

УДК 531.011

© *И. А. Бизяев, И. С. Мамаев***ДИНАМИКА ПАРЫ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ И ПРОФИЛЯ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ**

В данной работе получены уравнения движения пары вихрей и кругового профиля с параметрическим возбуждением, которое возникает за счет периодического движения материальной точки. Подобные плоские задачи, с одной стороны, носят модельный характер и не могут быть использованы для точного количественного описания реальных траекторий системы. С другой стороны, во многих случаях такие модели позволяют получить достаточно точную качественную картину динамики и, вследствие простоты, данные 2D модели позволяют оценить влияние различных параметров. Описаны относительные положения равновесия, обобщающие решения Феппля и коллинеарные конфигурации, в отсутствие движения материальной точки. Показано, что в окрестности относительных равновесий в случае периодического движения центра масс профиля образуется стохастический слой.

Ключевые слова: точечные вихри, идеальная жидкость, отображение Пуанкаре, профиль в жидкости, 2D гидродинамика.

DOI: [10.35634/vm200406](https://doi.org/10.35634/vm200406)**Введение**

Данная работа продолжает исследование движения кругового профиля (цилиндра) и точечных вихрей в идеальной жидкости. Уравнения движения кругового профиля и n -точечных вихрей были получены в работах [11, 17, 19]. Для них выделяется случай одного вихря $n = 1$, так как тогда уравнения движения интегрируемы в квадратурах, но уже для двух вихрей $n = 2$ в системе присутствуют хаотические траектории [2, 3].

Остановимся подробнее на динамике цилиндра и двух вихрей равных, но противоположных по знаку интенсивностей (пара вихрей). Для них существует стационарное решение, описывающее прямолинейное движение кругового цилиндра, геометрический центр которого образует вместе с парой вихрей равнобедренный треугольник. Оно обобщает известное решение Феппля для неподвижного цилиндра и пары вихрей в набегающем потоке [7]. Оказывается, что как и для решения Феппля (см. например, [6, 21]) указанное стационарное решение является устойчивым относительно симметричных возмущений (т.е. возмущений относительно которых пара вихрей и геометрический центр профиля образуют равнобедренный треугольник), но является неустойчивым относительно несимметричных возмущений [19]. Другое решение соответствующее прямолинейному движению, в котором геометрический центр профиля и пара вихрей располагаются на одной прямой рассмотрено в [20].

Возможность стабилизации решения Феппля, за счет обратной связи рассмотрена в работах [14, 15], задача адвекции обсуждается в [18]. Движение пары вихрей и эллиптического профиля с точки зрения понимания механизма плавания рыб рассмотрено в работе [8]. В ней найдены относительные равновесия обобщающие решения Феппля и исследована их устойчивость.

В данной работе рассмотрена задача о движении пары вихрей и профиля с изменяющимся со временем распределением масс. Подобные задачи имеют важное практическое

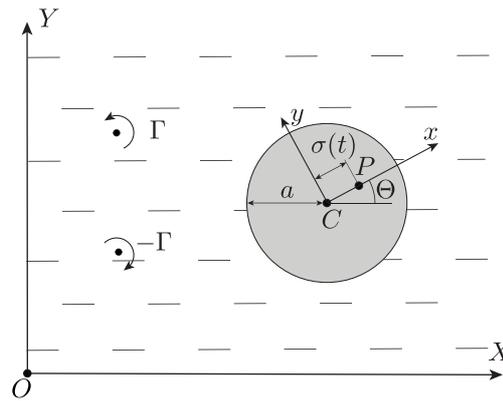


Рис. 1. Определение различных величин, описывающих цилиндрический профиль и точечные вихри в идеальной жидкости

значение в робототехнике, так как возникающие режимы движения, могут быть приняты за базовые маневры (называемые гейтами), которые обеспечиваются системой управления. Отметим, что ранее также исследовалась динамика сфероробота с периодически изменяющимся распределением масс катящегося по горизонтальной плоскости, в рамках неголономной механики [1, 10, 13]. Оказалось, что для некоторых ограничений на параметры системы можно добиться неограниченного ускорения шара. Движение профиля в идеальной жидкости в присутствии внешней периодической силы рассмотрено в работах [5, 22].

