}\alpha_{0011}-2a_{1100}\alpha_{0002}+a_{1010}\alpha_{1001}+(\alpha_{0101}-\alpha_{1010}+2)\,a_{1001}-\\
-\,a_{0101}\alpha_{1001}+2a_{0011}\alpha_{2000}+2\alpha_{1100}a_{0002}\bigr]-\\
-\,4\omega_1\omega_2\bigl[-\beta_{0011}a_{0101}-2\beta_{0002}a_{0110}+(\beta_{1010}+\beta_{0101})\,a_{0011}+2a_{0020}\beta_{1001}-\\
-\,2\beta_{0020}a_{1001}-\beta_{0011}a_{1010}+2\beta_{0110}a_{0002}\bigr]+\\
+\,6\,(\beta_{1010}+\beta_{0101})\,a_{1100}-6a_{0101}\beta_{1100}-12a_{0110}\beta_{2000}+12\beta_{0110}a_{2000}+\\
+\,12\beta_{1001}a_{0200}-12a_{1001}\beta_{0200}-6a_{1010}\beta_{1100}\Bigr\},\\
c_{1010}=2A_2\Bigl(\omega_1\bigl(-2\,(1-\alpha_{1010})\,a_{2000}+\alpha_{1001}a_{1100}-2\,(\alpha_{0020}+\alpha_{2000})\,a_{1010}-\\
-\,\alpha_{1100}a_{1001}-\alpha_{0011}a_{0110}+2\,(1+\alpha_{1010})\,a_{0020}+\alpha_{0110}a_{0011}\bigr)-\\
-\,4\beta_{0020}a_{2000}-\beta_{0011}a_{1100}+\beta_{0110}a_{1001}-\beta_{1001}a_{0110}+4\beta_{2000}a_{0020}+\beta_{1100}a_{0011}\Bigr),\\
c_{1001}=-R\Bigl\{\omega_1\xi\bigl[-\alpha_{0011}a_{1010}-2\alpha_{0020}a_{1001}-2\alpha_{0002}a_{0110}-\alpha_{0011}a_{0101}+\\
+\,2\alpha_{1001}a_{0020}+(\alpha_{1010}+\alpha_{0101}+2)\,a_{0011}+2\alpha_{0110}a_{0002}\bigr]+\\
+\,\omega_2\eta\bigl[2\alpha_{0110}a_{2000}+(\alpha_{1010}+\alpha_{0101}-2)\,a_{1100}-\alpha_{1100}a_{1010}-\\
-\,2\alpha_{0200}a_{1001}+2\alpha_{1001}a_{0200}-2\alpha_{2000}a_{0110}-\alpha_{1100}a_{0101}\bigr]+\\
+\,4\omega_1\omega_2\bigl(-2\beta_{0020}a_{1100}-\beta_{0110}a_{1010}-2\beta_{0011}a_{0200}+\\
+\,(\beta_{1010}-\beta_{0101})\,a_{0110}+\beta_{0110}a_{0101}+2\beta_{1100}a_{0020}+2\beta_{0200}a_{0011}\bigr)+\\
+\,12\beta_{0002}a_{1100}+6\beta_{1001}a_{0101}+12\beta_{0011}a_{2000}-12\beta_{2000}a_{0011}+\\
+\,6\,(\beta_{1010}-\beta_{0101})\,a_{1001}-6\beta_{1001}a_{1010}-12\beta_{1100}a_{0002}\Bigr\},\\
c_{0200}=A_1\Bigl\{a_1\,(-\beta_{0110}a_{1100}-2\beta_{0101}a_{0200}+\beta_{1100}a_{0110}+2\beta_{0200}a_{0101})+\\
+\,\omega_2\bigl[\alpha_{0011}a_{1100}+\alpha_{0110}a_{1001}+4\alpha_{0002}a_{0200}-\alpha_{1001}a_{0110}-2a_{0101}-\alpha_{1100}a_{0011}-\\
-\,4\alpha_{0200}a_{0002}+(\beta_{0011}a_{1001}+2\beta_{0002}a_{0101}-\beta_{1001}a_{0011}-2\beta_{0101}a_{0002})\,\omega_2\bigr]\Bigr\},\\
c_{0110}=-R\Bigl\{\omega_1\xi\bigl[2\alpha_{0110}a_{2000}+(\alpha_{1010}+\alpha_{0101}-2)\,a_{1100}-\\
-\,\alpha_{1100}a_{1010}-2\alpha_{0200}a_{1001}+2\alpha_{1001}a_{0200}-2\alpha_{2000}a_{0110}-\alpha_{1100}a_{0101}\bigr]+\\
+\,\omega_2\eta\bigl[-\alpha_{0011}a_{1010}-2\alpha_{0020}a_{1001}-2\alpha_{0002}a_{0110}-\alpha_{0011}a_{0101}+\\
+\,2\alpha_{1001}a_{0020}+(\alpha_{1010}+\alpha_{0101}+2)\,a_{0011}+2\alpha_{0110}a_{0002}\bigr]+\\
+\,4\omega_1\omega_2\bigl[-2\beta_{0002}a_{1100}-\beta_{1001}a_{0101}-2\beta_{0011}a_{2000}+2\beta_{2000}a_{0011}+\\
+\,(\beta_{0101}-\beta_{1010})\,a_{1001}+\beta_{1001}a_{1010}+2\beta_{1100}a_{0002}\bigr]+\\
+\,12\beta_{0020}a_{1100}-6\beta_{0110}a_{0101}+6\,(\beta_{0101}-\beta_{1010})\,a_{0110}-12\beta_{0200}a_{0011}-\\
-\,12\beta_{1100}a_{0020}+12\beta_{0011}a_{0200}+6\beta_{0110}a_{1010}\Bigr\},
\end{gathered}
$$

