

УДК 531.36

© А. А. Килин, Е. Н. Пивоварова

## НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ЗАДАЧИ О КАЧЕНИИ СФЕРИЧЕСКОГО ВОЛЧКА ПО ВИБРИРУЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

В данной работе исследуется качение сферического волчка с осесимметричным распределением масс по гладкой горизонтальной плоскости, совершающей периодические вертикальные колебания. Для рассматриваемой системы получены уравнения движения и законы сохранения. Показано, что система допускает два положения равновесия, соответствующих равномерным вращениям волчка относительно вертикально расположенной оси симметрии. Положение равновесия устойчиво, когда центр масс расположен ниже геометрического центра и неустойчиво, если центр масс расположен выше него. Проведена редукция уравнений движения к системе с полутора степенями свободы. Рассматриваемая редуцированная система представлена в виде малого возмущения задачи о движении волчка Лагранжа. При помощи метода Мельникова показано, что устойчивая и неустойчивая ветви сепаратрисы трансверсально пересекаются между собой, что говорит о неинтегрируемости рассматриваемой задачи. Приведены результаты компьютерного моделирования динамики волчка вблизи неустойчивого положения равновесия.

*Ключевые слова:* сферический волчок, вибрирующая плоскость, случай Лагранжа, расщепление сепаратрис, интеграл Мельникова, неинтегрируемость, хаос, отображение через период.

DOI: [10.35634/vm200407](https://doi.org/10.35634/vm200407)

### Введение

Исследование динамики твердого тела под действием периодических внешних сил или с периодически меняющимися параметрами имеет богатую историю. В качестве одной из первых работ в этом направлении можно упомянуть работу А. Стефенсона [1] о динамике перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса. Оказалось, что быстрые колебания точки подвеса могут стабилизировать верхнее неустойчивое положение равновесия маятника. Позднее, независимо от А. Стефенсона эту же задачу рассмотрел П. Л. Капица [2, 3], в связи с чем часто данную систему называют маятником Капицы.

В дальнейшем было получено много интересных результатов о динамике подобных систем. В работах [4–8] была исследована более общая задача о вращении твердого тела при вибрации точки его подвеса. Были исследованы как вопросы стабилизации частных решений [5], так и развиты общие подходы к исследованию динамики системы на основе методов усреднения и нормальных форм [9, 10]. В работе [11] аналогичные подходы использовались для анализа динамики сферической оболочки с подвижным маятником внутри на вибрирующем основании с учетом возможности отрыва тела от плоскости. Работа [12] посвящена исследованию динамики твердого тела с неподвижной точкой и периодически меняющимися значениями компонент тензора инерции. В работах [13, 14] исследована динамика кельтского камня на вибрирующей плоскости.

Еще одним интересным примером подобных систем являются задачи о движении твердого тела с периодически меняющимися параметрами. С одной стороны, эти задачи тесно связаны с задачами управления качением твердых тел и находят практическое применение при разработке как сферороботов [15–23], так и колесных экипажей [24–29]. С другой стороны, в таких системах могут наблюдаться интересные динамические эффекты. Например,

в работе [15] показано существование неограниченного разгона (роста энергии) шарового волчка под действием периодического гиристатического момента. В [16] исследована устойчивость плоско-параллельных движений сфероробота с периодически меняющимися моментами инерции и показано наличие различных режимов движения, как квазипериодических, так и хаотических. Существование регулярных и хаотических режимов движения при периодически меняющихся параметрах было также показано в работе [17]. Кроме того, неограниченный рост энергии в неголономных системах доказан и для ряда других задач (сани Чаплыгина [24, 25], роллер-рейсер [26], задача Сулова [30]).

Данная работа посвящена исследованию динамики сферического волчка с осесимметричным распределением масс на вибрирующем основании. Мы доказываем несуществование дополнительного интеграла в рассматриваемой системе, и как следствие, ее неинтегрируемость.

Наиболее эффективным методом доказательства неинтегрируемости динамической системы является вычисление интеграла Мельникова (иногда его также называют интеграл Мельникова – Пуанкаре) [31, 32]. Данный метод использовался для доказательства неинтегрируемости возмущенных задач о волчке Лагранжа [33], задачи о вращении несимметричного тяжелого твердого тела относительно неподвижной точки (случай Эйлера – Пуансо) [34], нелинейного уравнения Мейсснера [35], уравнения Кортвега – де Фриза [36] и некоторых других задач [37–41]. В работе [18] показана неинтегрируемость динамики системы типа beaver ball (сферическая оболочка с вращающимся внутри нее твердым телом).

В данной работе мы представляем уравнения движения рассматриваемой системы как малое возмущение задачи о волчке Лагранжа. Это позволяет вычислить интеграл Мельникова (точнее первое слагаемое в его разложении по малому параметру возмущения) в элементарных функциях и доказать неинтегрируемость рассматриваемой системы.

## § 1. Математическая модель и основные предположения

Рассмотрим движение неуравновешенного шара радиуса  $R$  и массы  $m$  с осесимметричным распределением масс по гладкой горизонтальной плоскости (рис. 1). Будем полагать, что плоскость совершает вертикальные периодические колебания по закону  $\xi(t)$ . Также будем полагать, что центр масс смещен относительно геометрического центра шара на расстояние  $a$ .

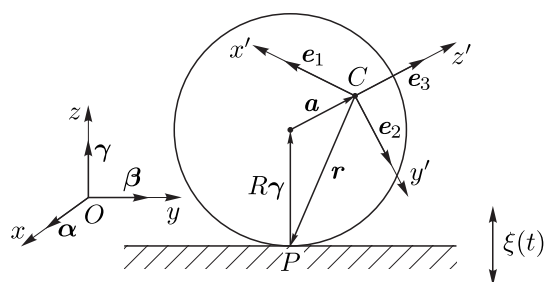


Рис. 1. Схематическая модель сферического волчка

Для описания движения шара введем две системы координат:

- неподвижную (инерциальную) систему координат  $Oxyz$  с единичными векторами  $\alpha, \beta, \gamma$ ;
- подвижную систему координат  $Cx'y'z'$  с единичными векторами  $e_1, e_2, e_3$ , жестко связанную с шаром, начало координат которой совпадает с центром масс системы  $C$ , а ось  $Cz'$  направлена вдоль оси симметрии шара.

