МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 4. С. 533–552.

УДК 517.71

© *М. С. Близорукова, В. И. Максимов*

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПОЗИЦИОННО-УПРАВЛЯЕМОЙ МОДЕЛИ

В статье рассматривается задача устойчивой реконструкции неизвестного входа системы по результатам неточных измерений ее решения. Суть задачи состоит в следующем. Имеется система, описываемая распределенным уравнением второго порядка, решение которой зависит от входа, меняющегося со временем. Как вход, так и решение заранее не известны. В дискретные моменты времени измеряется решение уравнения. Результаты измерения неточны. Требуется построить алгоритм приближенного восстановления входа, обладающий свойствами динамичности и устойчивости. Свойство динамичности означает, что текущие значения приближений входа вычисляются в реальном времени (он-лайн). Свойство устойчивости — что приближения являются достаточно точными, при хорошей точности измерений. Задача относится к классу обратных задач. Представленный в статье алгоритм основан на конструкциях теории устойчивого динамического обращения в комбинации с методами некорректных задач и позиционного управления.

Ключевые слова: динамическое обращение, система с распределенными параметрами.

DOI: 10.35634/vm200401

Рассматривается распределенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t,\eta) - \Delta x(t,\eta) + mx(t,\eta) + \gamma\dot{x}(t,\eta) = \tag{0.1}$$

$$= g(x(t,\eta)) + (Bv(t))(\eta) + f(t,\eta) \quad \text{п.в. на} \quad T\times\Omega$$

с краевым

$$x(t,\sigma) = 0 \quad \text{при} \quad t\in T,\ \sigma\in\partial\Omega,$$

и начальным

$$x(0) = x_{10} \in V = H_0^1(\Omega), \quad \dot{x}(0) = x_0 \in H = L_2(\Omega) \tag{0.2}$$

условиями. Здесь $T = [0,+\infty)$, Ω — ограниченное множество с липшицевой границей $\partial\Omega$ [1, п. 9.2], [2, с. 30], $m = \text{const} > 0$, $\gamma = \text{const} > 0$, $g(\cdot) : R \to R$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица с постоянной L, $g(0) = 0$, $f(\cdot) \in L_\infty(T;H)$ — заданная функция, производная $\dot{x}(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений (обобщенных функций) [1, с. 70], [2, с. 33], [3, с. 10], B — линейный непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства U с нормой $|\cdot|_U$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_U$ (пространство возмущений) в пространство V ($B \in L(U;V)$).

Уравнение вида (0.1) с начальными условиями (0.2) исследовалось многими авторами (см., например, монографию [3], где имеется соответствующая библиография). При этом в указанных работах рассматривались вопросы существования и единственности решения, его продолжимости, регулярности и так далее. В настоящей статье мы остановимся на одной задаче восстановления, суть которой состоит в следующем. Значения $v(t)$ возмущения неизвестны и удовлетворяют включению $v(t) \in P \subset U$ $(t \geqslant 0)$, где P — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество. В моменты времени $\tau_i \in T$ $(i = 1, 2 \ldots)$ измеряется с ошибкой решение $x(\tau_i)$ уравнения (0.1). Результаты измерения — элементы $\{\xi^h_{1i}, \xi^h_i\} \in V^* \times V^*$ $(V^* = H^{-1}(\Omega))$ — таковы, что

$$|\xi^h_{1i} - x(\tau_i)|_{V^*} \leqslant \nu^h_i, \quad |\xi^h_i - \dot{x}(\tau_i)|_{V^*} \leqslant \nu^h_i, \tag{0.3}$$

где $\nu^h_i \in (0, 1)$ — величина ошибки измерения в момент τ_i, число $h \in (0, 1)$ характеризует точность измерения. Будем предполагать, что начальное состояние известно не точно. Именно, известны элементы $\xi^h_{10} \in V$ и $\xi^h_0 \in H$, удовлетворяющие неравенствам

$$|\xi^h_{10} - x_{10}|_V \leqslant h, \quad |\xi^h_0 - x_0|_H \leqslant h. \tag{0.4}$$

Необходимо указать алгоритм приближенного восстановления неизвестного возмущения $v(\cdot)$ по результатам неточных измерений состояний $x(\cdot)$. Будем оценивать качество восстановления двумя критериями: величиной отклонения решений уравнения (0.1), отвечающих истинному возмущению $v(\cdot)$ и построенному приближению $v^h(\cdot)$ этого возмущения, а также разностью среднеквадратичных норм функций $v^h(\cdot)$ и $v(\cdot)$ на соответствующих промежутках. Выбор таких критериев вызван тем фактом, что из малости их значений (при соответствующих условиях) следует близость приближения $v^h(\cdot)$ к возмущению $v(\cdot)$ в среднеквадратичной норме на каждом ограниченном промежутке времени.

Описанная задача относится к классу обратных задач [4]. Подобные задачи для систем с распределенными параметрами в последние годы вызывают пристальное внимание (см., например, [5–9] и библиографию в этих работах). Один из подходов к решению задач динамической реконструкции входа $v(\cdot)$ для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, был развит в [10–12]. (Мы указываем только монографии, в которых можно найти соответствующие ссылки.) Подход основан на методах теории гарантированного управления [13] и методе сглаживающего функционала [4]. Позднее указанный подход был развит для гиперболических систем с распределенными параметрами [14–16]. Для уравнения вида (0.1) задача реконструкции с позиций указанного выше подхода рассматривалась в работе [17]. При этом предполагалось, что измерения решений уравнения (0.1) производятся непрерывно, то есть в каждый момент времени, процесс функционирования осуществляется на конечном промежутке T, а ограничение на возмущение (в виде выпуклого компакта) отсутствуют. Случай дискретного измерения обсуждался в работе [18]. При этом описанные в работах [17, 18] алгоритмы ориентированы на конечный промежуток функционирования, то есть на конечный промежуток T. Следует отметить, что постановка задач в методе динамического обращения и постановка задач в методе обратных динамических систем (см. обзор в указанных далее работах [19, 20]) концептуально связаны. В частности, оба подхода обеспечивают свойство восстановления входных сигналов в реальном времени и основаны на применении обратной связи для построения динамического процесса восстановления. Но алгоритмы построения обратной связи различны.

§ 1. Постановка задачи

Прежде чем перейти к постановке задачи, дадим определение решения уравнения (0.1).

Всякую функцию $x(\cdot) \in C(T_\vartheta; V)$ такую, что $\dot{x}(\cdot) \in W(T_\vartheta; V) = \{y(\cdot) \in C(T_\vartheta; H) : \dot{y}(\cdot) \in L_2(T_\vartheta; V^*)\}$, удовлетворяющую соотношению

$$\ddot{x}(t) - \Delta x(t) + m x(t) + \gamma \dot{x}(t) = g(x(t)) + (Bu)(t) + f(t) \quad \text{в} \quad V^* \quad \text{п.в. на} \quad T_\vartheta,$$

будем называть решением уравнения (0.1) на промежутке $T_\vartheta = [0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$, и обозначать символом $x(\cdot) = x(\cdot; x_{10}, x_0, v(\cdot))$.

Функцию $x(t)$, $t \in T$, назовем решением уравнения (0.1) на промежутке T, если $x(\cdot)$ есть решение (0.1) на всяком промежутке T_ϑ, $\vartheta > 0$.

Пусть $P(\cdot)$ есть множество измеримых (по Лебегу) функций $v(\cdot) : [0, +\infty) \to P$, называемое множеством допустимых возмущений.

Условие 1. Существуют числа $K \geqslant 0$ и K_1 такие, что $K_1 < \lambda + m - KL$ и $xg(x) - K\sigma(x) \leqslant$ $\leqslant K_1 x^2$ $\forall x \in R$, где $\sigma(x) = \displaystyle\int_0^x g(y)\,dy$,

$$\lambda = \inf\{|\nabla x(\eta)|_H : x \in V, |x|_H = 1\}.$$

Условие 2. $2L < \lambda + m$.

Прямым следствием теоремы 8.4.5 [3, с. 139] является

Лемма 1. *Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда каково бы ни было $v(\cdot) \in P(\cdot)$, существует единственное решение $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, x_{10}, v(\cdot))$ уравнения (0.1) на промежутке T.*

Пусть при каждом $h \in (0, 1)$ фиксировано семейство $(\Delta_h)_{h>0}$ равномерных разбиений полуоси $[0, +\infty)$ моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{\infty}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta_i(h), \quad \delta_i(h) \in (0, 1). \tag{1.1}$$

Рассмотрим два случая. В первом случае будем предполагать, что на помехи, реализуемые в канале наблюдения, накладываются ограничения «малости» их значений в каждый момент времени, а во втором — ограничения «малости» их средних значений за весь промежуток времени функционирования системы («малости» их интегральных погрешностей). Введем два условия.