$$c_{0101} = 2A_1\Big\{\omega_2\big[-\alpha_{0110}a_{1100} + \alpha_{0011}a_{1001} + 2\,(1-\alpha_{0101})\,a_{0200} + \alpha_{1100}a_{0110} +$$
$$+ 2\,(\alpha_{0200}+\alpha_{0002})\,a_{0101} - \alpha_{1001}a_{0011} - 2\,(1+\alpha_{0101})\,a_{0002}\big] - \beta_{0011}a_{1100} -$$
$$- \beta_{0110}a_{1001} - 4\beta_{0002}a_{0200} + \beta_{1001}a_{0110} + \beta_{1100}a_{0011} + 4\beta_{0200}a_{0002}\Big\},$$
$$c_{0020} = A_2\Big\{a_2\,(-2\beta_{0020}a_{1010} - \beta_{0011}a_{0110} + 2\beta_{1010}a_{0020} + \beta_{0110}a_{0011}) +$$
$$+ \omega_1\big[4\alpha_{0020}a_{2000} - 4\alpha_{2000}a_{0020} + \alpha_{0011}a_{1100} - 2a_{1010} - \alpha_{0110}a_{1001} + \alpha_{1001}a_{0110} -$$
$$- \alpha_{1100}a_{0011} + (\beta_{1001}a_{1100} + 2\beta_{1010}a_{2000} - \beta_{1100}a_{1001} - 2\beta_{2000}a_{1010})\,\omega_1\big]\Big\},$$
$$c_{0011} = -R\Big\{\omega_1\xi\big[2a_{2000}\alpha_{0011} + 2a_{1100}\alpha_{0002} - a_{1010}\alpha_{1001} +$$
$$+ (\alpha_{1010} - \alpha_{0101} - 2)\,a_{1001} + a_{0101}\alpha_{1001} - 2a_{0011}\alpha_{2000} - 2\alpha_{1100}a_{0002}\big] +$$
$$+ \omega_2\eta\big[2a_{1100}\alpha_{0020} - a_{0101}\alpha_{0110} + (\alpha_{0101} - \alpha_{1010} - 2)\,a_{0110} -$$
$$- 2\alpha_{0200}a_{0011} - 2a_{0020}\alpha_{1100} + 2a_{0200}\alpha_{0011} + a_{1010}\alpha_{0110}\big] +$$
$$+ 4\omega_1\omega_2\big[(\beta_{1010} + \beta_{0101})\,a_{1100} - a_{0101}\beta_{1100} - 2a_{0110}\beta_{2000} +$$
$$+ 2\beta_{0110}a_{2000} + 2\beta_{1001}a_{0200} - 2a_{1001}\beta_{0200} - a_{1010}\beta_{1100}\big] +$$
$$+ 6\beta_{0011}a_{0101} + 12\beta_{0002}a_{0110} - 6\,(\beta_{1010} + \beta_{0101})\,a_{0011} -$$
$$- 12a_{0020}\beta_{1001} + 12\beta_{0020}a_{1001} + 6\beta_{0011}a_{1010} - 12\beta_{0110}a_{0002}\Big\},$$
$$c_{0002} = A_1\Big\{a_1\,(-\beta_{0011}a_{1001} - 2\beta_{0002}a_{0101} + \beta_{1001}a_{0011} + 2\beta_{0101}a_{0002}) +$$
$$+ \omega_2\big[-\alpha_{0011}a_{1100} + \alpha_{1001}a_{0110} - \alpha_{0110}a_{1001} - 4\alpha_{0002}a_{0200} + \alpha_{1100}a_{0011} +$$