В системе координат  $Cx'y'z'$  смещение центра масс шара относительно его геометрического центра задается вектором  $\mathbf{a} = (0, 0, a)$ .

Далее, если не оговорено иное, все векторы и тензоры мы будем записывать в проекциях на оси  $Cx'y'z'$  подвижной системы координат.

Положение шара в неподвижной системе координат будем задавать координатами его центра масс  $\mathbf{r}_c = (x, y, z)$ , а его ориентацию в пространстве — матрицей поворота  $\mathbf{Q}$ , по столбцам которой стоят проекции единичных векторов  $\alpha, \beta, \gamma$  на оси подвижной системы координат. Следовательно, конфигурационное пространство рассматриваемой системы представляет собой произведение  $\mathcal{N} = \{(\mathbf{r}_c, \mathbf{Q})\} = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ .

## § 2. Уравнения движения и первые интегралы

### 1. Функция Лагранжа системы имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}m(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - mgz,$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость шара,  $\mathbf{I} = \text{diag}(i_1, i_1, i_3)$  — центральный тензор инерции шара,  $\mathbf{v}$  — скорость центра масс шара,  $g$  — ускорение свободного падения.

Условие безотрывного движения шара по плоскости накладывает на систему голономную связь вида

$$g = z + (\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) + \xi(t) = 0, \quad (2.1)$$

где радиус-вектор  $\mathbf{r}$  точки контакта  $P$  может быть представлен в виде  $\mathbf{r} = -R\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}$  (см. рис. 1).

Дифференцируя связь (2.1) и используя соотношение  $z = (\mathbf{r}_c, \boldsymbol{\gamma})$ , получаем следующее ограничение на скорости

$$f = \dot{g} = (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) + \dot{\xi}(t) = 0. \quad (2.2)$$

Подставляя голономную связь (2.1), получим функцию Лагранжа в виде (сразу опущены полные производные по времени)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}m(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (2.3)$$

Уравнения движения системы представляются в виде уравнений Лагранжа в квазискоростях с неопределенными множителями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{v} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\lambda$  — неопределенные множители, а слагаемые  $\lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$  и  $\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}}$  соответствуют силе и моменту силы реакции связи.

Подставляя в (2.4) функцию Лагранжа (2.3), получаем уравнения движения, описывающие динамику осесимметричного волчка на гладкой плоскости, совершающей вертикальные колебания

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} + m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} &= \lambda\boldsymbol{\gamma}, \\ \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + mg\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r} &= \lambda\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Чтобы исключить неопределенный множитель  $\lambda$ , домножим первое уравнение (2.5) скалярно на  $\gamma$ . Из получившегося выражения исключим  $\dot{v}$ , используя производную по времени от связи (2.2). В результате получим выражение для неопределенного множителя  $\lambda$  в следующем виде

$$\lambda = -m \left( \ddot{\xi}(t) + (\gamma, (\omega \times r) \cdot + \omega \times (\omega \times r)) \right).$$

Подставляя это выражение в систему (2.5), получаем

$$\begin{aligned} \dot{v} + \omega \times v &= - \left( \ddot{\xi}(t) + (\gamma, (\omega \times r) \cdot + \omega \times (\omega \times r)) \right) \gamma, \\ (\mathbf{J}\omega) \cdot + \omega \times \mathbf{J}\omega - m(\mathbf{a}, \gamma \times \omega)(\gamma \times (\mathbf{a} \times \omega)) + m(g - \ddot{\xi}(t))\mathbf{a} \times \gamma &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{J} = \mathbf{I} + m(\mathbf{r} \times \gamma) \otimes (\mathbf{r} \times \gamma)$ .

Для описания динамики полной системы уравнения (2.6) необходимо дополнить кинематическими соотношениями для единичных векторов неподвижной системы координат и положения точки контакта

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \gamma \times \omega, & \dot{\alpha} &= \alpha \times \omega, & \dot{\beta} &= \beta \times \omega, \\ \dot{x} &= (v, \alpha), & \dot{y} &= (v, \beta). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Зависимость  $z$  от времени при этом можно восстановить из уравнения связи (2.1). Таким образом, уравнения (2.6), (2.7) образуют замкнутую систему, полностью описывающую динамику волчка на гладкой плоскости, совершающей периодические вертикальные колебания.

**2.** Система уравнений (2.6), (2.7) допускает следующие интегралы движения:

– очевидные геометрические интегралы

$$\begin{aligned} (\alpha, \alpha) &= 1, & (\beta, \beta) &= 1, & (\gamma, \gamma) &= 1, \\ (\alpha, \beta) &= 0, & (\beta, \gamma) &= 0, & (\gamma, \alpha) &= 0, \end{aligned}$$

– интегралы, соответствующие постоянству горизонтальной составляющей скорости центра масс волчка

$$V_x = (v, \alpha) = \text{const}, \quad V_y = (v, \beta) = \text{const},$$

– интеграл, вытекающий из связи (2.1)

$$f = 0,$$

– два дополнительных линейных по угловым скоростям первых интеграла — интеграл Лагранжа и интеграл площадей

$$\omega_3 = \text{const}, \quad (\mathbf{I}\omega, \gamma) = \text{const}.$$

**3.** Уравнения для переменных  $\omega$ ,  $\gamma$  отделяются от полной системы и образуют редуцированную систему

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}\omega) \cdot + \omega \times \mathbf{J}\omega - m(\mathbf{a}, \gamma \times \omega)(\gamma \times (\mathbf{a} \times \omega)) + m(g - \ddot{\xi}(t))\mathbf{a} \times \gamma &= 0, \\ \dot{\gamma} &= \gamma \times \omega. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнения (2.8) также могут быть записаны в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} - \eta(\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\gamma} \times (\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\omega}) - (\tilde{g} - \ddot{\xi}(t))\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}_3 &= 0 \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{M}$  — безразмерный<sup>1</sup> момент импульса волчка относительно точки контакта в подвижной системе координат, связанный с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  соотношением

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + \left(\frac{1}{\nu} - 1\right) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \eta(\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\gamma}) \otimes (\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\gamma}).$$

В уравнениях (2.9) и выражении для матрицы  $\mathbf{D}$  введены следующие параметры

$$\eta = \frac{ma^2}{i_1}, \quad \nu = \frac{i_1}{i_3}, \quad \tilde{g} = \frac{g}{\ell}, \quad \tilde{\xi}(t) = \frac{\xi(t)}{\ell}, \quad \ell = \frac{i_1}{ma}. \quad (2.10)$$

Угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  в уравнении (2.9) выражается через момент  $\mathbf{M}$  при помощи обратного преобразования  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}$ .