§ 1. Уравнения движения

Рассмотрим плоскопараллельное движение цилиндрического тела (цилиндра) в безграничном объеме идеальной жидкости, в которой присутствует *вихревая пара* — два точечных вихря с равными по величине и противоположными по знаку интенсивностями. Пусть выполнены следующие условия:

- профиль тела является *окружностью* радиуса a , у которого центр масс совпадает с геометрическим центром окружности C ;
- тело имеет полость, в которой движется материальная точка P по заданному закону от времени вдоль прямой проходящей через геометрический центр C ;
- циркуляция скорости жидкости вокруг профиля равна нулю.

Выберем две системы координат (см. рис. 1) на плоскости перпендикулярной движению вихрей и цилиндра:

- *неподвижную* (инерциальную) OXY ;
- *подвижную* Cxy , которая жестко связана с профилем таким образом, что ее начало совпадает с центром окружности, а ось Cx направлена вдоль движения материальной точки P .

Пусть $\mathbf{R}_0 = (X_0, Y_0)$ — радиус-вектор геометрического центра профиля в неподвижной системе координат OXY . Его ориентацию будем определять с помощью угла Θ между осями OX и Cx . Координаты вихрей в неподвижных осях OXY с положительной и отрицательной интенсивностями (Γ и $-\Gamma$) обозначим соответственно $\mathbf{R}_1 = (X_1, Y_1)$ и $\mathbf{R}_2 = (X_2, Y_2)$.

Функцию Лагранжа системы (цилиндр+материальная точка) представим в следующей форме:

$$L = T + (\mathbf{A}, \dot{\mathbf{R}}_0) + W.$$

1) T – кинетическая энергия системы с учетом эффекта присоединенных масс:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{R}}_0^2 - m_0c(t)(\dot{X}_0 \sin \Theta - \dot{Y}_0 \cos \Theta)\dot{\Theta} + \frac{1}{2}I(t)\dot{\Theta}^2 + m_0\dot{c}(t)(\dot{X}_0 \cos \Theta + \dot{Y}_0 \sin \Theta),$$

где m_0 , $I(t)$ – масса и момент инерции системы, а $c(t)$ – положение ее центра масс на оси Cx_1 , $m = m_0 + \rho\pi a^2$ – эффективная масса, ρ – плотность жидкости. Если $\sigma(t)$ – закон движения материальной точки по оси Cx_1 , а m_p ее масса, тогда

$$I(t) = J + m_p\sigma^2(t), \quad c(t) = \frac{m_p}{m_0}\sigma(t),$$

где J – момент инерции цилиндра.

2) \mathbf{A} – векторный потенциал, возникающий за счет взаимодействия профиля с вихревой парой

$$\mathbf{A} = \rho\Gamma a^2 \mathbf{J}_z \left(\frac{\Delta \mathbf{R}_1}{\Delta R_1^2} - \frac{\Delta \mathbf{R}_2}{\Delta R_2^2} \right), \quad \mathbf{J}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\Delta \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0$ и $\Delta \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0$.

3) W – скалярный потенциал, также возникающий за счет взаимодействия профиля с вихревой парой. Он совпадает с функцией Кирхгофа–Рауса для пары вихрей вне круговой области [8]:

$$W = \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi} \left[\ln \frac{\Delta R_1^2 \Delta R_2^2 - 2a^2(\Delta R_1, \Delta R_2) + a^4}{(\Delta R_2^2 - a^2)(\Delta R_1^2 - a^2)} - \ln(R_1 - R_2)^2 \right].$$

Таким образом получаем уравнения движения для профиля в лагранжевой форме

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)' - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{q} = (X_0, Y_0, \Theta)$ – обобщенные координаты профиля. Систему (1.1) следует дополнить уравнениями движения для вихрей, которые имеют вид [3, 16]:

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = \frac{1}{\rho\Gamma} \mathbf{J}_z \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}_1}, \quad \dot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{1}{\rho\Gamma} \mathbf{J}_z \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}_2}. \quad (1.2)$$

§ 2. Редукция и гамильтонова форма уравнений движения

Уравнения движения профиля и пары вихрей (1.1), (1.2) не зависят явно от выбора начала отсчета и направления осей неподвижной системы координат OXY , то есть они инвариантны относительно группы движения плоскости $SE(2)$.