$$+ 4\alpha_{0200}a_{0002} + 2a_{0101} + (2\beta_{0101}a_{0200} - 2\beta_{0200}a_{0101} + \beta_{0110}a_{1100} - \beta_{1100}a_{0110})\,\omega_2\big]\Big\},$$
$$s_{2000} = A_2\Big\{a_2\,[-2\,(1-\alpha_{1010})\,a_{2000} + \alpha_{1001}a_{1100} - 2\alpha_{2000}a_{1010} - \alpha_{1100}a_{1001}] +$$
$$+ \omega_1\big[-4\beta_{0020}a_{2000} - \beta_{0011}a_{1100} + 4\beta_{2000}a_{0020} + \beta_{0110}a_{1001} - \beta_{1001}a_{0110} +$$
$$+ \beta_{1100}a_{0011} + [-\alpha_{0011}a_{0110} - 2\alpha_{0020}a_{1010} + 2\,(1+\alpha_{1010})\,a_{0020} + \alpha_{0110}a_{0011}]\,\omega_1\big]\Big\},$$
$$s_{1100} = -R\Big\{\omega_1\xi\big[-2\beta_{0020}a_{1100} - \beta_{0110}a_{1010} - 2\beta_{0011}a_{0200} +$$
$$+ (\beta_{1010} - \beta_{0101})\,a_{0110} + \beta_{0110}a_{0101} + 2\beta_{1100}a_{0020} + 2\beta_{0200}a_{0011}\big] +$$
$$+ \omega_2\eta\big[-2\beta_{0002}a_{1100} - \beta_{1001}a_{0101} - 2\beta_{0011}a_{2000} + 2\beta_{2000}a_{0011} +$$
$$+ (\beta_{0101} - \beta_{1010})\,a_{1001} + \beta_{1001}a_{1010} + 2\beta_{1100}a_{0002}\big] +$$
$$+ 4\omega_1\omega_2\big[-\alpha_{0011}a_{1010} - 2\alpha_{0020}a_{1001} - 2\alpha_{0002}a_{0110} - \alpha_{0011}a_{0101} +$$
$$+ 2\alpha_{1001}a_{0020} + (\alpha_{1010} + \alpha_{0101} + 2)\,a_{0011} + 2\alpha_{0110}a_{0002}\big] -$$
$$- 6\,(\alpha_{1010} + \alpha_{0101} - 2)\,a_{1100} + 6\alpha_{1100}a_{0101} + 12\alpha_{2000}a_{0110} -$$
$$- 12\alpha_{0110}a_{2000} - 12\alpha_{1001}a_{0200} + 12\alpha_{0200}a_{1001} + 6\alpha_{1100}a_{1010}\Big\},$$
$$s_{1010} = 2A_2\Big\{\omega_1\big[-2\,(\beta_{2000} + \beta_{0020})\,a_{1010} - \beta_{1100}a_{1001} + 2\beta_{1010}a_{0020} -$$
$$- \beta_{0011}a_{0110} + 2\beta_{1010}a_{2000} + \beta_{0110}a_{0011} + \beta_{1001}a_{1100}\big] - 2a_{1010} - \alpha_{0110}a_{1001} -$$
$$- 4\alpha_{2000}a_{0020} + \alpha_{1001}a_{0110} + 4\alpha_{0020}a_{2000} - \alpha_{1100}a_{0011} + \alpha_{0011}a_{1100}\Big\},$$