**Замечание 1.** С точностью до замены параметров (2.10) уравнения (2.9) описывают динамику осесимметричного волчка, закрепленного внутри сферической оболочки, катящейся без проскальзывания по горизонтальной вибрирующей плоскости [11].

**Замечание 2.** Момент  $\mathbf{M}$  в уравнениях (2.9) представляет собой абсолютный момент импульса волчка относительно подвижной точки контакта, записанный в проекциях на оси подвижной системы координат  $Cx'y'z'$ . Эти же уравнения можно записать, используя относительный (относительно точки контакта) момент импульса

$$\mathbf{M}_{rel} = \mathbf{M} + \dot{\xi}(t)(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}).$$

В этих переменных уравнения движения рассматриваемой системы полностью совпадают с уравнениями движения волчка по неподвижной плоскости под действием переменной силы тяжести.

4. Уравнения (2.9) можно представить в гамильтоновой форме с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{M}) - \dot{\xi}(t)(\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) + \tilde{g}(\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\gamma}) \quad (2.11)$$

и скобкой Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0.$$

Гамильтониан (2.11) с точностью до постоянных слагаемых и полных производных по времени совпадает с энергией системы, записанной на фиксированном уровне интегралов  $f = 0$  и  $V_x = \text{const}$ ,  $V_y = \text{const}$ .

Уравнения движения (2.9) допускают следующие интегралы движения

$$\mathcal{F}_0 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad \mathcal{F}_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{e}_3) = M_3, \quad \mathcal{F}_2 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (2.12)$$

Кроме интегралов  $\mathcal{F}_0$ ,  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$ , уравнения (2.9) допускают также поле симметрии

$$\hat{u} = M_1 \frac{\partial}{\partial M_2} - M_2 \frac{\partial}{\partial M_1} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \gamma_1}, \quad (2.13)$$

которое соответствует вращению волчка относительно оси его симметрии  $Cz'$ .

Также уравнения (2.9) обладают инвариантной мерой  $\rho d\mathbf{M}d\boldsymbol{\gamma}$  плотностью

$$\rho = 1 + \eta(1 - \gamma_3^2).$$

<sup>1</sup>В данном случае под безразмерным моментом мы понимаем момент, безразмерный по длине и массе, но имеющий размерность угловой скорости.

### § 3. Редукция уравнений движения

Наличие поля симметрий (2.13) и интегралов движения (2.12) позволяет понизить порядок системы и привести ее к системе с полутора степенями свободы. Для этого, следуя [42], введем переменные

$$K_1 = M_3, \quad K_2 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad K_3 = \frac{\eta(1 - \gamma_3^2)\dot{\xi}(t) + M_2\gamma_1 - M_1\gamma_2}{\sqrt{(1 - \gamma_3^2)(1 + \eta(1 - \gamma_3^2))}}.$$

Уравнения для переменных  $\gamma_3, K_1, K_2, K_3$  образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_3 &= kK_3, & \dot{K}_1 &= 0, & \dot{K}_2 &= 0, \\ \dot{K}_3 &= -\frac{k(K_1\gamma_3 - K_2)(K_1 - K_2\gamma_3)}{(1 - \gamma_3^2)^2} - k(\tilde{g} - \ddot{\xi}(t)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где введено обозначение

$$k = \sqrt{\frac{1 - \gamma_3^2}{1 + \eta(1 - \gamma_3^2)}}.$$

Для реконструкции динамики полной системы (2.9) к уравнениям (3.1) необходимо добавить квадратуру для угла собственного вращения  $\varphi = \arctan(\gamma_2/\gamma_1)$

$$\dot{\varphi} = \nu k_1 - \frac{\gamma_3(k_2 - k_1\gamma_3)}{1 - \gamma_3^2}.$$

На фиксированном уровне интегралов

$$K_1 = k_1, \quad K_2 = k_2$$

получаем систему с полутора степенями свободы

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_3 &= kK_3, \\ \dot{K}_3 &= -\frac{k(k_1\gamma_3 - k_2)(k_1 - k_2\gamma_3)}{(1 - \gamma_3^2)^2} - k(\tilde{g} - \ddot{\xi}(t)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Данную систему можно представить в гамильтоновом виде с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{\nu k_1^2}{2} + \frac{(k_2 - k_1\gamma_3)^2}{2(1 - \gamma_3^2)} + \frac{K_3^2}{2} - kK_3\dot{\xi}(t) + \tilde{g}\gamma_3. \quad (3.3)$$

и скобкой Пуассона

$$\{K_3, \gamma_3\} = k.$$

### § 4. Расщепление сепаратрис

Для доказательства расщепления сепаратрис воспользуемся методом Мельникова [32]. В указанной работе он предложил вычислять расстояние между родственными ветвями сепаратрис, на которые расщепилась сепаратриса невозмущенной системы, как функцию от некоторого параметра  $t_0$ , нумерующего двоякоасимптотические решения. Знакопеременность полученной функции говорит о трансверсальном пересечении сепаратрис, а следовательно, о хаотическом поведении системы.