Для того чтобы получить редуцированную систему перейдем к новым переменным, которые остаются инвариантными относительно группы $SE(2)$. С физической точки зрения ясно, что это справедливо для координат вихрей $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$ и $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$ в подвижной системе координат Cxy :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{Q}\Delta \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{Q}\Delta \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}.$$

В качестве переменных редуцированной системы, описывающих цилиндр, выберем импульс $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ и угловой момент p_θ профиля в подвижной системе координат Cxy , к которым также добавим суммарный вихревой импульс и суммарный вихревой момент:

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}_0} - \rho \Gamma \mathbf{J}_z(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{1}{2} \rho \Gamma (\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2).$$

Коммутационные соотношения в новых переменных имеют вид (приведем только ненулевые скобки Пуассона) [4]:

$$\begin{aligned} \{p_\theta, p_x\} &= -p_y, \quad \{p_\theta, p_y\} = p_x, \quad \{p_x, p_y\} = 0, \\ \{x_1, y_1\} &= \frac{1}{\rho \Gamma}, \quad \{x_2, y_2\} = -\frac{1}{\rho \Gamma}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В результате уравнения движения редуцированной системы представляются в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= p_y \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \dot{p}_y = -p_x \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \dot{p}_\theta = p_x \frac{\partial H}{\partial p_y} - p_y \frac{\partial H}{\partial p_x}, \\ \dot{x}_1 &= \frac{1}{\rho \Gamma} \frac{\partial H}{\partial y_1}, \quad \dot{y}_1 = -\frac{1}{\rho \Gamma} \frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{\rho \Gamma} \frac{\partial H}{\partial y_2}, \quad \dot{y}_2 = \frac{1}{\rho \Gamma} \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} (L_x - m\dot{c})^2 + \frac{1}{2m} L_y^2 + \frac{(mL_\theta - m_0 c(t) L_y)^2}{2m(mI(t) - m_0^2 c^2(t))} - W, \\ L_x &= p_x - \rho \Gamma (y_1 - y_2) + \rho \Gamma a^2 \left(\frac{y_1}{\mathbf{r}_1^2} - \frac{y_2}{\mathbf{r}_2^2} \right), \quad L_y = p_y + \rho \Gamma (x_1 - x_2) - \rho \Gamma a^2 \left(\frac{x_1}{\mathbf{r}_1^2} - \frac{x_2}{\mathbf{r}_2^2} \right), \\ L_\theta &= p_\theta + \frac{1}{2} \rho \Gamma (\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2), \quad W = \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi} \left[\ln \frac{\mathbf{r}_1^2 \mathbf{r}_2^2 - 2a^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + a^4}{(\mathbf{r}_1^2 - a^2)(\mathbf{r}_2^2 - a^2)} - \ln(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \right]. \end{aligned}$$

Пуассонова структура, задаваемая скобками (2.1), вырождена (в данном случае это следствие нечетного числа переменных $p_x, p_y, p_\theta, x_1, y_1, x_2, y_2$) и следовательно обладает функцией Казимира

$$C = p_x^2 + p_y^2,$$

которая является первым интегралом системы (2.2). Если мы ограничим систему на поверхность уровня функции Казимира, то получим *гамильтонову систему с невырожденной скобкой и тремя с половиной степенями свободы*.

Для того, чтобы по известному решению редуцированной системы (2.2) определить движение профиля в неподвижной системе координат OXY воспользуемся нетеровскими интегралами [4]:

$$P_X = p_x \cos \Theta - p_y \sin \Theta, \quad P_Y = p_x \sin \Theta + p_y \cos \Theta, \quad M_\Theta = p_\theta + X_0 P_Y - Y_0 P_X. \quad (2.3)$$

За счет поворота неподвижных осей OXY (т.е. выбором начала отсчета Θ) можно добиться того, чтобы вектор, составленный из первых интегралов (P_X, P_Y) , был направлен вдоль оси OX , т.е.

$$P_Y = 0, \quad P_X = P^{(0)} = \text{const}, \quad M_\Theta = M^{(0)} = \text{const}.$$

Соответственно угол Θ и переменная Y_0 выражаются из соотношений (2.3) следующим образом:

$$\tan \Theta = -\frac{p_y}{p_x}, \quad Y_0 = \frac{M^{(0)} + p_\theta}{P^{(0)}}. \quad (2.4)$$

Эволюция переменной $X_0(t)$, описывающей движение профиля вдоль вектора суммарного импульса описывается следующим уравнением:

$$\dot{X}_0 = \frac{\partial H}{\partial p_x} \cos \Theta - \frac{\partial H}{\partial p_y} \sin \Theta. \quad (2.5)$$