$$
\begin{aligned}
s_{1001} = -R\Big\{&\omega_1\xi\big[-\beta_{0011}a_{0101} - 2\beta_{0002}a_{0110} + (\beta_{1010} + \beta_{0101})\, a_{0011} + \\
&+ 2a_{0020}\beta_{1001} - 2\beta_{0020}a_{1001} - \beta_{0011}a_{1010} + 2\beta_{0110}a_{0002}\big] + \\
&+ \omega_2\eta\big[(\beta_{1010} + \beta_{0101})\, a_{1100} - a_{0101}\beta_{1100} - 2a_{0110}\beta_{2000} + \\
&+ 2\beta_{0110}a_{2000} + 2\beta_{1001}a_{0200} - 2a_{1001}\beta_{0200} - a_{1010}\beta_{1100}\big] + \\
&+ 4\omega_1\omega_2\big[2a_{1100}\alpha_{0020} - a_{0101}\alpha_{0110} + (\alpha_{0101} - \alpha_{1010} - 2)\, a_{0110} - \\
&- 2\alpha_{0200}a_{0011} - 2a_{0020}\alpha_{1100} + 2a_{0200}\alpha_{0011} + a_{1010}\alpha_{0110}\big] - \\
&- 12a_{1100}\alpha_{0002} - 6a_{0101}\alpha_{1001} - 12a_{2000}\alpha_{0011} + 12a_{0011}\alpha_{2000} + \\
&+ 6\,(\alpha_{0101} - \alpha_{1010} + 2)\, a_{1001} + 6a_{1010}\alpha_{1001} + 12\alpha_{1100}a_{0002}\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{0200} = A_1\Big\{&a_1\,[\alpha_{0110}a_{1100} - 2\alpha_{0200}a_{0101} - 2\,(1 - \alpha_{0101})\, a_{0200} - \alpha_{1100}a_{0110}] + \\
&+ \omega_2\big[\beta_{0011}a_{1100} - \beta_{1001}a_{0110} + 4\beta_{0002}a_{0200} + \beta_{0110}a_{1001} - \beta_{1100}a_{0011} - 4\beta_{0200}a_{0002} + \\
&+ [\alpha_{1001}a_{0011} - \alpha_{0011}a_{1001} - 2\alpha_{0002}a_{0101} + 2\,(1 + \alpha_{0101})\, a_{0002}]\,\omega_2\big]\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{0110} = -R\Big\{&\omega_1\xi\big[(\beta_{1010} + \beta_{0101})\, a_{1100} - a_{0101}\beta_{1100} - 2a_{0110}\beta_{2000} + \\
&+ 2\beta_{0110}a_{2000} + 2\beta_{1001}a_{0200} - 2a_{1001}\beta_{0200} - a_{1010}\beta_{1100}\big] + \\
&+ \omega_2\eta\big[-\beta_{0011}a_{0101} - 2\beta_{0002}a_{0110} + (\beta_{1010} + \beta_{0101})\, a_{0011} + \\
&+ 2a_{0020}\beta_{1001} - 2\beta_{0020}a_{1001} - \beta_{0011}a_{1010} + 2\beta_{0110}a_{0002}\big] + \\
&+ 4\omega_1\omega_2\big[2a_{2000}\alpha_{0011} + 2a_{1100}\alpha_{0002} - a_{1010}\alpha_{1001} + \\