Представим систему (2.9) в виде малого возмущения известной интегрируемой задачи о волчке Лагранжа. Для этого сделаем формальную замену амплитуды колебаний плоскости

$$\tilde{\xi}(t) \rightarrow \eta \hat{\xi}(t). \quad (4.1)$$

Нетрудно убедиться, что гамильтониан (3.3) после подстановки (4.1) и устремления  $\eta \rightarrow 0$  совпадает с гамильтонианом редуцированной системы для задачи о волчке Лагранжа

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\nu K_1^2}{2} + \frac{(K_2 - K_1 \gamma_3)^2}{2(1 - \gamma_3^2)} + \frac{K_3^2}{2} + \tilde{g} \gamma_3.$$

Рассматриваемая система (2.9) (как и уравнения для волчка Лагранжа) допускает два семейства периодических решений

$$\mathbf{M} = (0, 0, M_3^0), \quad \boldsymbol{\gamma} = (0, 0, \pm 1). \quad (4.2)$$

Решение со знаком “+” является неустойчивым и соответствует вращению волчка относительно вертикально расположенной оси симметрии на месте, при котором центр масс расположен выше геометрического центра. Второе решение (со знаком “-”) является устойчивым и соответствует такому же вращению, но с центром масс, расположенным ниже геометрического центра.

Уравнения движения волчка Лагранжа допускают двухпараметрическое семейство двоякоасимптотических решений [33, 37]

$$\begin{aligned} M_1^{(0)} &= \frac{2\alpha}{\cosh \alpha(t-t_0)} \cos(\beta(t-t_0) + \varphi_0), \quad M_2^{(0)} = \frac{2\alpha}{\cosh \alpha(t-t_0)} \sin(\beta(t-t_0) + \varphi_0), \quad M_3^{(0)} = c, \\ \gamma_1^{(0)} &= \frac{\alpha c}{\cosh \alpha(t-t_0)} \cos(\beta(t-t_0) + \varphi_0) + \frac{2\alpha^2 \sinh \alpha(t-t_0)}{\cosh^2 \alpha(t-t_0)} \sin(\beta(t-t_0) + \varphi_0) \\ \gamma_2^{(0)} &= \frac{\alpha c}{\cosh \alpha(t-t_0)} \sin(\beta(t-t_0) + \varphi_0) - \frac{2\alpha^2 \sinh \alpha(t-t_0)}{\cosh^2 \alpha(t-t_0)} \cos(\beta(t-t_0) + \varphi_0) \\ \gamma_3^{(0)} &= 1 - \frac{2\alpha^2}{\cosh^2 \alpha(t-t_0)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{4-c^2}$ ,  $\beta = \frac{c}{2} - c\nu$ ,  $t_0$  — параметр семейства, задающий сдвиг начала отсчета времени,  $\varphi_0$  — параметр семейства, определяющий поворот волчка вокруг собственной оси симметрии в начальный момент времени. Решения (4.3) лежат на совместном уровне интегралов  $\mathcal{F}_1 = c$ ,  $\mathcal{F}_2 = c$  и при  $t \rightarrow \pm\infty$  стремятся к неустойчивому периодическому решению (4.2).

Для редуцированной системы с полутора степенями свободы (3.2) указанное семейство двоякоасимптотических решений (4.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_3^{(0)} &= 1 - \frac{2\alpha^2}{\cosh^2 \alpha(t-t_0)}, \\ K_3^{(0)} &= \frac{2\alpha^2 \cosh \alpha(t-t_0) \sinh \alpha(t-t_0)}{\sqrt{(\cosh^2 \alpha(t-t_0) - \alpha^2)(4a\alpha^2 \cosh^2 \alpha(t-t_0) - 4a\alpha^4 + \cosh^4 \alpha(t-t_0))}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

При  $t \rightarrow \pm\infty$  данные решения стремятся к неустойчивой неподвижной точке системы (3.2)

$$\gamma_3 = 1, \quad K_3 = 0.$$

Как видно из (4.4) в редуцированной задаче остается только один параметр семейства  $t_0$ .



Вычислим далее интеграл Мельникова для приведенной системы (3.2) на решении (4.4)

$$J(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathcal{H}_0}{dt} \Big|_{\substack{K_3=K_3^{(0)}(t,t_0) \\ \gamma_3=\gamma_3^{(0)}(t,t_0)}} dt.$$

Взяв производную от  $\mathcal{H}_0$  по времени в силу системы (3.2), получим

$$J(t_0) = \eta \int_{-\infty}^{+\infty} k(\gamma_3^{(0)}(t, t_0)) K_3^{(0)}(t, t_0) \ddot{\xi}(t) dt.$$

Разложим подынтегральное выражение в ряд, считая возмущение системы малым  $\eta \ll 1$

$$J(t_0) = \eta J_1(t_0) + O(\eta^2).$$

Первое слагаемое в разложении можно представить в виде

$$J_1(t_0) = 4\alpha^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh \alpha(t - t_0)}{\cosh^3 \alpha(t - t_0)} \ddot{\xi}(t) dt.$$

Зададим колебания плоскости в виде периодической функции времени  $\hat{\xi}(t) = A \sin \mu t$ , где  $A$  — амплитуда колебаний,  $\mu = \text{const}$  — их частота.

Несобственный интеграл  $J_1(t_0)$  в этом случае вычисляется при помощи вычетов

$$J_1(t_0) = -\frac{2\pi\mu^4 A \cos \mu t_0}{\sinh \frac{\mu\pi}{2\alpha}}. \tag{4.5}$$

Из (4.5) следует, что интеграл Мельникова уже в первом порядке малости по величине возмущения  $\eta$  является знакопеременной функцией. Следовательно, редуцированная система является неинтегрируемой и не допускает дополнительного интеграла при произвольных значениях частоты колебаний и малых значениях амплитуды колебаний плоскости. Из неинтегрируемости приведенной системы следует неинтегрируемость и полной системы (2.9).