§ 3. Инвариантное подмногообразие

Редуцированная система (2.2) обладает инвариантным подмногообразием

$$\mathcal{N} = \{(\mathbf{p}, p_\theta, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mid p_x = \text{const}, p_y = 0, p_\theta = 0, x_1 - x_2 = 0, y_1 + y_2 = 0\}.$$

Для него из соотношений (2.4) получим $\Theta = 0$ и $Y_0 = 0$. Таким образом, подмногообразие \mathcal{N} соответствует *поступательному движению профиля и пары вихрей вдоль оси OX , в котором вихри располагаются симметрично относительно этой оси* (см. рис. 2). Рассматриваемое инвариантное подмногообразие \mathcal{N} обобщает известные центрально симметричные решения в задаче четырех вихрей. Другое обобщение этих решений для вихрей на торе рассмотрено в работе [9].

Замечание 1. С механической точки зрения наличие инвариантного многообразия \mathcal{N} связано с тем, что, во-первых, если $x_1 = x_2, y_1 = -y_2$, то сила с которой пара вихрей воздействует на профиль имеет вид $\mathbf{F} = (F_X, 0)$, во-вторых, распределение масс системы (цилиндр+материальная точка) остается симметричным относительно оси Cx_1 .

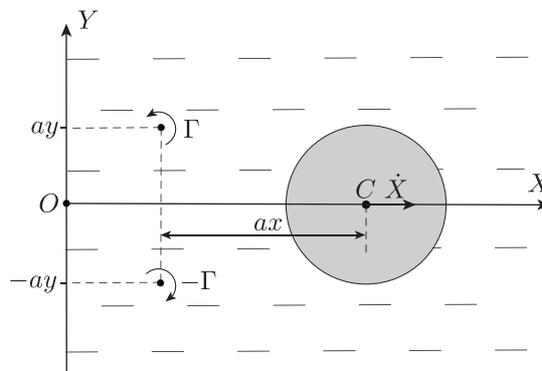


Рис. 2. Движение, соответствующее инвариантному подмногообразию \mathcal{N}

Перейдем к безразмерным переменным (x, y, X) и времени τ :

$$x_1 = ax, \quad y_1 = ay, \quad X_0 = aX, \quad t = \frac{a^2\pi}{\Gamma}\tau.$$

Эволюция переменных (x, y) описывается гамильтоновой системой с полутора степенями свободы:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial H}{\partial y}, & y' &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ H(x, y) &= \frac{\mu}{4}v_x^2 - \frac{1}{8} \ln \left[1 + \frac{4y^2}{(x^2 + y^2 - 1)^2} \right] + \frac{1}{8} \ln y^2, \\ v_x &= f - 2y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) - s'(\tau), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где штрих обозначает производную по τ и введены безразмерные параметры и функция $s(\tau)$:

$$f = \frac{p_x}{a\rho\Gamma}, \quad \mu = \frac{\pi\rho a^2}{m} \in (0, 1), \quad s(\tau) = \frac{1}{\mu} \frac{c(\tau)}{a} < 1.$$

Уравнение (2.5) в данном случае представим в форме

$$X' = \mu v_x. \quad (3.2)$$

Далее мы исследуем подробнее систему (3.1), (3.2).

§ 4. Хаотическая динамика для периодического возбуждения

Пусть центр масс неподвижен $s(\tau) = \text{const}$, тогда система (3.1) явно не зависит от времени. Кроме того уравнения движения инвариантны относительно замены переменных (инволюции)

$$x \rightarrow -x, \quad \tau \rightarrow -\tau.$$

Рассматриваемая система обладает двумя типами относительных равновесий, которые совпадают с критическими точками гамильтониана $H(x, y)$, которые является первым интегралом системы.

1) Пара вихрей и геометрический центр профиля C располагаются на одной прямой:

$$\Delta_1 = \{x = 0, y = z_0 = \text{const}\},$$

где $|z_0| > 1$ задается как корень полинома восьмой степени

$$P^{(8)}(z_0) = 8\mu(z_0^4 - 1)^2 - 4\mu z_0(z_0^4 - 1)(z_0^2 + 1)f + z_0^2((z_0^2 + 1)^2 + 2(z_0^2 - 1)) = 0.$$

Эти положения равновесия обобщают *коллинеарные конфигурации* в задаче трех вихрей.