&+ (\alpha_{1010} - \alpha_{0101} - 2)\, a_{1001} + a_{0101}\alpha_{1001} - 2a_{0011}\alpha_{2000} - 2\alpha_{1100}a_{0002}\big] - \\
&- 12a_{1100}\alpha_{0020} + 6a_{0101}\alpha_{0110} + 6\,(\alpha_{1010} - \alpha_{0101} + 2)\, a_{0110} + \\
&+ 12\alpha_{0200}a_{0011} + 12a_{0020}\alpha_{1100} - 12a_{0200}\alpha_{0011} - 6a_{1010}\alpha_{0110}\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{0101} = -2A_1\Big\{&\omega_2\big[-2\,(\beta_{0002} + \beta_{0200})\, a_{0101} + 2\beta_{0101}a_{0002} + 2\beta_{0101}a_{0200} + \\
&+ \beta_{1001}a_{0011} + \beta_{0110}a_{1100} - \beta_{0011}a_{1001} - \beta_{1100}a_{0110}\big] + 2a_{0101} + 4\alpha_{0200}a_{0002} - \\
&- 4\alpha_{0002}a_{0200} + \alpha_{1100}a_{0011} - \alpha_{0011}a_{1100} - \alpha_{0110}a_{1001} + \alpha_{1001}a_{0110}\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{0020} = A_2\Big\{&a_2\,[2\alpha_{0020}a_{1010} + \alpha_{0011}a_{0110} - 2\,(1 + \alpha_{1010})\, a_{0020} - \alpha_{0110}a_{0011}] + \\
&+ \omega_1\big[4\beta_{0020}a_{2000} - \beta_{0110}a_{1001} + \beta_{0011}a_{1100} + \beta_{1001}a_{0110} - 4\beta_{2000}a_{0020} - \beta_{1100}a_{0011} + \\
&+ [\alpha_{1100}a_{1001} - \alpha_{1001}a_{1100} + 2\alpha_{2000}a_{1010} + 2\,(1 - \alpha_{1010})\, a_{2000}]\,\omega_1\big]\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{0011} = R\Big\{&\omega_1\xi\big[-2\beta_{0002}a_{1100} - \beta_{1001}a_{0101} - 2\beta_{0011}a_{2000} + 2\beta_{2000}a_{0011} + \\
&+ (\beta_{0101} - \beta_{1010})\, a_{1001} + \beta_{1001}a_{1010} + 2\beta_{1100}a_{0002}\big] + \\
&+ \omega_2\eta\big[-2\beta_{0020}a_{1100} - \beta_{0110}a_{1010} - 2\beta_{0011}a_{0200} + \\
&+ (\beta_{1010} - \beta_{0101})\, a_{0110} + \beta_{0110}a_{0101} + 2\beta_{1100}a_{0020} + 2\beta_{0200}a_{0011}\big] + \\
&+ 4\omega_1\omega_2\big[2\alpha_{0110}a_{2000} + (\alpha_{1010} + \alpha_{0101} - 2)\, a_{1100} - \alpha_{1100}a_{1010} - \\
&- 2\alpha_{0200}a_{1001} + 2\alpha_{1001}a_{0200} - 2\alpha_{2000}a_{0110} - \alpha_{1100}a_{0101}\big] + \\
&+ 6\alpha_{0011}a_{0101} + 12\alpha_{0002}a_{0110} - 6\,(\alpha_{0101} + \alpha_{1010} + 2)\, a_{0011} -
\end{aligned}
$$