### § 5. Численное моделирование динамики волчка

В данном разделе мы приведем результаты численного моделирования движения волчка по гладкой горизонтальной плоскости, совершающей периодические колебания вида

$$\xi(t) = \delta \sin \tau,$$

где  $\delta$  — безразмерная амплитуда колебаний плоскости,  $\tau = \mu t$  — безразмерная единица времени,  $\mu$  — частота колебаний. Тогда ускорение свободного падения  $\tilde{g}$  и константы интегралов  $k_1$  и  $k_2$  запишутся через соответствующие безразмерные параметры  $\gamma$ ,  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  в виде

$$\tilde{g} = \mu^2 \gamma, \quad k_1 = \mu \kappa_1, \quad k_2 = \mu \kappa_2.$$

Для удобства отображения фазовых траекторий вблизи неустойчивой неподвижной точки перейдем от переменных  $\gamma_3$ ,  $K_3$  к углу нутации  $\vartheta$ , и его производной  $\dot{\vartheta}$ . Они связаны между собой соотношениями

$$\gamma_3 = \cos \vartheta, \quad K_3 = -\sqrt{1 + \eta \sin^2 \vartheta \dot{\vartheta}}.$$



В результате система (3.2) может быть записана в виде неавтономного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{1}{1 + \eta \sin^2 \vartheta} \left( \eta \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2 + \frac{(\kappa_1 \cos \vartheta - \kappa_2)(\kappa_1 - \kappa_2 \cos \vartheta)}{2 \sin^3 \vartheta} + (-\gamma + \delta \sin \tau) \sin \vartheta \right). \quad (5.1)$$

Как было сказано выше, рассматриваемая система имеет два частных решения (4.2), соответствующих нижнему и верхнему вертикальному вращению. Верхнее (неустойчивое) решение (4.2) в переменных  $\vartheta, \dot{\vartheta}$  имеет вид

$$\vartheta = 0, \quad \dot{\vartheta} = 0 \quad (5.2)$$

и лежит на совместном уровне интегралов

$$\kappa_1 = \kappa_2.$$

На данном уровне интегралов уравнение движения (5.1) имеет вид

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{1}{1 + \eta \sin^2 \vartheta} \left( \eta \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\vartheta}^2 + \frac{\kappa_1^2 \operatorname{tg}(\vartheta/2)}{2 \cos^2(\vartheta/2)} + (-\gamma + \delta \sin \tau) \sin \vartheta \right). \quad (5.3)$$

Для удобства исследования движений вблизи решения (5.2), переопределим область определения переменной  $\vartheta$  следующим образом

$$\vartheta \in [-\pi, \pi).$$

При этом для рассмотрения полной системы необходимо добавить соответствующее правило склейки для переменных  $\vartheta, \varphi$ . Однако в силу симметрии уравнения (5.1) относительно замены  $\vartheta \rightarrow -\vartheta$ , данная склейка не повлияет на вид фазового портрета.

На рис. 2 приведено отображение через период  $\tau = 2\pi$  системы (5.3) на плоскости  $(\vartheta, \dot{\vartheta})$  при значениях параметров

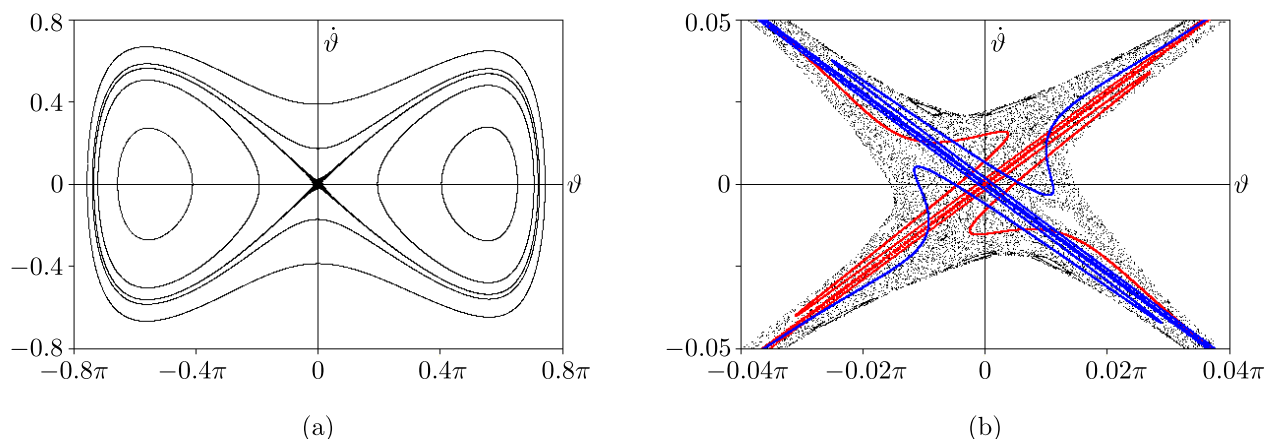
$$\kappa_1 = 0.4, \quad \eta = 0.148, \quad \gamma = 0.232, \quad \delta = 7 \cdot 10^{-5}.$$

На рис. 2, *a* изображен фазовый портрет приведенной системы (5.3). Вследствие малого значения амплитуды колебаний плоскости, поведение системы практически не отличается от интегрируемого случая. На рис. 2, *b* приведен увеличенный фрагмент рис. 2, *a* и изображены устойчивая и неустойчивая ветви сепаратрис неустойчивой неподвижной точки (5.2). Как видно на рисунке, эти ветви пересекаются между собой. Также на увеличенном фрагменте отчетливо виден стохастический слой, соответствующий хаотическим траекториям системы.

### Заключение

В данной работе мы рассмотрели задачу о качении сферического волчка с осесимметричным распределением масс по гладкой горизонтальной плоскости, совершающей периодические вертикальные колебания. При помощи метода Мельникова мы показали, что рассматриваемая система не допускает дополнительного интеграла движения, следовательно, является неинтегрируемой.

Отметим, что для рассматриваемой в данной работе системы необходимо отдельно исследовать вопрос о безторывном движении волчка по вибрирующей плоскости. Для задачи



**Рис. 2.** Отображение через период системы (5.3) на плоскости  $(\vartheta, \dot{\vartheta})$ . (а) Общий вид фазового портрета. (б) Трансверсальное пересечение сепаратрис вблизи неустойчивой неподвижной точки (5.2).

о качении шара с маятником по вибрирующей плоскости эти исследования выполнены в работе [11]. Как было отмечено выше, эти системы совпадают с точностью до замены параметров (2.10). Следовательно, все выводы о безотрывном движении, полученные для системы, рассмотренной в [11], справедливы и для системы, исследованной в данной работе.