2) Пара вихрей располагается на фиксированном расстоянии от профиля и образует с геометрическим центром C равнобедренный треугольник:

$$\Delta_2 = \left\{ x = \pm \frac{\sqrt{(3z_0^2 - 1)(z_0^2 + 1)}}{2z_0}, y = \frac{z_0^2 - 1}{2z_0} \right\},$$

$$\Delta_3 = \left\{ x = \pm \frac{\sqrt{(3z_0^2 - 1)(z_0^2 + 1)}}{2z_0}, y = -\frac{z_0^2 - 1}{2z_0} \right\},$$

где $z_0 = \sqrt{x^2 + y^2} > 1$ является корнем полинома десятой степени

$$P_{\pm}^{(10)} = 2\mu(z_0^4 - 1)(z_0^2 - 1)((z_0^2 - 1)^2 \mp fz_0^3) + z_0^8 = 0,$$

здесь и далее верхний знак соответствует Δ_2 , а нижний — Δ_3 . Данные положения равновесия обобщают *томсоновские конфигурации* в задаче трех вихрей. Кроме того, Δ_2 и Δ_3 обобщают *положения равновесия Фешля* для пары вихрей в набегающем потоке (с постоянной скоростью) в окрестности неподвижного кругового цилиндра [19]. Система (3.1) сводится к задаче Фешля если положить $\mu = 0$ (т.е. $m \rightarrow +\infty$).

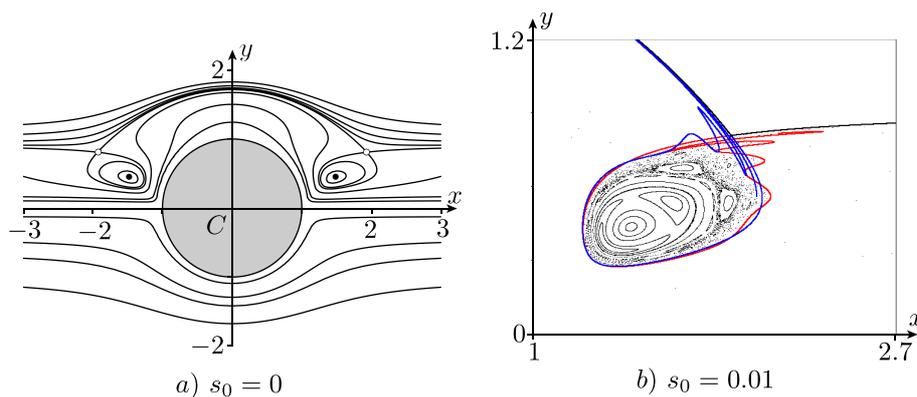


Рис. 3. Для фиксированных $\mu = 0.5$, $f = 1.9$, $\omega = 1$ фазовый портрет системы (a) для $s_0 = 0$ и отображение Пуанкаре (b) для $s_0 = 0.01$ в окрестности Δ_2

Фазовые портреты системы (3.1) в этом случае приведены на рис. 3, a и рис. 4, b. Как видим оба типа относительных равновесий могут быть как устойчивыми так и неустойчивыми относительно (симметричных) возмущений лежащих на подмногообразии \mathcal{N} . Отметим, что в окрестности устойчивых относительных равновесий Δ_1 возникают замкнутые инвариантные кривые, которые пересекают ось Cy . Они соответствуют движению для которого вихри поочередно то обгоняют, то отстают от цилиндра, то есть описывают чехарду пары вихрей и цилиндра.

Рассмотрим какое влияние окажет движение материальной точки на относительные равновесия профиля и пары вихрей. Пусть материальная точка движется по заданному периодически от времени закону. В качестве примера выберем

$$s(\tau) = s_0 \sin \omega \tau.$$

Для этого численно проанализируем отображение Пуанкаре плоскости $\mathbb{R}_{x,y}^2 = \{(x, y)\}$ через период, которое порождает система (3.1). Относительные равновесия Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 для $s_0 = 0$ соответствуют неподвижным точкам на этом отображении Пуанкаре.

Так как в этом случае система явно зависит от времени, то гамильтониан уже не является первым интегралом. Тем не менее, для малых s_0 указанные относительные равновесия не исчезают, а только слегка смещаются и сохраняют свой тип. Характерный вид отображения Пуанкаре и сепаратрис в окрестности положения равновесия Δ_2 приведен на рис. 3, 4.

Как известно [12], при отклонении от интегрируемого случая устойчивые и неустойчивые сепаратрисы гиперболических неподвижных точек уже, как правило, не совпадают, то есть расщепляются (см. рис. 3, b). Их пересечение свидетельствует о существовании хаотической динамики в системе и к отсутствию дополнительного аналитического интеграла.