$$
- 12\alpha_{1001}a_{0020} + 12\alpha_{0020}a_{1001} + 6\alpha_{0011}a_{1010} - 12\alpha_{0110}a_{0002}\Big\},
$$

$$
s_{0002} = A_1\Big\{a_1\left[-\alpha_{1001}a_{0011} + 2\alpha_{0002}a_{0101} + \alpha_{0011}a_{1001} - 2\left(1 + \alpha_{0101}\right)a_{0002}\right] +
$$

$$
+ \omega_2\big[\beta_{1100}a_{0011} - \beta_{0110}a_{1001} + 4\beta_{0200}a_{0002} - 4\beta_{0002}a_{0200} - \beta_{0011}a_{1100} + \beta_{1001}a_{0110} +
$$

$$
+ \left[2\alpha_{0200}a_{0101} + 2\left(1 - \alpha_{0101}\right)a_{0200} - \alpha_{0110}a_{1100} + \alpha_{1100}a_{0110}\right]\omega_2\big]\Big\}.
$$

В выписанных выражениях приняты следующие обозначения:

$$
\xi = \omega_1^2 - \omega_2^2 - 4, \quad \eta = \omega_1^2 - \omega_2^2 + 4, \quad Q = \frac{1}{2\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)}, \quad R = \frac{1}{2\left[\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)^2 + 8\right]},
$$

$$
a_i = 1 + \omega_i^2, \quad A_i = \frac{1}{8\omega_i^2} \quad (i = 1, 2)\,.
$$

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00116) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) и Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1978.
2. Маркеев А.П. Точки либраций в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
3. Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum // Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1767. Vol. 11. P. 144–151.
4. Lagrange J.L. Essai sur le problème des trois corps // Oeuvres de Lagrange. 1873. Vol. 6. P. 229–324.
5. Érdi B., Forgács-Dajka E., Nagy I., Rajnai R. A parametric study of stability and resonances around L_4 in the elliptic restricted three-body problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2009. Vol. 104. Issue 1–2. P. 145–158. https://doi.org/10.1007/s10569-009-9197-2
6. Юмагулов М.Г., Беликова О.Н. Бифуркации периодических решений в окрестностях треугольных точек либрации задачи трех тел // Известия высших учебных заведений. Математика. 2010. № 6. С. 82–89. http://mi.mathnet.ru/ivm6947
7. Goździewski K., Konacki M. Trojan pairs in the HD 128311 and HD 82943 planetary systems? // Astrophysical Journal. 2006. Vol. 647. Issue 1. P. 573–586. https://doi.org/10.1086/505318
8. Lhotka Ch., Efthymiopoulos C., Dvorak R. Nekhoroshev stability at L_4 or L_5 in the elliptic-restricted three-body problem — application to Trojan asteroids // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2008. Vol. 384. Issue 3. P. 1165–1177. https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.12794.x
9. Минглибаев М.Дж., Жумабек Т.М., Маемерова Г.М. Исследование ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат // Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика». 2017. Т. 87. № 3. С. 95–108. https://doi.org/10.31489/2017m3/95-108
10. Salazar F., Winter O.C., Macau E.E.N., Masdemont Soler J., Gómez Muntané G. Natural configuration for formation flying around triangular libration points for the elliptic and the bicircular problem in the earth-moon system // The 65th International Astronautical Congress, Toronto, Canada. 2014. P. 1–14. http://hdl.handle.net/2117/27848
11. Исанбаева Н.Р. О построении границ областей устойчивости треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел // Вестник Башкирского университета. 2017. Т. 22. № 1. С. 5–9. http://bulletin-bsu.com/archive/2017/1/1/

12. Симо К. Периодические траектории плоской задачи N тел с равными массами и телами, движущимися по одной и той же траектории // Сб. работ «Относительные равновесия. Периодические решения». Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2006. С. 175–201.
https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21261298
13. Whipple A.L., Szebehely V. The restricted problem of $n+\nu$ bodies // Celestial mechanics. 1984. Vol. 32. Issue 2. P. 137–144. https://doi.org/10.1007/BF01231121
14. Budzko D.A., Prokopenya A.N. On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem // Computer Algebra in Scientific Computing. Berlin–Heidelberg: Springer, 2011. P. 88–100. https://doi.org/10.1007/978-3-642-23568-9_8
15. Гребеников Е.А. Математические проблемы гомографической динамики. М.: Российский университет дружбы народов, 2011.
16. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. Устойчивость треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // Письма в Астрономический журнал. 1985. Т. 11. № 2. С. 145–148.
17. Лукьянов Л.Г., Кочеткова А.Ю. Об устойчивости лагранжевых точек либрации в ограниченной эллиптической фотогравитационной задаче трех тел // Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 1996. № 5. С. 71–76.
http://vmu.phys.msu.ru/abstract/1996/5/96-5-071/
18. Зимовщиков А.С., Тхай В.Н. Диаграммы устойчивости для гетерогенного ансамбля частиц в коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. Вып. 2. С. 221–229.
https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13105835
19. Кононенко А. Точки либрации системы Земля–Луна // Авиация и космонавтика. 1968. № 5. С. 71–73. https://www.booksite.ru/avia/1968.htm
20. Аверкиев Н.Ф., Васьков С.А., Салов В.В. Баллистическое построение систем космических аппаратов связи и пассивной радиолокации лунной поверхности // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2008. Т. 51. № 12. С. 66–72.
https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11676004
21. Брыков А. Станция в точке либрации // Авиация и космонавтика. 1987. № 7. С. 42–43.
https://epizodsspace.airbase.ru/bibl/a-i-k/1987/7/libr.html
22. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979.
23. Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию 12.05.2020