Дальнейшее исследование данной системы может быть связано с исследованием ее динамики при быстрых колебаниях плоскости. Используя методы построения вибрационного потенциала [8], данную задачу можно приближенно описать некоторой интегрируемой системой дифференциальных уравнений. Интересно было бы провести анализ такой интегрируемой системы и сравнить ее динамику с динамикой точной системы.

Авторы выражают благодарность И. С. Мамаеву и И. А. Бизяеву за полезные обсуждения полученных результатов.

**Финансирование.** Исследование выполнено в Уральском математическом центре при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (FEWS-2020-0009).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stephenson A. On a new type of dynamical stability // Mem. Proc. Manch. Lit. Phil. Sci. 1908. Vol. 52. P. 1–10.
2. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
3. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. 1951. Т. 44. № 5. С. 7–20.  
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0044.195105b.0007>
4. Холостова О.В. О динамике волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 785–796.
5. Холостова О.В. Об устойчивости «спящего» волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 858–868.
6. Холостова О.В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016.
7. Маркеев А.П. О движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Механика твердого тела. 2012. № 4. С. 3–10.  
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18055793>

8. Маркеев А.П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 193–203.  
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15634409>
9. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
10. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.
11. Kilin A.A., Pivovarova E.N. Stability and stabilization of steady rotations of a spherical robot on a vibrating base // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2020. Vol. 25. Issue 6. P. 729–752.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354720060155>
12. Vetchanin E.V., Mikishanina E.A. Vibrational stability of periodic solutions of the Liouville equations // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 15. Issue 3. P. 351–363.  
<https://doi.org/10.20537/nd190312>
13. Awrejcewicz J., Kudra G. Mathematical modelling and simulation of the bifurcational wobblestone dynamics // *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. 2014. Vol. 3. Issue 2. P. 123–132.  
<https://doi.org/10.5890/DNC.2014.06.002>
14. Awrejcewicz J., Kudra G. Dynamics of a wobblestone lying on vibrating platform modified by magnetic interactions // *Procedia IUTAM*. 2017. Vol. 22. P. 229–236.  
<https://doi.org/10.1016/j.piutam.2017.08.026>
15. Kilin A.A., Pivovarova E.N. Chaplygin top with a periodic gyrostatic moment // *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2018. Vol. 25. Issue 4. P. 509–524.  
<https://doi.org/10.1134/S1061920818040088>
16. Mamaev I.S., Vetchanin E.V. Dynamics of rubber Chaplygin sphere under periodic control // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2020. Vol. 25. Issue 2. P. 215–236.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354720020069>
17. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S. Different models of rolling for a robot ball on a plane as a generalization of the Chaplygin ball problem // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2019. Vol. 24. Issue 5. P. 560–582. <https://doi.org/10.1134/S1560354719050071>
18. Bizyaev I.A., Mamaev I.S. Separatrix splitting and nonintegrability in the nonholonomic rolling of a generalized Chaplygin sphere // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2020. Vol. 126. 103550. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103550>
19. Ilin K.I., Moffatt H.K., Vladimirov V.A. Dynamics of a rolling robot // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2017. Vol. 114. Issue 49. P. 12858–12863.  
<https://doi.org/10.1073/pnas.1713685114>
20. Putkaradze V., Rogers S. On the dynamics of a rolling ball actuated by internal point masses // *Meccanica*. 2018. Vol. 53. Issue 15. P. 3839–3868.  
<https://doi.org/10.1007/s11012-018-0904-5>
21. Putkaradze V., Rogers S.M. On the normal force and static friction acting on a rolling ball actuated by internal point masses // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2019. Vol. 24. Issue 2. P. 145–170.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354719020023>
22. Караваев Ю.Л., Килин А.А. Неголономная динамика и управление сферороботом с внутренней омниколесной платформой: теория и эксперименты // *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*. 2016. Т. 295. С. 174–183.  
<https://doi.org/10.1134/S0371968516040099>
23. Bai Y., Svinin M., Yamamoto M. Dynamics-based motion planning for a pendulum-actuated spherical rolling robot // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2018. Vol. 23. Issue 4. P. 372–388.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354718040020>
24. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kozlov V.V., Mamaev I.S. Fermi-like acceleration and power-law energy growth in nonholonomic systems // *Nonlinearity*. 2019. Vol. 32. Issue 9. P. 3209–3233.  
<https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab1f2d>

25. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S. The Chaplygin sleigh with parametric excitation: chaotic dynamics and nonholonomic acceleration // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2017. Vol. 22. Issue 8. P. 955–975. <https://doi.org/10.1134/S1560354717080056>
26. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S. Exotic dynamics of nonholonomic roller racer with periodic control // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2018. Vol. 23. Issue 7–8. P. 983–994. <https://doi.org/10.1134/S1560354718070122>
27. Kuznetsov S.P. Regular and chaotic dynamics of a Chaplygin sleigh due to periodic switch of the nonholonomic constraint // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2018. Vol. 23. Issue 2. P. 178–192. <https://doi.org/10.1134/S1560354718020041>
28. Borisov A.V., Kuznetsov S.P. Comparing dynamics initiated by an attached oscillating particle for the nonholonomic model of a Chaplygin sleigh and for a model with strong transverse and weak longitudinal viscous friction applied at a fixed point on the body // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2018. Vol. 23. Issue 7–8. P. 803–820. <https://doi.org/10.1134/S1560354718070018>
29. Fedonyuk V., Tallapragada P. The dynamics of a Chaplygin sleigh with an elastic internal rotor // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2019. Vol. 24. Issue 1. P. 114–126. <https://doi.org/10.1134/S1560354719010076>
30. Bizyaev I.A., Mamaev I.S. Dynamics of the nonholonomic Suslov problem under periodic control: unbounded speedup and strange attractors // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2020. Vol. 53. Issue 18. 185701. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab7e52>
31. Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique // *Acta Mathematica*. 1890. Vol. 13. Issue 1. P. 1–270. <https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485881725>
32. Мельников В.К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // *Труды Московского математического общества*. 1963. Т. 12. С. 3–52. <http://mi.mathnet.ru/mmo137>
33. Довбыш С.А. Расщепление сепаратрис неустойчивых равномерных вращений и неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 1990. № 3. С. 70–77. <http://mi.mathnet.ru/vmumm2666>
34. Зиглин С.Л. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // *Труды Московского математического общества*. 1980. Т. 41. С. 287–303. <http://mi.mathnet.ru/mmo394>
35. Burov A.A., Nikonov V.I. On the nonlinear Meissner equation // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2019. Vol. 110. P. 26–32. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.01.001>
36. Li J., Zhang Y. Solitary wave and chaotic behavior of traveling wave solutions for the coupled KdV equations // *Applied Mathematics and Computation*. 2011. Vol. 218. Issue 5. P. 1794–1797. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.06.063>
37. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
38. Holmes P.J. Averaging and chaotic motions in forced oscillations // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1980. Vol. 38. Issue 1. P. 65–80. <https://doi.org/10.1137/0138005>
39. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // *УМН*. 1983. Т. 38. № 1 (229). С. 3–67. <http://mi.mathnet.ru/umn2823>
40. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
41. Лоскутов А.Ю., Джаноев А.Р. Подавление хаоса в окрестности сепаратрисы // *ЖЭТФ*. 2004. Т. 125. № 5. С. 1194–1203. <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/r/index/r/125/5/p1194?a=list>
42. Borisov A.V., Mamaev I.S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2008. Vol. 13. Issue 5. P. 443–490. <https://doi.org/10.1134/S1560354708050079>