Заметим, что используя интеграл Мельникова [12] можно показать, что на рис. 4 сепаратрисы также должны расщепиться, но как мы видим, визуально это обнаружить не так просто. Это обусловлено тем, что происходит уплощение траекторий векторного поля вблизи цилиндра.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 18-08-00995-а, 18-29-10050-мк.

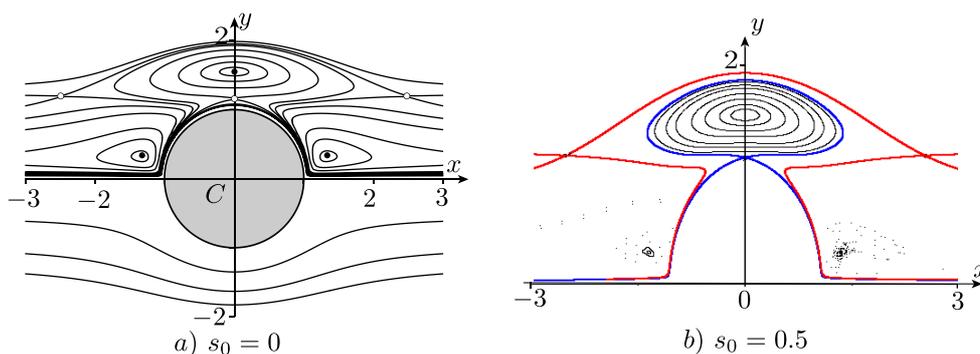


Рис. 4. Для фиксированных $\mu = 0.5$, $f = 2.5$, $\omega = 1$ фазовый портрет системы (a) для $s_0 = 0$ и отображение Пуанкаре (b) для $s_0 = 0.5$.

Бизяев Иван Алексеевич, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7355-8879>

E-mail: bizaev_90@mail.ru

Мамаев Иван Сергеевич, д. ф.-м. н., заведующий лабораторией, Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3916-9367>

E-mail: mamaev@rtd.ru

Цитирование: И. А. Бизяев, И. С. Мамаев. Динамика пары точечных вихрей и профиля с параметрическим возбуждением в идеальной жидкости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 4. С. 618–627.

I. A. Bizyaev, I. S. Mamaev

Dynamics of a pair of point vortices and a foil with parametric excitation in an ideal fluid

Keywords: point vortices, ideal fluid, Poincaré map, foil in a fluid, 2D hydrodynamics.

MSC2010: 76B47

DOI: [10.35634/vm200406](https://doi.org/10.35634/vm200406)

In this paper we obtain equations of motion for a vortex pair and a circular foil with parametric excitation due to the periodic motion of a material point. Undoubtedly, such problems are, on the one hand, model problems and cannot be used for an exact quantitative description of real trajectories of the system. On the other hand, in many cases such 2D models provide a sufficiently accurate qualitative picture of the dynamics and, due to their simplicity, an estimate of the influence of different parameters. We describe relative equilibria that generalize Föppl solutions and collinear configurations when the material point does not move. We show that a stochastic layer forms in the neighborhood of relative equilibria in the case of periodic motion of the foil's center of mass.

Funding. The study was funded by RFBR, project numbers 18-08-00995-a, 18-29-10050-mk.