Маркеев Анатолий Павлович, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, лаборатория механики систем, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, 101/1;
ведущий научный сотрудник, кафедра теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125080, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., 4.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3806-1429
E-mail: anat-markeev@mail.ru

Цитирование: А. П. Маркеев. О нормальных координатах в окрестности лагранжевых точек либрации ограниченной эллиптической задачи трех тел // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 4. С. 657–671.

MECHANICS 2020. Vol. 30. Issue 4. Pp. 657–671.

A. P. Markeev

On normal coordinates in the vicinity of the Lagrangian libration points of the restricted elliptic three-body problem

Keywords: three-body problem, orbit eccentricity, triangular libration points, Hamiltonian system, canonical transformation.

MSC2010: 70H15, 70F07

DOI: 10.35634/vm200409

A planar restricted elliptic three-body problem is considered. The motions close to the triangular libration points are studied. The problem parameters (the eccentricity of the orbit of the main attracting bodies and the ratio of their masses) are assumed to lie inside the linear stability region of the libration points. The magnitude of eccentricity is considered small. A linear canonical, periodic in true anomaly transformation is obtained analytically up to the second degree of eccentricity inclusive that reduces the Hamiltonian function of the linearized equations of perturbed motion to real normal form in the vicinity of the libration points. This form corresponds to two harmonic oscillators not connected to one another, with frequencies depending on the problem parameters. In constructing the normalizing canonical transformation, the Depri–Hori method of the perturbation theory of Hamiltonian systems is used. Its implementation in the problem under study relies heavily on computer systems of analytical calculations.

Funding. The work is carried out at the cost of the grant of the Russian Scientific Foundation (project no. 19–11–00116) at the Moscow Aviation Institute (National Research University) and at the Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Science.

REFERENCES

1. Duboshin G.N. *Nebesnaya mekhanika. Analiticheskie i kachestvennye metody* (Celestial mechanics. Analytical and qualitative methods), Moscow: Nauka, 1978.
2. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics), Moscow: Nauka, 1978.
3. Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 1767, vol. 11, pp. 144–151.
4. Lagrange J.L. Essai sur le problème des trois corps, *Oeuvres de Lagrange*, 1873, vol. 6, pp. 229–324.
5. Érdi B., Forgács-Dajka E., Nagy I., Rajnai R. A parametric study of stability and resonances around L_4 in the elliptic restricted three-body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2009, vol. 104, issue 1–2, pp. 145–158. `https://doi.org/10.1007/s10569-009-9197-2`
6. Yumagulov M.G., Belikova O.N. Bifurcations of periodic solutions near triangular libration points in the three-body problem, *Russian Mathematics*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 69–74. `https://doi.org/10.3103/S1066369X10060083`
7. Goździewski K., Konacki M. Trojan pairs in the HD 128311 and HD 82943 planetary systems?, *Astrophysical Journal*, 2006, vol. 647, issue 1, pp. 573–586. `https://doi.org/10.1086/505318`
8. Lhotka Ch., Efthymiopoulos C., Dvorak R. Nekhoroshev stability at L_4 or L_5 in the elliptic-restricted three-body problem — application to Trojan asteroids, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2008, vol. 384, issue 3, pp. 1165–1177. `https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.12794.x`
9. Minglibayev M.Zh., Zhumabek T.M., Mayemerova G.M. Investigation of the restricted three-body problem in a special non-inertial central coordinate system, *Bulletin of the Karaganda University-Mathematics*, 2017, vol. 87, issue 3, pp. 95–108 (in Russian). `https://doi.org/10.31489/2017m3/95-108`
10. Salazar F., Winter O.C., Macau E.E.N., Masdemont Soler J., Gómez Muntané G. Natural configuration for formation flying around triangular libration points for the elliptic and the bicircular problem