Поступила в редакцию 25.09.2020

Килин Александр Александрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической физики, Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1358-5960>

E-mail: [aka@rcd.ru](mailto:aka@rcd.ru)

Пивоварова Елена Николаевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теоретической физики, Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7779-7183>

E-mail: [archive@rcd.ru](mailto:archive@rcd.ru)

**Цитирование:** А. А. Килин, Е. Н. Пивоварова. Неинтегрируемость задачи о качении сферического волчка по вибрирующей плоскости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 4. С. 628–644.

*A. A. Kilin, E. N. Pivovarova*

### Nonintegrability of the problem of a spherical top rolling on a vibrating plane

*Keywords:* spherical top, vibrating plane, Lagrange case, separatrix splitting, Melnikov's integral, nonintegrability, chaos, period advance map.

MSC2010: 70E18, 37J30

DOI: [10.35634/vm200407](https://doi.org/10.35634/vm200407)

This paper investigates the rolling motion of a spherical top with an axisymmetric mass distribution on a smooth horizontal plane performing periodic vertical oscillations. For the system under consideration, equations of motion and conservation laws are obtained. It is shown that the system admits two equilibrium points corresponding to uniform rotations of the top about the vertical symmetry axis. The equilibrium point is stable when the center of mass is located below the geometric center, and is unstable when the center of mass is located above it. The equations of motion are reduced to a system with one and a half degrees of freedom. The reduced system is represented as a small perturbation of the problem of the Lagrange top motion. Using Melnikov's method, it is shown that the stable and unstable branches of the separatrix intersect transversally with each other. This suggests that the problem is nonintegrable. Results of computer simulation of the top dynamics near the unstable equilibrium point are presented.

**Funding.** This work was carried out in Ural Mathematical Center within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of Russia (FEWS-2020-0009).

### REFERENCES

1. Stephenson A. On a new type of dynamical stability, *Mem. Proc. Manch. Lit. Phil. Sci.*, 1908, vol. 52, pp. 1–10.
2. Kapitza P.L. Dynamic stability of a pendulum when its point of suspension vibrates, *Soviet Phys. JETP*, 1951, vol. 21, no. 5, pp. 588–597 (in Russian).
3. Kapitza P.L. A pendulum with oscillating suspension, *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 1951, vol. 44, no. 5, pp. 7–20 (in Russian). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0044.195105b.0007>
4. Kholostova O.V. The dynamics of a Lagrange top with a vibrating suspension point, *J. Appl. Math. Mech.*, 1999, vol. 63, no. 5, pp. 741–750. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(99\)00094-5](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(99)00094-5)
5. Kholostova O.V. The stability of a “sleeping” Lagrange for with a vibrating suspension point, *J. Appl. Math. Mech.*, 2000, vol. 64, no. 5, pp. 821–831. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(00\)00110-6](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(00)00110-6)
6. Kholostova O.V. *Zadachi dinamiki tverdykh tel s vibriruyushchim podvesom* (Problems of dynamics of rigid bodies with a vibrating suspension), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2016.
7. Markeev A.P. On the motion of a heavy dynamically symmetric rigid body with vibrating suspension point, *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, no. 4, pp. 373–379. <https://doi.org/10.3103/S0025654412040012>
8. Markeyev A.P. The equations of the approximate theory of the motion of a rigid body with a vibrating suspension point, *J. Appl. Math. Mech.*, 2011, vol. 75, no. 2, pp. 132–139. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.05.002>
9. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration points in celestial mechanics and space dynamics), Moscow: Nauka, 1978.
10. Markeev A.P. *Lineinye gamiltonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoychivosti dvizheniya sputnika otnositel'no tsentra mass* (Linear Hamiltonian systems and some problems of stability of the satellite center of mass), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computer Science, 2009.