Условие 3. $\delta_i(h) = \delta(h)$, $\quad \nu_i^h = h$ при всех $i = 0, 1, \ldots.$

Условие 4. Семейство разбиений Δ_h и величины ошибок измерений ν_i^h таковы, что имеют место соотношения:

$$\nu_i^h \in [0, 1] \text{ при всех } i \text{ и всех } h \in (0, 1),$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \delta_i(h)\nu_i^h \leqslant \varphi_1(h) \to 0+ \quad \text{при } h \to 0+.$$

Таким образом при выполнении Условия 3 разбиения Δ_h являются равномерными.

Наряду с уравнением (0.1) нам понадобится еще одно уравнение следующего вида

$$\ddot{y}^h(t) - \Delta y^h(t) + m y^h(t) + \gamma \dot{y}^h(t) = g(y^h(t)) + (Bv^h)(t) + f(t) \quad \text{в} \quad V^* \quad \text{п.в. на} \quad T, \tag{1.2}$$

с начальным состоянием $y^h(0) = \xi_{10}^h$, $\dot{y}^h(0) = \xi_0^h$ и управлением $v^h(\cdot) \in P(\cdot)$. Назовем уравнение (1.2) моделью. Уравнение (1.2) — «копия» уравнения (0.1). Отличие состоит лишь в том, что в (1.2) в правой части стоит управление $v^h(\cdot)$, которое мы будем формировать.

Заметим, что в силу непрерывности вложения пространства V в пространство H, справедливы неравенства

$$|x|_H \leqslant c_0 |x|_V \quad \forall x \in V, \tag{1.3}$$

$$|x|_{V^*} \leqslant c_1 |x|_H \quad \forall x \in H. \tag{1.4}$$

Здесь c_0 и c_1 — некоторые положительные константы.

Определение 1. Всякую кусочно-постоянную функцию $\Xi^h(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto V^* \times V^*$, $\Xi^h(t) = \Xi_i^h = \{\xi_{1i}^h, \xi_i^h\} \in V^* \times V^*$ при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $\xi_{10}^h \in V$, $\xi_0^h \in H$, удовлетворяющую ограничениям (0.3), (0.4), будем называть *допустимым измерением* $x(\cdot)$ *точности* h, а всякую измеримую по Лебегу функцию $v(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto P$ *допустимым возмущением*.

Аналогично определяется *допустимое измерение* $y^h(\cdot)$ *точности* h — $\Psi^h(\cdot)$ — кусочно-постоянная функция $\Psi^h(t) = \Psi_i^h = \{\psi_{1i}^h, \psi_i^h\} \in V^* \times V^*$ при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, где Ψ_i^h, $i \geqslant 1$, — результаты неточных измерений $y^h(\tau_i)$ и $\dot{y}^h(\tau_i)$: $|\psi_{1i}^h - y^h(\tau_i)|_{V^*} \leqslant h$, $|\psi_i^h - \dot{y}^h(\tau_i)|_{V^*} \leqslant h$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, $\Psi_0^h = \{\psi_{10}^h, \psi_0^h\}$, $\psi_{10}^h = \xi_{10}^h$, $\psi_0^h = \xi_0^h$.

Предположим, что решение $y^h(t)$, $t \geqslant 0$, уравнения (1.2) (как и решение уравнения (0.1)) наблюдается в моменты $\tau_{h,i}$ с ошибкой и изменяется под воздействием некоторого закона обратной связи $\mathcal{V}(t, \Psi^h, \Xi^h) \in P$. Решение уравнения (1.2), таким образом, удовлетворяет следующим дифференциальному уравнению и начальному условию:

$$\ddot{y}^h(t) - \Delta y^h(t) + m y^h(t) + \gamma \dot{y}^h(t) = g(y^h(t)) + f(t) + (B\mathcal{V}(\tau_i, \Xi_i^h, \Psi_i^h))(t) \tag{1.5}$$

$$\text{в} \quad V^* \quad \text{п.в. на} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \geqslant 0,$$

$$y^h(0) = \xi_{10}^h, \quad \dot{y}^h(0) = \xi_0^h.$$

Для любых $v(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$ из $P(\cdot)$ введем два критерия отклонения $v^h(\cdot)$ от $v(\cdot)$ на каком-либо ограниченном отрезке времени $[0, \vartheta]$:

$$\omega_1(v^h(\cdot), v(\cdot)|\vartheta) = \max_{t \in [0,\vartheta]} \Big\{ \big|\dot{y}^h(t; \xi_{10}^h, \xi_0^h, v^h(\cdot)) - \dot{x}(t; x_{10}, x_0, v(\cdot))\big|_H +$$

$$+ \big|y^h(t; \xi_{10}^h, \xi_0^h, v^h(\cdot)) - x(t; x_{10}, x_0, v(\cdot))\big|_V \Big\},$$

$$\omega_2(v^h(\cdot), v(\cdot), h|\vartheta) = \int_0^\vartheta |v^h(t)|_U^2 \, dt - \varrho_0(h) \int_0^\vartheta |v(t)|_U^2 \, dt.$$

Здесь $\varrho_0(\cdot) : (0, 1) \to R^+ = \{r \in R : r > 0\}$ — некоторая функция со свойством: $\varrho_0(h) \to 1$ при $h \to +0$, $x(\cdot; x_{10}, x_0, v(\cdot))$ и $y^h(\cdot; \xi_{10}^h, \xi_0^h, v^h(\cdot))$ — решения уравнений (0.1) и (1.2), порождаемые входами $v(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$ соответственно.

Определение 2. *Допустимой обратной связью* (для модели (1.2)) назовем всякую функцию $\mathcal{V}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot) : T \times V^* \times V^* \times V^* \times V^* \mapsto P$.

Определение 3. Для любой допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ и любых допустимых измерений $x(\cdot)$ точности h — $\Xi^h(\cdot)$, а также допустимых измерений $y^h(\cdot)$ точности h — $\Psi^h(\cdot)$, определенное на $[0, +\infty)$ решение $y^h(\cdot)$ задачи Коши (1.5), назовем *траекторией модели*, соответствующей допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ и допустимым измерениям $\Xi^h(\cdot)$ и $\Psi^h(\cdot)$.

Определение 4. *Управляемым процессом*, соответствующим допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$, допустимому возмущению $v(\cdot)$ и измерительной точности h ($h > 0$), будем называть всякую пятерку $(x(\cdot), \Xi^h(\cdot), y^h(\cdot), \Psi^h(\cdot), v^h(\cdot))$, где $x(\cdot) = x(\cdot; x_{10}, x_0, v(\cdot))$ — решение уравнения (0.1), $\Xi^h(\cdot)$ — допустимое измерение $x(\cdot)$ точности h, $y^h(\cdot) = y^h(\cdot; \xi_{10}^h, \xi_0^h, v^h(\cdot))$ — решение (1.5), $\Psi^h(\cdot)$ — допустимое измерение $y^h(\cdot)$ точности h, функция $v^h(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto P$ формируется по правилу

$$v^h(t) = \mathcal{V}(\tau_i, \Xi_i^h, \Psi_i^h) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i = \delta_{h,i} = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad i \geqslant 0.$$

Определение 5. Функцию $v^h(\cdot)$ будем называть *реализацией* допустимой обратной связи $\mathcal{V}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, соответствующей допустимому возмущению $v(\cdot)$ и допустимым измерениям точности h.

Определение 6. Следуя [18], семейство допустимых обратных связей $(\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot))_{h>0}$ будем называть *устойчивым относительно момента* ϑ, если найдутся функции $\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot) : (0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$, такие, что $\gamma_1(h) \to 0$, $\gamma_2(h) \to 0$ при $h \to 0$ и для всякого допустимого возмущения $v(\cdot)$, всякого $h \in (0,1)$, всякой реализации $v^h(\cdot)$ допустимой обратной связи $\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$,

$$v^h(t) = \mathcal{V}_h(\tau_{h,i}, \Xi_i^h, \Psi_i^h), \quad \text{при} \quad t \in \delta_{h,i}, \tag{1.6}$$

всякой траектории модели (1.5) $y^h(\cdot) = y^h(\cdot; \xi_{10}^h, \xi_0^h, v^h(\cdot))$, соответствующей функции $v^h(\cdot)$ вида (1.6) и всяких допустимых измерений $\Xi^h(\cdot)$ и $\Psi^h(\cdot)$ точности $h \in (0,1)$, выполняются неравенства

$$\sup_{\vartheta \geqslant 0} \omega_1(v^h(\cdot), v(\cdot)|\vartheta) \leqslant \gamma_1(h), \tag{1.7}$$

$$\sup_{\vartheta \geqslant 0} \omega_2(v^h(\cdot), v(\cdot), h|\vartheta) \leqslant \gamma_2(h), \tag{1.8}$$

то есть неравенства (1.7), (1.8) выполняются для управляемого процесса

$$(x(\cdot), \Xi^h(\cdot), y^h(\cdot), \Psi^h(\cdot), v^h(\cdot)).$$

Определение 7. Пару $(\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot))$ назовем *оценкой точности* семейства $(\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot))_{h>0}$.