in the earth-moon system, *The 65th International Astronautical Congress*, Toronto, Canada, 2014, pp. 1–14. http://hdl.handle.net/2117/27848
11. Isanbaeva N.R. On the plotting of the stability domain border of triangular libration points for plane bounded elliptical three-body problem, *Bulletin of Bashkir University*, 2017, vol. 22, issue 1, pp. 5–9 (in Russian). http://bulletin-bsu.com/archive/2017/1/1/
12. Simo C. Periodic orbits of the planar N-body problem with equal masses and all bodies on the same path, *The Restless Universe*, IOP Publishing Ltd, 2001. https://doi.org/10.1887/0750308222/b471c14
13. Whipple A.L., Szebehely V. The restricted problem of $n + \nu$ bodies, *Celestial mechanics*, 1984, vol. 32, issue 2, pp. 137–144. https://doi.org/10.1007/BF01231121
14. Budzko D.A., Prokopenya A.N. On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem, *Computer Algebra in Scientific Computing*, Berlin–Heidelberg: Springer, 2011, pp. 88–100. https://doi.org/10.1007/978-3-642-23568-9_8
15. Grebenikov E.A. *Matematicheskie problemy gomograficheskoi dinamiki* (Mathematical problems of homographic dynamics), Moscow: RUDN, 2011.
16. Kunitsyn A.L., Tureshbaev A.T. Stability of triangular libration points of the photogravitational three-body problem, *Pis'ma v Astronomicheskii Zhurnal*, 1985, vol. 11, issue 2, pp. 145–148 (in Russian).
17. Luk'yanov L.G., Kochetkova A.Yu. On the stability of Lagrangian libration points in a restricted elliptic photogravitational three-body problem, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 3. Fizika. Astronomiya*, 1996, issue 5, pp. 71–76 (in Russian). http://vmu.phys.msu.ru/abstract/1996/5/96-5-071/
18. Zimovshikov A.S., Tkhai V.N. Stability diagrams for a heterogeneous ensemble of particles at the collinear libration points of the photogravitational three-body problem, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, vol. 74, issue 2, pp. 158–163. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.05.005
19. Kononenko A. Libration points of the Earth–Moon system, *Aviatsiya i Kosmonavtika*, 1968, issue 5, pp. 71–73 (in Russian). https://www.booksite.ru/avia/1968.htm
20. Averkiev N.F., Vas'kov S.A., Salov V.V. Ballistic construction of communication systems and passive radiolocation of lunar surface, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Priborostroenie*, 2008, vol. 51, issue 12, pp. 66–72 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11676004
21. Brykov A. Station at the libration point, *Aviatsiya i Kosmonavtika*, 1987, issue 7, pp. 42–43 (in Russian). https://epizodsspace.airbase.ru/bibl/a-i-k/1987/7/libr.html
22. Giacaglia G.E.O. *Perturbation methods in non-linear systems*, New York: Springer, 1972. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6400-2
23. Nayfeh A.X. *Perturbation methods*, New York: Wiley, 2000. https://doi.org/10.1002/9783527617609

Received 12.05.2020

Markeev Anatoly Pavlovich, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Laboratory of Mechanics of Systems, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Science, pr. Vernadskogo, 101/1, Moscow, 119526, Russia;
Leading Researcher, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125080, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3806-1429
E-mail: anat-markeev@mail.ru

Citation: A. P. Markeev. On normal coordinates in the vicinity of the Lagrangian libration points of the restricted elliptic three-body problem, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 4, pp. 657–671.