11. Kilin A.A., Pivovarova E.N. Stability and stabilization of steady rotations of a spherical robot on a vibrating base, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020, vol. 25, no. 6, pp. 729–752.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354720060155>
12. Vetchanin E.V., Mikishanina E.A. Vibrational stability of periodic solutions of the Liouville equations, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15, no. 3, pp. 351–363.  
<https://doi.org/10.20537/nd190312>
13. Awrejcewicz J., Kudra G. Mathematical modelling and simulation of the bifurcational wobblestone dynamics, *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, 2014, vol. 3, no. 2, pp. 123–132.  
<https://doi.org/10.5890/DNC.2014.06.002>
14. Awrejcewicz J., Kudra G. Dynamics of a wobblestone lying on vibrating platform modified by magnetic interactions, *Procedia IUTAM*, 2017, vol. 22, pp. 229–236.  
<https://doi.org/10.1016/j.piutam.2017.08.026>
15. Kilin A.A., Pivovarova E.N. Chaplygin top with a periodic gyrostatic moment, *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2018, vol. 25, no. 4, pp. 509–524.  
<https://doi.org/10.1134/S1061920818040088>
16. Mamaev I.S., Vetchanin E.V. Dynamics of rubber Chaplygin sphere under periodic control, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020, vol. 25, no. 2, pp. 215–236.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354720020069>
17. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S. Different models of rolling for a robot ball on a plane as a generalization of the Chaplygin ball problem, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 5, pp. 560–582. <https://doi.org/10.1134/S1560354719050071>
18. Bizyaev I.A., Mamaev I.S. Separatrix splitting and nonintegrability in the nonholonomic rolling of a generalized Chaplygin sphere, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2020, vol. 126, 103550. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103550>
19. Ilin K.I., Moffatt H.K., Vladimirov V.A. Dynamics of a rolling robot, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2017, vol. 114, no. 49, pp. 12858–12863.  
<https://doi.org/10.1073/pnas.1713685114>
20. Putkaradze V., Rogers S. On the dynamics of a rolling ball actuated by internal point masses, *Meccanica*, 2018, vol. 53, no. 15, pp. 3839–3868.  
<https://doi.org/10.1007/s11012-018-0904-5>
21. Putkaradze V., Rogers S.M. On the normal force and static friction acting on a rolling ball actuated by internal point masses, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 2, pp. 145–170.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354719020023>
22. Karavaev Yu.L., Kilin A.A. Nonholonomic dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform: theory and experiments, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 295, no. 1, pp. 158–167. <https://doi.org/10.1134/S0081543816080095>
23. Bai Y., Svinin M., Yamamoto M. Dynamics-based motion planning for a pendulum-actuated spherical rolling robot, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, no. 4, pp. 372–388.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354718040020>
24. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kozlov V.V., Mamaev I.S. Fermi-like acceleration and power-law energy growth in nonholonomic systems, *Nonlinearity*, 2019, vol. 32, no. 9, pp. 3209–3233.  
<https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab1f2d>
25. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S. The Chaplygin sleigh with parametric excitation: chaotic dynamics and nonholonomic acceleration, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, no. 8, pp. 955–975. <https://doi.org/10.1134/S1560354717080056>
26. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S. Exotic dynamics of nonholonomic roller racer with periodic control, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, no. 7–8, pp. 983–994.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354718070122>
27. Kuznetsov S.P. Regular and chaotic dynamics of a Chaplygin sleigh due to periodic switch of the nonholonomic constraint, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, no. 2, pp. 178–192.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354718020041>
28. Borisov A.V., Kuznetsov S.P. Comparing dynamics initiated by an attached oscillating particle for



- the nonholonomic model of a Chaplygin sleigh and for a model with strong transverse and weak longitudinal viscous friction applied at a fixed point on the body, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, no. 7–8, pp. 803–820. <https://doi.org/10.1134/S1560354718070018>
29. Fedonyuk V., Tallapragada P. The dynamics of a Chaplygin sleigh with an elastic internal rotor, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 1, pp. 114–126. <https://doi.org/10.1134/S1560354719010076>
30. Bizyaev I.A., Mamaev I.S. Dynamics of the nonholonomic Suslov problem under periodic control: unbounded speedup and strange attractors, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2020, vol. 53, no. 18, 185701. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab7e52>
31. Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Mathematica*, 1890, vol. 13, no. 1. pp. 1–270. <https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485881725>
32. Mel'nikov V.K. On the stability of a center for time-periodic perturbations, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 1963, vol. 12, pp. 3–52 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/mmo137>
33. Dovbysh S.A. Splitting of separatrices of unstable uniform rotations and nonintegrability of a perturbed Lagrange problem, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya I. Matematika. Mekhanika*, 1990, no. 3, pp. 70–77 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/vmumm2666>
34. Ziglin S.L. Dichotomy of the separatrices, bifurcation of solutions and nonexistence of an integral in the dynamics of a rigid body, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 1980, vol. 41, pp. 287–303 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/mmo394>
35. Burov A.A., Nikonov V.I. On the nonlinear Meissner equation, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2019, vol. 110, pp. 26–32. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.01.001>
36. Li J., Zhang Y. Solitary wave and chaotic behavior of traveling wave solutions for the coupled KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2011, vol. 218, no. 5, pp. 1794–1797. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.06.063>
37. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Rigid body dynamics*, De Gruyter Studies in Mathematical Physics, vol. 52, Berlin–Boston: Higher Education Press and Walter de Gruyter GmbH, 2018. <https://doi.org/10.1515/9783110544442>
38. Holmes P.J. Averaging and chaotic motions in forced oscillations, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1980, vol. 38, no. 1, pp. 65–80. <https://doi.org/10.1137/0138005>
39. Kozlov V.V. Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics, *Russian Mathematical Surveys*, 1983, vol. 38, no. 1, pp. 1–76. <https://doi.org/10.1070/RM1983v038n01ABEH003330>
40. Kuznetsov S.P. *Dinamicheskii chaos* (Dynamical chaos), Moscow: Fizmatlit, 2001.
41. Loskutov A.Y., Dzhanoev A.R. Suppression of chaos in the vicinity of a separatrix, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2004, vol. 98, no. 5, pp. 1045–1053. <https://doi.org/10.1134/1.1767574>
42. Borisov A.V., Mamaev I.S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490. <https://doi.org/10.1134/S1560354708050079>

Kilin Alexander Alexandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Physics, Ural Mathematical Center, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1358-5960>

E-mail: [aka@rcd.ru](mailto:aka@rcd.ru)

Pivovarova Elena Nikolaevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Theoretical Physics, Ural Mathematical Center, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7779-7183>

E-mail: [archive@rcd.ru](mailto:archive@rcd.ru)

**Citation:** A. A. Kilin, E. N. Pivovarova. Nonintegrability of the problem of a spherical top rolling on a vibrating plane, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 4, pp. 628–644.