Обсуждаемая в настоящей работе задача состоит в построении семейства допустимых обратных связей $\mathcal{V}_h$ устойчивого относительно момента ϑ.

§ 2. Алгоритм решения

В дальнейшем нам понадобятся два условия.

Условие 5. $\inf\{|u|_U : u \in P\} \geqslant 1$.

Условие 6. Семейство разбиений Δ_h таково, что выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \delta_i^2(h) \leqslant \varphi_2(h), \quad \varphi_2(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Замечание 1. Условия 4 и 6 выполняются, например, если

$$\delta_i(h) = \nu_i^h = dh/(i+1)^\mu \leqslant 1, \quad \mu \in (0.5; 1], \quad i = 0, 1, \ldots, \quad d = \text{const} > 0.$$

При этом

$$\varphi_1(h) = \varphi_2(h) = 2h^2 d^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2\mu},$$

неравенства (0.3) принимают вид

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)| \leqslant dh/(i+1)^\mu.$$

Для $\varepsilon > 0$ введем функционал

$$E_\varepsilon(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)) = \tag{2.1}$$

$$= E_1(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)) + \varepsilon(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)),$$

где символ $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в пространстве H,

$$E_1(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)) = 0.5\{|x(t) - y^h(t)|_V^2 + m|x(t) - y^h(t)|_H^2 + |\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)|_H^2\}.$$

Заметим, что, если $m > -\lambda$, то пространство $X = V \times H$ может быть наделено скалярным произведением следующего вида

$$(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\})_1 = \int_\Omega \{\nabla x_1(\eta)\nabla x_2(\eta) + m x_1(\eta) x_2(\eta) + y_1(\eta) y_2(\eta)\}\, d\eta. \tag{2.2}$$

Это скалярное произведение порождает норму, эквивалентную норме пространства $V \times H$ (см. [3, с. 29])

$$E_1(x, y) = \frac{1}{2}|x, y|_X^2.$$

Здесь символ $|\cdot|_X$ означает норму в пространстве X, порожденную скалярным произведением (2.2). В силу эквивалентности нормы $|\cdot|_X$ стандартной норме $|\cdot|_{V\times H}$ существуют постоянные $N_1 > N_2 > 0$ такие, что

$$N_2(|x|_V^2 + |y|_H^2) \leqslant |(x, y)|_X^2 \leqslant N_1(|x|_V^2 + |y|_H^2) \quad \forall (x, y) \in V \times H.$$

Воспользовавшись леммой 8.4.1 [3, с. 138] и предложением 6.1.1 [3, с. 78], аналогично предложению 8.4.2 [3, с. 138] (см. также предложение 6.2.3 [3, с. 83]) устанавливаем равенство

$$\begin{gathered}\frac{dE_1(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t))}{dt} = -\gamma|\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)|_H^2 + \\ + (B(v(t) - v^h(t)), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)) + (g(x(t)) - g(y^h(t)), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)).\end{gathered} \tag{2.3}$$

Кроме того, почти всюду имеет место равенство

$$\begin{gathered}\frac{d(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t))}{dt} = |\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)|_H^2 - |x(t) - y^h(t)|_V^2 - \\ - m|x(t) - y^h(t)|_H^2 - \gamma(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)) + (g(x(t)) - \\ - g(y^h(t)), x(t) - y^h(t)) + (B(v(t) - v^h(t)), x(t) - y^h(t)).\end{gathered} \tag{2.4}$$

В таком случае из (2.1), (2.3), (2.4) следует почти всюду на T справедливость равенства

$$\begin{gathered}\frac{dE_\varepsilon(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t))}{dt} = L_\varepsilon(x(t), y^h(t)) + \\ + (\varepsilon(x(t) - y^h(t)) + \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t), B(v(t) - v^h(t))),\end{gathered} \tag{2.5}$$

где

$$L_\varepsilon(x(t), y^h(t)) = (-\gamma + \varepsilon)|\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)|_H^2 + (g(x(t)) - g(y^h(t)), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t) +$$

$$+ \varepsilon(x(t) - y^h(t))) - \varepsilon|x(t) - y^h(t)|_V^2 - \varepsilon m|x(t) - y^h(t)|_H^2 - \varepsilon\gamma(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)).$$

Пусть символ $\langle\cdot, \cdot\rangle$ означает двойственность между пространствами V и V^*, $d(P) = \sup\{|u|_U : u \in P\}$.

Опишем алгоритм решения задачи. До начала его работы фиксируем величину $h \in \in (0,1)$, а также функцию

$$\alpha = \alpha(h) \in (0,1), \quad \alpha(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{\infty}$ вида (1.1). Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. В момент τ_i, вычисляется элемент

$$\mathcal{V}_h(\tau_i, \Xi_i^h, \Psi_i^h) = \arg\min\{2(B^*[(\psi_i^h - \xi_i^h) + \varepsilon(\psi_{1i}^h - \xi_{1i}^h)], v)_U + \alpha(h)|v|_U^2 : v \in P\}, \tag{2.6}$$

где $\Xi_i^h = \{\xi_{1i}^h, \xi_i^h\}$, $\Psi_i^h = \{\psi_{1i}^h, \psi_i^h\}$. После этого на вход модели (1.2) при всех $t \in \delta_i$ подается управление вида (1.6), (2.6). Под действием этого управления модель переходит из состояния $\{y^h(\tau_i), \dot{y}^h(\tau_i)\}$ в состояние $\{y^h(\tau_{i+1}), \dot{y}^h(\tau_{i+1})\}$. При этом в результате воздействия на уравнение (0.1) некоторого неизвестного возмущения $v(t)$, $t \in \delta_i$, система, описываемая этим уравнением, переходит из состояния $\{x(\tau_i), \dot{x}(\tau_i)\}$ в состояние $\{x(\tau_{i+1}), \dot{x}(\tau_{i+1})\}$. На следующем, $(i+1)$-м шаге, аналогичные действия повторяются.

Условие 7. Найдутся числа $\varepsilon > 0$ и $c \in (0, \varepsilon)$ такие, что

$$L_\varepsilon(x(t), y^h(t)) \leqslant -cE_\varepsilon(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)) \quad \text{при п. в.} \quad t \in T.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены Условия 1, 2, 7,* $\varepsilon < \min\{1, m + c_0^{-1}\}$, $(h + \delta(h))\alpha(h)^{-1} \to 0$ *при* $h \to 0$, $(x(\cdot), \Xi^h(\cdot), y^h(\cdot), \Psi^h(\cdot), v^h(\cdot))$, $h \in (0,1)$, *— управляемый процесс, соответствующий допустимой обратной связи* $\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ *вида* (2.6), *допустимому возмущению* $v(\cdot)$ *и измерительной точности* h. *Пусть также выполнены Условия 3, 5 (в первом случае) и 4, 6 (во втором). Тогда, если* $h \in (0, h_*)$, *то при всех* $t \in T$ *верно соотношение*

$$\int_0^t |v^h(\tau)|_U^2 \, d\tau \leqslant \varrho_0(h) \int_0^t |v(\tau)|_U^2 \, d\tau + \varrho_1(h), \tag{2.7}$$

где

$$\varrho_0(h) = \frac{\alpha(h) + b_1(h + \delta(h))}{\alpha(h) - b_1(h + \delta(h))}, \quad \varrho_1(h) = \frac{d_0 h^2}{\alpha(h) - b_1(h + \delta(h))},$$

в первом случае;

$$\varrho_0(h) = 1, \qquad \varrho_1(h) = \frac{d_0 h^2 + b_3(\varphi_1(h) + \varphi_2(h))}{\alpha(h)},$$

во втором. Кроме того, справедливо неравенство

$$|y^h(t) - x(t)|_V^2 + |\dot{y}^h(t) - \dot{x}(t)|_H^2 \leqslant \nu(t, h, \alpha), \quad t \in T, \tag{2.8}$$

где $d_0 = 1 + c_0 + 0.5\, m c_0^2$,

$$\nu(t,h,\alpha) = 2\max\{1, (m - \varepsilon)^{-1}\} \left[d_0 h^2 e^{-ct} + b_2(h + \delta(h)) + \frac{2d^2(P)}{c}\alpha(h) \right],$$

в первом случае;

$$\nu(t,h,\alpha) = 2\max\{1, (m - \varepsilon)^{-1}\} \left[d_0 h^2 e^{-ct} + \frac{2d^2(P)}{c}\alpha(h)) + b_4(\varphi_1(h) + \varphi_2(h)) \right],$$

во втором.