REFERENCES

1. Borisov A.V., Kilin A.A., Pivovarova E.N. Speedup of the Chaplygin top by means of rotors, *Doklady Physics*, 2019, vol. 64, no. 3, pp. 120–124.
<https://doi.org/10.1134/S1028335819030145>
2. Borisov A.V., Mamaev I.S. An integrability of the problem on motion of cylinder and vortex in the ideal fluid, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2003, vol. 8, no. 2, pp. 163–166.
<https://doi.org/10.1070/RD2003v008n02ABEH000235>
3. Borisov A.V., Mamaev I.S., Ramodanov S.M. Motion of a circular cylinder and n point vortices in a perfect fluid, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2003, vol. 8, no. 4, pp. 449–462.
<https://doi.org/10.1070/RD2003v008n04ABEH000257>
4. Borisov A.V., Mamaev I.S., Ramodanov S.M. Dynamic interaction of point vortices and a two-dimensional cylinder, *Journal of Mathematical Physics*, 2007, vol. 48, no. 6, 065403.
<https://doi.org/10.1063/1.2425100>
5. Borisov A.V., Vetchanin E.V., Mamaev I.S. Motion of a smooth foil in a fluid under the action of external periodic forces. I, *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2019, vol. 26, no. 4, pp. 412–428.
<https://doi.org/10.1134/S1061920819040022>
6. De Laet T.W.G., Coene R. Two-dimensional vortex motion in the cross-flow of a wing-body configuration, *Journal of Fluid Mechanics*, 1995, vol. 305, pp. 93–109.
<https://doi.org/10.1017/S0022112095004551>
7. Föppl L. Vortex motion behind a circular cylinder, *NASA TM 77015*, 1983.
<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19830012992/downloads/19830012992.pdf>
8. Kanso E., Oskouei B.G. Stability of a coupled body-vortex system, *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, vol. 600, pp. 77–94. <https://doi.org/10.1017/S0022112008000359>
9. Kilin A.A., Artemova E.M. Integrability and chaos in vortex lattice dynamics, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 1, pp. 101–113.
<https://doi.org/10.1134/S1560354719010064>
10. Kilin A.A., Pivovarova E.N. Chaplygin top with a periodic gyrostatic moment, *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2018, vol. 25, no. 4, pp. 509–524.
<https://doi.org/10.1134/S1061920818040088>
11. Koiller J. Note on coupled motions of vortices and rigid bodies, *Physics Letters A*, 1987, vol. 120, no. 8, pp. 391–395. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(87\)90685-2](https://doi.org/10.1016/0375-9601(87)90685-2)

12. Kozlov V.V. Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics, *Russian Mathematical Surveys*, 1983, vol. 38, no. 1, pp. 1–72.
<https://doi.org/10.1070/RM1983v038n01ABEH003330>
13. Mamaev I.S., Vetchanin E.V. Dynamics of rubber Chaplygin sphere under periodic control, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2020, vol. 25, no. 2, pp. 215–236.
<https://doi.org/10.1134/S1560354720020069>
14. Protas B. Vortex dynamics models in flow control problems, *Nonlinearity*, 2008, vol. 21, no. 9, pp. 1–54. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/21/9/R01>
15. Protas B. Center manifold analysis of a point vortex model of vortex shedding with control, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2007, vol. 228, no. 2, pp. 179–187.
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.03.008>
16. Ramodanov S.M. Motion of a circular cylinder and a vortex in an ideal fluid, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2001, vol. 6, no. 1, pp. 33–38.
<https://doi.org/10.1070/RD2001v006n01ABEH000163>
17. Ramodanov S.M. Motion of a circular cylinder and N point vortices in a perfect fluid, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2002, vol. 7, no. 3, pp. 291–298.
<https://doi.org/10.1070/RD2002v007n03ABEH000211>
18. Ryzhov E.A. Fluid particle advection in the vicinity of the Föppl vortex system, *Physics Letters A*, 2012, vol. 376, no. 45, pp. 3208–3212.
<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2012.09.001>
19. Shashikanth B.N., Marsden J.E., Burdick J.W., Kelly S.D. The Hamiltonian structure of a two-dimensional rigid circular cylinder interacting dynamically with N point vortices, *Physics of Fluids*, 2002, vol. 14, no. 3, pp. 1214–1227. <https://doi.org/10.1063/1.1445183>
20. Shashikanth B.N. Symmetric pairs of point vortices interacting with a neutrally buoyant two-dimensional circular cylinder, *Physics of Fluids*, 2006, vol. 18, no. 12, pp. 127103.
<https://doi.org/10.1063/1.2400209>
21. Tordella D. Nonsteady stability of the flow around the circle in the Föppl model, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1995, vol. 53, no. 4, pp. 683–694. <https://doi.org/10.1090/qam/1359504>
22. Vetchanin E.V. The motion of a balanced circular cylinder in an ideal fluid under the action of external periodic force and torque, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15, no. 1, pp. 41–57. <https://doi.org/10.20537/nd190105>

Received 20.09.2020

Bizyaev Ivan Alekseevich, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7355-8879>

E-mail: bizaev_90@mail.ru

Mamaev Ivan Sergeevich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of laboratory, Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya 7, Izhevsk, 426069, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3916-9367>

E-mail: mamaev@rcd.ru

Citation: I. A. Bizyaev, I. S. Mamaev. Dynamics of a pair of point vortices and a foil with parametric excitation in an ideal fluid, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 4, pp. 618–627.