Здесь b_1–b_4 — некоторые постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде, число $h_* \in (0,1)$ таково, что при всех $h \in (0, h_*)$ верно неравенство $\alpha(h) - b_1(h + \delta(h)) > 0$ (в первом случае), $h_* = 1$ — во втором.

Доказательство. Сначала рассмотрим первый случай. Учитывая (0.1) и (1.2) заключаем, что для разности

$$z(\cdot) = y^h(\cdot) - x(\cdot)$$

справедливо соотношение

$$\begin{gathered}\ddot{z}(t) - \Delta z(t) + mz(t) + \gamma \dot{z}(t) = g(y^h(t)) - g(x(t)) + B(v^h(t) - v(t)) \\ \text{в } V \text{ при п.в. } t \in T,\end{gathered} \tag{2.9}$$

где $z(0) = \xi_{10}^h - x_{10}$, $\dot{z}(0) = \xi_0^h - x_0$. В дальнейшем нам понадобятся оценки разностей $|z(t) - z(\tau_i)|_H$ и $|\dot{z}(t) - \dot{z}(\tau_i)|_{V^*}$ при $t \in \delta_i$, $i = 0, 1, \ldots$. В силу условия 1, 2 (см. [3, теорема 8.4.5, с. 139]) можно указать число $c_1 \in (0, +\infty)$ такое, что равномерно по всем $h \in (0,1)$, $v(\cdot) \in P(\cdot)$ и $v^h(\cdot) \in P(\cdot)$

$$\sup_{t \in T} |\dot{x}(t), x(t)|_{H \times V} \leqslant c_1, \qquad \sup_{t \in T} |\dot{y}^h(t), y^h(t)|_{H \times V} \leqslant c_1. \tag{2.10}$$

Возьмем произвольный элемент $v \in V$. Тогда из (2.9), учитывая (1.3) и (1.4), получим

$$|\langle \dot{z}(t + \Delta t) - \dot{z}(t), v \rangle| \leqslant \int_t^{t+\Delta t} \{|z(\tau)|_V + c_0(m|z(\tau)|_H + \gamma|\dot{z}(\tau)|_H + L|z(\tau)|_H + c_2)|v|_V\}\, d\tau.$$

Отсюда в силу (2.10), устанавливаем оценки

$$|\dot{z}(t + \Delta t) - \dot{z}(t)|_{V^*} \leqslant c_3 \Delta t, \qquad |z(t + \Delta t) - z(t)|_H \leqslant c_4 \Delta t, \tag{2.11}$$

справедливые для любых t, $t + \Delta t \in T$, $\Delta t > 0$.

Рассмотрим изменение величины

$$\varepsilon_h(t) = E_\varepsilon(t) + \alpha \int_0^t \{|v^h(\tau)|_U^2 - |v(\tau)|_U^2\}\, d\tau, \quad \alpha = \alpha(h),$$

на промежутке T. Здесь $E_\varepsilon(t) = E_\varepsilon(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t))$. После дифференцирования $\varepsilon_h(t)$ будем иметь в силу (2.5) и Условия 7 при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$,

$$\dot{\varepsilon}_h(t) \leqslant (\dot{z}(t) + \varepsilon z(t), B(v^h(t) - v(t))) - cE_\varepsilon(t) + \alpha\{|v^h(t)|_U^2 - |v(t)|_U^2\}. \tag{2.12}$$

Далее, в силу (2.12), верна оценка

$$\begin{gathered}\dot{\varepsilon}_h(t) \leqslant -cE_\varepsilon(t) + (\dot{z}(t) - \dot{z}(\tau_i) + \varepsilon(z(t) - z(\tau_i)), B(v^h(t) - v(t))) + \chi_i^t(v^h, v) + \\ + \mu_i^t(v^h, v) + \langle \xi_i^h - \dot{x}(\tau_i), B(v^h(t) - v(t)) \rangle + \langle \dot{y}^h(\tau_i) - \psi_i^h, B(v^h(t) - v(t)) \rangle + \\ + \varepsilon(\xi_{1i}^h - x(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))) + \varepsilon(y^h(\tau_i) - \psi_{1i}^h, B(v^h(t) - v(t))) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i,\end{gathered}$$

где

$$\chi_i^t(v^h, v) = -(v^h(t), B^*(\xi_i^h - \psi_i^h))_U + \alpha|v^h(t)|_U^2 + (v(t), B^*(\xi_i^h - \psi_i^h))_U - \alpha|v(t)|_U^2,$$

$$\mu_i^t(v^h, v) = -\varepsilon(v^h(t), B^*(\xi_{1i}^h - \psi_{1i}^h))_U + \varepsilon(v(t), B^*(\xi_{1i}^h - \psi_{1i}^h))_U.$$

Из (1.6), (2.6) вытекает неравенство

$$\chi_i^t(v^h, v) + \mu_i^t(v^h, v) \leqslant 0.$$

В таком случае при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\begin{gathered} \dot{\varepsilon}_h(t) \leqslant -cE_\varepsilon(t) + (\dot{z}(t) - \dot{z}(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))) + \\ + \langle \xi_i^h - \dot{x}(\tau_i), B(v^h(t) - v(t)) \rangle + \langle \dot{y}^h(\tau_i) - \psi_i^h, B(v^h(t) - v(t)) \rangle + \\ + \varepsilon(\xi_{1i}^h - x(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))) + \varepsilon(y^h(\tau_i) - \psi_{1i}^h, B(v^h(t) - v(t))) + \\ + \varepsilon(z(t) - z(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))). \end{gathered} \tag{2.13}$$

Учитывая (0.3), (2.11), заключаем

$$\begin{gathered} (\dot{z}(t) - \dot{z}(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))) \leqslant c_5\delta(h)\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\}, \\ (z(t) - z(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))) \leqslant c_6\delta(h)\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\}. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Кроме того, в силу (0.3), получаем при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\langle \xi_i^h - \dot{x}(\tau_i), B(v^h(t) - v(t)) \rangle \leqslant c_7 h\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\},$$

$$\langle \dot{y}^h(\tau_i) - \psi_i^h, B(v^h(t) - v(t)) \rangle \leqslant c_7 h\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\},$$

$$\varepsilon(\xi_{1i}^h - x(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))) \leqslant c_8 h\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\},$$
$$\varepsilon(y^h(\tau_i) - \psi_{1i}^h), B(v^h(t) - v(t))) \leqslant c_8 h\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\}.$$

Воспользовавшись (2.13), (2.14), выводим при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\dot{\varepsilon}_h(t) \leqslant b_1(h + \delta(h))\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\} - cE_\varepsilon(t). \tag{2.15}$$

Ввиду неравенства $\varepsilon < \min\{1, m + c_0^{-1}\}$, имеем

$$0 \leqslant E_\varepsilon(t) \quad \text{при} \quad t \in T.$$

Отсюда (в силу Условия 5) и из (2.15) следует неравенство

$$\varepsilon_h(t) \leqslant \varepsilon_h(0) + b_1(h + \delta(h)) \int_0^t \{|v^h(\tau)|_U^2 + |v(\tau)|_U^2\}\, d\tau, \quad t \in T. \tag{2.16}$$

В свою очередь, из (2.16) выводим при $t \in T$

$$\alpha(h) \int_0^t \{|v^h(\tau)|_U^2 - |v(\tau)|_U^2\}\, d\tau \leqslant \varepsilon_h(0) + b_1(h + \delta(h)) \int_0^t \{|v^h(\tau)|_U^2 + |v(\tau)|_U^2\}\, d\tau.$$

Таким образом, при всех $t \in T$ верна оценка

$$\{\alpha(h) - b_1(h + \delta(h))\} \int_0^t |v^h(\tau)|_U^2\, d\tau \leqslant \varepsilon_h(0) + \{\alpha(h) + b_1(h + \delta(h))\} \int_0^t |v(\tau)|_U^2\, d\tau. \tag{2.17}$$

Заметим, что в силу (0.4), (1.3), а также включения $\varepsilon \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$E_\varepsilon(0) \leqslant (1 + c_0 + 0.5c_0^2 m)h^2. \tag{2.18}$$

Из (2.17), учитывая равенство $\varepsilon_h(0) = E_\varepsilon(0)$, устанавливаем при $h \in (0, h_a)$ соотношение

$$\int_0^t |v^h(\tau)|_U^2 \, d\tau \leqslant \frac{\alpha(h) + b_1(h+\delta(h))}{\alpha(h) - b_1(h+\delta(h))} \int_0^t |v(\tau)|_U^2 \, d\tau + \frac{d_0 h^2}{\alpha(h) - b_1(h+\delta(h))}, \quad t \in T.$$

(Число $h_a > 0$ со свойством, указанным в формулировке теоремы, очевидно существует.) Отсюда следует неравенство (2.7).

Покажем теперь, что верно неравенство (2.8). Из (2.6) вытекает при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ неравенство

$$\begin{gathered}(B^*[\psi_i^h - \xi_i^h + \varepsilon(\psi_{1i}^h - \xi_{1i}^h)], v^h(t))_U \leqslant \\ \leqslant \inf\{(B^*[\psi_i^h - \xi_i^h + \varepsilon(\psi_{1i}^h - \xi_{1i}^h)], v)_U : v \in P\} + d^2(P)\alpha(h).\end{gathered} \tag{2.19}$$

Учитывая это неравенство, аналогично (2.15) получаем

$$\dot{E}_\varepsilon(t) \leqslant -cE_\varepsilon(t) + c_9(h+\delta(h))\{|v^h(t)|_U + |v(t)|_U\} + 2d^2(P)\alpha(h) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T,$$

то есть

$$\dot{E}_\varepsilon(t) = -cE_\varepsilon(t) + c_{10}(h+\delta(h)) + 2d^2(P)\alpha(h) + \psi_0(t),$$

где $\psi_0(t) \leqslant 0$, $t \in T$. В таком случае

$$E_\varepsilon(t) \leqslant E_\varepsilon(0)e^{-ct} + 2d^2(P)\alpha(h)\int_0^t e^{-c(t-\tau)}\, d\tau + c_{10}\int_0^t e^{-c(t-\tau)}(h+\delta(h))\, d\tau.$$

Далее имеем

$$\int_0^t e^{-c(t-\tau)}\, d\tau \leqslant \frac{1}{c}.$$

Из последних двух неравенств, учитывая (2.18), получаем при $t \in T$

$$E_\varepsilon(t) \leqslant d_0 h^2 e^{-ct} + \frac{2d^2(P)}{c}\alpha(h) + b_2(h+\delta(h))), \quad b_2 = \frac{c_{10}}{c}. \tag{2.20}$$

В свою очередь,

$$\begin{gathered}E_\varepsilon(t) \geqslant 0.5\{|z(t)|_V^2 + m|z(t)|_H^2 + |\dot{z}(t)|_H^2\} - \\ - 0.5\varepsilon\{|z(t)|_H^2 + |\dot{z}(t)|_H^2\} \geqslant 0.5\{c_0^{-1}|z(t)|_H^2 + (m-\varepsilon)|z(t)|_H^2 + (1-\varepsilon)|\dot{z}(t)|_H^2\}.\end{gathered} \tag{2.21}$$

Из (2.20), (2.21) следует (2.8).

Обратимся ко второму случаю. Очевидно, что и в этом случае верны соотношения (2.9)–(2.13). Далее имеем

$$\begin{aligned}&(z(t) - z(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))) \leqslant c_{11}\nu_i^h, \\ &(\dot{z}(t) - \dot{z}(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))) \leqslant c_{11}\nu_i^h, \\ &\langle \xi_i^h - \dot{x}(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))\rangle \leqslant c_{11}\nu_i^h, \\ &\langle \dot{y}^h(\tau_i) - \psi_i^h, B(v^h(t) - v(t))\rangle \leqslant c_{11}\nu_i^h, \\ &\varepsilon(\xi_{1i}^h - x(\tau_i), B(v^h(t) - v(t))) \leqslant c_{11}\nu_i^h, \\ &\varepsilon(y^h(\tau_i) - \psi_{1i}^h), B(v^h(t) - v(t))) \leqslant c_{11}\nu_i^h.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Воспользовавшись (2.13), (2.22), выводим при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\dot{\varepsilon}_h(t) \leqslant b_3(\nu_i^h + \delta_i(h)) - cE_\varepsilon(t). \tag{2.23}$$

Из (2.23) вытекает неравенство

$$\varepsilon_h(t) \leqslant \varepsilon_h(0) + b_3 \sum_{j=0}^{i} (\nu_j^h + \delta_j(h))\delta_j(h) \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \tag{2.24}$$

В таком случае, учитывая Условия 4, 6, а также (2.18) и (2.24), получаем

$$\varepsilon_h(t) \leqslant d_0 h^2 + b_3(\varphi_1(h) + \varphi_2(h)), \quad t \in T.$$

Отсюда следует неравенство (2.7).

Покажем теперь, что верно неравенство (2.8). Учитывая неравенство (2.19), аналогично (2.23) устанавливаем

$$\dot{E}_\varepsilon(t) \leqslant -cE_\varepsilon(t) + b_4(\nu_i^h + \delta_i(h)) + 2d^2(P)\alpha(h) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

т.е. при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\dot{E}_\varepsilon(t) = -cE_\varepsilon(t) + b_4(\nu_i^h + \delta_i(h)) + 2d^2(P)\alpha(h) + \psi_1(t),$$

где $\psi_1(t) \leqslant 0$, $t \in T$. В таком случае при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(t) \leqslant E_\varepsilon(0)e^{-ct} + 2d^2(P)\alpha(h) \int_0^t e^{-c(t-\tau)}\, d\tau + \\ + b_4 \sum_{j=0}^{i-1} (\nu_j^h + \delta_j(h))\delta_j(h) + b_4(t-\tau_i)\delta_i(h)(\nu_i^h + \delta_i(h)). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Из (2.25) вытекает неравенство

$$E_\varepsilon(t) \leqslant d_0 h^2 e^{-ct} + \frac{2d^2(P)}{c}\alpha(h) + b_4(\varphi_1(h) + \varphi_3(h)). \tag{2.26}$$

Из (2.26), учитывая (2.21), получаем (2.8). Теорема доказана. □

Приведем одно достаточное условие выполнения Условия 7.

Теорема 2. *Пусть* $3L < m$, $\gamma > \{2(m-L)\}^{1/2}$ *и выполнены Условия 1, 2. Тогда выполнено Условие 7.*

Нетрудно видеть, что при всех $q \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$m(1-q) - L \leqslant \frac{\gamma^2}{2}.$$

Пусть $q_1 = \dfrac{m - 3L}{m}$,

$$\varphi_\gamma(q) = \frac{m(1-q) - L - \sqrt{(m(1-q) - L)^2 - 4L^2}}{2\gamma}.$$

Заметим, что подкоренное выражение неотрицательно, если $q \in (0, q_1)$.

Справедливость теоремы вытекает из приведенной ниже леммы.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда, каковы бы ни были числа* $q \in (0, q_1)$, *при* $c = 2q\varepsilon$, $\varepsilon = \varphi_\gamma(q)$, *почти всюду на* T *имеет место неравенство*

$$L_\varepsilon(x(t), \dot{y}^h(t))dt \leqslant -cE_\varepsilon(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)). \tag{2.27}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу липшицевости функции g справедливо неравенство

$$(g(x(t)) - g(y^h(t)), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t) + \varepsilon(x(t) - y^h(t))) \leqslant$$
$$\leqslant L|x(t) - y^h(t)|_H \{|\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)|_H + \varepsilon|x(t) - y^h(t)|_H\} \leqslant$$
$$\leqslant (L\varepsilon + \frac{L^2}{2\gamma_1})|x(t) - y^h(t)|_H^2 + \frac{\gamma_1}{2}|\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)|_H^2$$

каково бы ни было $\gamma_1 > 0$. Кроме того, при $c_* \in (0, \gamma)$ также верно неравенство

$$-\varepsilon\gamma(x(t) - y(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)) \leqslant -\varepsilon c_*(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)) +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2(\gamma - c)^2}{2\gamma_1}|x(t) - y^h(t)|_H^2 + \frac{\gamma_1}{2}|\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)|_H^2.$$

Выберем $\gamma_1 > 0$, $\varepsilon \in (0, \gamma)$ и $c_* \in (0, \varepsilon)$ таким образом, чтобы почти всюду на T выполнялись соотношения

$$(-\gamma + \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_1}{2} + \varepsilon)|\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)|_H^2 \leqslant -c_*|\dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)|_H^2, \tag{2.28}$$
$$-\varepsilon|x(t) - y^h(t)|_V^2 \leqslant -c_*|x(t) - y^h(t)|_V^2, \tag{2.29}$$
$$(L\varepsilon + \frac{L^2}{2\gamma_1} - \varepsilon m + \frac{\varepsilon^2(\gamma - c_*)^2}{2\gamma_1})|x(t) - y^h(t)|_H^2 \leqslant -mc_*|x(t) - y^h(t)|_H^2. \tag{2.30}$$

Пусть $c_* = q\varepsilon$, $q \in (0, q_1)$. Тогда неравенство (2.29) будет иметь место. Кроме того (2.28), будет справедливо, если

$$-\gamma + \gamma_1 + \varepsilon = -c_*,$$

то есть

$$\gamma_1 = \gamma - \varepsilon - c_* = \gamma - (1 + q)\varepsilon > 0. \tag{2.31}$$

В свою очередь, соотношение (2.30) будет верно, если

$$\frac{L^2 + \varepsilon^2(\gamma - q\varepsilon)^2}{2\gamma_1} \leqslant [m(1 - q) - L]\varepsilon \tag{2.32}$$

и

$$m(1 - q) - L \geqslant 0. \tag{2.33}$$

Заметим, что при $q \in (0, q_1)$ неравенство (2.33) справедливо. Пусть

$$(1 + q)\varepsilon \leqslant \gamma/2. \tag{2.34}$$

Тогда верно (2.31) и

$$\frac{1}{2\gamma_1} \leqslant \frac{1}{\gamma}.$$

В таком случае неравенство (2.32) справедливо, если

$$\frac{L^2 + \varepsilon^2(\gamma - q\varepsilon)^2}{\gamma} \leqslant [m(1 - q) - L]\varepsilon. \tag{2.35}$$

В силу (2.34) $q\varepsilon \in (0, \gamma)$. Поэтому

$$(\gamma - q\varepsilon)^2 \leqslant \gamma^2.$$

Значит (2.35), а следовательно и (2.32), будут иметь место, если $\varepsilon \in (0,1)$ удовлетворяет неравенству

$$\gamma^2\varepsilon^2 - \gamma[m(1-q) - L]\varepsilon + L^2 \leqslant 0. \tag{2.36}$$

Легко видеть, что корни ε_{1q} и ε_{2q} квадратного уравнения

$$\gamma^2\varepsilon^2 - \gamma[m(1-q) - L]\varepsilon + L^2 = 0$$

находятся по формулам

$$\varepsilon_{1q} = \varphi_\gamma(q), \qquad \varepsilon_{2q} = \frac{m(1-q) - L + \sqrt{(m(1-q)-L)^2 - 4L^2}}{2\gamma}.$$

Кроме того

$$\varepsilon_{1q} < \gamma/4,$$

если $q \in (0, q_1)$. Значит при $\varepsilon = \varphi_\gamma(q)$, $q \in (0, q_1)$ верно (2.36). Заметим, что при $q \in (0, q_1)$ справедливы неравенства (2.31), (2.33), (2.34). Таким образом, при $\varepsilon = \varphi_\gamma(q)$, $q \in (0, q_1)$, $c = q\varepsilon$, γ_1 вида (2.31), выполняются неравенства (2.28)–(2.30). Из этих неравенств следует справедливость неравенства

$$L_\varepsilon(x(t), y^h(t)) \leqslant -2c_* E_\varepsilon(x(t) - y^h(t), \dot{x}(t) - \dot{y}^h(t)).$$

Положив $c = 2c_*$, получим (2.27). Лемма доказана. $\square$

Из теоремы 1 следует основное утверждение, доставляющее решение поставленной выше задачи об устойчивом динамическом обращении системы (0.1).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть также $h^2/\alpha(h) \to 0$ — в первом случае, и $(\varphi_1(h) + \varphi_2(h))/\alpha(h) \to 0$ — во втором. Тогда семейство $(\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot))_{h>0}$ допустимых обратных связей вида (1.6), (2.6) устойчиво относительно момента ϑ, а пара $(\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot))$, где*

$$\gamma_1(h) = \nu(0, h, \alpha(h)), \qquad \gamma_2(h) = \varrho_1(h),$$

есть оценка точности этого семейства.

Доказательство. Заметим сначала, что $\gamma_1(h)$, $\gamma_2(h) \to 0$ при $h \to 0$. Пусть $h \in (0,1)$, $(x(\cdot), \Xi^h(\cdot), y^h(\cdot), \Psi^h(\cdot), v^h(\cdot))$ — управляемый процесс, соответствующий допустимой обратной связи $\mathcal{V}_h(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, допустимому возмущению $v(\cdot)$ и измерительной точности h. Тогда по теореме 1 при всех $t \geqslant 0$ выполняются неравенства (2.7) и (2.8), из которых и вытекает утверждение данной теоремы. Теорема доказана. $\square$

Пусть символ $U_\vartheta(x(\cdot))$ означает множество всех допустимых возмущений, совместимых с выходом $x(t)$, $t \in T_\vartheta$, то есть

$$U_\vartheta(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in L_2(T_\vartheta; U) : u(t) \in P, \quad (Bu(t), z) = (\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) -$$

$$- g(x(t)) + mx(t) - f(t), z) + (\nabla x(t), \nabla z) \text{ при п.в. } t \in T_\vartheta \text{ и всех } z \in V\}.$$

Заметим, что множество $U_\vartheta(x(\cdot))$ выпукло, ограничено и замкнуто в $L_2(T_\vartheta; U)$. Поэтому оно содержит единственный элемент минимальной $L_2(T_\vartheta; U)$-нормы — $v_*^\vartheta(\cdot)$.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что, каково бы ни было $\vartheta \in T$ при всех $t \in T_\vartheta$ верно неравенство (2.7), в котором $v(\cdot)$ заменено на $v_*^\vartheta(\cdot)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, каково бы ни было $\vartheta \in T$, имеет место сходимость*

$$v^h(\cdot) \to v_*(\cdot) = v_*^\vartheta(\cdot) \text{ в } L_2 = L_2(T_\vartheta; U) \text{ при } h \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для произвольной последовательности $h_j \to 0+$ при $j \to \infty$, любого числа $\vartheta \in T$, любого семейства $\{\Delta_{h_j}\} = \{\tau_{h_j,i}\}_{i=0}^\infty$ разбиений промежутка T и любых допустимых измерений $\Xi^{h_j}(\cdot)$ и $\Psi^{h_j}(\cdot)$ точности h_j имеет место сходимость

$$v^{h_j}(\cdot) \to v_*(\cdot) \text{ в } L_2 \text{ при } j \to \infty.$$

Здесь и ниже управления $v^{h_j}(\cdot)$ определены по правилу (1.6), (2.6), в которых $h = h_j$. Предполагая противное, заключаем: найдется подпоследовательность последовательности $v^{h_j}(\cdot)$ (обозначим ее для простоты тем же символом $v^{h_j}(\cdot)$) такая, что

$$v^{h_j}(\cdot) \to v_0(\cdot) \text{ слабо в } L_2 \text{ при } j \to \infty, \tag{2.37}$$

$$v_0(\cdot) \neq v_*(\cdot). \tag{2.38}$$

Пусть $w^{h_j}(t) = y^{h_j}(t) - y_0(t)$, где $y^{h_j}(\cdot) = y^{h_j}(\cdot; \xi_{1i}^{h_j}, \xi_i^{h_j}, v^{h_j}(\cdot))$, $y_0(\cdot)$ — решение уравнения

$$\ddot{y}(t) - \Delta y(t) + my(t) + \gamma \dot{y}(t) =$$

$$= g(y(t)) + Bv_0(t) + f(t) \quad \text{в} \quad V^* \quad \text{п.в. на} \quad T, \quad y(0) = x_0, \quad \dot{y}(0) = x_{10}.$$

Тогда имеем

$$\begin{gathered} \ddot{w}^{h_j}(t) - \Delta w^{h_j}(t) + mw^{h_j}(t) + \gamma \dot{w}^{h_j}(t) = g(y^h(t)) - g(y_0(t)) + B(v^h(t) - v(t)) \\ \text{в } V^* \text{ п.в. на } T, \quad w^{h_j}(0) = \xi_0^{h_j} - x_0, \quad \dot{w}^{h_j}(0) = \xi_{10}^{h_j} - x_{10}. \end{gathered} \tag{2.39}$$

Умножив на $\dot{w}^{h_j}(t)$ правую и левую части равенства (2.39), после интегрирования и учета неравенства (0.3), будем иметь

$$0.5\{|\dot{w}^{h_j}(t)|_H^2 + m|w^{h_j}(t)|_H^2 + |w^{h_j}(t)|_V^2\} + \gamma \int_0^t |\dot{w}^{h_j}(\tau)|_H^2 \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 0.5\{|\dot{w}^{h_j}(0)|_H^2 + m|w^{h_j}(0)|_H^2 + |w^{h_j}(0)|_V^2\} +$$

$$+ \int_0^t \{B(v^{h_j}(\tau) - v_0(\tau)), \dot{w}^{h_j}(\tau)) + (g(y_j^h(\tau)) - g(y_0(\tau)), \dot{w}^{h_j}(\tau))\} \, d\tau.$$

Отсюда в силу (0.3), (0.4) получаем

$$|\dot{w}^{h_j}(t)|_H^2 + m|w^{h_j}(t)|_H^2 + 2\gamma \int_0^t |w^{h_j}(\tau)|_H^2 \, d\tau + |w^{h_j}(t)|_V^2 \leqslant \tag{2.40}$$

$$\leqslant \nu(h_j) + 2\int_0^t (B(v^{h_j}(\tau) - v_0(\tau)), \dot{y}^{h_j}(\tau) - \dot{x}(\tau)) \, d\tau + 2L \int_0^t |w^{h_j}(\tau)|_H |\dot{w}^{h_j}(\tau)|_H \, d\tau +$$

$$+ \int_0^t (B(v^{h_j}(\tau) - v_0(\tau)), \dot{x}(\tau) - \dot{y}_0(\tau)) \, d\tau,$$

где

$$\nu(h_j) = |\dot{w}^{h_j}(0)|_H^2 + |w^{h_j}(0)|_V^2 + m|w^{h_j}(0)|_H^2 \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{2.41}$$

Второе слагаемое в правой части неравенства (2.40) стремится к нулю при $j \to \infty$ в силу теоремы 1, сходимость к нулю последнего слагаемого следует из слабой сходимости $v^{h_j}(\cdot)$ к $v_0(\cdot)$ (см. (2.37)). Отсюда, в силу (2.41) и теоремы 1 (см. (2.8)), получаем

$$y_0(t) = x(t), \quad t \in T_\vartheta.$$

Значит $v_0(\cdot) \in U_\vartheta(x(\cdot))$ и, следовательно,

$$|v_0(\cdot)|_{L_2} \geqslant |v_*(\cdot)|_{L_2}. \tag{2.42}$$

Символ $|\cdot|_{L_2}$ означает норму в пространстве $L_2(T_\vartheta; U)$. Кроме того, в силу известных свойств слабого предела из (2.37) вытекает

$$\varliminf_{j\to\infty} |v^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \geqslant |v_0(\cdot)|_{L_2}.$$

В свою очередь, в силу (2.7) справедливо неравенство

$$|v^{h_j}(\cdot)|^2_{L_2} \leqslant \varrho_0(h_j)|v_*(\cdot)|^2_{L_2} + \varrho_1(h_j).$$

Отсюда выводим

$$\varlimsup_{j\to\infty} |v^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \leqslant |v_*(\cdot)|_{L_2}, \tag{2.43}$$

то есть (см. (2.42)–(2.43))

$$\varlimsup_{j\to\infty} |v^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \leqslant |v_*(\cdot)|_{L_2} \leqslant |v_0(\cdot)|_{L_2} \leqslant \varliminf_{j\to\infty} |v^{h_j}(\cdot)|_{L_2}. \tag{2.44}$$

Так как множество $U_\vartheta(x(\cdot))$ содержит единственный элемент минимальной L_2-нормы (именно $v_*(\cdot)$), то из (2.44) получаем

$$v_0(\cdot) = v_*(\cdot). \tag{2.45}$$

Воспользовавшись (2.37), (2.45), заключаем

$$v^{h_j}(\cdot) \to v_*(\cdot) \text{ в } L_2 \text{ при } j \to \infty. \tag{2.46}$$

Сходимость (2.46) противоречит (2.37), (2.38). Теорема доказана. □

§ 3. Скорость сходимости алгоритма

При некоторых дополнительных условиях на каждом ограниченном промежутке времени $T_\vartheta = [0, \vartheta]$ может быть выписана оценка скорости сходимости (см. ниже теорему 5). Установим эту оценку. В дальнейшем нам потребуется

Лемма 3 (см. [11, с. 54]). *Пусть* $\widetilde{u}(\cdot) \in L_\infty(T_*; V^*)$, $\widetilde{v}(\cdot) \in W(T_*; V)$, $T_* = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,

$$\Big|\int_a^t \widetilde{u}(\tau)\,d\tau\Big|_{V^*} \leqslant \varepsilon_*, \quad |\widetilde{v}(t)|_V \leqslant K \quad \forall\, t \in T_*.$$

Тогда при всех $t \in T_*$ *верно неравенство*

$$\Big|\int_a^t \langle \widetilde{u}(\tau), \widetilde{v}(\tau)\rangle\,d\tau\Big| \leqslant \varepsilon_*(K + \mathrm{var}(T_*; v(\cdot))).$$

Здесь символ $\mathrm{var}(T_*; v(\cdot))$ означает вариацию функции $v(\cdot)$ на отрезке T_*, а символ $W(T_*; V)$ — множество функций $y(\cdot) : T_* \to V$ с ограниченной вариацией.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть также $U = V$, B — оператор канонического вложения пространства V в пространство H и $v(\cdot) \in W(T_\vartheta; V)$. Тогда справедлива оценка*

$$|v(\cdot) - v^h(\cdot)|^2_{L_2(T_\vartheta;H)} \leqslant K(\alpha, h)\{2d(P) + \mathrm{var}(T_\vartheta; v(\cdot))\} + \varrho_1(h) + |1 - \varrho_0(h)|\vartheta d^2(P),$$

где

$$K(\alpha, h) = c^{(0)}\nu^{1/2}(0, \alpha, h), \quad c^{(0)} = c^{(0)}_\vartheta \text{ — некоторая константа.}$$

Доказательство. Заметим (см. (2.9)), что для любых $t_1, t_2 \in T_\vartheta$, $t_1 < t_2$, верно неравенство

$$\begin{aligned} \Big| \int_{t_1}^{t_2} B(v(t) - v^h(t))\, dt \Big|_{V^*} = \\ = \sup_{|v|_V \leqslant 1} \Big| \langle \int_{t_1}^{t_2} \{ \ddot{x}(\tau) - \ddot{y}^h(\tau) + m(x(\tau) - y^h(\tau)) - g(x(\tau)) + \\ + g(y^h(\tau)) + \gamma(\dot{x}(\tau) - \dot{y}^h(\tau)) - \Delta(x(\tau) - y^h(\tau))\}\, d\tau, v\rangle \Big| \leqslant \\ \leqslant |\dot{z}(t_2) - \dot{z}(t_1)|_{V^*} + c^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} \{|z(\tau)|_V + |z(\tau)|_H\}\, d\tau + \gamma |z(t_2) - z(t_1)|^*_V, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где, как и выше, $z(t) = y^h(t) - x(t)$, а $c^{(1)}$ — некоторая константа. Кроме того, в силу (2.8) при $t \in T_\vartheta$

$$|\dot{z}(t)|_H + |z(t)|_V \leqslant \nu^{1/2}(0, \alpha, h). \tag{3.2}$$

Из (3.1), (3.2) выводим

$$\Big| \int_{t_1}^{t_2} B(v(t) - v^h(t))\, dt \Big|_{V^*} \leqslant c^{(2)} K(\alpha, h).$$

Воспользовавшись леммой 3, а также (2.7) получаем

$$\begin{aligned} |v(\cdot) - v^h(\cdot)|^2_{L_2(T_\vartheta;H)} \leqslant 2|v(\cdot)|^2_{L_2(T_\vartheta;H)} - 2\int_0^\vartheta (v(\tau), v^h(\tau))\, d\tau + \varrho_1(h) + |1 - \varrho_0(h)|\vartheta d^2(P) \leqslant \\ \leqslant 2 \int_0^\vartheta |B(v(\tau) - v^h(\tau))|_{V^*} |v(\tau)|_V\, d\tau + \varrho_1(h) + |1 - \varrho_0(h)|\vartheta d^2(P) \leqslant \\ \leqslant K(\alpha, h)\{2d(P) + \mathrm{var}(T_\vartheta; v(\cdot))\} + \varrho_1(h) + |1 - \varrho_0(h)|\vartheta d^2(P). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

§ 4. Заключение

В статье указан алгоритм устойчивого восстановления правой части динамической системы, описываемой распределенным дифференциальным уравнением второго порядка. В отличие от ранее указанных алгоритмов, при реализации которых с ростом промежутка времени функционирования системы (с ростом $T_\vartheta = [0, \vartheta]$) происходит накопление вычислительных и информационных ошибок, предложенный в настоящей работе алгоритм свободен от этого недостатка. Последнее выражается в том факте, что значения критериев отклонения восстанавливаемой правой части $v(\cdot)$ от ее приближения $v^h(\cdot)$, формируемого алгоритмом, не зависят от величины ϑ (см. (2.1), (2.2)).

Финансирование. Работа выполнена в рамках исследований Уральского математического центра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988.
2. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989.
3. Cazenave T., Haraux A. An introduction to semilinear evolution equations. Oxford: Clarendon Press, 1998.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
5. Banks H.T., Kunisch K. Estimation techniques for distributed parameter systems. Boston: Birkhäuser, 1989.
6. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
7. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
8. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
9. Kabanikhin S.I. Inverse and ill-posed problems: theory and applications. Berlin: De Gruyter, 2011.
10. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
11. Maksimov V.I. Dynamical inverse problems of distributed systems. De Gruyter, 2002.
12. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2011.
13. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. New York–Berlin: Springer Verlag, 1988.
14. Osipov Yu., Pandolfi L., Maksimov V. Problems of dynamical reconstruction and robust boundary control: the case of the Dirichlet boundary conditions // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2001. Vol. 9. Issue 2. P. 149–162. https://doi.org/10.1515/jiip.2001.9.2.149
15. Максимов В.И. О динамическом восстановлении правой части гиперболического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55. № 6. С. 1008–1019. https://doi.org/10.7868/S0044466915060083
16. Максимов В.И. Об одном алгоритме динамического восстановления правой части уравнения с распределенными парамерами второго порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 8. С. 1255–1269. https://doi.org/10.7868/S0044466917080105
17. Maksimov V.I., Mordukhovich B.S. Feedback design of differential equations of reconstruction for second-order distributed parameter systems // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2017. Vol. 27. No. 4. P. 467–475. https://doi.org/10.1515/amcs-2017-0032
18. Близорукова М.С., Максимов В.И. Об одном алгоритме динамической реконструкции входа нелинейного уравнения с распределенными параметрами // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 652–659. https://doi.org/10.1134/S037406412005009X
19. Borukhov V.T., Zayats G.M. Identification of a time-dependent source term in nonlinear hyperbolic or parabolic heat equation // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2015. Vol. 91. P. 1106–1113. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.07.066
20. Borukhov V.T., Kostyukova O.I. Identification of time-dependent coefficients of heat transfer by the method of suboptimal stage-by-stage optimization // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2013. Vol. 59. P. 286–294. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.12.029

Поступила в редакцию 03.09.2020

Близорукова Марина Сергеевна, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1728-1270
E-mail: msb@imm.uran.ru

Максимов Вячеслав Иванович, д. ф.-м. н., заведующий отделом дифференциальных уравнений, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5643-7998
E-mail: maksimov@imm.uran.ru

Цитирование: М. С. Близорукова, В. И. Максимов. Реконструкция правой части распределенного дифференциального уравнения с помощью позиционно-управляемой модели // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 4. С. 533–552.

M. S. Blizorukova, V. I. Maksimov

Reconstruction of the right-hand part of a distributed differential equation using a positional controlled model

Keywords: dynamical inversion, distributed system.

MSC2010: 49J35, 91A24

DOI: 10.35634/vm200401

In this paper, we consider the stable reconstruction problem of the unknown input of a distributed system of second order by results of inaccurate measurements of its solution. The content of the problem considered is as follows. We consider a distributed equation of second order. The solution of the equation depends on the input varying in the time. The input, as well as the solution, is not given in advance. At discrete times the solution of the equation is measured. These measurements are not accurate in general. It is required to design an algorithm for approximate reconstruction of the input that has dynamical and stability properties. The dynamical property means that the current values of approximations of the input are produced on-line, and the stability property means that the approximations are arbitrarily accurate for a sufficient accuracy of measurements. The problem refers to the class of inverse problems. The algorithm presented in the paper is based on the constructions of a stable dynamical inversion and on the combination of the methods of ill-posed problems and positional control theory.

Funding. The work was done in the framework of research of Ural Mathematical Center.

REFERENCES

1. Kufner A., Fucik S. *Nonlinear differential equations*, New York: Elsevier, 1980.
   Translated under the title *Nelineinye differentsial'nye uravneniya*, Moscow: Nauka, 1988.
2. Panagiotopoulos P. *Inequality problems in mechanics and applications. Convex and nonconvex energy functions*, Boston: Birkhäuser, 1985.
   `https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5152-1`
   Translated under the title *Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniya. Vypuklye i nevypuklye funktsii energii*, Moscow: Mir, 1989.
3. Cazenave T., Haraux A. *An introduction to semilinear evolution equations*, Oxford: Clarendon Press, 1998.
4. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Solutions of ill-posed problems*, New York: John Wiley, 1977.
   Translated under the title *Methody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow: Nauka, 1979.
5. Banks H.T., Kunisch K. *Estimation techniques for distributed parameter systems*, Boston: Birkhäuser, 1989. `https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3700-6`
6. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekorrektnye zadachi mathematicheskoi phiziki i analiza* (Ill-posed problems of mathematical physics and analysis), Moscow: Nauka, 1980.
7. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications*, De Gruyter, 2002. `https://doi.org/10.1515/9783110944822`
   Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya*, Moscow: Nauka, 1978.
8. Vasil'ev F.P. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* (Methods for solving extremal problems), Moscow: Nauka, 1981.
9. Kabanikhin S.I. *Inverse and ill-posed problems: theory and applications*, Berlin: De Gruyter, 2011.
   `https://doi.org/10.1515/9783110224016`
10. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions*, London: Gordon and Breach, 1995.
11. Maksimov V.I. *Dynamical inverse problems of distributed systems*, De Gruyter, 2002.
   `https://doi.org/10.1515/9783110944839`

12. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem* (Methods of dynamical reconstruction of inputs of control systems), Ekaterinburg: Ural Branch of the Russian Academy of Science, 2011.
13. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, New York–Berlin: Springer Verlag, 1988.
14. Osipov Yu., Pandolfi L., Maksimov V. Problems of dynamical reconstruction and robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2001, vol. 9, issue 2, pp. 149–162. https://doi.org/10.1515/jiip.2001.9.2.149
15. Maksimov V.I. Dynamic reconstruction of the right-hand side of a hyperbolic equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 6, pp. 1004–1014. https://doi.org/10.1134/S096554251506007X
16. Maksimov V.I. An algorithm for dynamic reconstruction of the right-hand side of a second-order equation with distributed parameters, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 8, pp. 1248–1261. https://doi.org/10.1134/S0965542517080097
17. Maksimov V.I., Mordukhovich B.S. Feedback design of differential equations of reconstruction for second-order distributed parameter systems, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2017, vol. 27, no. 4, pp. 467–475. https://doi.org/10.1515/amcs-2017-0032
18. Blizorukova M.S., Maksimov V.I. Dynamic input reconstruction algorithm for a nonlinear equation with distributed parameters, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 5, pp. 641—648. https://doi.org/10.1134/S0012266120050092
19. Borukhov V.T., Zayats G.M. Identification of a time-dependent source term in nonlinear hyperbolic or parabolic heat equation, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, vol. 91, pp. 1106–1113. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.07.066
20. Borukhov V.T., Kostyukova O.I. Identification of time-dependent coefficients of heat transfer by the method of suboptimal stage-by-stage optimization, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2013, vol. 59, pp. 286–294. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.12.029

Received 03.09.2020

Blizorukova Marina Sergeevna, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1728-1270
E-mail: msb@imm.uran.ru

Maksimov Vyacheslav Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Department of Differential Equations, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5643-7998
E-mail: maksimov@imm.uran.ru

Citation: M. S. Blizorukova, V. I. Maksimov. Reconstruction of the right-hand part of a distributed differential equation using a positional controlled model, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 4, pp. 533–552.